ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

గణిత ప్రకాశ్

గణిత పాఠ్యపుస్తకం

తరగతి

8

భాగం – 2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

తెలుగు మాధ్యమ

ఎనిమిదవ తరగతి

TEXTBOOK OF MATHEMATICS

Eighth Standard

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003

విషయ సూచిక

భాగం - 2

యూనిట్ సంఖ్య	అధ్యాయం	పుట సంఖ్య
8.	భిన్నాల రూపాంతరం FRACTIONS IN DISGUISE	1 – 38
9.	బౌధాయన - పైథాగరస్ సిద్ధాంతం THE BAUDHAYANA-PYTHAGORAS THEOREM	39 – 63
10.	అనుపాత హేతుబద్ధత -2 PROPORTIONAL REASONING-2	64 – 79
11.	కొన్ని జ్యామితీయ అంశాల అన్వేషణ EXPLORING SOME GEOMETRIC THEMES	80 – 115
12.	చుక్కలు మరియు గీతలు ద్వారా కథలు TALES BY DOTS AND LINES	116 – 153
13.	బీజగణితం ఆట ALGEBRA PLAY	154 – 168
14.	వైశాల్యం AREA	169 – 198

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8 భిన్నాల రూపాంతరం
Fractions in Disguise

K8Y5R9

8.1 భిన్నాలు శాతాలుగా (Fractions as percentage)

''మొగా సేల్- 50% వరకు తగ్గింపు! 'లేదా హియా తన బోర్డు పరీక్షలలో 83% స్కోర్ చేసింది'' ఇటువంటి ప్రకటనలను మీరు విని ఉండవచ్చు % అనే గుర్తుకు అర్థ ఏమిటో మీకు తెలుసా? ఈ గుర్తును శాతంగా చదువుతారు.

పర్సెంట్ అనే పదం లాటిన్ పద బంధం 'పర్ సెంటమ్' నుండి ఉద్భవించింది. దీని అర్థం వంద ద్వారా లేదా 'వందలో నుండి' కాబట్టి 25 శాతం (25%) అంటే 100 లో 25 అని అర్థం – అంటే 100 మందిలో 25 మంది. లేదా 100 రూపాయలలో 25 రూపాయలు లేదా 100 మార్కులకు 25 మార్కులు అని ఆర్థం.

మనం ఏదైనా పరిమాణం s లో 50% అని అంటే దాని అర్థం

$$50\% = 50 \times \frac{1}{100} \times s \ (s \text{ యొక్క యూనిట్ భిన్నానికి } 50 \text{ రెట్లు})$$
$$= \frac{50}{100} \times s = \frac{1}{2}s$$

కాబట్టి శాతాలు అనేవి కేవలం హారం (denominator) 100 గా ఉండే భిన్నాలు.

ఉదాహరణలు $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$,

$33\% = \frac{33}{100}$.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

శాతాలు అనేది కేవలం భిన్నాలని మనం చూశాము. ఏదైన భిన్నం ఇస్తే, మనం దానిని శాతంగా వ్యక్తపరచగలమా? అవును అది ఎలాగో చూద్దాం.

భిన్నాలను శాతాలుగా వక్తీకరించడం

ఉదాహరణ 1 : సూర్య సూర్యాస్తసమయాన్ని చిత్రీకరించడానికి నారింజ రంగును ఉపయోగించాలని అని అనుకుంటున్నాడు. ఈ రంగును మరియు పసుపు రంగును కలుపుతాడు. ఈ మిశ్రమంలో ఎరుపురంగు $\frac{3}{4}$ భాగం ఉంది. అయితే ఆరంగులో ఎరుపు రంగు శాతం ఎంత?

$\frac{3}{4}$ అంటే ప్రతి 4 లోను 3 భాగాలు

అంటే ప్రతి 8 లోనూ 6 భాగాలు (సమాన భిన్నం)

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{75}{100}$$

అంటే ప్రతి 40 లోను 30 భాగాలు

అంటే ప్రతి 100 లోను 75 భాగాలు

దీని అర్థం 75%

మరో విధంగా వివరణ : - $\frac{3}{4}$ ను శాతంగా వ్యక్తపరచడానికి, హారం 100 గా ఉండేలా దానికి సమానమైన భిన్నాన్ని కనుగొనాలి అందుకు రెండు పద్ధతులు క్రింద ఉన్నాయి.

పద్ధతి 1

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25}$$
$$= \frac{75}{100} = 75\%$$

పద్ధతి 2

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}.$$
$$\frac{3}{4} \times 100 = \frac{x}{100} \times 100$$

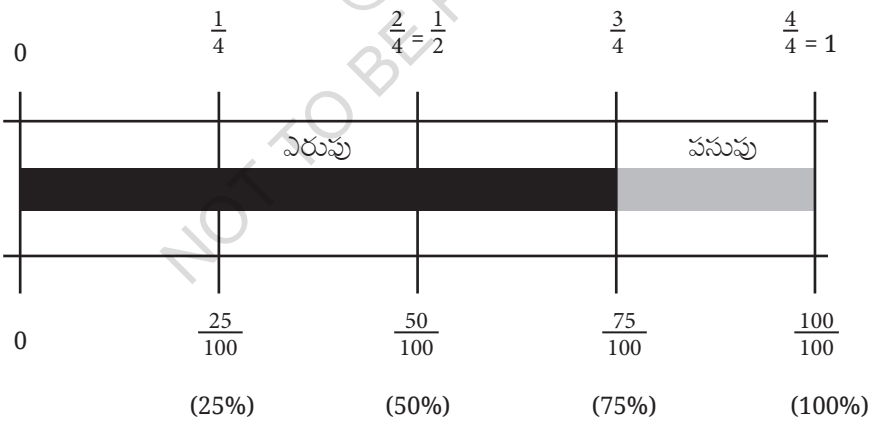
[రెండు వైపులా 100 తో గుణించాలి]

$$x = \frac{3}{4} \times 100 = 75.$$

కాబట్టి $\frac{3}{4}$ ను 75% గా వ్యక్తపరచవచ్చు.

$\frac{3}{4}$ మరియు 75% మధ్య సమానత్వం 3ను చూపించే క్రింది బార్ రేఖా చిత్రాన్ని గమనించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



? పసుపు రంగు ఎంత శాతం ఉపయోగించ బడిందో మీరు చెప్పగలరా?

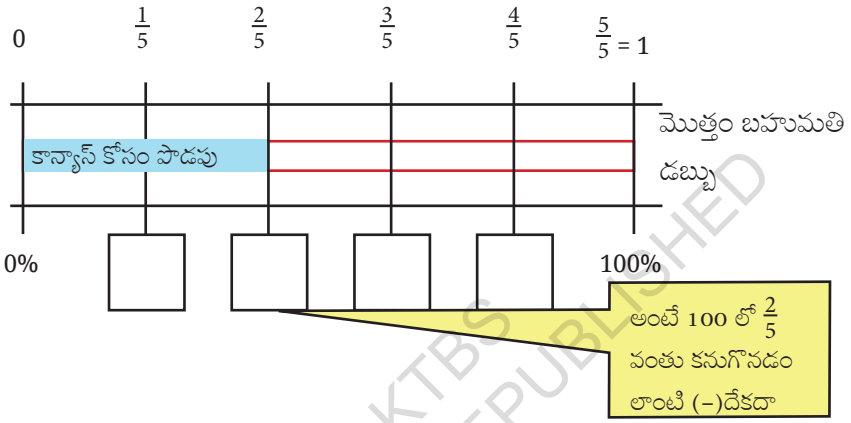
? **ఉదాహరణ 2 :** సూర్య ఒక పోటీలో కొంత బహుమతి డబ్బును గెలుచు కున్నాడు. అతను కొత్త కాన్వాస్ కొనుగోలు చేయడానికి అతను ఆ డబ్బులో $\frac{3}{4}$ వంతును దాచుకోవాలని అనుకుంటున్నాడు. ఈ పరిమాణాన్ని శాతంగా వ్యక్తపరచండి.

ఈ సమస్యను పరిష్కరించడానికి క్రింది చూపిన వివిధ పద్ధతులను అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నించండి.

పద్ధతి *1*	పద్ధతి *2*
$\frac{2}{5} = \frac{20}{50} = \frac{40}{100}$	$\frac{2}{5} = \frac{x}{100}$.
$= 40\%$.	$x = \frac{2}{5} \times 100 = 40$.

? ఖాళీ బాక్స్‌లను పూరించడం ద్వారా పద్ధతి 3ని పూర్తి చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణ : 3



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



గణితంలో అనేక సమస్యలను రకరకాల పద్ధతులలో సంప్రదించవచ్చు మరియు సాధించవచ్చు. మీరు కనుగొన్న పద్ధతి మీకు నచ్చినప్పటికీ. ఇతరులు దాని గురించి ఎలా అలోచించారో తెలుసుకోవడం అసక్తికరంగా మరియు మీ జ్ఞానాన్ని పెంపొందించేలా ఉంటుంది.

ఒక భిన్నం అనేది ఒక యూనిట్‌లో భాగం, అయితే శాతం అనేది ప్రతి 100కి లెక్కించ బడుతుంది. కాబట్టిఇ ఒక భిన్నాన్ని శాతంగా మార్చడానికి, మనం ఆ భిన్నాన్ని 100 తో గుణించవచ్చు.

? **ఉదాహరణ 3 :** ఒక శాతం ఇచ్చినప్పుడు, మీరు దానిని భిన్నంగా మార్చగలరా! ఉదారహణకు - 24% ను భిన్నంగా మార్చండి.

శాతం అనేది ఒక్క భిన్నం కాబట్టి 24% అనేది $\frac{24}{100}$ కి సమానం. దీనిని మనం సమానమైన ఇతర రుపాలను కనుగొనవచ్చు.

$\frac{24}{100} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} = \frac{48}{200}$.

సాదారణంగా ఒక శాతం $z\%$, ని $\frac{z}{100}$ కి సమానమైన ఏ భిన్నంలోలైనా వ్యక్తపరచవచ్చు.

లెక్కించి చూడండి.

1. క్రింది భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చండి.

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{14}$ (iii) $\frac{9}{20}$

(iv) $\frac{72}{150}$ (v) $\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{5}{11}$

2. నందిని దగ్గర 25 గోళీలు ఉన్నాయి. వాటిలో 15 తెల్లనివి. ఆమె దగ్గర ఉన్న గోళీలలో తెల్లనివి ఎంత శాతం?

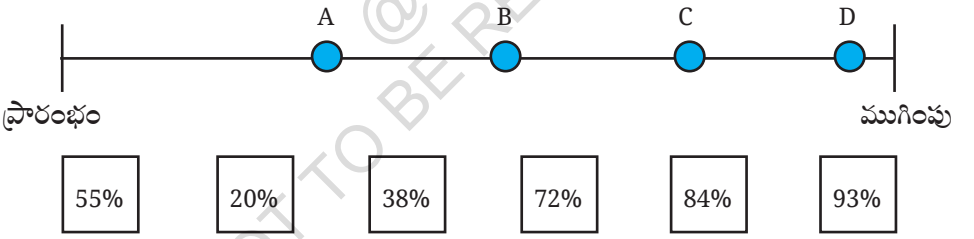
(i) 10% (ii) 15% (iii) 25%

(iv) 60% (v) 40%

(vi) వీటిలో ఏదీకాదు.

3. ఒక పాఠశాలలో 80 మంది విద్యార్థులలో 15 మంది నడుచుకుంటూ వస్తారు. ఎంత శాతం విద్యార్థులు నడుచుకుంటూ వస్తారు?

4. ఒక స్నేహితుల బృందం దూర పరుగు పందెంలో పాల్గొంటోంది. 15 నిమిషాల తర్వాత వారి స్థానాలు క్రింది చిత్రంలో చూపబడ్డాయి. (ఇచ్చిన ఎంపికల నుండి) ప్రతి ఒక్కరూ సుమారుగా ఎంత శాతం పరుగు పూర్తి చేశారో జతపరచండి.



5. క్రింది ఇచ్చిన పరిమాణాల జతలను గుర్తించి ఖాళీలలో సరైన గుర్తులను '>', '<', '=' ఉంచండి. లెక్కలు చేయకుండానే చెప్పడానికి ప్రయత్నించండి.

(i) 50% ____ 5% (ii) $\frac{5}{10}$ ____ 50%

(iii) $\frac{3}{11}$ ____ 61% (iv) 30% ____ $\frac{1}{3}$

శాతాలు కేవలం ఒక రకమైన భిన్నాలే అయితే, మనకు అవి ఎందుకు అవసరం? మనం భిన్నాలనే ఎందుకు ఉపయోగించ కూడదు? ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక బిస్కట్ ఫ్యాక్టరీ 2 కొత్త రకాల బిస్కెట్లను తయారు చేస్తుంది. వెరైటి 1 లో చక్కెర $\frac{9}{34}$ వంతు, వెరైటీ 2 లో $\frac{13}{45}$ వంతు ఉంది. ఏ వెరైటిలో చక్కెర ఎక్కువగా ఉంది? మొదటి చూపులో ఇది స్పష్టంగా తెలియక పోవచ్చు, మనం కొన్ని లెక్కలు చేయాల్సి ఉంటుంది. కానీ అదే సమాచారాన్ని ఇలా ఇస్తే – వెరైటి 1 లో 26.47% చక్కెర మరియు వెరైటీ 2 లో 28.88% చక్కెర ఉంది. అని చెబితే ఏ వెరైటీలో చక్కెర ఎక్కువగా ఉందో వెంటనే అర్థమవుతుంది.

మనం ఒకే హారాన్ని ఎంచుకోవాలను కుంటే ప్రత్యేకంగా 100నే ఎందుకు ఎంచుకోవాలి? 10, 50, 1000 లేదా43 ఎందుకు కాదు? ఆలోచించండి.

సిద్ధాంత పరంగా మనం ఏ సంఖ్యనైనా హారంగా ఎంచుకోవచ్చు. కానీ 100 తో కొన్ని ప్రయోజనాలు ఉన్నాయి. మన సంఖ్యావ్యవస్థ "చేస్ $_{10}$" కాబట్టి 10,000, 1000 వంటి సంఖ్యలు దశాంశాలతో సులభంగా సరిపోతాయి ఉదాహరణకు $31\% = \frac{31}{100} = 0.31$.

భిన్నాలు దశాంశాలు మరియు శాతం మధ్య మార్పిడి త్వరగా మరియు సులభంగా జరుగుతుంది.

100 అనే సంఖ్య పరిపూర్ణంగా ఉండి. అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు పని చేయడానికి సులభంగా ఉంటుంది. మనం "ప్రతి 1000కి" లేదా " ప్రతి 1,00,000" అని కూడా అనవచ్చు.

కానీ 100 అనేది సరైన పరిమాణం – ఇది వివరాలను ఇవ్వడానికి సరిపోతుంది మరియు మెదడుకు సులభంగా అర్థమవుతుంది.

$\frac{9}{34}$ = 26.47 పర్సెంట్ (పర్ 100)

$\frac{9}{34}$ = 2.647 పర్ డిసెమ్ (పర్ 10)

$\frac{9}{34}$ = 264.7 పర్ మిల్లి (పర్ 1000)

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

దశాంశ భిన్నాలు ప్రవేశపెట్టక ముందు కాలం నుండే లెక్కల్లో పదింట ఒక వంతు, ఇరవయ్యవ వంతు మరియు వందవ వంతుల అవసరం ఉండేది. "ప్రతి వందకు" అనే భావన మనకు 4వ శాతాబ్ది BCE నాటి కౌటిల్యుడి 'అర్థశాస్త్రంలోని కనిపిస్తుంది. అందులో ఇలా ఉంది" నెలకు ప్రతి వందకు ఒక అణ మరియు పావు వంతు వడ్డీ న్యాయ బద్ధమైనది. వ్యాపార వడ్డీ నెలకు ప్రతి వందకు ఐదు అణాలు. అడవులలో నివసించె వారి మధ్య నెలకు ప్రతి వందకు పది అణాలు ఉంటుంది. సముద్ర వ్యాపారుల మధ్య నెలకు ప్రతి వందకు ఇరవై అణాలు ఉంటుంది.

అదే సమయంలో రోమన్లు వ్యాపారం మరియు వేలం పాటల్లో $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$ వంటి పన్నులను ఉపయోగించేవారు. 15వశతాబ్దపుఇటాలియన్ప్రాతప్రతులలో'*xxp*సెంటో(cento)','*xp*(cento)సెంటో','*viip* సెంటో (cento)' వంటి పదాలు కనిపిస్తాయి. (ఇది మనప్రస్తుత 20%, 10%, మరియు 7% కి సమానం).

మన చుట్టూ ఉన్న శాతాలు :

శాతాలు వివిధ సందర్భాల్లో విస్తృతంగా ఉపయోగించ బడతాయి. శాతాలకు సంబంధించిన కొన్ని ఆసక్తికరమైన విషయాలు ఇక్కడ ఉన్నాయి.



మానవ శరీరం, సగటున మానవ శరీర బరువులో దాదాపు 60% నీరు ఉంటుంది.



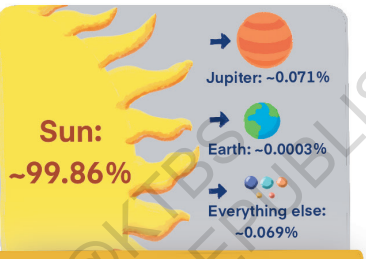
ఐస్ క్రీమ్ పరిమాణంలో సుమారు 30-50% గాలి ఉంటుంది.



ప్రపంచ జనాభాలో 45% మంది 2022 FIFA ప్రపంచ కప్‌ను కనీసం కొంత భాగమైన వీక్షించారు.



ప్రపంచ వ్యాప్తంగా 80% కంటే ఎక్కువ మంది యువకులు రోజుకు కనీసం ఒకగంట శారీరక శ్రమ చేయాలనే సిఫార్సును పాటించడంలో విఫలమవుతున్నారు.



సౌరకుటుంబం యొక్క ద్రవ్యరాశిలో దాదాపు 99.86% సూర్యుడులోనే ఉంది



ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంచనా ప్రకారం 52% వ్యవసాయ భూమి క్షీణించింది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.2 కొంత పరిమాణం యొక్క శాతం

ఉదాహరణ 1 : మధు మరియు మాధవ్ ఒక్కొక్కరు వేర్వేరు రకాల బిస్కెట్లను తిన్నారు. మధు తిన్న బిస్కెట్లలో 25% చక్కెర మాధవ్ తిన్న బిస్కెట్లలో 35% చక్కెర ఉంది. వీరిద్దరిలో ఎవరు ఎక్కువ చక్కెర తిన్నారో మీరు చెప్పగలరా?



మనం ఇప్పుడే చూసినట్లుగా, శాతాలు అనేవి భిన్న పరిమాణాలను లేదా నిష్పత్తులను సూచిస్తాయి. శాతాయి వేర్వేరు మొత్తం పరిమాణాలను సూచిస్తున్నప్పుడు, కేవలం ఆ శాతాలను మాత్రమే పోల్చడం సరైనది కాదు.

అంటే ఒకవేళ వారిద్దరూ సమానంగా 100 గ్రాములు బిస్కట్లే తిని ఉంటే అప్పుడు మాధవ్ ఎక్కువ చక్కెర తిన్నాడని స్పష్టంగా చెప్పవచ్చు.

(100 గ్రాములలో 35% అంటే 35 గ్రాములు) అని మధు 25 గ్రాం) (100 గ్రాములలో 25% అంటే 25 గ్రాములు)

(?) మధు 120 గ్రాముల బిస్కెట్లు, మాధవ్ 95 గ్రాముల బిస్కెట్లు తిన్నారని అనుకుందాం. వారిలో ఎవరు ఎక్కువ చక్కెరను తీసుకున్నారు? కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

బిస్కెట్లలోని చక్కెర బరువు తిన్న బిస్కెట్ల బరువుకు. అనులోమాను పాతంలో ఉంటుందని మనకు తెలుసు, మధు 25% చక్కెర ఉన్న 120 గ్రాములు బిస్కెట్లును తిన్నాడు. అతను తిన్న చక్కెర పరిమాణం ఈ క్రింది ఖాళీలోని విలువ

$$25 : 100 :: \_\_\_\_ : 120.$$

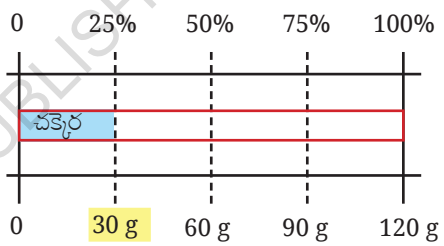
దీనిని పరిష్కరించడానికి కొన్ని పద్ధతులు కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

25% చక్కెర అంటే – 100 గ్రాముల బిస్కట్లలో 25 గ్రాముల చక్కెర ఉంటుంది.
దీని అర్ధం 20 గ్రాముల బిస్కెట్లలో 5 గ్రాముల చక్కెర ఉంటుంది.
కాబట్టి 120 గ్రాముల బిస్కెట్లలో 30 గ్రాముల చక్కెర ఉంటుంది.

అనుపాత సంబంధాన్ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు

$$\frac{25}{100} = \frac{s}{120}.$$

$$s = \frac{25}{100} \times 120 = 30.$$



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై పద్ధతులలో ఏదైనా మీ ఆలోచనకు సరిపోలిందా? మీరు అన్ని పద్ధతులను అర్థం చేసుకోగలిగారా?

ఇప్పుడు మాధవ్ ఎంత చక్కెర తిన్నాడో కనుగొందాం. అతను 35% చక్కెర ఉన్న 95 గ్రాముల బిస్కెట్లను తిన్నాడు. కొన్ని సార్లు సంఖ్యలు లెక్కించడానికి అంత సులభంగా ఉండక పోవచ్చు మనం ముందు చేసినట్లుగానే వివిధ పద్ధతులను ఉపయోగించి అతను తిన్న చక్కెర 35 గ్రాములు అని లెక్కించవచ్చు.

దీని అర్ధం 1 గ్రాము బిస్కెట్లలో $\frac{35}{100}$ గ్రాముల చక్కెర ఉంటుంది.

$\frac{35}{100} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{35}{100}$

95 గ్రాముల బిస్కెట్లలో $\frac{35}{100}$ g × 95 = 33.25 గ్రాములు

దీనిని క్రింది అనుపాత సంబంధములో s విలువను కనుగొనడం ద్వారా కూడా సాధించవచ్చు.

$$\frac{35}{100} = \frac{s}{95}$$

అందువల్ల మాధవ్ ఎక్కువ చక్కెర తిన్నాడు.

సాధారణంగా చెప్పలంటే ఏదైనా ఒక విలువ 80లో $y\%$ ని ఈ విధంగా సూచిస్తాం. $\frac{y}{100} \times 80$ అదే విధంగా ఏదైనా ఒక విలువ z లో 45% ని ఈ విధంగా సూచిస్తాం. $\frac{45}{100} \times z$.

పెన్ను-పేపరు లెకుండా చేసేలెక్కలు

మనం ఇప్పుడే 120 లో 25% ని లెక్కించాము. 25% అనేది $\frac{1}{4}$వ వంతు (పావు వంతు) తో సమానమా? 40లో 25% ని కనుగొనాలను కుందాం. అది 40 లో $\frac{1}{4}$ వ వంతేనా? అవును, ఎందుకంటే 100 లో 25 అనేది $\frac{1}{4}$ వ వంతు $\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4}\right)$. కావున, 40 లో $25\% = \frac{25}{100} \times 40$ అనేది $\frac{1}{4} \times 40$ తో సమానం.

? క్రింది ఇచ్చిన పట్టికలోని విలువల ఆధారంగా సూచించిన శాతాలను (పెన్ను మరియు పేపర్ ఉపయోగించకుండా) లెక్కించడానికి ప్రయత్నించండి. మీ సమాధానాలను పట్టికలో రాయండి.

	100	200	50	80	10	35	287
25%	25						
10%							
20%							
5%							

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? ఈ విలువలను మీరు ఎలా కనుగొన్నారు? పద్ధతుల గురించి తరగతిలో చర్చించండి. పట్టికలో మీకు ఏదైనా ఆసక్తికరమైన విషయం కనిపించిందా? ఒక విలువలో 20% అనేది అదే విలువలో 10% కి రెట్టింపు. ఉంటుందని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. ఇది ఎల్లప్పుడూ జరుగుతుంది. ఎందుకంటే 20% (100 లో 20 భాగాలు) అనేది 10% (100 లో 10 భాగాలు)కి రెండు రెట్లు.



? ఈ అవగాహనతో పైన ఉన్న పట్టికలోని విలువలలో 40% ఎంతో మనమలోనే లెక్కించండి. ఒక విలువ యొక్క 20%, 5% మరియు 25% ల మధ్య మీరు ఏ సంబంధాన్ని గమనించారు?

ఒక విలువలో (20% లో y) + (5% లో y) =25% లో y అని కనిపిస్తుంది. ఈ ధర్మం ఎల్లప్పుడూ నిజమని మనం ధృవీకరించవచ్చు.

$$\left(\frac{20}{100} \times y\right) + \left(\frac{5}{100} \times y\right) = \left(\frac{25}{100} \times y\right).$$

ఈ గమనికను ఉపయోగించి పట్టికలోని విలువలలో 15% ఎంతో మనసులోనే లెక్కించండి.

గణిత చర్చ

ఒక వేళ మీరు ఏదైనా విలువకు సంబంధించిన 75%, 90%, 70%, 55% వంటి శాతాలను మనసులోనే లెక్కించాల్సి వస్తే మీరు దానిని ఎలా చేస్తారు? చర్చించండి.

FDP త్రయం – భిన్నాలు, దశాంశాలు మరియు శాతాలు (The FDP Trio - Fractions Decimals and percentages

ఉదాహరణ 2 : ఏదైనా విలువను $\frac{1}{2}$ తో గుణించడం ద్వారా మనం ఆ విలువలో 50% ని కనుగొనవచ్చు. మరి ఆ విలువను 0.5 తో గుణించినా 50% సమాధానం వస్తుందా?

అవును ఎందుకంటే $\frac{1}{2} = 0.5$.

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \frac{0.5}{1} = 0.5.$$

50% లో 24 = 12
0.5 × 24 = 12

అదే విధంగా ఒక రాశిలో 10% ని కనుగొనాలంటే దశాంశ విలువతో గుణించాలి?

ఈ క్రింది పట్టికను పూర్తి చెయండి.

శాతం	50%	100%	25%	75%	10%	1%	5%	43%
భిన్నం	$\frac{50}{100}$							
దశాంశం	0.5							

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కృత్యం: మీరు ఎంత దగ్గరగా అంచనా వేయగలరు?

ఒక జంటగా ఏర్పడండి. మీలో ప్రతి ఒక్కరూ ఒక సంఖ్యను ఎంచుకోండి ఆ సంఖ్యలు a మరియు b అనుకుందాం. మీ సంఖ్యలను ఒకంతో. ఒకరు పంచుకోండి. మీరిద్దరూ $\frac{a}{b}$ (ఇక్కడ $a < b$) భిన్నానికి సమానమైన శాతాన్ని అంచనా వేయాలి. ఒక నిర్ణీత సమయంలో (ఉదాహరణకు 5 సెకన్లు) మీ సమాధానాలు ప్రకటించాలి. ఎవరి అంచనా అసలు విలువకు దగ్గరగా ఉంటుందో వారు ఆ రౌండ్ గెలిచినట్లు. ఇలా 10 రౌండ్లు ఆడండి.

ఉదాహరణ 3: ఒక పరీక్షలో గరిష్ఠమార్కులు 75 విద్యార్థులు ఆపరీక్షలో 80% లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు సాధిస్తే వీరికి A గ్రేడ్ వస్తుంది. జుబిన్ A గ్రేడ్ పొందడానికి కనీసం ఎన్ని మార్కులు సాధించాలి? మనం భిన్నం మరియు దశాంశ గుణకారాలు అలాగే అనుపాత నియమాలను ఉపయోగించి 75 లో 80% ని వివిధ పద్ధతులలో కనుగొనవచ్చు.

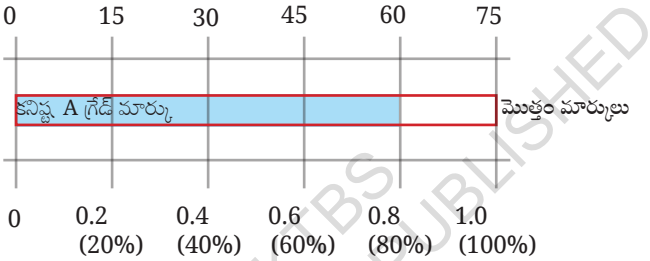
భిన్న గుణకారం $\rightarrow \frac{80}{100} \times 75$

$= \frac{4}{5} \times 75 = 60.$

దశాంశ గుణకారం $\rightarrow 0.8 \times 75 = 60.$

అనుపాత కారణం $\rightarrow$ 100 కి కనీస మార్కులు 80 అయితే

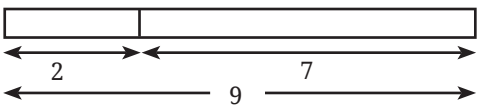
75 కి అది $\frac{75 \times 80}{100} = 60$



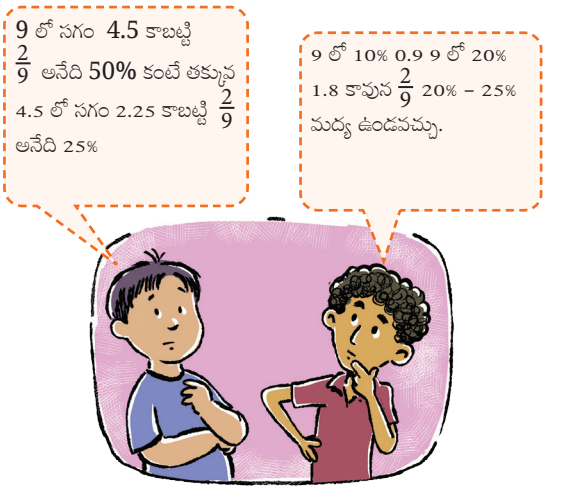
©KBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 4 : ఒక ప్రత్యేకమైన మినుముల గంజి (జావ) తయారు చేయడానికి ఉడికించడానికి కలపవలసిన మినుములు ముందు నీటి నిష్పత్తి 2:7 అనుకుందాం. ఈ మిశ్రమంలో మినుములు శాతం ఎంత? ఒక వేళ 500 మి.లో మిశ్రమం తయారు చేయవలసి వస్తే అందులో ఎంత పరిమాణం మనుములు ఉండాలి?

ఈ పరిస్థితిని కుడివైపున ఉన్న బార్ మోడళ్ళో ద్వారా చూపవచ్చు. మిశ్రమం మొత్తం పరిమాణానికి మినుముల నిష్పత్తి 2 : 9 అంటే, మిశ్రమంలో ఒక యూనిట్‌లో మినుములు $\frac{2}{9}$ వంతు నీరు $\frac{7}{9}$ వంతు ఉంటుంది.



? మొదట $\frac{2}{9}$ శాతం ఎంత ఉండవచ్చో అంచనా వేయండి.



మిశ్రమంలో మినుముల శాతం $\frac{2}{9} \times 100 = 22.22\%$.

మిశ్రమంలో నీటి శాతం $100 - 22.22 = 77.78\%$ అవుతుంది

22.22% మినుములు ఉన్న మిశ్రమంలో అంటే 100 ml మి.లో మిశ్రమంలో 22.22 మి.లీ మినుములు ఉంటాయని అర్థం

కావున 500 మి.లీ మిశ్రమంలో $5 \times 22.22 = 111.1$ ml మి.లీ మినుములు ఉంటాయి.

ఇచ్చిన నిష్పత్తిని భిన్నంగా రాయవచ్చు. ఆ పై శాతం మార్చవచ్చు. లెక్కించే ముందు అంచనా వేయడం వల్ల సంఖ్యల పట్ల అవగాహన పెరుగుతుంది మరియు తప్పులను తగ్గించవచ్చు.

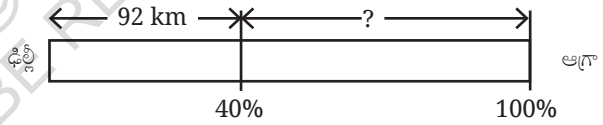


లెక్కించే ముందు ముందుగా అంచనా వేసే అభ్యాస సంఖ్యా భావాన్ని మెరుగు పరుస్తుంది మరియు తప్పులను తగ్గించడంలో సహాయ పడుతుంది. తరచుగా మనకు ఖచ్చితమైన విలువలు అవసరం లేకపోచ్చు. శీఘ్ర అంచనాలను తయారు చేసే సామర్థ్యం ఈ సమయాలలో ఉపయోగ పడుతుంది.

టీచర్లకు సూచన : సమస్యను పరిష్కరించే ప్రక్రియలో భాగంగా లెక్కించడానికి ముందే అంచనా వేసే పద్ధతిని అలవాటు చేయండి.

ఉదాహరణ 5 : ఒక సైక్లిస్ట్ ఢిల్లీ నుండి ఆగ్రాకు ప్రయాణిస్తూ ప్రయాణంలో 40% పూర్తి చేశాడు. అతను 92 కి.మీ. ప్రయాణించినట్లయితే ఆగ్రా చేరుకోవడానికి ఇంకా ఎన్ని కి.లో మీటర్లు ప్రయాణించాలి?

మొదట ఈ పరిస్థితిని బార్ మోడల్ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం



మరింత లోతుగా సాధించే ముందు మొదట అంచనా వేయండి.

ఈ సమస్యను సాధించడానికి కొన్ని మార్గాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. మీ పద్ధతి వీటిలో దేనికైనా సరిపోతుందా? మీకు ఇతర పద్ధతులు ఏవైనా నచ్చాయా?

దూరంలో 40% అంటే 92 కి.మీ. అని ఇవ్వబడింది. మిగిలిన 60% దూరం ంతో మనం కనుగొనాలి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పద్ధతి 1

40% అంటే 92 కి.మీ. కాబట్టి
20%, 46 కి.మీఈ దీని ప్రకారం
60% దూరం
92 + 46 = 138 కి.మీ.
అవుతుంది.

పద్ధతి 2

40% కి. 92 అయితే 60% కి ఎంత?

40 : 92 :: 60: ?

$\frac{40}{92} = \frac{60}{r}$

(r అనేది మిగిలిన దూరం)

$r = 60 \times \frac{92}{40} = 138$ కి.మీ.

పద్ధతి 3

$\frac{40}{100} = \frac{92}{d}$

(d అనేది మొత్తం దూరం)

$d = 92 \times \frac{100}{40} = 230.$

మిగిలిన దూరం = 230 కి.మీ. – 92 కి.మీ. = 138 కి.మీ.

పద్ధతి 4

x అనేది మిగిలిన దూరం అనుకుంటే, ఢిల్లీ నుండి ఆగ్రాకు ఉన్న మొత్తం దూరం $x + 92$ అవుతుంది.

మొత్తం దూరంలో 92 అనేది 40% అని మనకు తెలుసు, కాబట్టి

$\frac{40}{100} \times (x + 92) = 92.$

$(x + 92) = 92 \times \frac{100}{40}$

$x = 230 – 92 = 138$ కి.మీ.



చిత్తు రేఖాచిత్రాలు (Rough diagrams) గీయడం వల్ల ఇచ్చిన పరిస్థితిని బాగా అర్థం చేసుకోవచ్చు మరియు సమస్య గురించి మరింత లోతుగా ఆలోచించడం సులభం అవుతుంది.

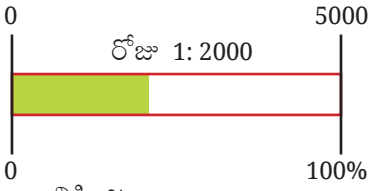
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

100 కంటే ఎక్కువ శాతాలు

ఇప్పటి వరకు మనం 100 లేదా అంతకంటే తక్కువ విలువ ఉన్న శాతాలను చూశాము. 100 కంటే ఎక్కువ విలువతో శాతాలు ఉండవచ్చా? శాంతం 100 కంటే ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు దాని అర్థం ఏమిటి? దానిని అన్వేషిద్దాం.

ఉదాహరణ 6 : కిషన్ లాల్ ఇటీవల ఒక బట్టల దుకాణాన్ని ప్రారంభించాడు. అతను రోజుకు కనీసం ₹5000 అమ్మకాలు సాధించాలని లక్ష్యంగా పెట్టుకున్నాడు. మొదటి రెండు రోజుల్లో అమ్మకాలు వరుసగా ₹2000 మరియు ₹3500 గా ఉన్నాయి. అతను తన లక్ష్యంలో ఎంత శాతాన్ని సాధించాడు?

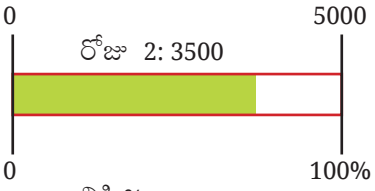
లక్ష్యశాతాన్ని చేరుకోవడం సాధించిన శాతపు లక్ష్యం కింద దృశ్యమానం చేయబడింది.



లక్ష్యానికి %

$\frac{2000}{5000} \times 100 = 40\%$

$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$



లక్ష్యానికి %

$\frac{3500}{5000} \times 100 = 70\%$

$70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0.7$

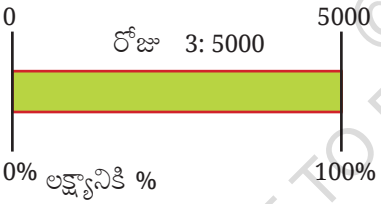
ఇది మొదటి రోజు **40%** మరియు రెండవ రోజు **70%** గా ఉంది.

దీనిని మరో విధంగా చెప్పాలంటే – అతను మొదటి రోజు తన లక్ష్యానికి 60% తక్కువగా, మరియు రెండవ రోజు 30% తక్కువగా ఉన్నాడు?

(?) తరువాతి రెండు రోజుల్లో, అతను వరుసగా **₹5000** మరియు **₹6000** సంపాదించాడు. అతని లక్ష్యంలో ఇవి ఎంత శాతం?

అతని లక్ష్యం **₹5000** మరియు అతను మూడవ రోజు **₹5000** సంపాదించాడు – అంటే ఇది **100%.** నాలుగవ రోజు, అతను **₹6000** సంపాదించాడు, ఇది అతని లక్ష్యం కంటే **1000** ఎక్కువ?

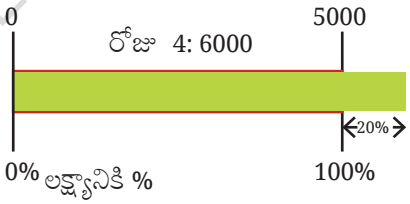
(?) నాలుగవ రోజు లక్ష్యంతో ఎంత శాతం సాధించబడింది?



లక్ష్యానికి %

$\frac{5000}{5000} \times 100 = 100\%$

$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1.0$



లక్ష్యానికి %

$\frac{6000}{5000} \times 100 = 120\%$

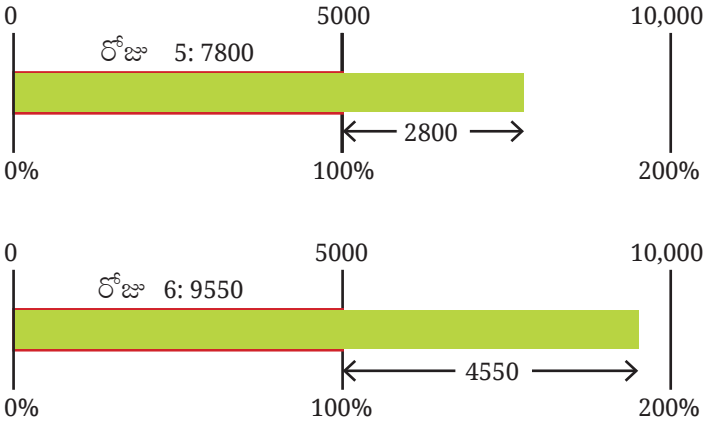
$120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1.2$

5000 లో **1000** అనేది **20%** కాబట్టి 6000, (5000 + 1000) అనేది **100% + 20% = 120%** అవుతుంది. దీనిని $\frac{6000}{5000} \times 100 = \frac{6}{5} \times 100 = 120\%$.

గా కూడా లెక్కించవచ్చు. అంటే అతను తన లక్ష్యం కంటే **20%** అదనంగా సాధించాడు?

(?) 5 మరియు 6 రోజులలో అతని అమ్మకాలు వరుసగా **₹7800** మరియు **₹9550** ఈ రోజుల్లో సాధించిన లక్ష్యపు శాతాన్ని లెక్కించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



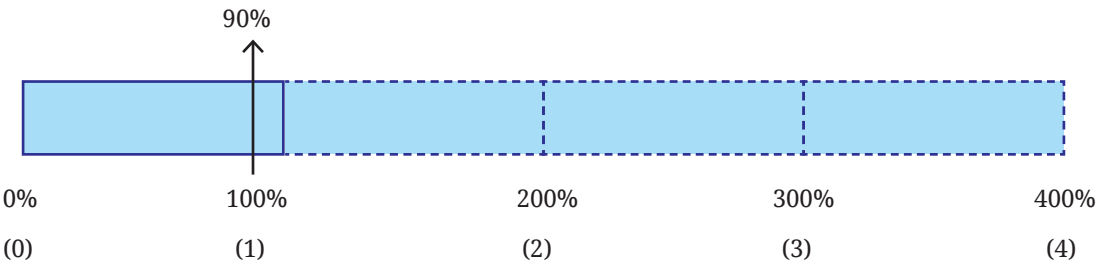
? 7 వ రోజున, అతను తన లక్ష్యంలో 150% సాధించాడు. 8 వ రోజున, 210% సాధించాడు. ఆ రోజుల్లో జరిగిన అమ్మకాలను కనుగొనండి.

ఏదో ఒక రోజున అతను ₹2500 సంపాదించాడనుకుందాం. దీనిని ''అతను తన లక్ష్యంలో $\frac{1}{2}$ వంతు సాధించాడు'' లేదా 'అతను తన లక్ష్యంలో 50% సాధించాడు'' లేదా ''అతను తన లక్ష్యంలో 0.5 వంతు సాధించాడు'' అని చెప్పవచ్చు. మరొక రోజున, అతను ₹10,000 సంపాదించాడు. అప్పుడు ''అతను తన లక్ష్యానికి రెట్టింపు/రెండు రెట్లు సాధించాడు'' లేదా ''అతను తన లక్ష్యంలో 200% సాధించాడు'' అని చెప్పవచ్చు.

? క్రింద ఉన్న పట్టికను పూర్తి చేయండి. ఆ విలువలు క్రింది రేఖాచిత్రంలో సుమారుగా ఎక్కడ ఉంటాయో గుర్తించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

శాతం	90%	110%	200%	250%	15%	173%	358%	28.9%	305%
భిన్నం									
దశాంశం									



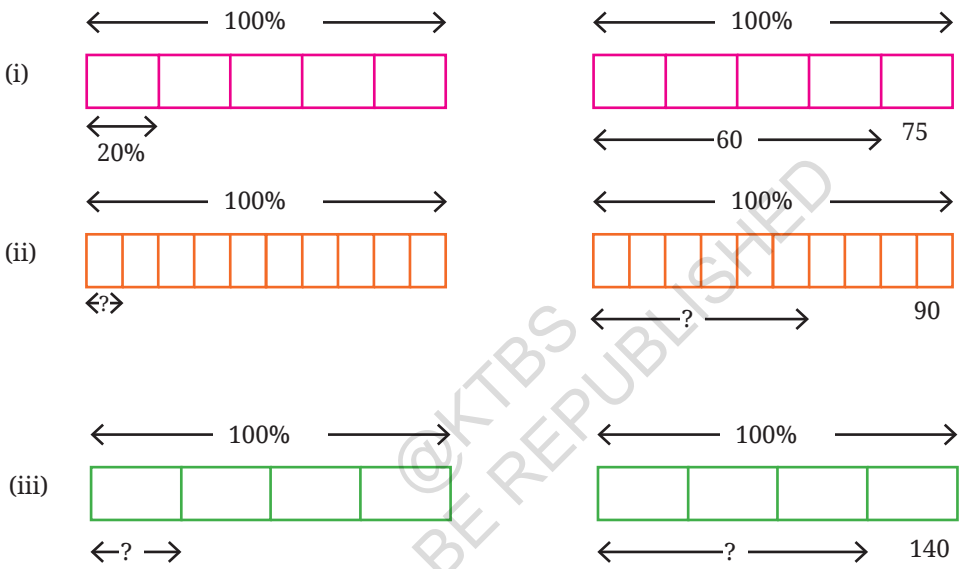
? **ఉదాహరణ 7 :** ఒక రైతు గత ఏడాది 260 కిలోల గోధుమలను పండించారు. ఈ ఏడాది 650 కిలోల గోధుమలు పండించారు. గత ఏడాది దిగుబడిలో ఈ ఏడాది దిగుబడి శాతం ఎంత?

ఈ ఏడాది దిగుబడి = $\frac{650}{260}$ × 100 = 250% గత ఏడాది దిగుబడిలో. 250% అంటే అది అసలు విలువకు 2.5 రెట్లు అని అర్థం

మీరే ఆలోచించండి

క్రింది ప్రశ్నలను సాధించడానికి లెక్కలు చేసే ముందే అంచనా వేయండి. మానసిక గణనలతో సహా వివిధ పద్ధతులను ప్రయత్నించండి.

1. ఖాళీగా ఉన్న సంఖ్యలను కనుగొనండి. మొదటి సమస్య సాధించబడింది.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి మరియు వాటికి బార్ మోడల్స్ గీయండి.

(i) 160 లో 25% (ii) 250 లో 16% (iii) 360 లో 62%

(iv) 40 లో 140% (v) 1 గంటలో 1% (vi) 10 కిలోలలో 7%

3. సూర్య 60 మి.లీ గాడమైన ఆరెంజ్ రంగును తయారు చేశాడు. అందులో ఎరుపు రంగు వాటా $\frac{3}{4}$ వంతు ఉంటే, అతను ఎంత పరిమాణంలో ఎరుపు రంగును ఉపయోగించాడు?

4. కింద కొన్ని రాశుల జంటలు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి మధ్య ఉన్న ఖాళీ పెట్టెల్లో సరిపోయే గుర్తులను '>', '<', '=' రాయండి. అవసరమైతే తప్ప లెక్కలు చేయకుండా, ఊహించి లెదా అంచనా వేసి సమాధానాలు రాయండి.

(i) 510 లో 50% ☐ 515% లో ఉ 50 (ii) 148 లో37% ☐ 148 లో 73%

(iii) 43 లో 29% ☐ 110 లో 92% (iv) 40 లో 30% ☐ 50 లో40%

(v) 200 లో 45% ☐ 490 లో 10% (vi) 80 లో 30% ☐ 64 లో24%

5. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.

(i) k లో 30%, విలువ 70, k లో 60% అయితే _____, k లో90% విలువ _____, k లో 120% విలువ _____అవుతుంది.

(ii) m లో 100% విలువ 215 అయితే , m లో 10% విలువ _____, m లో 1% విలువ _____, m లో 6% విలువ _____ అవుతుంది.

(iii) n లో 90% విలువ 270 అయితే, n లో 9% విలువ _____, n లో 18% విలువ _____, n లో 100% విలువ _____ అవుతుంది.

(iv) ఇటువంటి మరో 2 ప్రశ్నలను తయారు చేసి మీ స్నేహితులకు సవాలు విసరండి.

6. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) 3 లో 300 అనేది ____ %

(ii) 4 లో 40% అనేది _____

(iii) _____ లో 40 అనేది 80%.

7. ఒక రోజులో 10% అనేది ఒక వారంలో 1% కంటే ఎక్కువ సమయమా? ఇటువంటి ప్రశ్నలను తయారు చేసి మీ స్నేహితులను సవాలు చేయండి.

8. మరియమ్ పొలంలో ఒక వింత ఎద్దు ఉంది. ఒకరోజు ఆమె దానికి 2 యూనిట్ల మేత ఇస్తే, అది 1 యూనిట్ తిన్నది. మరు నటి రోజు 3 యూనిట్ల మేత ఇస్తే 2 యూనిట్లు తిన్నది. ఆ మరునటి రోజు 4 యూనిట్ల మేత ఇస్తే 3 యూనిట్లు తిన్నది. ఇలాగే కొనసాగి 99 వ రోజున ఆమె 100 యూనిట్ల మేత ఇస్తే అది 99 యూనిట్లు తిన్నది. ఈ రాశులను శాతాలలో సూచించండి. దీని ద్వారా మీరు ఏమి గమనించారు?

9. ఒక కాఫీ తోటలోని కార్మికులు మొత్తం తోటలో 20% కాఫీ గింజలను కోయడానికి 18 రోజులు తీసుకుంటారు. పని వేగం ఒకేలా ఉంటుందని భావిస్తే మొత్తం తోటలో కోత పూర్తి చేయడానికి వారికి ఎన్ని రోజులు పడుతుంది? ఈ ఊహ ఎందుకు అవసరం?

10. ఒక బ్యాడ్మింటన్ కోచ్ శిక్షణ సెషన్లను వార్మప్ (warm up) : ఆట (play) : కూల్ డౌన్ (cool down) నిష్పత్తి 10% : 80% : 10% ఉండేలా ప్లాన్ చేశారు. ఆయన 90 నిమిషాల శిక్షణ ఇవ్వాలనుకుంటే, ప్రతి కృత్యానికి ఎంత సమయం కేటాయించాలి?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. ప్రపంచ జనాభాలో సుమారు 90% మంది ఉత్తరార్ధ గోళంలో నివసిస్తున్నా రని అంచనా. ఈ సంవత్సరం ప్రపంచ జనాభా ఆధారంగా ఉత్తరార్ధ గోళంలో నివసించే వారి సంఖ్యను (సుమారుగా) కనుగొనండి.

12. నలుగురు వ్యక్తుల కోసం చేసే హల్వా తయారీకి కావాల్సిన పదార్థాల నిష్పత్తి ఇక్కడ ఇవ్వబడింది: రవ్వ 40%, చక్కెర : 40%, మరియు నెయ్యి : 20%.

(i) మీరు 8 మంది వ్యక్తుల కోసం హల్వా చేయాలనుకుంటే, పై పదార్థాల నిష్పత్తి ఎంత ఉండాలి?

(ii) మొత్త పదార్థాల బరువు 2 కిలోలు అయితే, అందులో రవ్వ, చక్కెర మరియు నెయ్యి ఎంతెంత పరిమాణంలో ఉంటాయి?

8.3 శాతాల వినియోగం (Using Percentages)

పరిమాణాలను పోల్చడం (To Compare Proportions)

ఉదాహరణ 1 : ఈషా ఇంగ్లీష్ పరీక్షలో 50 కి 42 మార్కులు, సైన్స్ పరీక్షలో 80 కి 70 మార్కులు సాధించింది. ఆమె ఇంగ్లీష్‌లో కేవలం 8 మార్కులు, సైన్స్ 10 మార్కులు కోల్పోయినందున, తను ఇంగ్లీష్ లోనే బాగా రాశానని అనుకుంటోంది. రీమా దీనితో ఏకీభవించదు. ఈషా సైన్స్‌లో ఎక్కువ మార్కులు సాధించినందున ఆమె సైన్స్‌నే బాగా రాసిందని వాదిస్తుంది. గరిష్ట మార్కులు వేర్వేరుగా ఉన్నందున మనం ఆ మార్కులను పోల్చలేమని విష్ణు అభిప్రాయం. మీ ప్రకారం ఎవరు సరైన వారు?

గణిత చర్చ

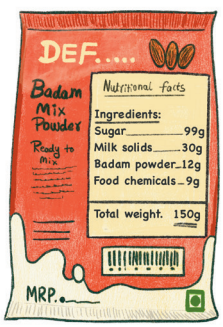
గరిష్ట మార్కులు సమానంగా ఉంటే పోలిక సులభం అవుతుంది, కదా? ఇటువంటి సందర్భాల్లో, మనం రెండు విలువలను శాతాల్లోకి మార్చాలి.

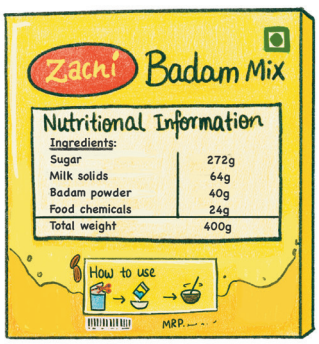
ఇంగ్లీష్ మార్కులు శాతంలో = $\frac{42}{50} \times 100 = 84\%$

సైన్స్ మార్కులు శాతంలో $\frac{70}{80} \times 100 = 87.5\%$.

సైన్స్ స్కోరు (శాతంలో) ఇంగ్లీష్ స్కోరు కంటే ఎక్కువగా ఉంది. కాబట్టి, ఈషా సైన్స్ పరీక్షలోనే మెరుగ్గా రాసిందని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

మీ ఆహారంలోని పదార్థాలను తెలుసుకోండి Know Your Contents (KYC)





NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

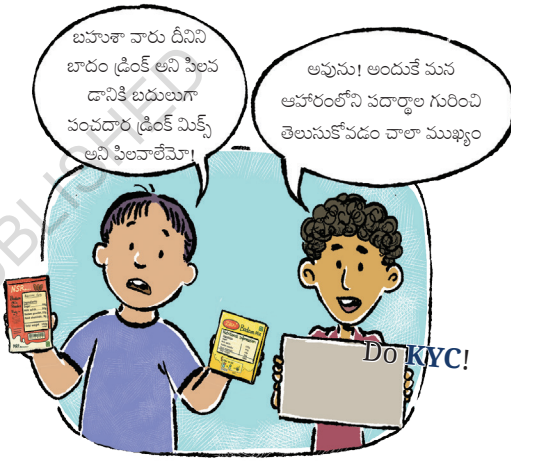
ఉదాహరణ 2: ప్రాసెస్ చేసిన ఆహార పదార్థాలను కొనే ముందు వాటి లేబుల్స్‌ను చదవడం ఎంత ముఖ్యమో మధు మరియు మాధవ్ ఇటీవల తెలుసుకున్నారు. వారు బాదం డ్రింక్ మిక్స్ కొనడానికి ఒక దుకాణానికి వెళ్లారు. అక్కడ వారు రెండు రకాల ఉత్పత్తులను చూసి, వాటిలో దేనిలో బాదం పప్పు పరిమాణం ఎక్కువగా ఉందో అని ఆలోచిస్తున్నారు. మీరు దానిని గుర్తించగలరా? ఏ ఉత్పత్తిలో ఆహార రసాయనాల (food chemicals) నిష్పత్తి తక్కువగా ఉందో చెప్పగలరా?

ఆహార పదార్థాల నిష్పత్తులను శాతాల్లోకి మార్చుకుంటే వాటిని పోల్చడం సులభం అవుతుంది. ఉదాహరణకు, DEF అనే ఉత్పత్తిలో పంచదార పరిమాణాన్ని మొత్తం బరువులో శాతంగా ఇలా లెక్కించవచ్చు:

$= \frac{99}{150} \times 100 = 66\%.$

కింది పట్టికలో శాతాలను లెక్కించడం ద్వారా ప్రశ్నలకు సమాధానాలు కనుగొనండి.

	పంచదార	పాల ఘనపదార్థాలు	బాదం పౌడర్	ఆహార రసాయనాలు
DEF	66%			
Zacni				



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ప్రతి లబ్ధం యొక్క శాతాల మొత్తం 100కు సమానం అవుతుందో పరిశీలించండి.

శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల (Percentage Increase or Decrease)

రాశుల మార్పు రేటును వివరించడానికి తరచుగా శాతాలను ఉపయోగిస్తారు.

ఉదాహరణకు:

1. 3 ఏళ్ల క్రితం 1 కిలో టమోటాల ధర ₹30 అనుకుందాం, ఇప్పుడు ఆ ధర ₹42 అయింది. ధరలో పెరిగిన మొత్తం ₹12.

$$\text{శాతంలో పెరుగుదల} = \frac{\text{పెరిగిన మొత్తం}}{\text{అసలు ధర లేదా ఆధారం}} \times 100$$

$$= \frac{12}{30} \times 100 = 40\%.$$

గత 3 ఏళ్లలో టమోటాల ధర 40% పెరిగిందని మనం చెబుతాము.

2. కోవిడ్ COVID కంటే ముందు ఈ థియేటర్‌కు వచ్చే సగటు ప్రేక్షకుల సంఖ్య 160. ఇప్పుడు అది కేవలం 100 మాత్రమే. ప్రేక్షకుల సంఖ్యలో తగ్గుదల 60.

$$\text{శాతంలో తగ్గుదల} = \frac{\text{తగ్గిన మొత్తం}}{\text{అసలు మొత్తం లేదా ఆధారం}} \times 100$$

$$= \frac{60}{160} \times 100 = 37.5\%.$$

కోవిడ్ తర్వాత ఈ థియేటర్‌లో ప్రేక్షకుల సంఖ్య 37.5% తగ్గిందని మనం బేబుతాము.

ఉదాహరణ 3 : క్రింది రెండు వాక్యాలు ఒకే అర్థాన్ని ఇస్తాయా?

(i) 1991లో ఈ రాష్ట్ర జనాభా 1961 నాటి జనాభాలో 165% ఉంది.

(ii) 1961 నుండి 1991 మధ్య ఈ రాష్ట్ర జనాభా 65% పెరిగింది.

అవును, రెండూ ఒకే అర్థాన్ని ఇస్తాయి. 1961 నాటి జనాభా p మరియు 1991 నాటి జనాభా q అనుకుందాం.

A వాక్యం ప్రకారం	B వాక్యం ప్రకారం
q లో p = 165%	$q = p + p$ లో 65%
$q = \frac{165}{100} \times p = 1.65p$	$q = p + 0.65 \times p = 1.65p$

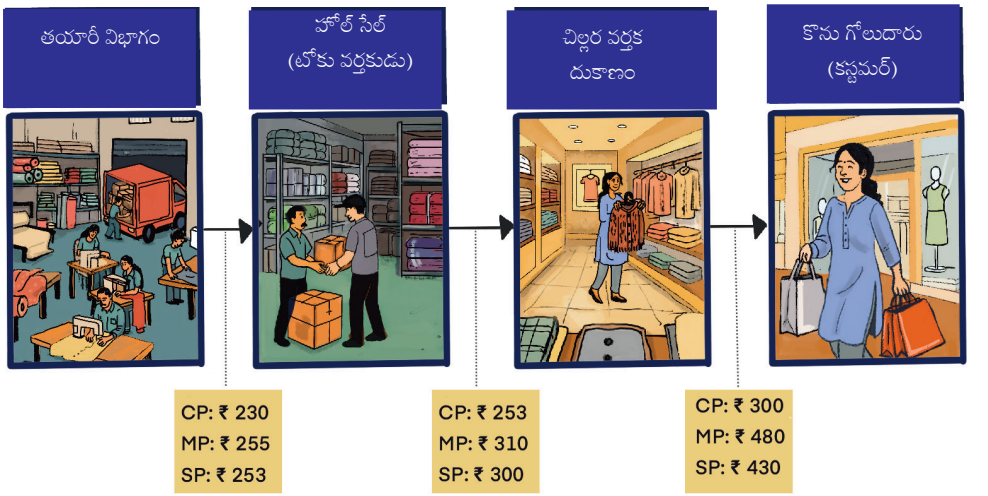
మరో మాటలో చెప్పాలంటే, 1991లో జనాభా 1961 నాటి జనాభా కంటే 1.65 రేట్లు ఉంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

లాభం మరియు నష్టం (Profit and Loss)

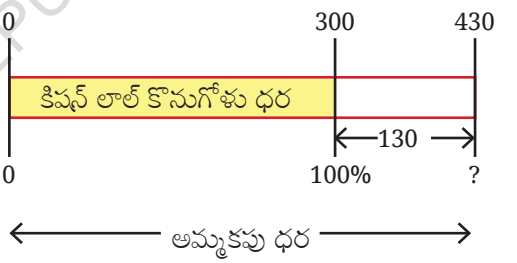
మీకు ఏదైనా వస్తువును కొన్న అనుభవం ఉండవచ్చు – స్నాక్స్, కిరాణా సామాగ్రి, బట్టలు, బొమ్మలు మొదలైనవి. చాలా తరచుగా, దుకాణదారుడు ఒక ధరను చెబుతాడు మరియు కొంత బేరసారాల తర్వాత కస్టమర్ అంగీకరించిన మొత్తాన్ని చెల్లించి వస్తువును కొంటాడు. దుకాణదారుడు చెప్పిన ధరను మనం ప్రకటిత ధర (Marked Price & MP) అని అంటాము (కొన్నిసార్లు ఇది వస్తువుపై ఉండే MRP కావచ్చు). రాయితీ (discount) తర్వాత కస్టమర్ చెల్లించే ధరను అమ్మకపు ధర (Selling Price - SP) అని అంటాము. అలాగే, దుకాణదారుడు ఆ వస్తువును కొనడానికి చెల్లించిన ధరను కొన్న ధర (Cost Price - CP) అని అంటాము. ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ఇవి సందర్భానికి ఎలా సంబంధం కలిగి ఉంటాయో చూద్దాం.

క్రింద ఉన్న చిత్రం తయారీదారు నుండి కస్టమర్ వరకు ఒక స్వెటర్ ప్రయాణాన్ని మరియు ప్రతి దశలో కొన్న ధర (CP). ప్రకటిత ధర (MP), మరియు అమ్మకపు ధర (SP) అంటే ఏమిటో చూపిస్తుంది.



కిషన్ లాల్ (చిల్లర వర్తకుడు) టోకు వర్తకుడి నుండి ఒక్కో స్వెటర్ను ₹ 300 చొప్పున కొన్నాడు. అతను తన కస్టమర్లకు చెప్పిన ప్రకటిత ధర ₹480. బేరసారాల తర్వాత, అతను ఈ స్వెటర్లు ₹430 కి విక్రయించాడు. ఇక్కడ అమ్మకపు ధర కొన్న ధర కంటే ఎక్కువగా ఉంది, దీని ఫలితంగా అతనికి ₹ 430 – ₹300 = 130 లాభం వచ్చింది. ఒకవేళ అమ్మకపు ధర కొన్న ధర కంటే తక్కువగా ఉంటే, అది నష్టానికి దారితీస్తుంది.

ఉదాహరణ 4: కిషన్ లాల్ ఈ స్వెటర్ మీద పొందిన లాభ శాతాన్ని కనుగొనండి. లాభ శాతాన్ని కనుగొనడానికి మనం కొన్న ధరను 100% గా పరిగణించాలి. ఈ పరిస్థితిని కింద ఉన్న చిత్తు రేఖాచిత్రం వివరిస్తుంది:



లాభం మొత్తం = ₹130.

లాభ శాతం = $\frac{130}{300} \times 100 = 43.3\%$.

టోకు వర్తకుడు మరియు తయారీదారు పొందిన లాభ శాతాలను కనుగొనండి.

శాంభవి ఒక స్టేషనరీ దుకాణాన్ని నడుపుతోంది. ఆమె 200 పేజీల నోట్ పుస్తకాలను ఒక్కొక్కటి ₹36 చొప్పున కొనుగోలు చేస్తుంది. ఆమె వాటిని 20% లాభంతో విక్రయిస్తే, ఆ నోట్ పుస్తకం అమ్మకపు ధర ఎంత?

ఆమె క్రేయాన్ బాక్సులను ఒక్కొక్కటి ₹50 కి విక్రయిస్తూ 25% లాభం పొందుతోంది. శాంభవి వాటిని టోకు వర్తకుడి నుండి ఎంత ధరకు కొని ఉంటుంది?

ఉదాహరణ 5: రఘు ప్రొవిజన్ స్టోర్లో బియ్యం నిల్వ పాతబడిపోతోంది. అతను కిలో బియ్యాన్ని ₹35 చొప్పున కొన్నాడు. ఆ నిల్వను వదిలించుకోవడానికి, అతను 10 కిలోల బియ్యాన్ని ₹300 కి వి క్రయించాడు. నష్ట శాతాన్ని కనుగొనండి.

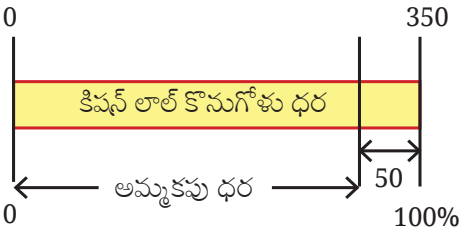
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

10కిలోలబియ్యంకొనడానికిరఘుచెల్లించినమొత్తం:₹350

అతను విక్రయించిన ధర = ₹300

నష్టం : ₹350 – ₹300 = ₹50.

నష్ట శాతం : $\frac{50}{350} \times 100 = 14.28\%$.



(?) మనం దీనిని మొత్తం బరువుకు బదులుగా కిలోకు అయ్యే నష్ట శాతంగా లెక్కించవచ్చా? ఫలితం ఒకేలా ఉంటుందా?

? **ఉదాహరణ 6:** శ్యామల అలంకార వస్తువులను (vases) ఒక్కొక్కటి ₹2650 చొప్పున కొనుగోలు చేసింది. వాటిలో ఒకటి స్వల్పంగా దెబ్బతింది. ఆమె దానిని 18% నష్టానికి విక్రయించాలని నిర్ణయించుకుంది. ఆ వస్తువును అమ్మడం ద్వారా ఆమెకు ఎంత మొత్తం వస్తుంది?

(?) ఒక అంచనా వేయడానికి ప్రయత్నించండి. ఇచ్చిన పరిస్థితిని వివరిస్తూ ఒక చిత్ర రేఖాచిత్రాన్ని గీయండి.

పైన పేర్కొన్న సమస్యను (ఉదాహరణ 6) సాధించడానికి రెండు పద్ధతులు చూపబడ్డాయి.

కొన్న ధరను 100% గా పరిగణిస్తే అమ్మకపు ధర కొన్న ధర కంటే 18% తక్కువగా ఉంటుంది. అంటే, అమ్మకపు ధర కొన్న ధరలో 82% అవుతుంది.
2650 లో 82% = 0.82 × 2650 = 2173

నష్టం మొత్తం 2650 లో 18% అంటే అంటే $\frac{18}{100} \times 2650 = 477$.
దీనిని కొన్న ధర నుండి తీసివేస్తే,
2650 – 477 = 2173

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

దెబ్బతిన్న అలంకార వస్తువు విక్రయించిన ధర ₹2173.

? భారీ వర్షాల కారణంగా, స్నేహల్ తన పాంచగణి ఫామ్ నుండి స్ట్రాబెర్రీలను హైదరాబాద్ కు రవాణా చేయలేకపోయాడు. అతను తన వద్ద ఉన్న నిల్వలో కొంత భాగాన్ని కిలో ₹80 చొప్పున 12% నష్టానికి విక్రయించాడు. దాని కొన్న ధర ఎంత?



దుకాణదారులు తగ్గింపులు (Discounts) ప్రకటించడం మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. 30% తగ్గింపు (లేదా 30% డిస్కౌంట్) అంటే ఏమిటో మీకు తెలుసా? అంటే ఆ వస్తువు అసలు ధర నుండి 30% తగ్గించడానికి దుకాణదారుడు సిద్ధంగా ఉన్నాడని అర్థం.

? ఒక పాత్రల దుకాణం (utensil store) ₹1800 MRP ఉన్న కుక్కర్ పై 35% తగ్గింపును ఇస్తోంది. దాని అమ్మకపు ధర ఎంత? ఒకవేళ దాని కొన్న ధర ₹900 అయితే, విక్రయించిన తర్వాత వచ్చిన లాభ శాతం ఎంత?

కిషన్ లాల్ గత నెలలో ₹80,000అమ్మకాలు చేశాడు. వీటిని కొనడానికి అతను ఖర్చు చేసిన మొత్తం 48,000. ఈ రెండింటి మధ్య ఉన్న తేడా ₹32,000 (₹80,000 – ₹48,000) ను స్థూల లాభం (Gross Profit) అని అంటారు.

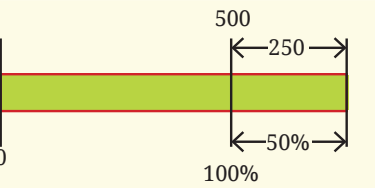
రవాణా ఖర్చులు, ఉద్యోగుల జీతాలు, విద్యుత్ బిల్లు వంటి ఇతర ఖర్చుల కోసం ₹8,000 ఖర్చు చేసిన తర్వాత, మిగిలిన ₹24,000 (₹32,000 – ₹8,000) ను నికర లాభం (Net Profit) అని అంటారు.

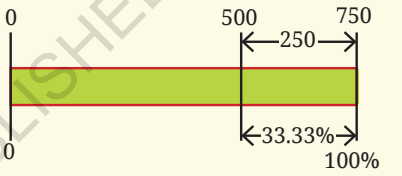
గమనిక: ఈ అధ్యాయంలో లాభం అనే పదం స్థూల లాభాన్ని సూచిస్తుంది.

మనీషా ఎరువులను విక్రయిస్తుంది. ఆమె 50 కిలోల బస్తాలను ఒక్కొక్కటి ₹500 చొప్పున కొని, ₹750 కి విక్రయిస్తుంది.

₹500 పై ఆమె లాభం = $\frac{250}{500} \times 100 = 50\%$

అయితే ₹750 మొత్తానికి సంబంధించి చూస్తే ఆమె పొందిన లాభ శాతం $\frac{250}{750} \times 100 = 33.33\%$.





మనం పెట్టిన పెట్టుబడిపై ఎంత లాభం వచ్చిందో తెలుసుకోవాలనుకున్నప్పుడు, లాభ శాతాన్ని ఎల్లప్పుడూ కొన్న ధర (CP) ఆధారంగానే లెక్కించాలి.

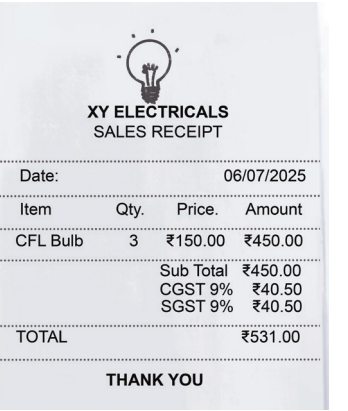
మొత్తం ఆదాయం (revenue) పై నాకు ఎంత (నికర లాభం వచ్చింది అని తెలుసు కోవాలనుకున్నప్పుడు, లాభం శాతం ఆదాయం ఆధారంగా లెక్కించబడుతుంది.

ఉదాహరణకు, ఒక నెలలో ఒక వ్యక్తి ₹1,50,000 అమ్మకాలు చేసింది అనుకుందాం. ఆ వస్తువులను కొనడానికి అయిన ఖర్చు ₹ 1,00,000. కాబట్టి, స్థూల లాభం (gross profit) ₹ 50,000. నెలవారీ ఇతర ఖర్చులు ₹5,000 అయ్యాయి. అప్పుడు నికర లాభం (net profit) ₹ 45,000 అవుతుంది. నెలవారీ ఆదాయం (₹1,50,000) లో నికర లాభం శాతం: $\frac{45000}{150000} \times 100 = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పన్నులు (Taxes)

GST (వస్తు సేవల పన్ను) లేదా ఆదాయపు పన్ను వంటి పన్ను రేట్లు కూడా శాతాలలోనే పేర్కొనబడతాయి. మీరు బిల్లులపై GST అని రాసి ఉండటం గమనించి ఉండవచ్చు. అంటే మనం చెల్లించే మొత్తంలో పన్ను కూడా ఒక భాగమని, ఈ మొత్తం ప్రభుత్వానికి చేరుతుందని అర్థం.


XY ELECTRICALS
SALES RECEIPT

Date:			06/07/2025
Item	Qty.	Price.	Amount
CFL Bulb	3	₹150.00	₹450.00
		Sub Total	₹450.00
		CGST 9%	₹40.50
		SGST 9%	₹40.50
TOTAL			₹531.00

THANK YOU

? పైన చూపిన బిల్లులోని లెక్కలు సరిగ్గా ఉన్నాయో లేదో తనిఖీ చేయండి.

? మీ ఇంట్లో ఉన్న ఏవైనా బిల్లులను తరగతిలో అందరితో పంచుకోండి. ఆ బిల్లులలో ఉన్న వివిధ అంశాలను గమనించండి. ఆ బిల్లుల మధ్య ఏవైనా పోలికలు లేదా తేడాలు ఉన్నాయా?

ప్రయత్నించండి

? ఆలోచించండి (Figure it Out)

1. ఒక దుకాణదారుడు ఒక జామెట్రీ బాక్సున్ను ₹ 75 కి కొని ₹110 కి విక్రయిస్తే, కొన్న వెల పరంగా అతని లాభం శాతం (profit margin) ఎంత?

2. నేను ఒక వడ్రంగిని, కుర్చీలు తయారు చేస్తాను. ఒక కుర్చీకి అయ్యే మెటీరియల్ ఖర్చు ₹ 475 మరియు నేను 50% లాభం పొందాలనుకుంటున్నాను. నేను కుర్చీని ఏ ధరకు అమ్మాలి?

3. ఒక కంపెనీ యొక్క మొత్తం అమ్మకాలు (ఆదాయం) గత ఏడాది ₹2.5 కోట్లు. వారు 25% లాభాన్ని పొందారు. గత ఏడాది ఆ కంపెనీ యొక్క మొత్తం ఖర్చులు (expenditure) ఎంత?

4. ఒక బట్టల దుకాణం అన్ని షర్టులపై 25% డిస్కౌంట్ ఇస్తోంది. ఒక షర్టు అసలు ధర ₹300 అయితే, అన్వర్ ఆ షర్టు కొనడానికి ఎంత చెల్లించాలి?

5. 2015లో పెట్రోల్ ధర 60 మరియు 2025లో ₹100 ఉంది. పెట్రోల్ ధరలో పెరిగిన శాతం ఎంత?

   (i) 50% (ii) 40% (iii) 60%

   (iv) 66.66% (v) 140% (vi) 160.66%

6. శాంసన్ ఒక కార్ డీలర్ వద్ద 15% డిస్కౌంట్ పొందిన తర్వాత ఒక కారును ₹4,40,000 కి కొన్నాడు. కారు అసలు ధర ఎంత?

7. ఒక ఎన్నికలో 1600 మంది ఓటు వేశారు మరియు విజేతకు 500 ఓట్లు వచ్చాయి. విజేతకు మొత్తం ఓట్లలో ఎంత శాతం ఓట్లు వచ్చాయి? ఆ ఎన్నికల్లో నిలబడిన అభ్యర్థుల కనీస సంఖ్యను మీరు ఊహించగలరా?

8. 2024లో 1 కిలో బియ్యం ధర ‘38. 2025లో అది ₹42. ద్రవ్యోల్బణ రేటు (inflation rate) ఎంత? (ద్రవ్యోల్బణం అంటే ధరలలో పెరిగిన శాతం)

9. ఒక సంఖ్యను 20% పెంచితే అది 90 అవుతుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

10. ఒక పాలు అమ్ముకునే వ్యక్తి రెండు గేదెలను ఒక్కొక్కటి ₹80,000 చొప్పున విక్రయించాడు. ఒకదానిపై అతనికి 5% లాభం, మరోదానిపై 10% నష్టం వచ్చింది. అతని మొత్తం లాభం లేదా నష్టాన్ని కనుగొనండి.

11. ఒక నేషనల్ పార్క్ లో ఏనుగుల జనాభా గత దశాబ్దంలో 5% పెరిగింది. గత దశాబ్దంలో ఏనుగుల జనాభా p అయితే, ఇప్పుడు జనాభా ఎంత:

    (i) $p \times 0.5$ (ii) $p \times 0.05$ (iii) $p \times 1.5$

    (iv) $p \times 1.05$ (v) $p + 1.50$

12. గత దశాబ్దంలో కెమెరాల డిమాండ్ 85% పడిపోయింది అనే వాక్యానికి సమానమైన అర్థం ఇచ్చేది ఏది?

    (i) ప్రస్తుత డిమాండ్ ఒక దశాబ్దం క్రితం ఉన్న డిమాండ్‌లో 85% ఉంది.

    (ii) ఇప్పుడు డిమాండ్ ఒక దశాబ్దం క్రితం ఉన్న డిమాండ్‌లో 15% ఉంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) ప్రస్తుత డిమాండ్ ఒక దశాబ్దక్రతం ఉన్న డిమాండ్‌లో 15% ఉంది.

(iv) ఒక దశాబ్దం క్రితం నాటి డిమాండ్ ప్రస్తుత డిమాండ్‌లో15% ఉంది.

(v) ఒక దశాబ్దం క్రితం నాటి డిమాండ్ ప్రస్తుత డిమాండ్‌లో 185% ఉంది.

(vi) ప్రస్తుత డిమాండ్ ఒక దశాబ్దం క్రితం ఉన్న డిమాండ్‌లో 185% ఉంది.

పెరుగుదల మరియు చక్రవడ్డీ (Growth and Compounding)

బ్యాంకులో FD (ఫిక్స్‌డి డిపాజిట్) పై ఏడాదికి 6% వడ్డీ లేదా సేవింగ్స్ ఖాతాపై ఏడాదికి 2.5% వడ్డీ వంటి వాక్యాలను మీరు వినే ఉంటారు. వడ్డీ (Interest) అనేది బ్యాంకులు లేదా పోస్ట్ ఆఫీసులు తమ వద్ద దాచుకున్న డబ్బుకు ఇచ్చే అదనపు మొత్తం. ప్రజలు లేదా సంస్థలు డబ్బును అప్పుగా తీసుకున్నప్పుడు కూడా వడ్డీని చెల్లిస్తారు.

ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్ (FD): దీనిలో మీరు నిర్ణీత కాలానికి, నిర్ణీత వడ్డీ రేటుతో కొంత మొత్తాన్ని డిపాజిట్ చేస్తారు. ఆ కాలపరిమితి ముగిసే వరకు డబ్బు లాక్ చేయబడి ఉంటుంది. గడువు ముగిసిన తర్వాత, మీరు మీ అసలు మరియు సంపాదించిన వడ్డీ రెండింటినీ పొందుతారు.

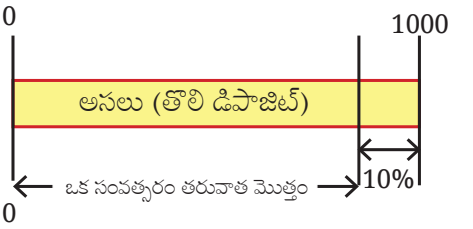
ఉదాహరణకు, ఒక బ్యాంకు ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్లపై వడ్డీ రేటు ఏడాదికి 10% p.a. అని చెబుతుంది.ఈ ప్రకటన ద్వారా మీరు ఏమి అర్థం చేసుకున్నారు? శాతం పక్కన ఉన్న ఇ. అంటే ఏమిటి?

pa. అనేది per annum (సర్ ఆనమ్) కు సంక్షిప్త రూపం, అంటే ప్రతి సంవత్సరం అని అర్థం.పేర్కొన్న వ డ్డీ రేటు ప్రకారం, మీరు బ్యాంకులో ఒక సంవత్సరం పాటు ₹6000 డిపాజిట్ చేస్తే, వారు ఆ డిపాజిట్ల పై ₹600 వడ్డీగా ఇస్తారు. ఇక్కడ 10% అనేది వడ్డీ రేటు (rate of interest) మరియు ₹6000 మీద అయితే వడ్డీ లెక్కించ బడుతుందో అది అసలు (principal). ఒక సంవత్సరం తర్వాత మీ బ్యాంకు ఖాతాలోని మొత్తం:

$6000 + (0.10 \times 6000)$

(అసలు + (అసలు పై 10% వడ్డీ)

$= 6000 + 600 = 6600.$



మరో మాటలో చెప్పాలంటే, డిపాజిట్ చేసిన మొత్తం ₹6000, 110% అవుతుంది (లేదా 10% పెరుగుతుంది)

$$6000 \times 110\% = 6000 \times \frac{110}{100} = 6000 \times 1.1 = 6600.$$

దీనిని ఈ విధంగా కూడ వ్యక్తపరచవచ్చు.

1 సంవత్సరం తర్వాత మొత్తం = అసకయ (P) + P పై వడ్డీ రేటు (ట)

©KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 7: ఒకరు బ్యాంకులో ₹ 6000 డిపాజిట్ చేస్తే 3 సంవత్సరాల తర్వాత వచ్చే మొత్తం ఎంత? అది ఎంచుకున్న F– (Fixed Deposit) రకంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇక్కడ రెండు అవకాశాలు ఉన్నాయి:

1. **ఆప్షన్ 1:** వడ్డీ క్రమం తప్పకుండా (ఉదాహరణకు, ప్రతి సంవత్సరం) చెల్లించబడుతుంది. మెచ్యూరిటీ గడువు ముగిసిన తర్వాత అసలు మొత్తం తిరిగి ఇవ్వబడుతుంది.

కాలం	స్థితి	తిరిగి వచ్చిన వడ్డీ (10% p.a.)	FD లో ఉన్న మొత్తం
సంవత్సరం 1	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹6000
	ముగింపులో	₹600 (తిరిగి ఇచ్చారు)	₹6000
సంవత్సరం 2	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹6000
	ముగింపులో	₹600 (తిరిగి ఇచ్చారు)	₹6000
సంవత్సరం 3	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹6000
	ముగింపులో	₹600 (తిరిగి ఇచ్చారు)	₹6000
మొత్తం అందిన సొమ్ము		₹1800 + ₹6000 = ₹7800	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. **ఆప్షన్ 2 : (రెండవ ఎంపిక)** ప్రతిసారీ (ఉదాహరణకు ప్రతి సంవత్సరం తర్వాత) వచ్చే వడ్డీని తిరిగి FD (స్థిర డిపాజిట్) కి కలుపుతారు, తద్వారా తదుపరి కాలానికి అసలు మొత్తం పెరుగుతుంది.మెచ్యూరిటీ గడువు ముగిసిన తర్వాత, మొత్తం సొమ్మును తిరిగి చెల్లిస్తారు. ఈ పద్ధతిని చక్రవడ్డీ (compounding)

		తిరిగి వచ్చిన వడ్డీ (10% p.a.)	FD లో ఉన్న మొత్తం	
సంవత్సరం 1	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹6000	
	ముగింపులో	₹600 (తిరిగి ఇచ్చారు)	₹6600	× 1.10
సంవత్సరం 2	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹6600	
	ముగింపులో	₹660 (తిరిగి ఇచ్చారు)	₹7260	× 1.10
సంవత్సరం 3	ప్రారంభంలో	× 0.10	₹7260	
	ముగింపులో	₹726	₹7986	
		₹7986 (తిరిగి ఇచ్చారు)		× 1.10
మొత్తం అంది సొమ్ము		₹7986		

చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో, చివరగా వచ్చే మొత్తం ఎక్కువగా ఉంటుందని మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 8 : రెండు ఆప్షన్లలోనూ డిపాజిట్ చేసిన మొత్తంతో పోలిస్తే అందిన మొత్తం సొమ్ము ఎంత శాతం ఉంటుంది?

దీనిని $\frac{\text{మొత్తం అందిన సొమ్ము}}{\text{దిపాజిట్ చేసిన మొత్తం}} \times 100$

చక్రవడ్డీ లేనప్పుడు	చక్రవడ్డీ లేనప్పుడు
$\frac{7800}{6000} \times 100 = 130\% = 1.3.$	$\frac{7986}{6000} \times 100 = 133.1\% = 1.331.$
అంటే అందిన మొత్తం సొమ్ము $= 6000 \times (1 + 0.1 + 0.1 + 0.1)$ $= 6000 \times 1.3.$	అంటే అందిన మొత్తం సొమ్ము $= 6000 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1.$ $= 6000 \times 1.331$
మూడు సంవత్సరాలలో వచ్చిన లాభం శాతం 30%	మూడు సంవత్సరాలలో వచ్చిన లాభం శాతం 33.1%

ఆలోచించండి (Figure it Out)

1. బ్యాంక్ ఆఫ్ వహాపూర్ సంవత్సరానికి 10% వడ్డీని అందిస్తుంది. ఒకరు ₹20,000 మొత్తాన్ని మూడు సంవత్సరాలులో వచ్చిన2 సంవత్సరాల కాలానికి డిపాజిట్ చేస్తే, చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో మరియు సాధారణ వడ్డీపద్ధతిలో అతనికి ఎంత సొమ్ము వస్తుందో పోల్చి చూడండి.

2. బ్యాంక్ ఆఫ్ వహాపుర్ (Bank of Wahapur) సంవత్సరానికి 5% వడ్డీని ఇస్తుంది. ఒక వ్యకి ₹20,000 మొత్తాన్ని 4 సంవత్సరాల కాలానికి డిపాజిట్ చేస్తే వార్షిక చక్రవడ్డీతో మరియుచక్రవడ్డీ లేకుండా అతనికి ఎంత మొత్తం వస్తుందో పోల్చి చూడండి.

3. పైన పేర్కొన్న రెండు ప్రశ్నల సాధనలో మీరు ఏదైనా ఆసక్తికరమైన విషయాన్నిగమనించారా? చర్చించండి.

ప్రతి ఎంపికలో గమనించిన నమూనాను సాధారణీకరించడానికి (జ్ఞ్చుట్చజూజీట్ఛ) ప్రయత్నిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : మనం ₹6000 మొత్తాన్ని సంవత్సరానికి 10% వడ్డీ రేటుతో *t*' సంవత్సరాల పాటు పెట్టుబడి పేడితే మనకు తిరిగి వచ్చే మొత్తం ఎంత?

చక్రవడ్డీ లేనప్పుడు (No Compounding):

ఇక్కడ ప్రతి కాలవ్యవధిలో వచ్చే వడ్డీని తిరిగి చెల్లిస్తారు.కాబట్టి, ప్రతి కాలానికి అసలు మొత్తం (principal amount) మారదు మరియు ఫలితంగా ప్రతి కాలానికి వచ్చే వడ్డీ కూడా సమానంగాఉంటుంది.

© KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

1 కాలవ్యవధిలొ వచ్చే వడ్డీ 6000×0.1

3 కాలవ్యవధిలొ వచ్చే వడ్డీ $6000 \times 0.1 \times 3$

3 ఏళ్ల FD ముగింపులో వచ్చే మొత్తం సొమ్ము

$6000 + (6000 \times 0.1 \times 3)$

1 కాలవ్యవధిలొ వచ్చే వడ్డీ $p \times r$

pఅనగా అసలు, r అనగా వడ్డీ రేటు శాతంలో

t కాలవ్యవధుల్లో వచ్చే వడ్డీ

$p \times r \times t$

t ఏళ్ల FD ముగింపులో వచ్చే మొత్తం సొమ్ము

$p + (p \times r \times t) = p + prt$

$= p\,(1 + rt)$.

చక్రవడ్డీతో (With Compounding):

ఇక్కడ, ప్రతి కాలవ్యవధి/సంవత్సరం వచ్చే వడ్డీని తిరిగి ఋ కి కలుపుతారు.అందువల్ల, ప్రతికాలవ్యవధి తర్వాత అసలు మొత్తం పెరుగుతుంది మరియు ఫలితంగా వచ్చే వడ్డీ కూడాతదనుగుణంగా పెరుగుతుంది.

1 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$(6000) \times 1.1$

(ఇది 1 వ సంవత్సరం అసలు)

2 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$(6000 \times 1.1) \times 1.1$ అవుతుంది.

(ఇది 2 వ సంవత్సరం అసలు)

3 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$(6000 \times 1.1 \times 1.1) \times 1.1$

(ఇది 3 వ సంవత్సరం అసలు)

t సంవత్సరాల తర్వాత FD లోని మొత్తం

$6000 \times (1.1 \times 1.1 \times 1.1 ..... \times 1.1)$

t సార్లు

$6000 \times (1.1)^t$.

1 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$(p) \times (1 + r)$

(ఇది 1 వ సంవత్సరం అసలు)

2 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$p \times (1 + r) \times (1 + r)$

(ఇది 2 వ సంవత్సరం అసలు)

3 వ సంవత్సరం తర్వాత FD లో ని మొత్తం

$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times (1 + r)$

(ఇది 3 వ సంవత్సరం అసలు)

t సంవత్సరాల తర్వాత FD లోని మొత్తం

$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times ..... \times (1 + r)$

t సార్లు

$p \times (1 + r)^t$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? పరిపక్వత (maturity) గడువు ముగిసిన తర్వాత వచ్చే మొత్తం వడ్డీని కనుగొనడానికి సూత్రం ఏమై ఉంటుంది? రెండు ఆప్షన్లకు విడివిడి సూత్రాలు ఎలా ఉంటాయో ఊహించండి.



ఆలోచించండి (Figure it out)

4. జాస్మిన్ p అనే అసలు మొత్తాన్ని 4 సంవత్సరాల కాలానికి సంవత్సరానికి 6% వడ్డీ రేటుతో పెట్టుబడి పెట్టింది. చక్రవడ్డీ లేని పద్ధతిలో (compounding is not done), 4 సంవత్సరాల తర్వాత ఆమెకు వచ్చే మొత్తం సొమ్మును క్రింది వాటిలో ఏ వ్యక్తీకరణలు (expressions) సరిగ్గా వివరిస్తాయి?

(i) $p \times 6 \times 4$ (ii) $p \times 0.6 \times 4$ (iii) $p \times \frac{0.6}{100} \times 4$

(iv) $p \times \frac{0.06}{100} \times 4$ (v) $p \times 1.6 \times 4$ (vi) $p \times 1.06 \times 4$

(vii) $p + (p \times 0.06 \times 4)$

5. పోస్ట్ ఆఫీస్ సంవత్సరానికి 7% వడ్డీని అందిస్తుంది.ఒక వ్యక్తి ₹50,000 మొత్తాన్ని 3 సంవత్సరాల పాటు చక్రవడ్డీ లేకుండా పెట్టుబడి పెడితే అతనికి ఎంత వడ్డీ వస్తుంది? ఒకవేళ అది చక్రవడ్డీ అయితే అతనికి ఇంకా ఎంత అదనపు సొమ్ము వస్తుంది?

6. గిరిధర్ ₹12,500 అప్పును సంవత్సరానికి 12% వడ్డీతో 3 సంవత్సరాల కాలానికి చక్రవడ్డీ లేని పద్ధతిలో తీసుకున్నాడు. రాఘవ అదే మొత్తాన్ని, అదే కాలానికి సంవత్సరానికి 10% వార్షిక చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో అప్పుగా తీసుకున్నాడు.వీరిలో ఎవరు ఎక్కువ వడ్డీ చెల్లిస్తారు? ఎంత ఎక్కువ చెల్లిస్తారు?

7. ₹1000 మొత్తాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకోండి. ఇది సంవత్సరానికి 10% వడ్డీ రేటుతో పెరుగుతుంటే, చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో అది రెట్టింపు కావడానికి ఎంత కాలం పడుతుంది? చక్రవడ్డీ లేని పద్ధతిలో ఎంత కాలం పడుతుంది? చక్రవడ్డీ అనేది ఘాతాంక వృద్ధికి (exponential growth), చక్రవడ్డీ లేని పద్ధతి సరళ వృద్ధికి (linear growth) ఉదాహరణలు అవుతాయా?

8. ఒక నగరం యొక్క జనాభా ప్రతి సంవత్సరం సుమారు 3% పెరుగుతోంది. ప్రస్తుతం ఆ నగర జనాభా 1.5 కోట్లు అయితే, 3 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ నగర జనాభా ఎంత ఉండవచ్చు?

9. ఒక ప్రయోగశాలలో, బ్యాక్టీరియా సంఖ్య ప్రతి గంటకు 2.5% రేటుతో పెరుగుతోంది. ప్రారంభంలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య 5,06,000 అయితే, 2 గంటల ముగింపులో బ్యాక్టీరియా సంఖ్యను కనుగొనండి.

తరుగుదల (Decline)

కొన్ని వస్తువులు లేదా పదార్థాలు కాలక్రమేణా వాటి ఆర్థిక విలువను కోల్పోతాయి. ఉదాహరణకు, ఎవరైనా ₹1,00,000 పెట్టి ఒక బైక్ కొన్నారనుకోండి. కొన్ని సంవత్సరాల తర్వాత దానిని అమ్మాలనుకుంటే, ఆ సమయంలో బైక్ విలువ ₹1,00,000 కంటే తక్కువగా ఉంటుంది. ఇది కొన్నప్పటి నుండి ఎన్ని సంవత్సరాలు గడిచాయి, ఎన్ని కిలోమీటర్లు వాడారు, ఏదైనా డ్యామేజ్ జరిగిందా లేదా ఏవైనా విడిభాగాలు మార్చబడ్డాయా అనే అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. వస్తువు వాడకం మరియు కాలం గడవడం వల్ల దాని విలువ తగ్గడాన్ని తరుగుదల (depreciation) అంటారు.

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 10: ఒక టీవీని ₹21,000 ధరకు కొనుగోలు చేశారు. ఒక సంవత్సరం తర్వాత, టీవీ విలువ 5% తగ్గుతుంది (depreciates). ఒక సంవత్సరం తర్వాత టీవీ విలువను కనుగొనండి.

విలువలో తగ్గుదల మొత్తం

విలువలో తగ్గుదల 21,000 లో 5% అవుతుంది.

$= 0.05 \times 21,000 = 1050.$

ప్రస్తుత విలువ

$21,000 - 1050 = 19,950.$

1 సంవత్సరం తర్వాత టీవీ విలువ

1 సంవత్సరం తర్వాత టీవీ విలువ ప్రస్తుత విలువలో 95%

$= 21,000$ లో 95%

$= 0.95 \times 21,000 = 19,950.$

ఒక సంవత్సరం తర్వాత టీవీ విలువ ₹19,950 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 11: ఒక గ్రామం యొక్క జనాభా ప్రతి దశాబ్దానికి (decade) సుమారు 10% తగ్గుతున్నట్లు గమనించారు. ప్రస్తుత జనాభా 1250 అయితే, 3 దశాబ్దాల తర్వాత అంచనా వేయబడిన జనాభా ఎంత?

పద్ధతి 1

ఒక దశాబ్దం తర్వాత జనాభా ప్రస్తుత జనాభాకు 0.9 రెట్లు ఉంటుంది.

కాబట్టి, 1 దశాబ్దం తర్వాత జనాభా

2 దశాబ్దాల తర్వాత జనాభా

1250×0.9

3 దశాబ్దాల తర్వాత జనాభా $1250 \times 0.9 \times 0.9$

$1250 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9$

$= 911.25$

పద్ధతి 2

మొదటి దశాబ్దంలో తగ్గుదల

$= 0.1 \times 1250 = 125.$

1 దశాబ్దం తర్వాత జనాభా

$= 1250 - 125 = 1125.$



రెండో దశాబ్దంలో తగ్గుదల

$= 0.1 \times 1125 = 112.5 \cong 112.$

2 దశాబ్దాల తర్వాత జనాభా

$= 1125 - 112 = 1013$

మూడో దశాబ్దంలో జనాభా తగ్గుదల

$= 0.1 \times 1013 = 101.3 \cong 101.$

3 దశాబ్దాల తర్వాత జనాభా

$= 1013 - 101 = 912.$

వరించగా (Rounding off), 3 దశాబ్దాల తర్వాత అంచనా వేయబడిన జనాభా సుమారు 910 ఉంటుంది అని చెప్పవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

క్లిష్టమైన శాతాలు (Tricky Percentages)

గణిత చర్చ

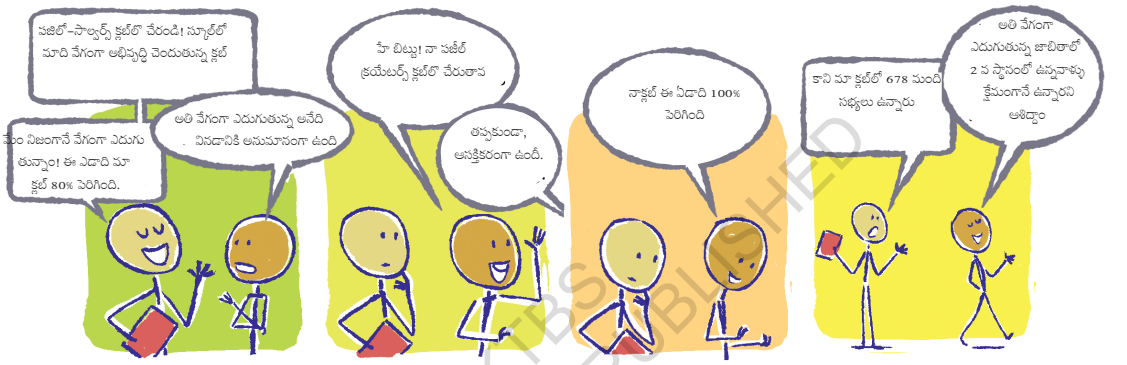
మీరు దేనిని ఎంచుకుంటారు? (Would You Rather?)

? మీరు ఒక పోటీలో గెలిచారు. నిర్వాహకులు మీకు ఎంచుకోవడానికి రెండు ఆప్షన్లను ఇస్తున్నారు:

ఆప్షన్ A = మీరు ₹100 డిపాజిట్ చేస్తారు మరియు మీకు ₹300 తిరిగి వస్తాయి.

ఆప్షన్ B = మీరు ₹1000 డిపాజిట్ చేస్తారు మరియు మీకు ₹1500 తిరిగి వస్తాయి.

ప్రతి ఆప్షన్ ఇచ్చే లాభం శాతం (percentage gain) ఎంత? మీరు ఏదైనా ఒక ఆప్షన్ను ఒకసారి మాత్రమే ఎంచుకోవచ్చు. మీరు ఏ ఆప్షనన్ను ఎంచుకుంటారు?ఎందుకు?



శాతాలను (percentages) పోల్చేటప్పుడు, మనం అంకెల విలువలను (absolute values) కాకుండా భిన్నాలు లేదా నిష్పత్తులను పోలుస్తున్నామని గుర్తుంచుకోవాలి.

? ఒక కిరాణా దుకాణం స్టాక్ క్లియరెన్స్ సేల్‌ను నిర్వహిస్తోంది. ₹150. కంటే ఎక్కువ కొనుగోలు చేసే వినియోగదారులు రెండు ఆప్షన్లలో ఒకదాన్ని ఎంచుకోవచ్చు - 20% తగ్గింపు లేదా 350 తగ్గింపు. మీరు ఈ క్రింది వస్తువులను కొనాలనుకుంటే ఏ ఆప్షన్ ను ఎంచుకుంటారు?

(i) ₹180 విలువైన వస్తువులు

(ii) ₹225 విలువైన వస్తువులు

(iii) ₹300 విలువైన వస్తువులు

? **ఉదాహరణ 12:** కేక్లీలీ (Cakely) అనే బేకరీ అన్ని కేక్‌లపై 30% + 20% తగ్గింపును అందిస్తోంది. కేకిపై (Cakify) అనే మరో బేకరీ అన్ని కేక్‌లపై 50% తగ్గింపును అందిస్తోంది. మీకు తక్కువ ధరలో కావాలంటే మీరు కేక్లీని ఎంచుకుంటారా లేదా కేకిపైని ఎంచుకుంటారా?



గణిత శాస్త్రపరంగా 30% + 20% అనేది 50% తో సమానమైనప్పటికీ, షాపింగ్లో 30% + 20% అంటే అది వరుస తగ్గింపు (compounding) అని అర్థం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



మీరు ₹200 విలువైన కేక్‌ను కొనాలనుకుంటున్నారని అనుకుందాం.

కేక్లీలీ (Cakely) 30% + 20%

మొదట 30% తగ్గింపును వర్తింపజేస్తే

కేక్ ధర ₹200 − ₹60 = ₹14 అవుతుంది.

ఆ తర్వాత ₹140 పై 20% తగ్గింపును వర్తింపజేస్తే

కేక్ ధర ₹140 − ₹28 = ₹112 అవుతుంది.

కేకి పై (Cakify) 50%

50% తగ్గింపు నేరుగా వర్తిస్తే కేక్ ధర ‘100 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 13: సురభి హోల్ సేలర్ (Wholesaler) నుండి వంట పాత్రలను కొనుగోలు చేసిన తర్వాత, అన్ని ఉత్పత్తులపై 50% లాభం (profit margin వేసుకుంది. మిగిలిపోయిన స్టాక్‌ను వదిలించుకోవడానికి, ఆమె 50% తగ్గింపు (discount) ఇచ్చి, ఎటువంటి నష్టం లేకుండా బయటపడాలని అనుకుంది.

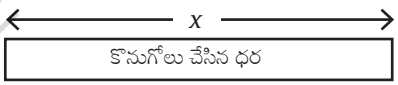
(i) ఆమెకు ఎటువంటి నష్టం కలగలేదని మీరు అనుకుంటున్నారా?

(ii) ఒకవేళ ఆమె తగ్గింపు తర్వాత వస్తువులను ₹12,000 కు అమ్మినట్లయితే, ఆమెకు ఎంత నష్టం వాటిల్లింది? నష్టం శాతం ఎంత?

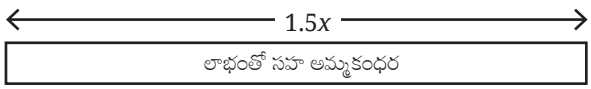
(iii) ఆమె వస్తువులను కొన్న ధరకే (అంటే లాభం లేదా నష్టం లేకుండా) అమ్మాలంటే ఆమె ఎంత శాతం తగ్గింపు ఇచ్చి ఉండాలి?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

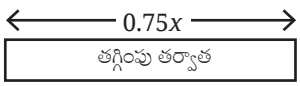
ముందుగా ఈ పరిస్థితిని ఒక నమూనాగా (Model) చూద్దాం:



హోల్‌సేలర్ నుండి ఆమె కొన్న వస్తువుల విలువ x అనుకుందాం.



50% లాభంతో కలిపి అమ్మకపు ధర (selling price) 1.5x అవుతుంది.



ఈ ధరపై 50% తగ్గింపు ఇస్తే దాని విలువ 0.75x అవుతుంది. తగ్గింపు తర్వాత.

(i) దీని అర్థం అమ్మకపు ధర కొన్న ధరలో $\frac{3}{4}$ వంతు మాత్రమే, అంటే 25% నష్టం.

(ii) ఆమె ₹12,000 విలువైన వస్తువులను అమ్మినట్లయితే

$$0.75x = 12{,}000$$

$$x = 16{,}000.$$

ఆమెకు ₹4000 నష్టం వచ్చింది

(iii) వస్తువులను కొన్న ధరకే అమ్మాలంటే, ఇవ్వాల్సిన తగ్గింపు:

$$1.5x - d \times (1.5x) = x$$

$$d = \frac{1}{3} = 0.33.$$

ఇవ్వాల్సిన తగ్గింపు 33.33% ఉండాలి.

అరీబా మరియు అరుణ్ దగ్గర కొన్ని గోళీలు (marbles) ఉన్నాయి. అరీబా ఇలా అంటోంది. "నా దగ్గర ఉన్న గోలీల సంఖ్య అరుణ్ దగ్గర ఉన్న వాటిలో 120%", అరుణ్ దగ్గర ఉన్న గోళీల సంఖ్యను అరీబా దగ్గర ఉన్న వాటితో పోల్చుతూ అరుణ్ చెప్పగలిగే సరైన వాక్యం ఏమిటి?

ప్రయత్నించండి

ఆలోచించండి (Figure it Out)

1. 2025లో బెంగళూరు జనాభా 2000 నాటి జనాభాలో దాదాపు 250%. ఒకవేళ 2000లో జనాభా 50 లక్షలు అయితే, 2025లో జనాభా ఎంత?

2. 2025లో ప్రపంచ జనాభా సుమారు 8.2 బిలియన్లు కొన్ని దేశాల 2025 నాటి జనాభా వివరాలు కింద ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రపంచ జనాభాలో వాటి సుమారు శాతం వాటాను సరిపోల్చండి (match చేయండి). (**సూచన:** ఈ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో (standard form) రాసి అంచనా వేయడం సహాయపడుతుంది.

జర్మనీ 83 మిలియన్లు	భారత దేశం 1.46 మిలియన్లు	బంగ్లాదేశ్ 175 మిలియన్లు	USA 347 మిలియన్లు

13%	8%	18%	10%	1%	35%	2%	2%	0.1%

3. ఒక మొబైల్ ఫోన్ ధర ₹8,250 ఆ ధరకు 18% GST జోడించబడింది. GSTతో కలిపి ఫోన్ యొక్క తుది ధరను క్రింది వాటిలో ఏ వ్యక్తీకరణలు (expressions) తెలియజేస్తాయి?

(i) $8250 + 18$

(ii) $8250 + 1800$

(iii) $8250 + \frac{18}{100}$

(iv) 8250×18

(v) 8250×1.18

(vi) $8250 + 8250 \times 0.18$

(vii) 1.8×8250

4. ఒక ప్రయోగశాలలో ఎలుకల జనాభాలో (మునుపటి నెలతో పోలిస్తే) నెలవారీ మార్పు శాతం ఇవ్వబడింది: మొదటి నెల మార్పు +5%, రెండో నెల మార్పు –2%, మరియు మూడో నెల మార్పు – 3% ప్రారంభ జనాభా p అయితే, ఈ క్రింది స్టేట్మెంట్లలో ఏవి నిజం?

(i) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా $p \times 0.05 \times 0.02 \times 0.03.$

(ii) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా $p \times 1.05 \times 0.98 \times 0.97.$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(iii) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా $p + 0.05 - 0.02 - 0.03$.

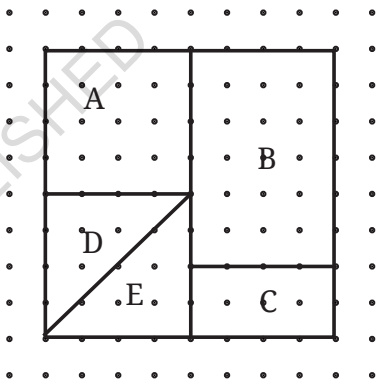
(iv) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా p గానే ఉంటుంది.

(v) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా p కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

(vi) మూడు నెలల తర్వాత జనాభా p కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

5. ఒక దుకాణదారుడు ప్రారంభంలో ఒక వస్తువు ధరపై 35% లాభం (profit margin) నిర్ణయించుకున్నాడు. అమ్మకాలు ఆశించినంతగా లేకపోవడంతో, అతను అమ్మకపు ధరపై 10% తగ్గింపు (discount ఇచ్చాడు. అతనికి లాభం వస్తుందా లేక నష్టం వస్తుందా? మీ సమాధానానికి కారణాలు తెలపండి.

6. పటంలో 'E' అని గుర్తించబడిన ప్రాంతం ఎంత శాతం వైశాల్యాన్ని ఆక్రమించి ఉంది?



7. 40 లో 5% ఎంత? 5 లో 40% ఎంత?

12 లో 25% ఎంత? 25 లో 12% ఎంత?60 లో 15% ఎంత? 15 లో 60% ఎంత? మీరు ఏమి గమనించారు? బీజగణిత (algebra) ఉపయోగించి, y లో $x\%$ *మరియు* x లో $y\%$ లను పోలుస్తూ మీరు ఒక సాధారణ ప్రకటనను చేసి దానిని నిరూపించగలరా?

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

8. ఒక పాఠశాల తన విద్యార్థుల కోసం ఒక విహారయాత్రను (excursion) ఏర్పాటు చేస్తోంది. వారిలో 40% మంది 8వ తరగతి విద్యార్థులు మరియు మిగిలిన వారు 9వ తరగతి విద్యార్థులు. ఈ 8వ తరగతి విద్యార్థులలో 60% మంది బాలికలు సూచన: చిత్తు పటం గీయడం సహాయపడుతుంది).

(i) విహారయాత్రకు వెళ్తున్న మొత్తం విద్యార్థులలో 8వ తరగతి బాలికల శాతం ఎంత?

(ii) విహారయాత్రకు వెళ్తున్న మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య 160 అయితే, వారిలో 8వ తరగతి బాలికలు ఎంతమంది?

9. ఒక దుకాణదారుడు 3 పెన్సిళ్ల అమ్మకపు ధర 5 పెన్సిళ్ల కొన్న ధరకు సమానంగా ఉండేలా పెన్సిళ్లను అమ్ముతాడు. అతనికి లాభం వస్తుందా లేక నష్టం వస్తుందా?అతని లాభం లేదా నష్టం శాతం ఎంత?

ప్రయత్నించండి

10. బస్సు ఛార్జీలు గత సంవత్సరం 3% మరియు ఈ సంవత్సరం 4% పెరిగాయి. గత 2 సంవత్సరాలలో మొత్తం ధర పెరుగుదల శాతం ఎంత?

11. ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 10% పెరిగింది మరియు వైశాల్యం మారలేదు. అయితే దాని వెడల్పు (ఖచ్చితంగా) ఎంత శాతం తగ్గుతుంది?

12. 65 గ్రాముల చిప్స్ ప్యాకెట్లోని పదార్థాల శాతం చిత్రంలో చూపబడింది. ఈ ప్యాకెట్లో ప్రతి పదార్థం ఎంత బరువు ఉంటుందో కనుగొనండి.



13. మూడు దుకాణాలు ఒకే రకమైన వస్తువులను ఒకే ధరకు అమ్ముతున్నాయి. ఆ దుకాణాలు ఇచ్చే ఆఫర్లు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

షాప్ A: "1 కొనండి 1 ఉచితం"

షాప్ B: "2 కొనండి 1 ఉచితం"

షాప్ C: "3 కొనండి 1 ఉచితం"

క్రింది వాటికి సమాధానం ఇవ్వండి.

(i) ఒక వస్తువు ధర ₹100 అయితే, ప్రతి దుకాణంలో వస్తువు యొక్క నికర (effective) ధర ఎంత? చౌకైన ధర నుండి ఖరీదైన ధర క్రమంలో దుకాణాలను అమర్చండి.

(ii) ప్రతి దుకాణానికి, వస్తువులపై లభించే తగ్గింపు (discount) శాతాన్ని లెక్కించండి.

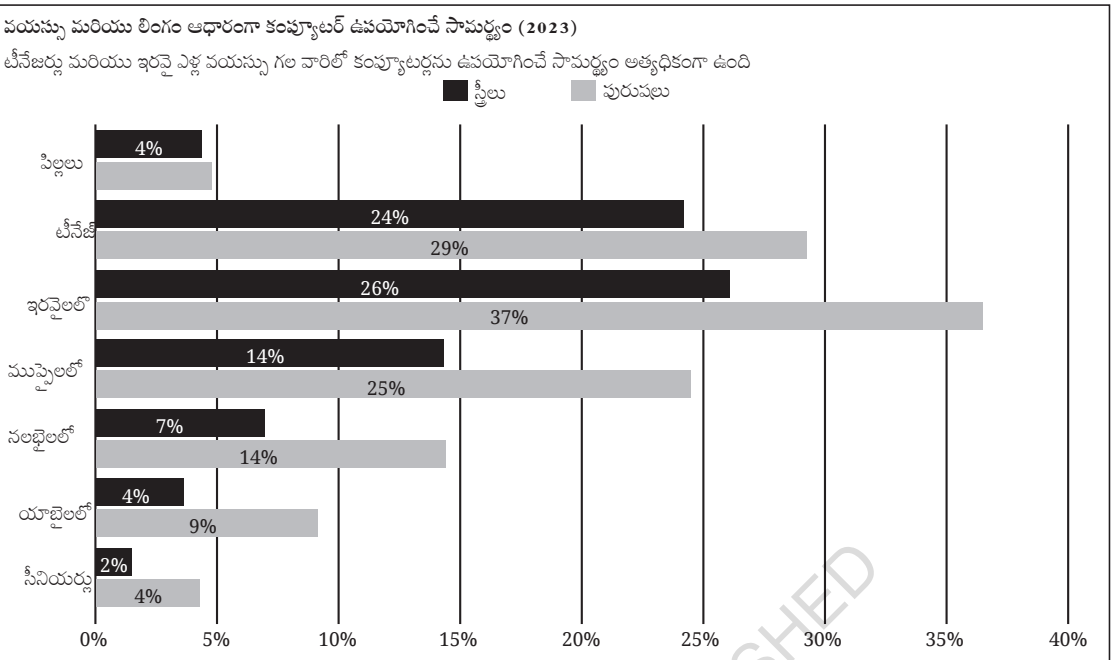
(**సూచన**: ఉచితంగా వచ్చే వస్తువులను మీకు లభించే మొత్తం వస్తువులతో పోల్చండి).

(iii) మీకు 4 వస్తువులు కావాలి అనుకుందాం. మీరు ఏ దుకాణాన్ని ఎంచుకుంటారు?ఎందుకు?

14. ఒక గదిలో 100 మంది ఉన్నారు. వారిలో 99% మంది ఎడమ చేతి వాటం (left-handed) ఉన్నవారు. ఈ శాతాన్ని 98% కి తగ్గించాలంటే ఎంతమంది ఎడమ చేతి వాటం ఉన్నవారు గదిని విడిచి వెళ్ళాలి?

15. క్రింది గ్రాఫ్ను గమనించండి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ఆధారం: *NSS రౌండ్ 79,* సమగ్ర వార్షిక మాడ్యులర్ సర్వే నేషనల్ స్టాటిస్టిక్స్ ఆఫీస్

Data For India

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గ్రాఫ్ ఆధారంగా, క్రింది వాటిలో ఏ ప్రకటన(లు) సరైనవి?.

(i) అన్ని వయస్సుల వారిలో ఇరవై ఏళ్ల వయస్సు వారు అత్యంత కంప్యూటర్ అక్షరాస్యత కలిగిన వారు.

(ii) అన్ని వయస్సుల వారిలో కంప్యూటర్ సామర్థ్యంలో మహిళలు వెనుకబడి ఉన్నారు.

(iii) టీనేజర్ల కంటే ఇరవై ఏళ్ల వయస్సు వారు ఎక్కువ మంది ఉన్నారు.

(iv) ముప్పై ఏళ్ల వయస్సు గల వారిలో నాలుగో వంతు కంటే ఎక్కువ మంది కంప్యూటర్లను ఉపయోగించగలరు.

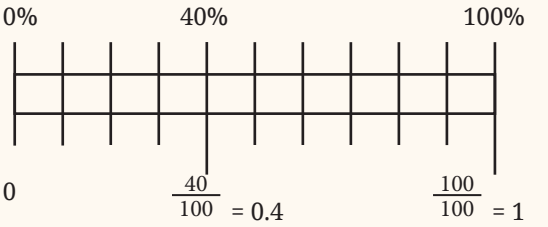
(v) 60 ఏళ్లు మరియు అంతకంటే ఎక్కువ వయస్సు ఉన్నవారిలో 10 మందిలో ఒకరి కంటే తక్కువ మంది మాత్రమే కంప్యూటర్లను ఉపయోగించగలరు.

(vi) ఇరవై ఏళ్ల వయస్సు గల వారిలో సగం మంది కంప్యూటర్లను ఉపయోగించగలరు.

సారాంశం

- శాతాలు (Percentages) మన దైనందిన జీవితంలో విస్తృతంగా ఉపయోగించబడతాయి.
- శాతాలు అంటే హారం (denominator) 100గా కలిగిన భిన్నాలు.శాతాలను % అనే గుర్తుతో సూచిస్తారు, దీనిని 'పర్ సెంట్' అని పలుకుతారు

$x\% = \frac{x}{100}$.



- భిన్నాలను శాతాలుగా మరియు శాతాలను భిన్నాలుగా మార్చవచ్చు. అదేవిధంగా దశాంశాలను కూడా శాతాలుగా మరియు శాతాలను దశాంశాలుగా మార్చవచ్చు. ఉదాహరణకు: $\frac{4}{10} = 0.4 = 40\ \%$.
- మొత్తం పరిమాణంలో ఒక నిర్ధిష్ట శాతం ఇవ్వబడినప్పుడు దాని ఖచ్చితమైన సంఖ్యను కనుగొనడం మనం నేర్చుకున్నాము
- ఒక పరిమాణంలోని భాగాలు మనకు నిష్పత్తుల రూపంలో ఇచ్చినప్పుడు, వాటిని శాతాలుగా ఎలా మార్చాలో మనం చూశాము.
- ఒక నిర్ధిష్ట పరిమాణంలో వచ్చే పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను కూడా శాతంలోవ్యక్తపరచవచ్చు.
- లావాదేవీలలో వచ్చే లాభాలు లేదా నష్టాలు మరియు పన్ను రేట్లను శాతాల రూపంలోవ్యక్తపరచవచ్చు.
- చక్రవడ్డీ (compounding) పద్ధతిలో ఒక పరిమాణం లేదా సంఖ్య ఎలా పెరుగుతుందోమనం చూశాము. వడ్డీ రేట్లుచక్రవడ్డీకి ఒక సాధారణ ఉదాహరణ. p అసలు, r వడ్డీ రేటు మరియు t కాలపరిమితి అయితే, మెచ్యూరిటీ గడువుతర్వాత వచ్చే మొత్తం సొమ్ము:

చక్రవడ్డీ లెన ప్పుడు (Without compounding $p\ (1 + rt)$ అన్ని కాలాలకు p అసలు స్థిరంగా ఉంటుంది.	చక్రవడ్డీతో (With compounding) $p \times (1 + r) \times (1 + r) \times \cdots \times (1 + r) = p\ (1 + r)^t$ 

- ఒక పరిస్థితని లేదా సమస్యను తరుచుగా ఒక చిత్తు పటం (rough diagram) ద్వారా వివరించి సాధించవచ్చు. శాతాలకు సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించడానికి అంచనా వేయడం మరియు నొటి లెక్కలు (mental computations) చేయడం మనం నేర్చుకున్నాము.

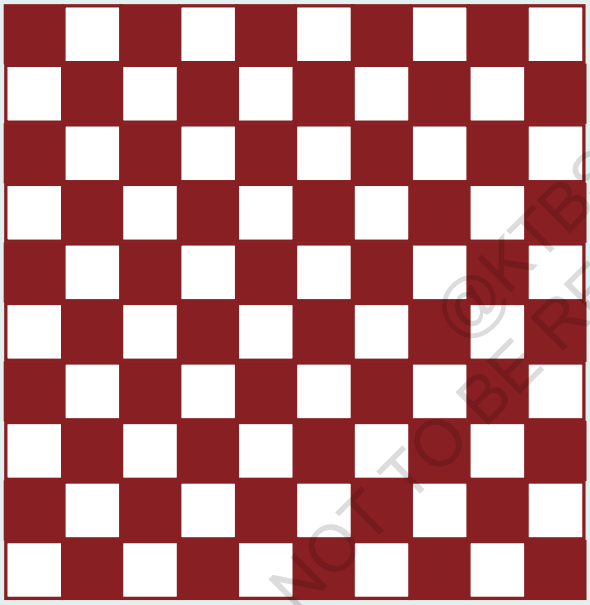
NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

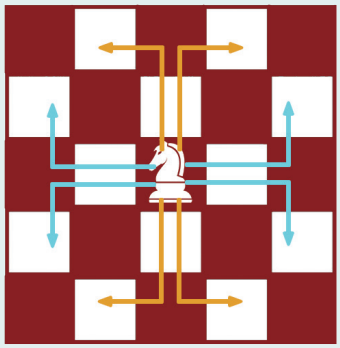


ఇది పజిల్ సమయం

ప్రశాంతమైన గుర్రాలు

చదరంగం బోర్డు (chess board పై 8 గుర్రాలను (knights), ఏ గుర్రం మరొక గుర్రాన్ని అటాక్ చేయని విధంగా అమర్చండి. ఒక గుర్రం 'L' ఆకారంలో కదులుతుంది. ఇది (ఎ) నిలువుగా రెండు గడులు మరియు అడ్డంగా ఒక గడువు, లేదా (బి) అడ్డంగా రెండు గడులు మరియు నిలువుగా ఒక గడువు కదలగలదు. గుర్రం కదలగల సాధ్యమైన మార్గాలు క్రింద చూపబడ్డాయి.





© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



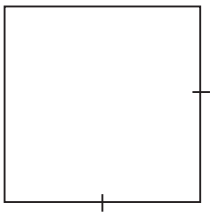
9 బౌధాయన – పైథాగరస్ సిద్ధాంతం
The Baudhayana Pythagoras Theorem

S2U2A5

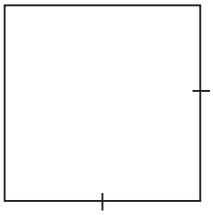
9.1 చదరాన్ని రెట్టింపు చేయడం

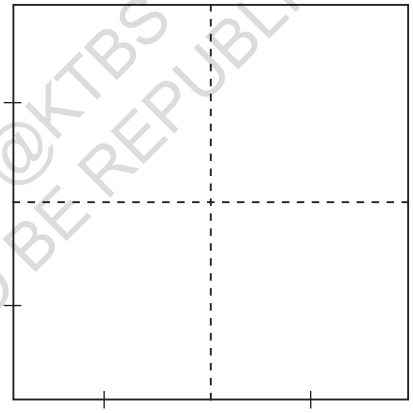
బౌధాయనుడు సుల్బ-సూత్రం క్రీ.పూ సుమారు 800)లో బౌధాయనుడు ఈ క్రింది ప్రశ్నను పరిశీలించడం.

? ఇచ్చిన చదరపు విస్తీర్ణానికి రెట్టింపు విస్తీరణం గల చదరాన్ని ఎలా నిర్మించాలి?



మొదటగా, చదరపు ప్రతి భుజం పొడవును రెండింతలు చేస్తే సరిపోతుందని పించవచ్చు. అలా చేసినపుడు కొత్త చదరపు విస్తీర్ణం అసలు చదరపు విస్తీర్ణానికి రెట్టింపు అవుతుందా?





@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

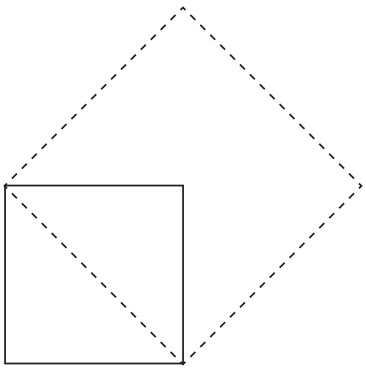
కొంచెం ఆలోచిస్తే, కొత్త చదరపు వైశాల్యం $2 \times 2 = 4$ రెట్లు అవుతుందని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది..

అంటే అది అసలు చదరపు వైశాల్యానికి నాలుగు రెట్లు అవుతుంది అయితే, వైశాల్యం రెట్టంపు అయ్యేలా చదరాన్ని ఎలా తయారు చేయాలి?

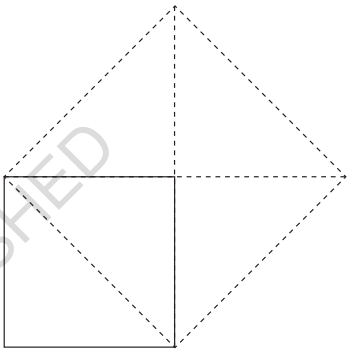
ఈ ప్రశ్నకు బౌధాయనుడు తన సుల్బ-సూత్రం (శ్లోకం 1.9) లో ఒక అందమైన సమాధానం ఇచ్చాడు.

చదరపు కర్ణం పై నిర్మించిన చదరం, అసలు చదరపు వైశాల్యానికి రెట్టింపు వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

బౌధాయనుడు చెప్పినట్లుగా, ఇక్కడ ముఖ్యమైన విషయం ఏమిటంటే
అసలు చదరపు కర్ణంపై ఒక కొత్త చదరాన్ని నిర్మించడం



? కొత్తగా గీతలతో చూపిన చదరానికి అసలు చదరపు వైశాల్యానికి రెండింతలు ఎందుకు ఉంటుంది?



సుల్బ-సూత్రంలోని అనేక నిర్మాణాలలో అవసరమైనప్పుడు నిర్మించడానికి సౌకర్యంగా ఉండే విధంగా బౌదాయనుడు 'తూర్పు-పడమర' మరియు 'ఉత్తర-దక్షిణ' రేఖలను ఉపయోగిస్తాడు. అంటే ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉండే సమాంతర మరియు లంబ రేఖలు. ఈ విధంగా కొన్ని సమాంతర రేఖలు మరియు లంబరేఖలు గీయగలరా? అలా గీసినపుడు కొత్త చదరపు వైశాల్యంనకు రెండింతలు అవుతుందని చూడగలరా? కుడివైపు చూపినట్లుగా మీరుకొన్ని సమాంతర మరియు లంబరేఖలు గీయవచ్చు.

? అసలు చదరపు యొక్క లంబ మరియు సమాంతర భుజాల పొడిగింపులు చుక్కల గీతల చదరపు శీర్ష బిందువుల గుండా ఎందుకు వెళ్ళాలి?



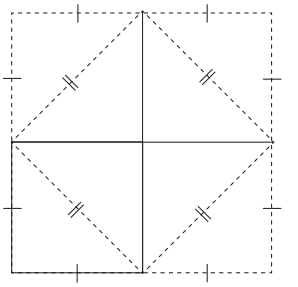
(సూచన : చదరపు యొక్క కర్ణం లక్షణం ప్రకారం, ఒక కోణాన్ని సమభాగాలుగా విభజించే రేఖ ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువు గుండా వెళ్తుంది. అసలు చదరపు యొక్క లంబ మరియు సమాంతర భుజాలు చుక్కల చదరపు రెండు కోణాలను ఎలా సమంగా విభజిస్తాయో వివరించండి*)*

అందువల్ల కొత్త చదరానికి అసలు చదరపు కంటే రెండింతల వైశాల్యం ఉంటుంది ఎందుకంటే అసలు చదరం రెండు బిన్న త్రిభుజాలతో తయారవు తుంది, కాగా కొత్తచదరపు నాలుగు చిన్న త్రిభుజాలతో తయారవుతుంది.

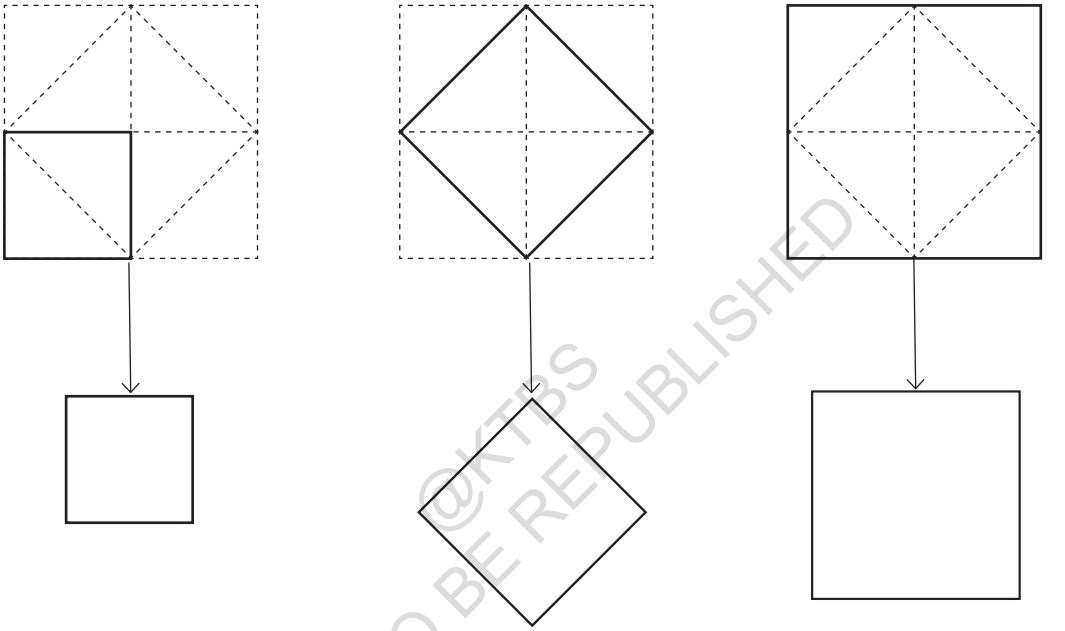
? అంతేకాక, ఈ చిన్న త్రిభుజాలన్నీ ఒకదానితో ఒకటి సర్వసమానం కావడం ఎందుకు? వివరించగలరా?

ఇంకా కొన్ని సమాంతర మరియు లంబరేఖలను చేర్చితే ఈ పరిస్థితి మరింత స్పష్టంగా అర్థమవుతుంది.

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED



కాబట్టి మనం క్రింది చతురస్రాల క్రమాన్ని రూపొందించవచ్చు.

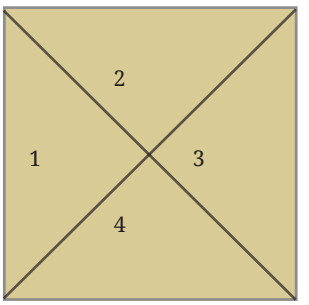


ప్రతి చతురస్రం ముందు చతురస్రం కంటే రెండింతల వైశాల్యం కలిగి ఉంటుంది. ఎందుకంటే అవి వరుసగా 2, 4 మరియు 8 చిన్న త్రిభుజాలతో రూపొందించబడ్డాయి.

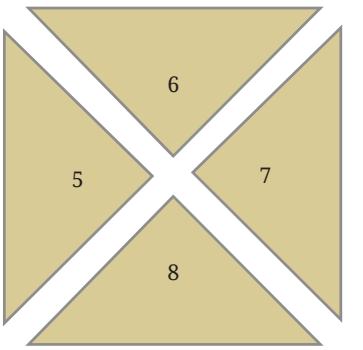
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కాగితాన్ని ఉపయోగించి చతురస్రాన్ని రెండింతలు చేయడం

(?) కాగితంతో తయారు చేసిన రెండు ఒకే విధమైన చతురస్రాలను కత్తిరించండి కింద చూపిన విధంగా గీయండి, సంఖ్యలు పెట్టండి మరియు కత్తిరించండి.



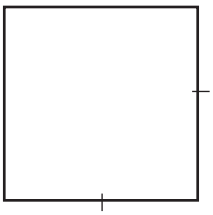
చతురస్రం 1



అనురూపచతురస్రం 2

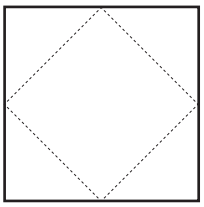
ఇప్పుడు 5, 6, 7 మరియు 8 భాగాలను చతురస్రం 1 చుట్టూ అమర్చండి అలా చెస్తే రెండింతల వైశాల్యం కలిగిన ఒక చతురస్రం లభిస్తుంది.

9.2 చతురస్రాన్ని అర్ధం చేయడం

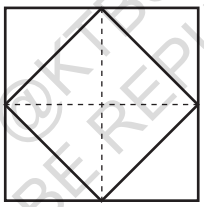


ఇపుడు మనకు ఒక చతురస్రం ఇవ్వబడిందని అనుకుందాం. ఆ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యానికి సగం మాత్రమే ఉన్న మరో చతురస్రాన్ని నిర్మించాలి అనుకుందాం మీరు అది ఎలా చేస్తారూ?

దానికి ఒక విధానం, గత విభాగంలోని నిర్మాణాన్ని తిరగబెట్టాం. పెద్ద చతురస్రం లోపల వాలుగా ఉన్న చిన్న చతురస్రాన్ని గీస్తాం.



లోపలి చిన్న చతురస్రం పెద్ద చతరస్రం కంటే సగం వైశాల్యం ఎందుకు కలిగి ఉంటుంది మళ్ళీ, తూర్పు పడమర మరియు ఉత్తర–దక్షిణ రేఖలను చేర్చితే దీనిని వివరించవచ్చు.



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

కాగితాన్ని ఉపయోగించి చతురస్రాన్ని సగం చేయడం

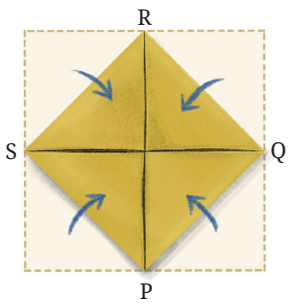
ఒక కాగితపు ముక్క–నుండి ఒక చతురస్రాన్ని కత్తిరించండి. ఇపుడు, మొదటి చతురస్ర వైశాల్యానికి సగం వైశాల్యం కలిగిన మరో చతురస్రాన్ని తయారు చేయండి.

భుజం పొడవు సగం ఉన్న చతురస్రానికి వైశాల్యం కూడా సగమే అవుతుందా? ఎందుకుకాదు?

ఇలాంటి ఎన్ని చతురస్రాలు అసలు చతురస్రంలో సరిపోతాయి?

చిత్రంలో చూపిన విధంగా కాగితపు చతురస్రాన్ని లోపలికి మడచండి. మడత రేఖలు పక్కల మధ్య బిందువుల గుండా వెళ్లేలా చేయండి. PQRS అనేది కావలసిన సగం వైశాల్యం గల చతురస్రం.



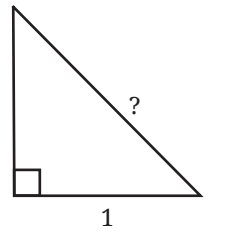


? PQRS ఎందుకు ఒక చతురస్రం? దాని వైశాల్యం అసలు కాగితానికి సగం ఎందుకు?

QS మరియు PR లను కలిపి, ఏర్పడే వేర్వేరు కోణాలను గుర్తించి, ఆపై త్రిభుజాల సారూప్యత ఉపయోగించి వివరించండి.

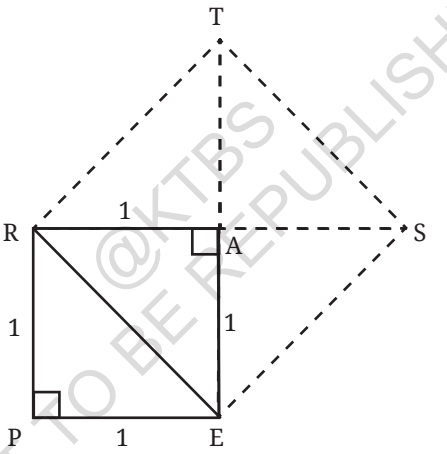
9.3 సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం

లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజాన్ని **కర్ణం** అంటారు



? ఈ సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణాన్ని కనుగొనండి.

భుజం పొడవు 1 యూనిట్ గల ఒక చతురస్రం రెండు ఇలాంటి సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాలతో ఏర్పడుతుందని మనకు తెలుసు. అలాగే, ఈ చతురస్రం యొక్క కర్ణం పై నిర్మించిన చతురస్రం వైశాల్యం అసలు చతురస్ర వైశాల్యానికి రెండింతలు ఉంటుందని కూడా మనకు తెలుసు.



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఇంతవరకు మనకు కర్ణం పొడవు తెలీదు, కానీ మనకు దాని మీద ఉన్న చతురస్రం REST వైశాల్యం తెలుసు.

REST వైశాల్యం = 2 × PEAR వైశాల్యం

= 2 × 1 = 2 చ. యూ

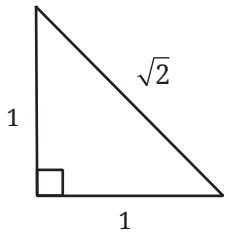
మనకు చతురస్రం యొక్క భుజం మరియు వైశాల్యంల మధ్య సంబంధం తెలుసు c అనేది కర్ణం ER అయితే అపుడు

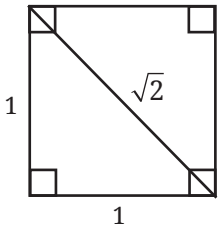
REST వైశాల్యం $= c \times c = c^2$.

అందువలన $c^2 = 2$.

కావున $c = \sqrt{2}$.

అందువలన కర్ణం పొడవు $\sqrt{2}$ యూనిట్లు





ఈ అధ్యాయంలోని మిగితా భాగంలో, ప్రత్యేకంగా చెప్పనంత వరకు అన్ని పొడవులు ఒకే స్థిర యూనిట్‌లో ఉన్నట్లు భావిస్తాము.

? $\sqrt{2}$ విలువ ఎంత?

$\sqrt{2}$ యొక్క దశాంశరూపం

$\sqrt{2}$ యొక్క దశాంశ రూపాన్ని క్రింది విధంగా కనుగొనవచ్చు.

? $\sqrt{2}$ అనేది 1 కంటే పెద్దదా?

భుజాల పొడవు 1 యూనిట్ ఉన్న చతురస్ర వైశాల్యం 1 చ.యూ భుజాల పొడవు $\sqrt{2}$ ఉన్న చతురస్ర వైశాల్యం 2 చ.యూ.

కాబట్టి $1 < \sqrt{2}$.

అంటే, $1^2 = 1$ మరియు $\sqrt{2}^2 = 2$ మరియు $2^2 = 4$.

అందువల్ల $\sqrt{2} < 2$.

అందువల్ల $1 < \sqrt{2} < 2$

1 ని దిగుహద్దు, 2 ను ఎగువ హద్దు అని అంటారు.

? $\sqrt{2}$, 2 కంటే చిన్నదా లేక పెద్దదా?

భుజం పొడవు 2 యూనిట్లు ఉన్న చతురస్రం వైశాల్యం 4 చ.యూ భుజం పొడవు $\sqrt{2}$ఉన్న చతురస్ర వైశాల్యం 2 చ.యూ.

కాబట్టి $\sqrt{2} < 2$.

అందువల్ల $1 < \sqrt{2} < 2$.

ఇక్కడ 1 ని $\sqrt{2}$ యొక్క దిగువ హద్దు, 2ను ఎగువ హద్దు అంటారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? $\sqrt{2}$ కు మరింత సమీప హద్దులను కనుగొనగలమా?

$1.1^2 = 1.21$
$1.2^2 = 1.44$
$1.3^2 = 1.69$
$1.4^2 = 1.96$
$1.5^2 = 2.25$

అందువల్ల

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$1.41^2 = 1.9881$
$1.42^2 = 2.0164$

అందువల్ల

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$1.411^2 = 1.990921$
$1.412^2 = 1.993744$
$1.413^2 = 1.996569$
$1.414^2 = 1.999396$
$1.415^2 = 2.002225$

అందువల్ల

$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

? అంతమొందే దశాంశం ఎపుడైనా వస్తుందా? దీని వర్గం అయితే 2 ఉంటుందో దానికి

$\sqrt{2}$ ఒకఅంతమొందేదశాంశంతో ప్రారంభమైతే,ఉదాహరణకు $1.414...$ లాంటిరూపంలో ఉంటే,దానిచదరపు విలువ కూడా ఒక నిర్ధిష్టఅంకె తర్వాత ముగియాలి. కానీ అలా జరగదు. ఉదాహరణకు, $\sqrt{2}$ కూడా $1.414...4$ లాంటి రూపంలో ఉంటే, దాని వర్గం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

□ . □ □ ... □ 6

అందువల్ల అంత మొందే దశాంశం 2 లేదా $2.000..$ లాంటివి దాని వర్గంలో కలిగి ఉండవు.

కాబట్టి $\sqrt{2}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ ఎప్పటికీ కొన సాగుతుంది అంటే అంతమొందని దశాంశం.

? $\sqrt{2}$ ను $\frac{m}{n}$, అనే భిన్నంగా వ్యక్తపరచగలమా ?

ప్రయత్నించండి

ఇక్కడ m, n లు లెక్కించే సంఖ్యలు

$\sqrt{2}$ ను $\frac{m}{n}$ రూపంలో వ్యక్తపరచగలిగితే అపుడు

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2.$$

ఒక వర్గ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజనలో ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య సరిసంఖ్య సార్లు వస్తుందని గుర్తు చేసుకోండి. కాబట్టి $2n^2 = m^2$ అనే సమీకరణంలో, ఎడమ వైపున ప్రధాన సంఖ్య 2 బేసి సంఖ్య సార్లు వస్తుంది కుడివైపున సరిసంఖ్య సార్లు వస్తుంది. ఇది అసాధ్యం. అందువల్ల $\sqrt{2}$ ను $\frac{m}{n}$ అనే భిన్నంగా వ్యక్తపరిచలేం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

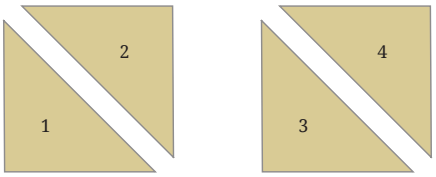
$\sqrt{2}$ను $\frac{m}{n}$ రూపంలో వ్యక్తపరచలేమని చెప్పే ఈ అందమైన నిరూపణను యూక్లిడ్ తన *Elements* అనే గ్రంథంలో (క్రీ.పూ. 300 BCE). ఇచ్చాడు. దీనిని మనం తరువాతి తరగతిలో మరింత వివరంగా చర్చిస్తాం.

అందువల్ల $\sqrt{2}$ ను అంతమొందే దశాంశం లేదా ఒక భిన్నంగా వ్యక్తపరచలేము, కానీ దానిని అంతం చెందని దశాంశంగా భావించవచ్చు $\sqrt{2}$ = 1.41421356...



దీన్ని గుర్తించండి

1. ఇంతకు ముందు, ఇచ్చిన వర్గం కంటే రెట్టింపు వైశాల్యం గల చతురస్రం తయారు చేయడాన్ని చూశాం. రెండు ఒకే విధమైన చతురస్రాకార కాగితాలను క్రింది విధంగా కత్తిరించడం ద్వారా దీనిని చేయడానికి మరొక విధానం ఉంది.



ఈ ముక్కలను అమర్చడం ద్వారా ఏ చతురస్ర కాగితం కంటే రెట్టింపు వైశాల్యం గల చతురస్రాన్ని తయారు చేయగలరా?

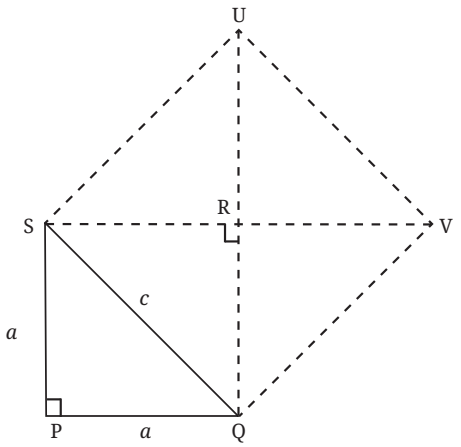
2. ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజంలో సమాన భుజం పొడవు ఇవ్వబడింది. కర్ణం పొడవును కనుగొనండి దశాంశ బిందువు తర్వాత కనీసం ఒక అంకె వచ్చేలా కర్ణం పొడవుకు హద్దులను కనుగొనండి.

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 9

3. లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజ కర్ణం 10, మిగతా రెండు భుజాల కొలత ఎంత? (సూచన : రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను అమర్చడం వల్ల ఏర్పడిన చతురస్ర వైశాల్యంను కనుగొనండి)

సాధారణ సాధన :

ఒక చతురస్ర వైశాల్యం మరియు దానికర్ణం పై ఉన్న చతురస్రం మధ్య సంబంధాన్ని కర్ణం మరియు సమద్విబాహు లంబ కోణ త్రిభుజంలోని ఇతర రెండు భుజాల మధ్య సాధారణ సంబంధాన్ని కనుగొనడానికి ఉపయోగించవచ్చు.



© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

a సమాన భుజాల పొడవు మరియు c కర్ణం పొడవు అనుకుందాం

SQVU వైశాల్యం = 2 × PQRS వైశాల్యం

కాబట్టి $c^2 = 2a^2$.

a తెలిసినపుడు c కనుగొనడానికి లేదా c తెలిసినపుడు a కనుగొనడానికి ఈ సూత్రం ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : సమాన భుజాల పొడవు 12 కలిగిన లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క కర్ణాన్ని కనుగొనండి.

మనకు $a = 12$ ఉంది. సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$c = \sqrt{2\times12^2} = \sqrt{288}$ మనకు లభిస్తుంది.

మనకు $16^2 = 256$ మరియు $17^2 = 289$ అని తెలుసు

కాబట్టి, $\sqrt{288}$ అనేది 16 మరియు 17 ల మధ్య ఉంటుంది.

సమాన భుజాలు 12 యూనిట్లు కలిగిన సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజం కర్ణం 16 మరియు 17 యూనిట్ల మధ్య ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 2 : లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజ కర్ణం $\sqrt{72}$ అయితే దాని మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనండి.

మనకు $c = \sqrt{72}$ ఉంది. సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$c^2 = 2a^2$ మనకు లభిస్తుంది

కాబట్టి $(\sqrt{72})^2 = 2a^2$

$72 = 2a^2$.

అందువల్ల $a^2 = \frac{72}{2} = 36$.

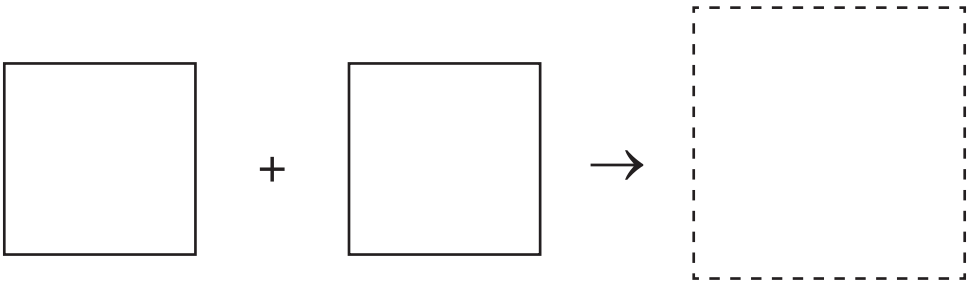
కాబట్టి, $a = \sqrt{36} = 6$.

అందువల్ల మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులు 6 సూత్రాన్ని ఉపయోగించి పేజీ సంఖ్య 39 లోని జవాబును సరి చూండండి.

9.4 రెండు వేర్వేరు చతురస్రాలను కలపడం

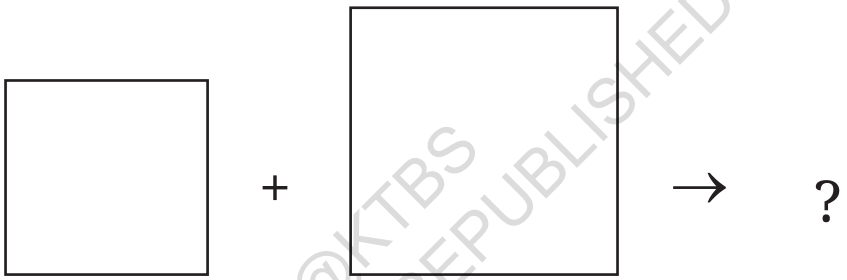
ఒకే చతురస్రం యొక్క రెండు కాపీలను కలపడం ద్వారా రెండు చిన్న చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం వైశాల్యంగా ఉంటే పెద్ద చతురస్రాన్ని ఎలా తయారు చేయాలో మనం మనుపటి విభాగాలలో చూశాం.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



పెద్ద చతురస్రం యొక్క
భుజాల పొడవు అనేది చిన్న చతురస్రాలలో దేని యొక్క కర్ణం పొడవు అవుతుంది?

? మనం వేర్వేరు పరిమాణాలు కలిగిన రెండు చతురస్రాలను కలిపి రెండు చిన్న చతురస్రాల మొత్తం వైశాల్యం కలిగిన పెద్ద చతురస్రాన్ని తయారు చేయాలను కుంటే ఏమి చేయాలి?

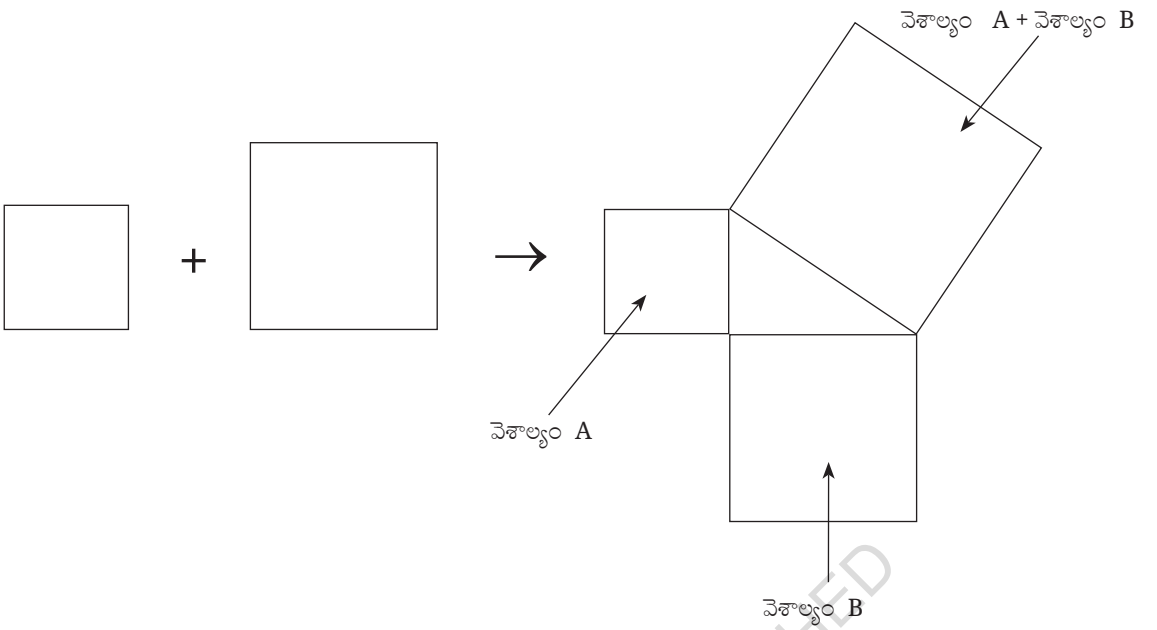


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

తన సుల్బ సూత్రంలో (శ్లోకం 1.12) బౌధాయనుడు రెండు వేర్వేరు పరిమాణాల చతురస్రాలను కలపడం అనే ఈ సాధారణ సమస్యకు నిజంగా అద్భుతమైన పరిష్కారాన్ని కూడా ఇస్తాడు. అతను ఇలా రాసాడు.

కర్ణం ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం రెండు భుజాల ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం.

అంటే రెండు వేర్వేరు చతురస్రాలను కలపడానికి, రెండు చతురస్రాల భుజాల పొడవులను లంబ భుజాలుగా కలిగి ఉన్న లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తయారు చేయండి. ఈ లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవు కర్ణం అయిన చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం అసలు రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం అవుతుంది.



? బౌధాయన పద్ధతి ఎందుకు పనిచేస్తుంది?

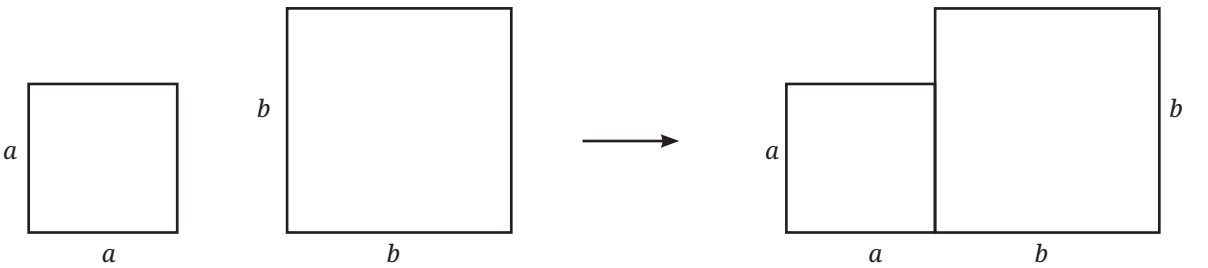
? రెండు చతురస్రాలు ఒకే పరిమాణంలో ఉన్న సందర్భంలో ఈ పద్ధతి ఎందుకు పనిచేస్తుందో అర్థం చేసుకున్నారా? ఇంతకు ముందు మనం ఉపయోగించిన రెండు ఒకే పరిమాణం గల చతురస్రాలను కలిపి పెద్ద చతురస్రంగా మార్చడానికి ఉపయోగించిన పద్ధతిలో ఇది ఏకీభవిస్తుందా?

తర్వాత తన సుల్బ సూత్రంలో (శ్లోకం 2.1) బౌధాయన ఈ పద్ధతి సాధారణంగా ఎందుకు పని చేస్తుందో వివరించడానికి సహాయపడే మరొక శ్లోకాన్ని అందిస్తాడు.

వేర్వేరు చతురస్రాలను కలపడానికి చిన్న చతురస్రం యొక్క ఒక వైపును ఉపయోగించి పెద్ద చతురస్రం యొక్క దీర్ఘ చతురస్రాకార భాగాన్ని గుర్తించండి. ఈ దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణం అనేది చిన్న చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానమైన వైశాల్యం కలిగిన ఒక వైపు.

బౌధాయన సూచనలను పాటిద్దాం

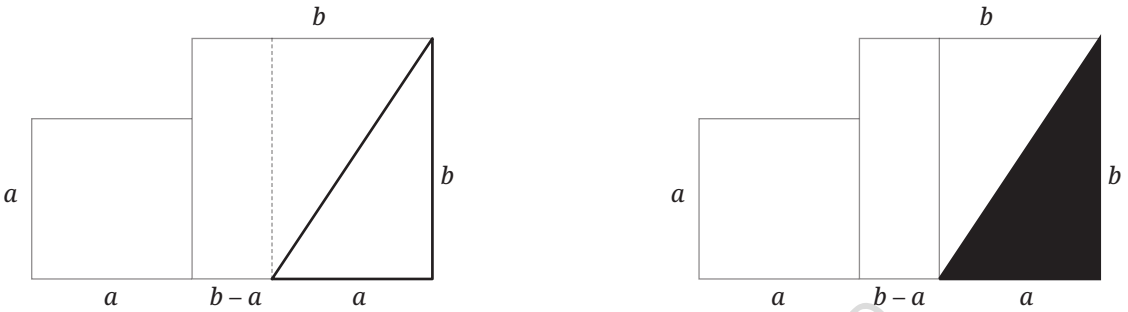
- రెండు చతురస్రాలను కలపండి.



© KSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

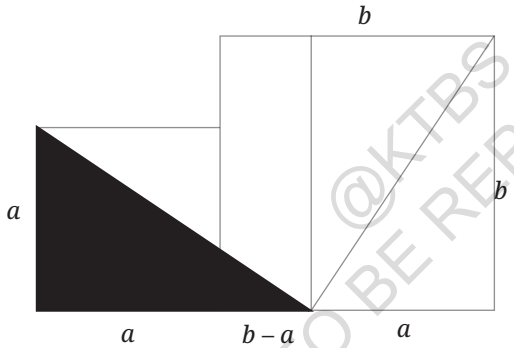
- చిన్న చతుర్భుజం యొక్క ఒక వైపును ఉపయోగించి పెద్ద చతుర్భుజం యొక్క దీర్ఘ చతురస్రాకార భాగాన్ని గుర్తించండి మరియు దాని కర్ణాన్ని గీయండి. ఇలా చేయడం ద్వారా, మనకు a మరియు b లంబ భుజాలతో లంబ కోణ త్రిభుజం లభిస్తుంది.

1.

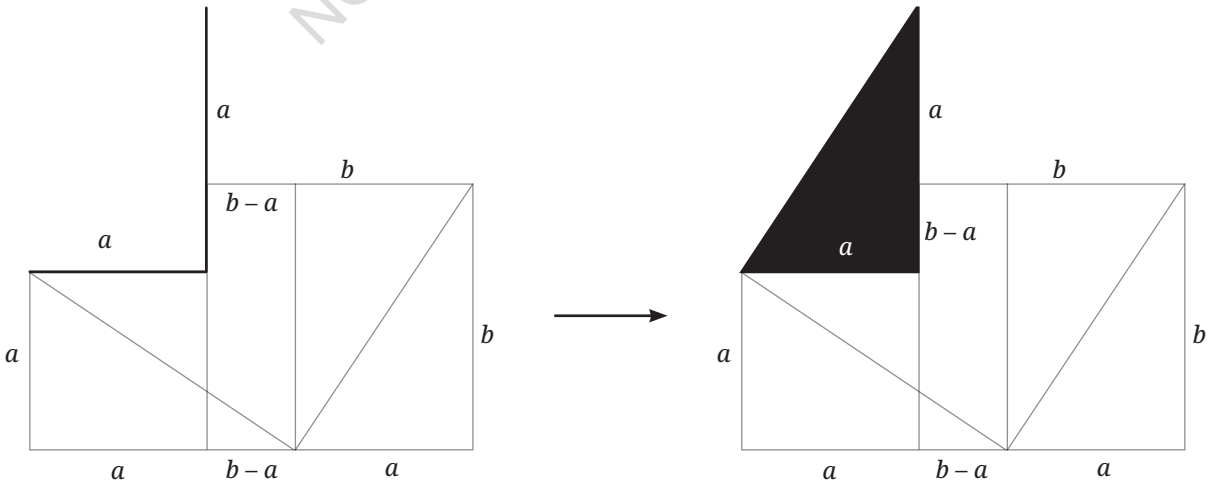


- అటువంటి లంబకోణ త్రిభుజం కర్ణం b పైన 4-వైపుల మూడు అటువంటి లంబకోణ త్రిభుజాలను గీయండి.

2.

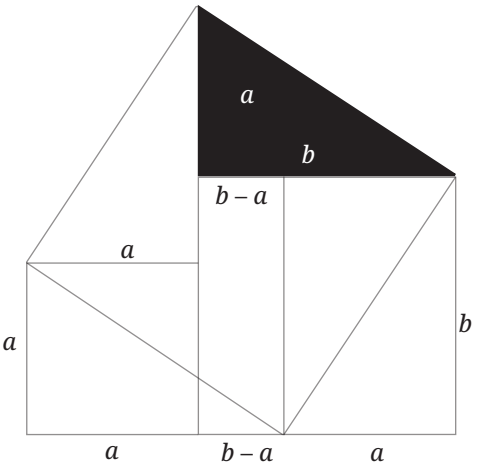


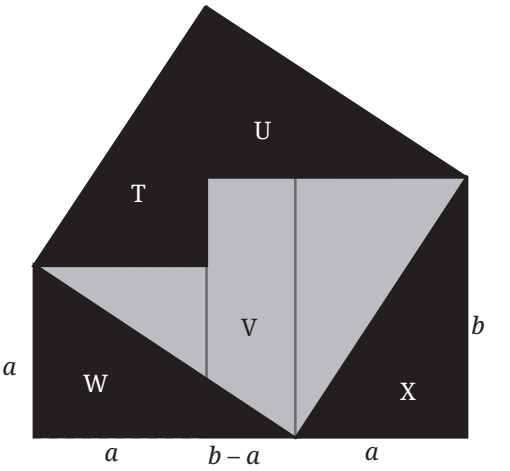
3.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.

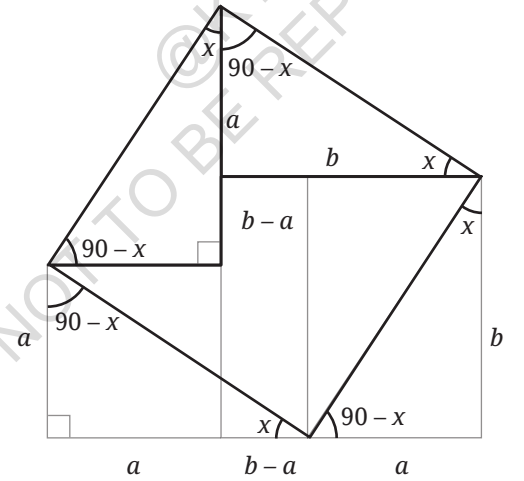




- పొందిన 4-వైపుల బొమ్మ (T + U + V) నిజానికి రెండు చిన్న చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానమైన వైశాల్యం కలిగిన చతురస్రం.!

ఎందుకు?

- T, U, X, W అన్నీ సమానంగా ఉన్నందున ఈ కొత్త 4-వైపులా బొమ్మ యొక్క భుజాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉంటాయి కోణాలను గమనించండి.



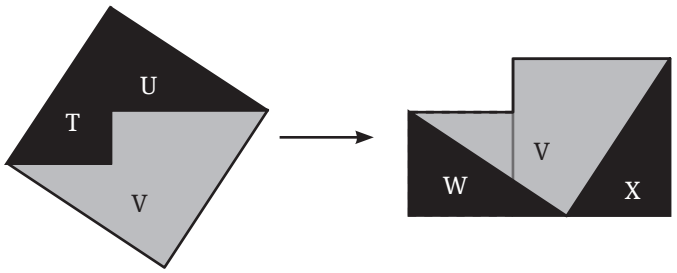
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ కొత్త 4 వైపుల బొమ్మ యొక్క అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా ఉండటానికి మరియు అది చతురస్రం కావడానికి ఎందుకు వివరించండి.

ఈ కొత్త చతురస్రం a మరియు b భుజాల లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం వైపు పొడవుగా ఉందని గమనించండి.

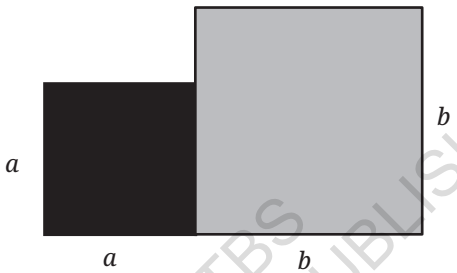
- బౌధాయనుడి వాదన ఇపుడు స్పష్టంగా ఉంది.

కర్ణం పై ఉన్న చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం = T, U, మరియు V వైశాల్యాల మొత్తం V, W, మరియు X వైశాల్యాల మొత్తం = ఇచ్చిన రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం.

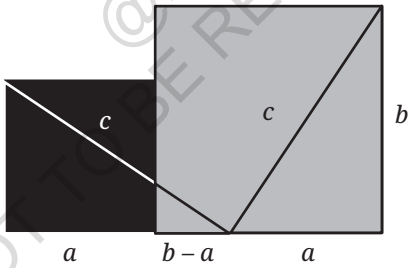


కాగితం ఉపయోగించి రెండు చతురస్రాలను కలపడం

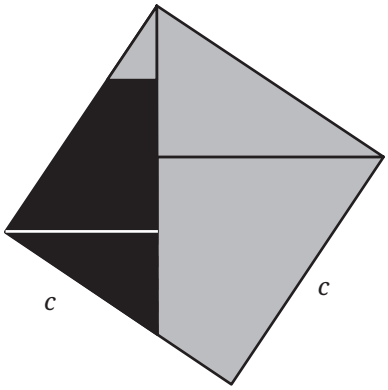
ఈ క్రింది విధంగా రెండు వేర్వేరు పరిమాణాల చతురస్రాలను కత్తిరించి కలపండి.



ఇపుడు మూడు ముక్కలు చేయడానికి రెండుగా కత్తిరించండి.



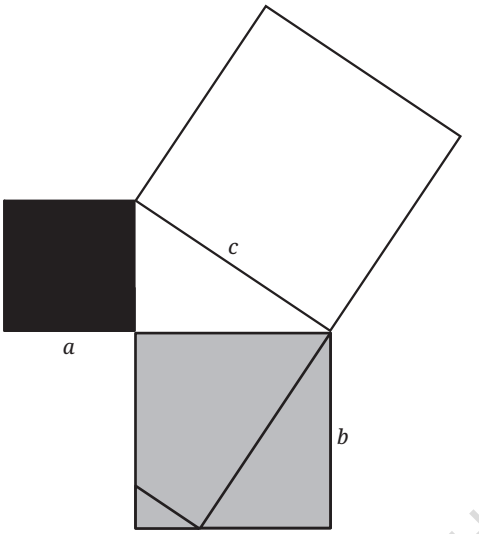
ఈ మూడు ముక్కలను పెద్ద చతురస్రం వచ్చే విధంగా అమర్చండి.



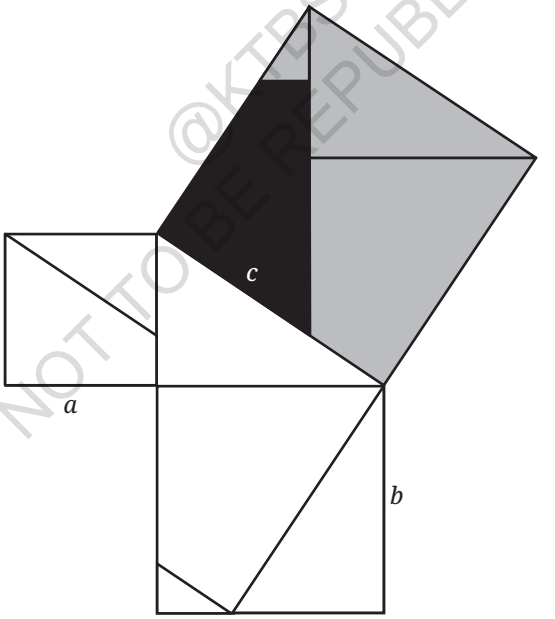
మీరు ఇపుడు రెండు చిన్న చతురస్రాలను కలిపి ఒక పెద్ద చతురస్రంగా చేస్తారు!

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇపుడు రెండు చిన్న చతురస్రాలను ఉపయోగించి ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తయారు చేయండి కర్ణం పై ఒక చతురస్రాన్ని గీయండి.



ముక్కలను ఉపయోగించి కర్ణం పై గల చతురస్రాన్ని కప్పండి.



@KTPS
NOT TO BE REPUBLISHED

ఇది ఒక లంబకోణ త్రిభుజం a మరియు b పొడవుగల చిన్న భుజాలను కలిగి ఉండి, c పొడవు గల కర్ణాన్ని కలిగి ఉంటే, అపుడు రెండు చిన్న చతురస్రాల వైశాల్యాలు a^2 మరియు b^2 లను కలిపి పెద్ద చతురస్ర వైశాల్యమైన c^2 కు చేరుకుంటాయని చూపిస్తుంది.

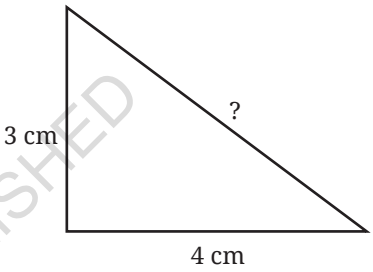
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

ఇది లంబకోణ త్రిభుజాల పై బౌధాయన యొక్క ప్రసిద్ధ మరియు ప్రాథమిక సిద్ధాంతం

లంబకోణ త్రిభుజాల పై బౌధాయన సిద్ధాంతం : a, b, మరియు c, లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలు c అనేది కర్ణము ఐతే $a^2 + b^2 = c^2$ అగును

ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఈ సాధారణ రూపంలో మరియు ముఖ్యంగా ఆధునిక రూపంలో చెప్పిన చరిత్రలో మొట్ట మొదటి వ్యక్తి బౌధాయన. ఈ సిద్ధాంతాన్ని పైథాగరియన్ సిద్ధాంతం అని కూడా పిలుస్తారు. గ్రీకు తత్వవేత్త గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు పైథాగరస్ (సుమారు 500 BCE) బౌధాయన తర్వాత రెండు వందల సంవత్సరాలు జీవించి ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఆరాధించి అధ్యయనం చేసిన తర్వాత దీనిని తరుచుగా ''బౌధాయన–పైథాగరస్ సిద్ధాంతం'' అని కూడా పిలుస్తారు, తద్వారా ఏ సిద్ధాంతాన్ని సూచిస్తున్నారో అందరికీ తెలుస్తుంది.

బౌధాయన సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండం



మీ నోట్‌బుక్‌లో 3 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. చిన్న భుజాల పొడవు కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తయారు చేయండి. ఇపుడు కర్ణం పొడవును కొలవండి అది దాదాపు 5 సెం.మీ. ఉండాలి.

నిజానికి బౌధాయన సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి కర్ణం సరిగ్గా 5 సెం.మీ. అని అంచనా వేయవచ్చు $a = 3$ మరియు $b = 4$ భుజాల పొడవులను ఒ సెం.మీలలో చూద్దాం. అపుడు బౌధాయన సిద్ధాంతం ద్వారా కర్ణం పొడవు c సూత్రాన్ని తృప్తి వరుస్తుంది.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + 4^2 = c^2$$
$$9 + 16 = c^2$$
$$25 = c^2$$

కాబట్టి $c = 5$ సెం.మీ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీన్ని గుర్తించండి

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం 5 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ. పొడవుగల చిన్న భుజాలను కలిగి ఉంటే, దాని కర్ణం యొక్క పొడవు ఎంత? ముందుగా ఈ భుజాల పొడవులతో లంబకోణ త్రిభుజాన్ని గీచి కర్ణాన్ని కొలవండి. ఆపై బౌధాయన సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి మీ సమాధానాన్ని తనిఖీ చేయండి.
2. లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క చిన్న వైపు పొడవు 8 సెం.మీ మరియు కర్ణం 17 సెం.మీ. ఉంటే మూడవ వైపు పొడవు ఎంత? మళ్ళీ త్రిభుజాన్ని గీచి కొలవడానికి ప్రయత్నించండి. మీ సమాధానాన్ని సరిచేయండి.
3. మీరు ఇపుడు చూసిన నిర్మాణాలను ఉపయోగించి, ఇచ్చిన చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం కంటే మూడు రెట్లు ఎక్కువ వైశాల్యం ఉన్న చతురస్రాన్ని మీరు ఎలా నిర్మిస్తారు? ఇచ్చిన చతురస్రం యొక్క వైశాల్యానికి ఐదు రెట్లు? (బౌధాయన సుల్బ–సూత్రం, శ్లోకం 1.10)

4. a, b మరియు c లు లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవును సూచిస్తాయి, c అనేది కర్ణం యొక్క పొడవు. ఈ క్రింది సందర్భాలలో ప్రతిదానిలోనూ తప్పిపోయిన భుజాల పొడవును కనుగొనండి.

(i) $a = 5, b = 7$ (ii) $a = 8, b = 12$ (iii) $a = 9, c = 15$

(iv) $a = 7, b = 12$ (v) $a = 1.5, b = 3.5$

9.5 పూర్ణాంక భుజాలను కలిగి ఉన్న లంబ-త్రిభుజాలు

తన సుల్బ సూత్రంలో (పద్యం 1.13) బౌధాయనుడు లంబ త్రిభుజం యొక్క భుజాలను ఏర్పరుస్తూ $a^2 + b^2 = c^2$ ను తృప్తి పరిచే అనేక పూర్ణాంక త్రికాలను (a, b, c) ను తయారు చేశాడు. వీటిలో (3, 4, 5), (5, 12, 13) (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37), మరియు (15, 36, 39).

ఈ కారణంగా, లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవులను ఏర్పరిచే అటువంటి త్రికాలను (a, b, c) సమానంగా $a^2 + b^2 = c^2$ ని సంతృప్తి పరుస్తుంది) **బౌధాయన త్రికాలు** అంటారు. వాటిని **బౌధాయన-పైథాగరస్ త్రికాలు** మరియు **పైథాగరియన్ త్రికాలు** మరియు **లంబకోణ త్రిభుజ త్రికాలు** అని కూడా అంటారు.

? 20 కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన సంఖ్యలు ఉన్న అన్ని బౌధాయన త్రికాల జాబితాను చేయండి.



? బౌధాయన త్రికాలకు అంతులేని క్రమం ఉందా?

గణితశాస్త్రవేత్తలు ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం ఇచ్చారు మరియు అటువంటి త్రికాలన్నింటినీ ఉత్పత్తి చేయడానికి ఒక పద్ధతిని కనుగొన్నారు!

ఈ దశలో మనం కొన్ని అడుగులు వేద్దాం.

(3, 4, 5) ఒక బౌధాయన త్రికం అని మనం చూశాం.

? (30, 40, 50) బౌధాయన త్రికమా?

(300, 400, 500) ఒక బౌధాయన త్రికమా?

బౌధాయన త్రికాలలో సంఖ్యలు 20 కంటే తక్కువ లేదా సమానం అయిన ఈ క్రింది త్రికాలు ఉన్నాయి.

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20).

? వీటిలో మీకు ఏదైనా నమూనా కనిపిస్తుందా?

ఈ త్రికాలన్నింటినీ (3, 4, 5) యొక్క ప్రతి పదాన్ని ఒక నిర్ధిష్ట ధన పూర్ణాంకంతో గుణించండం ద్వారా పొందవచ్చు.

? పరిశీలన ఆధారంగా బౌధాయన ఈ త్రికాలపై ఒక ఊహను రూపొందిం చగలరా?

ఊహ: $(3k, 4k, 5k)$ ఒక బౌధాయన త్రికం ఇక్కడ k అనేది ఒక ధనపూర్ణాంకం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(?) ఇది నిజమా?

$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ దీనిని సరిచూద్దాం.

$(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$ ఇది $(5k)^2$ కు సమానం.

కాబట్టి $(3k, 4k, 5k)$ నిజానికి బౌధాయన త్రికం.

ఇది బౌధాయన త్రికాలు అనంతంగా ఉన్నాయని చూపిస్తుంది.

మనం ఊహను మరింత సాధారణీకరిస్తామా?

? (a, b, c) బౌధాయన త్రికం అయితే (ka, kb, kc) కూడా బౌధాయన త్రికమే. ఇక్కడ k అనేది ఏదైనా ధన పూర్ణాంకం. ఈ వాక్యం నిజమేనా? ఈ నిర్వచనాన్ని కూడా అదే విధంగా నిజమని చూపించవచ్చు.

(a, b, c) బౌధాయన త్రికం కాబట్టి, మనకు $a^2 + b^2 = c^2$ వస్తుంది. మనం $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$ తనిఖీ చేయాలి.

$$(ka)^2 = ka \times ka = k^2 a^2, \text{ మరియు } (kb)^2 = kb \times kb = k^2 b^2.$$

$$\text{కాబట్టి } (ka)^2 + (kb)^2 = k^2 a^2 + k^2 b^2.$$

సామాన్య కారణాంకాన్ని బయటకు తీస్తే

$$(ka)^2+(kb)^2 = k^2 (a^2 + b^2).$$

$a^2 + b^2 = c^2$ కాబట్టి మనకు

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 c^2 = (kc)^2$$

కాబట్టి (a, b, c) బౌధాయన త్రికం అయితే (ka, kb, kc) ని (ka, kb, kc) ని (a, b, c) యొక్క **కొలత ప్రకారం మార్చ బడిన రూపం** అంటారు.

సామాన్య కారణాంకం 1 కంటే ఎక్కువ లేని బౌధాయన త్రికాన్ని **ప్రాథమిక బౌధాయన త్రికం** అంటారు. కాబట్టి $(3, 4, 5)$ ప్రథమం కానీ $(9,12,15)$ కాదు.

? $(5, 12, 13)$ అనేది ప్రథమ బౌధాయన త్రికమా? 20 కంటే తక్కువ లేదా సమాన సంఖ్యలు కలిగిన ఇతర ప్రాథమిక బౌధాయన త్రికాలు ఏమిటి?

? ఈ ప్రాథమిక త్రికాలలో ప్రతి దానికి 5 స్కేల్డ్ వర్షన్‌ను నిర్మించండి. ఇవన్నీ కొలత ప్రకారం మార్చబడిన ప్రాథమికాలా?

? (a, b, c) ప్రాథమిక సంఖ్య కాకపోతే పూర్ణాంకాలలో f — 1 కంటే ఎక్కువ సాధారణ కారణాంకం ఉంటే, అపుడు $\left(\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, \frac{c}{f}\right)$ ఒక బౌధాయన త్రికమా? ఈ నిర్వచాన్ని $(9, 12, 15)$ కు సరి చూడండి.

మనం అన్ని ప్రాథమిక త్రికాలను కనుగొన కలిగితే మనం అన్ని బౌధాయన త్రికాలు కనుగొనవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? మరిన్ని ప్రాథమిక త్రికాలను మనం ఏ విధంగా రూపొందించవచ్చు.

వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం మరియు వర్గ సంఖ్యల మధ్య సంబంధం మనకు తెలుసు.

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 దీనిని బీజగణితంగా వ్యక్తపరుస్తాం.

? దీని కొరకు మనకు n వ బేసి సంఖ్య తెలుసుకోవాలి. అది ఏది?

n వ బేసి సంఖ్య $2n - 1$ కాబట్టి

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)}_{\text{మొదటి } (n-1) \text{ బేసి సంఖ్యల మొత్తం}} + (2n - 1) = n^2$$

? మొదటి $(n - 1)$ బేసి సంఖ్యల మొత్తం ఎంత?

అందువల్ల $(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2$.

$(n - 1)^2$ ను విస్తరించి దానికి $2n - 1$ ని కలపడం ద్వారా నేరుగా ఈ సమీకరణాన్ని పొందవచ్చునని గమనించండి.

n వ బేసిసంఖ్య, $2n - 1$ కూడా ఒక వర్గ సంఖ్య అయితే, మనకు రెండు వర్గ సంఖ్యల మొత్తం మరొక వర్గ సంఖ్యకు సమానం అవుతుంది. బౌధాయన త్రికాలను ఉత్పత్తి చేయడానికి మనం ఈ ఆలోచనను ఉపయోగిస్తాం.

1. 9 అనేది బేసి వర్గం. ఇది 5 వ బేసి సంఖ్య $(9 = 2 \times 5 - 1)$ కాబట్టి

మనకు
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$
$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

? $(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2$? అనే సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి మనం ఈ త్రికాన్ని పొందగలమా? మనం 5వ బేసి సంఖ్యను తీసుకున్నందున, n విలువ 5 సమీకరణంలో $n = 5$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$(5 - 1)^2 + 9 = 5^2$$

$4^2 + 3^2 = 5^2$ మనకు లభిస్తుంది

© DIET NOT TO BE REPUBLISHED

2. 25 అనేది ఒక బేసి వర్గం. ఇది 13 వ బేసి సంఖ్య $(25 = 2 \times 13 - 1)$ కాబట్టి,

$1 + 3 + 5 + \cdots + 23 + 25 = 13^2$ $12^2 + 5^2 = 13^2$	$n = 13$ ను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే $(13 - 1)^2 + 25 = 13^2$ $12^2 + 5^2 = 13^2$ వస్తుంది.

? దీన్ని గుర్తించండి

1. ఈ ఆలోచనను ఉపయోగించి మరో 5 బౌధాయన త్రికాలను కనుగొనండి.

2. ఈ పద్ధతి ప్రాథమిక బౌదాయన త్రికాలు కానీ వాటిని ఇస్తుందా?

   (సూచన : ఉత్పత్తి చేయబడిన త్రికాలలో, చిన్న ప్రక్క భుజాలలో ఒకటి కర్ణం కంటే తక్కువగా ఉందని గమనించండి)

3. ఈ పద్ధతి ద్వారా పొందలేని ప్రాథమిక త్రికాలు ఉన్నాయా? అవును అయితే ఉదాహరణలివ్వండి.

9.6 చాలా కాలంగా ఉన్న బహిరంగ సమస్య

బౌధాయన త్రికాల అధ్యయనం 17వ శతాబ్ధంలో జీవించిన గొప్ప ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఫెర్మాట్‌ను ధనపూర్ణాంకాల ఘాతాల మొత్తం గురించి ఒక ప్రకటన చేయడానికి ప్రేరేపించింది.

రెండు వర్గ సంఖ్యల మొత్తంగా రాయగల అనంతమైన వర్గ సంఖ్యలు ఉన్నాయని మనం చూశాం. దీని వలన పెర్మాట్ రెండు పూర్ణ ఘనాల మొత్తంగా రాయగల పరిపూర్ణ ఘనం. ఉందా, రెండు నాల్గవ ఘాతాల మొత్తంగా రాయగల నాల్గవ ఘాతం ఉందా అని ఆశ్చర్య పోయాడు. మరో మాటలో చెప్పాలంటే $x^n + y^n = z^n$ అనే సమీకరణానికి పరిష్కారం ఉందా అని అతడు ఆశ్చర్య పోయాడు.

ఇక్కడ x, y, z లు సహజ సంఖ్యలు మరియు $n > 2$

ధనాత్మక పూర్ణాంకాల (బౌధాయన త్రికాల మాదిరిగా) లక్షణాలు మరియు నమూనాలు పరిశీలించిన ఒక పుస్తకం యొక్క మార్జిన్‌లో, ఫెర్మాట్ అంతులేని సంఖ్యల శ్రేణిలో రెండు పరిపూర్ణ ఘనాల మొత్తంగా ఉన్న ఒక పరిపూర్ణ ఘనాన్ని, రెండు నాల్గవ ఘాతాల మొత్తంగా ఉన్న నాల్గవ ఘాతాన్ని కనుగొనలేమని రాసాడు, కాబట్టి 2 కంటే ఎక్కువ ఘాతాలను సమీకరణంలో పరిష్కారం లేదు దీనిని పేర్కొనడంతో పాటు, ఫెర్మాట్ ఇలారాసాడు, ''నేను ఈ ప్రకటనకు నిజంగా అద్భుతమైన రుజువును కనుగొన్నాను, కానీ మార్జిన్ దానిని కలిగి ఉండటానికి చాలా చిన్నది''

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED





ఫెర్మాట్ చివరి సిద్ధాంతం అని పిలువబడే ఈ ప్రకటనకు ఫెర్మాట్ రుజువును ఎవరూ ఎపుడూ కనుగొనలేక పోయారు.

ఆయన మరణం తరువాత, చాలా మంది గొప్ప గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించడానికి ప్రయత్నించారు. దీనిని నిరూపించడానికి 300 సంవత్సరాకు పైగా విఫల ప్రయత్నాలు జరిగాయి.

1963లో, ఆండ్రూ వైల్స్ అనే 10 ఏళ్ళ బాలుడు ఫెర్మాట్ లాస్ట్ థియరీ మరియు చరిత్ర గురించి (ఎరిక్ బెల్ రాసిన ది లాస్ట్ ప్రాబ్లమ్) ఒక పుస్తకాన్ని చదివాడు చాలా మంది గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్తల వైఫల్యాల గురించి చదివినప్పటికీ, ఈ చిన్న పిల్లవాడు ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించాలని నిర్ణయించుకున్నాడు. చివరికి అతను 1994 లో ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించాడు.

9.7 బౌధాయన-పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క మరిన్ని అనువర్తనాలు

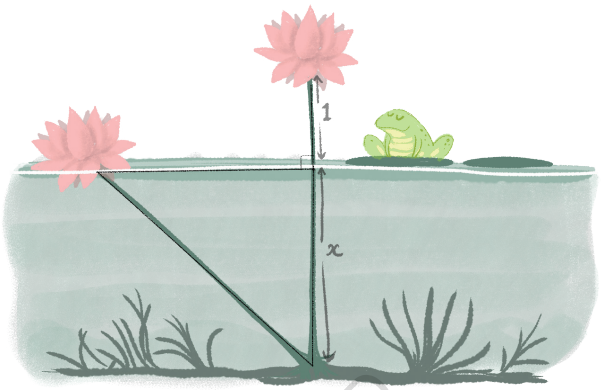
బౌధాయన-పైథాగరస్ సిద్ధాంతం జ్యామితి యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలలో ఒకటి. దాని అనువర్తనాల్లో కొన్నింటిని చూద్దాం.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

భాస్కరాచార్య లీలావతి నుండి ఒక సమస్య

భాస్కరా చార్యుల (భాస్కరా 11)లీలావత్ నుండి ఒక సమస్య యొక్క అనువాదం క్రింద ఇవ్వబడింది. మీరు చదివిన దానిని దృశ్యమానం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నించండి.

? ''చక్ర మరియు క్రౌంచ పక్షులతో చుట్టు ముట్టబడిన సరస్సులో, నీటి నుండి ఒక తామర పువ్వుతొంగి చూస్తోంది, దాని కాండం కొన నిటికి 1 యూనిట్ పైన ఉంది. సున్నితమైన గాలికి ఊగుతు న్నప్పుడు, కొన దాని అసలు స్థానం నుండి 3 యూనిట్ల దూరంలో నీటిని తాకుతుంది. సరస్సు యొక్క లోతును త్వరగా చెప్పండి''



మొదటి చూపులో, పరిష్కారాన్ని కనుగొనడానికి తగినంత దత్తాంశం లేనట్లు అనిపిస్తుంది. కానీ పరిష్కారం ఉంది!

నీటిలోపల కాండం యొక్క పొడవు x అని అనుకుందాం. ఇది సరస్సు యొక్క అవసరమైన లోతు, కమలం యొక్క కాండం నీటికి 1 యూనిట్ పైన అంటుకొని ఉన్నందున, కాండం యొక్క మొత్తం పొడవు $x + 1$.

కమలం యొక్క కాండం మొదటి స్థానంలో నీటి ఉపరితలానికి లంబంగా ఉందని మనం (చాలా సహేతకమైన) ఊహ చేయవచ్చు. ఈ ఊహతో, మనకు 3, x మరియు $x + 1$ భుజాల లంబ త్రిభుజం లభిస్తుంది. ఇది బౌధాయన పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని సంతృప్తి పరచడంతో, మనకు

$$3^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

$$9 + x^2 = x^2 + 2x + 1.$$

రెండు వైపులా x^2 ను తీసివేస్తే

$$9 = 2x + 1.$$

$$x = 4.$$

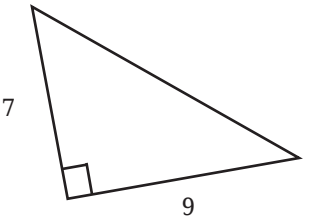
అందువలన సరస్సు యొక్కలోతు 4 యూనిట్లు

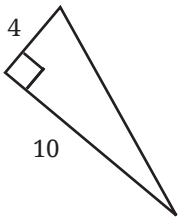
© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

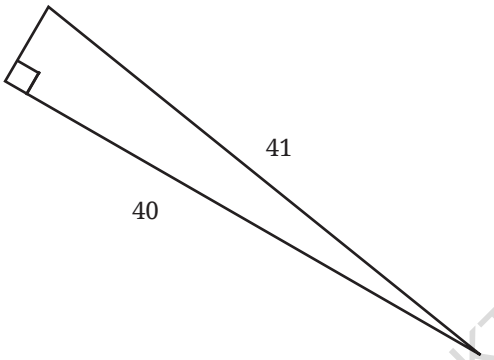
దీన్ని గుర్తించండి

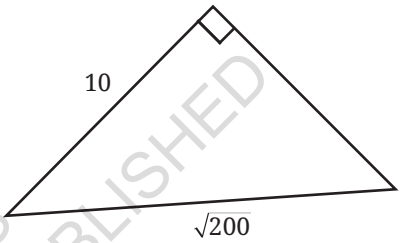
1. 5 సెం.మీ. భుజం పొడవు ఉన్న చతురస్ర కర్ణంను కనుగొనండి.

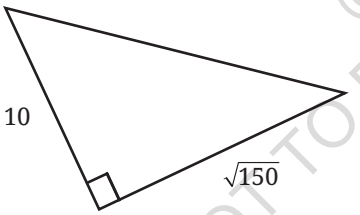
2. కింది లంబకోణ త్రిభుజాలలో లేనిభుజం పొడవును కనుగొనండి.

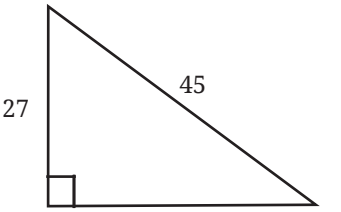












@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. కర్ణాల పొడవు 21 యూనిట్లు మరియు 70 యూనిట్లు కలిగిన రాంబస్ భుజాన్ని కనుగొనండి.

4. లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం అతి పొడవైన భుజమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

5. ఒప్పు లేదా తప్పు ప్రతి బౌధాయన త్రికం ఒక ప్రాథమిక త్రికం లేదా ప్రాథమిక త్రికం యొక్క కొలత మార్చబడిన రూపమా?

6. భుజాల పొడవు మరియు కర్ణాలు అన్నీ పూర్ణాంకాలుగా ఉండే దీర్ఘ చతురస్రాల ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

7. 5 యూనిట్లు మరియు 7 యూనిట్లు భుజాల పొడవు గల చతురస్రాల వైశాల్యాలా వ్యత్యాసానికి సమానమైన వైశాల్యం కలిగిన చతురస్రాన్ని నిర్మించండి.

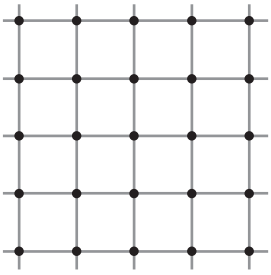
8. (i) గ్రిడ్ యొక్క చుక్కలను శీర్షాలుగా ఉపయోగించి మీరు

(a) 2 చ. యూ,

(b) 3 చ. యూ,

(c) 4 చ. యూ మరియు

(d) 5 చ. యూ వైశాల్యం గల చతురస్రాన్ని సృష్టించగలరా?





(ii) గ్రిడ్ నిరవధికంగా విస్తరించిందని అనుకుందాం. ఈ పద్ధతిలో మీరు సృష్టించగల చతురస్రాల యొక్క విలువైన ప్రాంతాలు ఏమిటి?



9. భుజం పొడవు 6 యూనిట్లు కలిగిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.

(**సూచన:** ఎత్తు ఒక భుజాన్ని సమద్విఖండనం చేస్తుందని చూపండి. ఎత్తును కనుగొనడానికి దీన్ని ఉపయోగించండి)

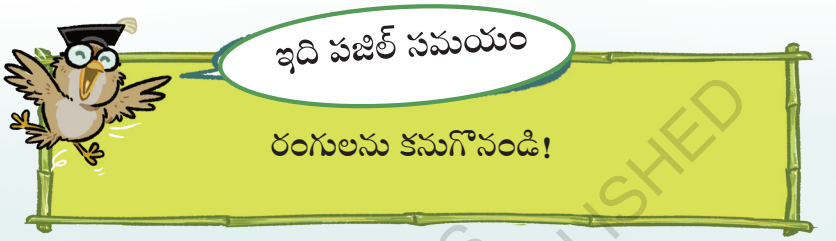


సారాంశం

- బౌధాయన–పైథాగరస్ సిద్ధాంతం రేఖాగణితంలో అత్యంత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలలో ఒకటి. లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల మధ్య సంబంధాన్ని ఇది వ్యక్తపరుస్తుంది.
- $a, b, c,$ లు లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవులు అయితే c కర్ణం యొక్క పొడవు అయితే $a^2 + b^2 = c^2$.
- $a, a, c,$ భుజాల పొడవు కలిగిన సమద్విబాహు త్రిభుజంలో మనకు $a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2$ సంబంధం ఉంటుంది. అనగా $c = a\sqrt{2}$.
- $\sqrt{2}$ సంఖ్య 1.414 మరియు 1.415 ల మధ్య ఉంటుంది. అయితే దీనిని అంతయొందే దశాంశంగా వ్యక్తీకరించలేము. దీనిని m, n లు ధనాత్మక పూర్ణాంకాలలో $\frac{m}{n}$ భిన్నం వలె కూడా వ్యక్తీకరించలేము.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- $a^2 + b^2 = c^2$ ను తృప్తిపరిచే ధనాత్మక పూర్ణాంకాల త్రయాన్ని (a, b, c) బౌధాయను పైథాగరస్ త్రయం అంటారు. ఉదాహరణలలో $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ మరియు $(5, 12, 13)$ ఉన్నాయి. అనంతంగా ఇలాంటి త్రయాలను నిర్మించవచ్చు.
- $n > 2$ అయినపుడు $a^n + b^n = c^n$ అనే సమీకరణానికి ధనాత్మక పూర్ణాంకాలలో పరిష్కారం ఉండదు. దీనిని ఫెర్మాట్ చివరి సిద్ధాంతం' అంటారు దీనిని 1994 లో ఆండ్రూ వైల్స్ నిరూపించారు.



మూసి ఉన్న మూడు పెట్టెలు ఉన్నాయి – ఒకటి ఎర్ర బంతులను మాత్రమే కలిగి ఉంటుంది. రెండవవి నీలిరంగు బంతులను మాత్రమే కలిగి ఉంటుంది. మరియు మూడవది ఆకుపచ్చ బంతులన ు మాత్రమే కలిగి ఉంటుంది. ఈ పెట్టెలు ఎరుపు, నీలం మరియు ఆకుపచ్చు రంగులతో లేబుల్ చేయ బడ్డాయి. ఏ పెట్టె కూడా సరైన లేబుల్ కలిగి లేదు. ఏ లేబుల్ ఏ పెట్టెతో వెళ్తుందో మనం కనుగొనాలి ఒకే ఒక పెట్టెను తెరవడానికి అనుమతి ఇస్తే ఇది చేయవచ్చా?

© QTRS NOT TO BE REPUBLISHED



10 అనుపాత హేతుబద్ధత – 2

Proportional Reasoning-2

V1Z9G4

10.1 అనుపాతం – ఒక త్వరిత పునఃసంగ్రహం (Proportionality - A quick Recap)

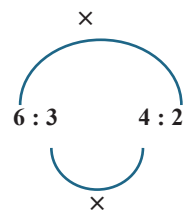
మునుపటి అధ్యాయంలో, పరిమాణాల మధ్య అను పాత సంబంధాలను మనం అన్వేషించాం. మరియు అటువంటి సంబంధాలను సూచించడానికి నిష్పత్తి సంజ్ఞామానాన్ని ఉపయోగించాం. రెండు లేదా అంత కంటే ఎక్కువ సంబంధిత పరిమాణాలు ఒకే కారణాంకం ద్వారా మారినపుడు, మనం ఆసంబంధాన్ని అనుపాత సంబంధం అని పిలుస్తాం. ఉదాహరణకు బియ్యం మరియు ఉద్దిబేడలు కలపడం ద్వారా ఇడ్లీ పిండిని తయారు చేస్తారు. ఈ రెండింటి నిష్పత్తిలో సమాన వైవిధ్యాలు ఉండవచ్చు ఉపయోగించిన నిష్పత్తిలో ఒకటి : 2 కప్పులు బియ్యానికి 1 కప్పు ఉద్దిబేడలు కలుపుతాము. మనం ఈ సంబంధాన్ని 2:1 నిష్పత్తిని ఉపయోగించి సూచిస్తాము.

? విశ్వనాథ్ 6 కప్పుల బియ్యాన్ని 3 కప్పులు ఉద్దిబేడలను కలిపి ఇడ్లీలను తయారు చేసాడు. పునీత్ 4 కప్పుల బియ్యానికి 2 కప్పుల ఉద్ది బేడలను కలిపి ఇండ్లీను తయారు చేసాడు. అదే విధంగా వండినప్పుడు వారి ఇడ్లీలు కూడా అదే రుచిగా ఉంటాయా?

విశ్వనాథ్ మిశ్రమాన్ని 6:3 మరియు పునీత్ మిశ్రమాన్ని, 4:2 గా సూచించవచ్చు.

ఈ రెండు నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయని ధృవీకరించడానికి మనం అడ్డ గుణకార పద్ధతిని ఉపయోగించి సరిచూడవచ్చు అని గుర్తుంచుకోండి.

© DTBS NOT TO BE REPUBLISHED



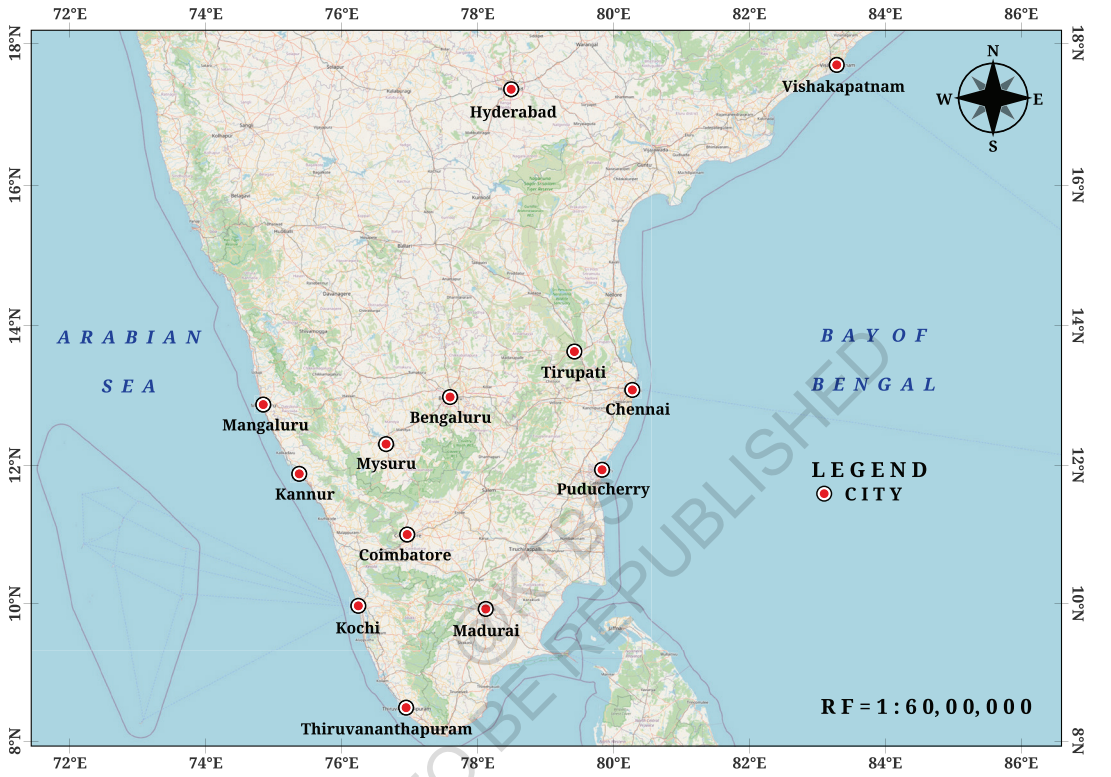
రెండు నిష్పత్తులు ఒకటే (12) కాబట్టి, రెండు నిష్పత్తులు అనులోమాను పాతంలో ఉంటాయి. మిగతా పదార్థాలన్నీ కూడా అనులోమాను పాతంలో ఉంటే ఇడ్లీలు ఒకే విధంగా రుచి ఉండే అవకాశం ఉంది.

సాధారణంగా మనం రెండు నిష్పత్తులు $a : b$ మరియు $\mathbf{c : d}$ లు అనుపాతంలో ఉంటే లేదా

$$a \times d = b \times c, \text{ లేదా}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

10.2 మ్యాప్ లో నిష్పత్తులు (Ratios in Maps)



© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? చాలా మ్యాప్‌లలో ఒక నిష్పత్తి ఇవ్వబడిందని మీరు గమనించారా. సాధారణంగా మ్యాప్ యొక్క కుడి దిగువ మూలలో ఇది సాధారణంగా 1 మరియు 1: 60,00,000 వంటి చాలా పెద్ద సంఖ్యను కలిగి ఉంటుంది. **RF** 1:60,00,000 అంటే ఏమిటి? అది దేనిని సూచిస్తుంది? మీరు ఊహించగలరా?

RF (Representative Fraction) ప్రాతినిధ్య భిన్నం **(RF)** అనేది మ్యాప్ లోని దూరం మరియు భూమి సంబంధిత వాస్తవ దూరం మధ్య నిష్పత్తిని చూపించే వ్యక్తీకరణ.

ఉదాహరణకు ఒక మ్యాప్‌లో నిష్పత్తి 1:60,00,000 అయితే మ్యాప్ లో 1సెం.మీ దూరం 60,00,000 సెం.మీ భౌగోళిక దూరానికి సమానం. అని అర్థం. గుర్తుంచుకోండి, ఇది భౌగోళిక దూరం, రోడ్డు దూరం కాదు

? 60,00,000 సెం.మీ లను కిలోమీటర్లుగా మార్చండి. ఇది 60 కి.మీ. దీన్ని ధృవీకరించండి.

? పైన ఉన్న మ్యాప్ నుపయోగించి, బెంగళూరు మరియు చెన్నై మధ్య భౌగోళిక దూరాన్ని మీరు కనుగొన గలరా? అలాగే, మంగళూరు మరియు చెన్నై మధ్య భౌగోళిక మార్గాన్ని కనుగొనండి.

(సూచన: మ్యాప్ లో నగరాల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనడానికి ఒక రూలరన్నుపయోగించండి. ఆపై వాస్తవ భౌగోళిక దూరాన్ని కనుగొనడానికి మ్యాప్ లో ఇవ్వబడిన నిష్పత్తిని ఉపయోగించండి)

? వేర్వేరు స్కేళ్ళు (నిష్పత్తులు కలిగిన వేర్వేరు మ్యాప్‌లతో ఒకే రెండు జతల నగరాల మధ్య దూరాలను కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి. అవన్నీ సుమారుగా ఒకే భౌగోళిక దూరాలను ఇస్తాయా?

ఉపాధ్యాయునికి గమనిక: తరగతి గదికి పటాలు మరియు అట్లాస్ల ను తీసుకు రాండి మరియు విద్యార్థులను పటంలో నిష్పత్తిగా ఇవ్వబడిన స్కేల్ను(సాధారణంగా కుడి దిగువ మూలలో) గమనించమని కోరండి. లైబ్రరీలోని పటాలు మరియు అట్లాస్లను ఉపయోగించి, స్థానికంగా ఆసక్తిఉన్న రెండు ప్రదేశాల మధ్య భౌగోళిక దూరాలను కనుగొనమని విద్యార్థులను అడగండి. వాటికీ సారూప్య దూరాలు ఉన్నాయా అని ఒకరితో ఒకరు ధృవీకరించమని మరియు దూరాలు చాలా భిన్నంగా ఉంటే కారణాలను కనుగొనమని అడగండి.

మ్యాప్ తయారీ కృత్యం : విద్యార్థులు వారి మ్యాప్ యొక్క స్కెచ్‌ను తయారు చేసుకోవడానికి మార్గనిర్దేశం (1:50 నిష్పత్తి కలిగిన తరగతి గది. వారు తరగతి గదిలోని వివిధ వస్తువుల స్థానాన్ని ఉపాధ్యాయుల డెస్క్, బ్లాక్ బోర్డు, ఫాన్లు మరియు లైట్లు వంటి వాటిని స్కేల్ ప్రకారం గుర్తించాలి. విద్యార్థులు ఫాన్లు, లైట్లు, టేబుళ్లు, కుర్చీలు మొదలైన వివిధ వస్తువులను సూచించడానికి తగిన చిహ్నాలను ఉపయోగించవచ్చు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.3 - 2 కంటే ఎక్కువ పదాలతో నిష్పత్తులు (Ratios with More than 2 terms)

విశ్వనాథ్ మసాలా మిశ్రమం పొడితో ప్రయోగాలు చేస్తున్నాడు. అతను 8 చెంచాల ధనియాలు, 4. ఎర్ర మిరపకాయలు, 2 చెంచాల కంది బేడలు మరియు 1 చెంచా మెంతులు వేసి పొడి తయారు చేస్తాడు. ఇతని మసాలా మిశ్రమం పొడిలో ధనియాలు, ఎండు మిరప కాయలు, కంది బేడలు, మెంతుల నిష్పత్తి



8 : 4 : 2 : 1

నిష్పత్తికి 4 పదాలు ఉన్నాయని గమనించండి. అనుపాత సంబంధాన్ని కొనసాగించడానికి ప్రతి పరిమాణాలు ఒకే కారణాంకం ద్వారా మారితే నిష్పత్తులు అనేక పదాలు కలిగి ఉంటాయి.

? పునీత్ వంటగదిలో కేవలం 2. ఎర్ర మిరకాయలు మాత్రమే ఉన్నాయి. కానీ అతను విశ్వనాథ్ తయారు చేసిన స్పైస్ మిక్స్ పౌడర్ రుచికి సమానమైన స్పైస్ మిక్స్ పౌడర్ తయారు చేయాలనుకుంటున్నాడు. పునీత్ తన స్పైస్ మిక్స్ పౌడర్ తయారు చేయడానికి ఇతర పదార్థాలలో ఎంత ఉపయోగించాలి? పునీత్ మసాలా మిక్స్ పౌడర్ విశ్వనాథ్ మసాలా మిక్స్ పౌడర్ లాగా ఉండాలంటే అన్ని పదార్థాల నిష్పత్తి విశ్వనాథ్ మసాలా మిక్స్ పౌడర్ లాగానే ఉండాలి.

పునీత్ దగ్గర కేవలం 2. ఎర్ర మిరపకాయలు మాత్రమే ఉన్నాయి. విశ్వనాథ్ తన మిశ్రమంలో ఉపయోగించిన మిరపకాయల సంఖ్యలో సగం అతని దగ్గర ఉన్నాయి. కాబట్టి ఇతర పదార్థాల పరిమాణాన్ని కూడా సగానికి తగ్గించాలి.

కాబట్టి, పునీత్ 4 చెంచాల ధనియాలు, 2 ఎర్ర మిరపకాయ- **½** చెంచా కందిపప్పు మరియు అర్ధ చెంచా మెంతులు జోడించాలి నిష్పత్తి

$$4 : 2 :: 1 : 0.5$$

రెండు నిష్పత్తులు ఒక దాని కొకటి అనుపాతంలో ఉన్నాయి. దీనిని ఈ విధంగా చూపవచ్చును.

$$8 : 4 : 2 : 1 :: 4 : 2 : 1 : 0.5.$$

సాధారణంగా అనేక పదాలతో రెండు నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉంటే

$$a : b : c : d :: p : q : r : s$$

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s}$$

ఉదాహరణ 1 : ఒక ప్రత్యేక ఊదారంగును తయారు చేయడానికి పెయింట్ ఎరుపు : నీలం : తెలుపు: : 2:3:5 నిష్పత్తిలో కలపాలి. యాస్మిన్ వద్ద 10 లీటర్ల తెల్లని పెయింట్ ఉంటే ప్రత్యేక ఊదా రంగు పొందడానికి ఆమె ఎన్ని లీటర్ల ఎరుపు మరియు నీలం పెయింట్లను కలపాలి?

2:3:5 నిష్పత్తిలో, తెల్ల పెయింట్ 5 భాగాలకు అనుగుణంగా ఉంటుంది.

5 భాగాలు 10లీటర్లు ఐతే 1 భాగం $10 \div 5 = 2$ లీటర్లు

ఎరుపు = 2 భాగాలు = $2 \times 2 = 4$ లీటర్లు

నీలం = 3 భాగాలు = $3 \times 2 = 6$ లీటర్లు

అందువల్ల ఊదారంగు పెయింట్ 4 లీటర్ల ఎరువు, 6 లీటర్ల నీలం మరియు 10 లీటర్ల తెలుపు పెయింట్లు ఉంటాయి.

ఈ ఊదారంగు పెయింట్ మొత్తం ఘనపరిమాణం ఎంత?

ఊదారంగు మొత్తం ఘనపరిమాణం $4+6+10=20$ లీటర్లు

ఉదాహరణ 2 : సిమెంట్ కాంక్రీట్ అనేది సిమెంట్, ఇసుక మరియు కంకర మిశ్రమం మరియు నిర్మాణం లో విస్తృతంగా ఉపయోగించబడుతుంది. మిశ్రమంలోని భాగాల నిష్పత్తి నిర్మాణం ఎంతబలంగా ఉండాలో దాన్ని బట్టి మారుతుంది. స్తంభాలు, దూలాలు మరియు పైకప్పులు వంటి ఎక్కువ బలం అవసరమయ్యే నిర్మాణాలకు నిష్పత్తి 1:15:3 మరియు నిర్మాణం కూడా ఉక్కు కడ్డీలతో బలోపేతం చేయబడింది. ఈ నిష్పత్తిని ఉపయోగించి మన దగ్గర 3 సంచుల సిమెంట్ ఉంటే, మనం ఎన్ని సంచుల కాంక్రీట్ మిశ్రమాన్ని తయారు చేయవచ్చు?

కాంక్రీట్ మిశ్రమం ఈ నిష్పత్తిలో ఉంటుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KSBS

సిమెంట్ సంచులు: ఇసుక సంచులు: కంకర సంచులు: 1:15:3 మన దగ్గర 3 సిమెంట్ సంచులు ఉంటే, మనం ఇతర పదాలను 3తో గుణించాలి. కాబట్టి నిష్పత్తి సిమెంట్ : ఇసుక : కంకర:: 3:4.5:9 మొత్తం మన దగ్గర 3+4.5+9 = 16.5 సంచుల కాంక్రిట్ ఉంది.

10.4 ఇచ్చిన నిష్పత్తి పూర్ణాన్ని భాగించడం. (Dividing a Whole in Given Ratio)

మునుపటి అధ్యాయంలో, ఒక పూర్ణాన్ని ఒక నిష్పత్తిలో ఎలా విభజించాలో నేర్చుకున్నాం. ఉదాహరణకు 12 ను 2:1 నిష్పత్తిలో దీన్ని చేయడానికి, మనం పదాలను(2+1=3) కూడుతాం. ఈ మొత్తంతో పూర్ణాన్ని విభజిస్తాం (12÷3 =4). ప్రతి పదాన్ని ఈ గుణకంతో

గుణిస్తాం: 2 × 4 = 8 మరియు 1× 4 = 4. కావున 12 2:1 నిష్పత్తిలో విభజింపబడుతే అది 8:4 మనం దీనిని అనేక పదాల నిష్పత్తులకు విస్తరించవచ్చు.

కాంక్రీట్ మిశ్రమాన్ని తయారు చేయడానికి ముందు ఉదాహరణను చూద్దాం. కాంక్రీట్ పొందడానికి మనం సిమెంట్, ఇసుక మరియు కంకరను 1:1.5:3 నిష్పత్తిలో కలపాలి.

ఉదాహరణ3 : కొన్ని నిర్మాణాలకు 110 యూనిట్లు, కాంక్రీట్ అవసరం.

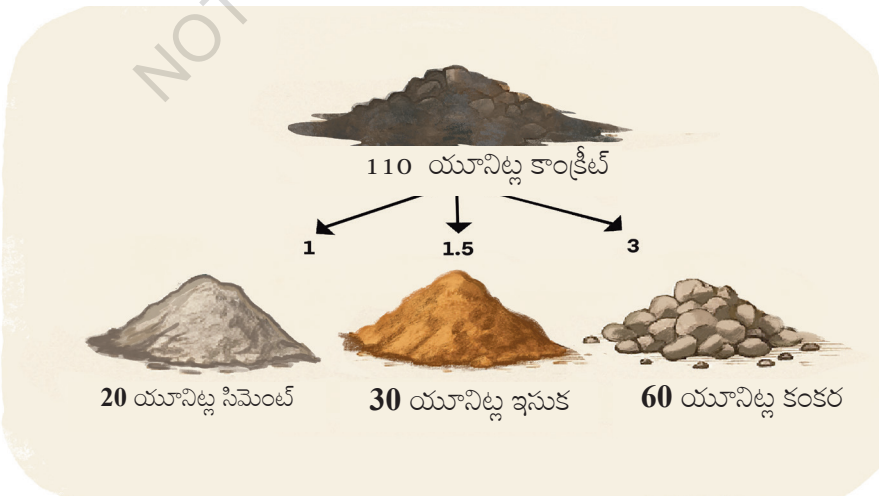
వీటిని 1:15:3 నిష్పత్తిలో కలపాలంటే ఎన్ని యూనిట్ల సిమెంట్, ఇసుక మరియు కంకర అవసరం?

1 యూనిట్ సిమెంట్ కోసం మనం 1.5 యూనిట్లు ఇసుక మరియు 3 యూనిట్లు కంకరను జోడించాలి. అది మొత్తం కలిపి 5.5 యూనిట్లు కాంక్రీట్ అవుతుంది. 110 యూనిట్ల కాంక్రీట్ పొందడానికి మనం దీన్ని 20 సార్లు (110 ÷ 5.5) చేయాలి. కావున ప్రతి పదాన్ని 20చే గుణించాలి.

1 × 20 = **20** యూనిట్ల సిమెంట్

1.5 × 20 = **30** యూనిట్ల ఇసుక మరియు

3 × 20 = **60** యూనిట్ల కంకర



© TBS NOT TO BE REPUBLISHED

అందువల్ల 20 యూనిట్లు సిమెంట్, 30 యూనిట్లు ఇసుక మరియు 60 యూనిట్ల కంకర అవసరం.

పరిమాణం × ను మనం **a:b:c** నిష్పత్తిలోని విభజించినపుడు నిష్పత్తిలోని పదాలు .

$x \times \frac{a}{(a+b+c+\cdots)}$, $x \times \frac{b}{(a+b+c+\cdots)}$, $x \times \frac{c}{(a+b+c+\cdots)}$ మొదలైనవి.

ఉదాహరణ 4 : ఎరుపు, నీలం మరియు తెలుపు పెయింట్ లను 2:3:5 నిష్పత్తిలో కలపడం ద్వారా మీరు ఒక నిర్దిష్ట ఉదారంగు పెయింట్‌ను పొందడి మీకు 50 మి.లీ ఉదారంగు పెయింట్ అవసరమైతే, ఎన్ని మి.లీ ఎరుపు, నీలం మరియు తెలుపు పెంయింట్లను కలుపుతారు?

ఎరుపు పెయింట్ = $50 \times \frac{2}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{2}{10} = 10$ మి లీ

నీలం పెయింట్ = $50 \times \frac{3}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{3}{10} = 15$ మి లీ

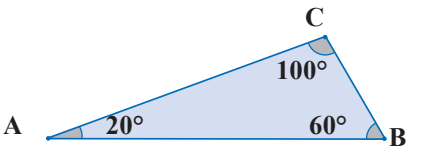
తెలుపు పెయింట్ = $50 \times \frac{5}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{5}{10} = 25$ మి లీ

ఉదాహరణ 5 : 1:3:5 నిష్పత్తి కోణాలతో త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి, ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం 180° అని మనకు తెలుసు. అందువల్ల కోణాలు

$\angle A = 180° \times \frac{1}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{1}{9} = 20°$

$\angle B = 180° \times \frac{3}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{3}{9} = 60°$

$\angle C = 180° \times \frac{5}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{5}{9} = 100°$



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీన్ని గుర్తించండి(Figure it out)

1. క్రికెట్ కోచ్ ఒక నిర్దిష్ట నిష్పత్తిలో వివిధ కార్యకలాపాలను కలిగి ఉన్న ప్రాక్టీస్ సెషన్లను షెడ్యూల్ చేస్తాడు. వార్మప్ కూల్- డౌన్ కోసం సమయం : బ్యాటింగ్ కోసం సమయం : బౌలింగ్ కోసం సమయం ఫీల్డింగ్ కోసం సమయం :: 3:4:3:5, ప్రతి సెషన్ 150 నిముషాలు ఉంటే, ప్రతి కార్యాచరణకు ఎంత సమయం కేటాయిస్తారు?

2. . ఒక పాఠశాల లైబ్రరీలో ఒరియా పుస్తకాల సంఖ్య: హిందీ పుస్తకాల సంఖ్య: ఇంగ్లీషు పుస్తకాల సంఖ్య: 3:2:1 నిష్పత్తిలో వివిధ భాషలలో పుస్తకాలు ఉంటాయి. లైబ్రరీలో 288 ఒరియా పుస్తకాలు ఉండే, దానిలో ఎన్ని హిందీ మరియు ఇంగ్లీషు పుస్తకాలు ఉన్నాయి?

3. . నా దగ్గర ₹10 నాణేల సంఖ్య: ₹5 నాణేల సంఖ్య, ₹2 నాణేల సంఖ్య: ₹1 నాణేల సంఖ్య : : 4:3:2:1 నిష్పత్తిలో 100 నాణేలు ఉన్నాయి. నా దగ్గర నాణేల రూపంలో ఎంత డబ్బు ఉంది ?

4. 3:4:5 నిష్పత్తిలో భుజాల పొడవులతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. ఈ భుజాల పొడవుల నిష్పత్తితో గీచిన అన్ని త్రిభుజాలు ఒక దాని కొకటి సమానంగా ఉంటాయా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

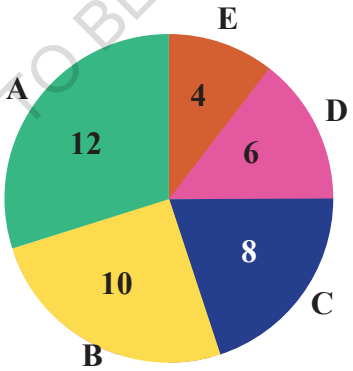


5. 1:3:5 నిష్పత్తిలో భుజాల పొడవుతో త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలరా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

10.5 పై చార్ట్‌లోని ఒక ముక్క (A Slice of Pie)

చిత్రంలో చూపిన విధంగా పైచార్టులను మీరు ఎప్పుడైనా చూశారా? పై చార్ట్‌లు మొత్తం యొక్క విభిన్న నిష్పత్తులను చూపుతాయి. ఇది ఒక అసెస్మెంట్లో ప్రతి గ్రేడ్ సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్యను చూపుతుంది. ఈ రకమైన దృష్టీకరణలు దత్తాంశాన్ని త్వరగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతాయి.

40 విద్యార్థుల గ్రేడ్‌ల విభజన



© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ పై చార్టును రూపొందించడానికి ప్రయత్నిద్దాం. విద్యార్థులు సాధించిన గ్రేడ్లను చూపించే పట్టిక ఇక్కడ ఉంది.

గ్రేడ్	A	B	C	D	E
విద్యార్థులు	12	10	8	6	4

? పై చార్ట్‌లోని వివిధ భాగాలను ఎలా గుర్తించాలి?

పై చార్ట్ ఒక భాగాన్ని గుర్తించడానికి, ఒక గ్రేడ్‌కు సంబంధించిన కోణం ఆ గ్రేడ్ సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్యకు అనుపాతంలో ఉండాలి. ఒక వృత్తంలో మొత్తం కోణం 360^0, కాబట్టి మనం 360^0 లను 12:10:8:6 నిష్పత్తిలో విభజించాలి.

? ఈ నిష్పత్తిని సరళ రూపానికి తగ్గించగలమా?

రెండు పదాలున్న నిష్పత్తిని సరళరూపానికి తగ్గించిన విధానమే ఇక్కడ కూడా ఉపయోగిస్తాం. అన్ని పదాలను వాటి గ. సా. ప్రతో భాగిస్తే సరళ రూపం వస్తుంది.

ఈ ఉదాహరణలో పదాల గ.సా.ప్ర2. అన్ని పదాలను 20 తో భాగిస్తే నిష్పత్తి 6:5:4:3:2 అవుతుంది. అందువల్ల అన్ని కోణాలు

గ్రేడ్ $\mathbf{A = \frac{6}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = \frac{6}{20} \times 360° = 6 \times 18 = 108°.}$

గ్రేడ్ $\mathbf{B = \frac{5}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = 5 \times 18 = 90°.}$

గ్రేడ్ $\mathbf{C = 4 \times 18 = 72°.}$

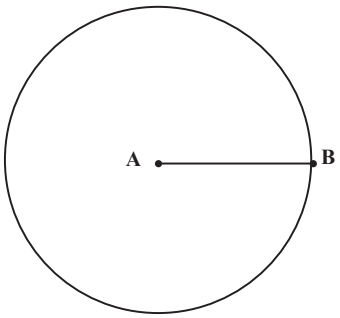
గ్రేడ్ $\mathbf{D = 3 \times 18 = 54°.}$

గ్రేడ్ $\mathbf{E = 2 \times 18 = 36°.}$

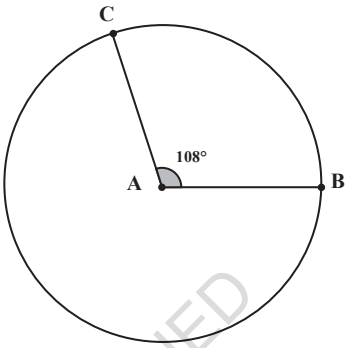
@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు ఈ కోణాలనుపయోగించి పై చార్ట్‌ను నిర్మిద్దాం

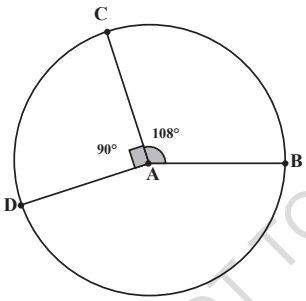
దశ1 : క్రింద చూపిన విధంగా ఒక వృత్తాన్ని గీచి వ్యాసార్ధం **AB**ని గుర్తించండి.



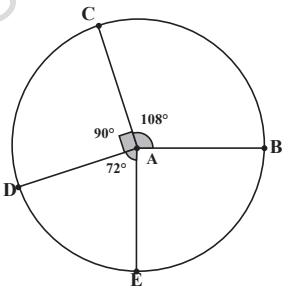
దశ 2 : గ్రేడ్ **A** పొందిన విద్యార్థుల అనుపాతాన్ని చూపేందుకు, బిందువు **A**వద్ద **AB**నుండి (అపసవ్య దిశలో) 108^{o} కొలిచి, కొత్త వ్యాసార్ధం **AC**ని గుర్తించండి.



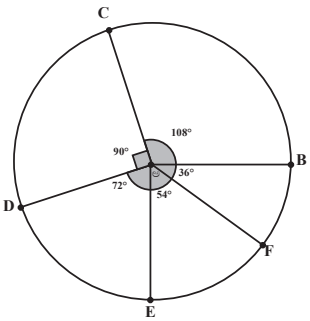
దశ 3 : **AC** నుండి 90^{o} కొలిచి **AD** ని గీయండి



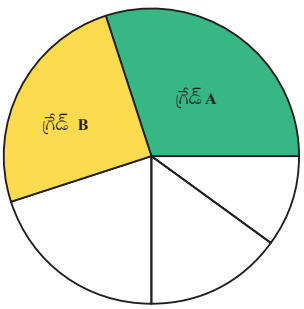
దశ4: **AD** నుండి 72 కొలిచి **AE** ని గీయండి.



దశ 5 : ఇదే విధంగా మిగిలిన పై చార్టును మనం పూర్తి చేద్దాం.



దశ 7: మీరు పై చార్ట్ యొక్క వివిధ భాగాలకు రంగులు వేయవచ్చును మరియు లేబుల్ చేయవచ్చు.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీన్ని గుర్తించండి (Figure it out)

1. 360 మంది వ్యక్తుల బృందాన్ని వర్షాకాలం, శీతాకాలం, మరియు వేసవి కాలం అనే మూడు ఋతువుల్లో తమకు ఇష్టమైన ఋతువుకు ఓటు వేయమని అడిగారు. **90°** మంది వేసవి కాలాన్ని ఇష్టపడ్డారు. 120 మంది వర్షాకాలం ఇష్టపడ్డారు. మరియు మిగిలిన వారు శీతాకాలాన్ని ఇష్టపడ్డారు. ఈ సమాచారాన్ని చూపించడానికి పై చార్టును గీయండి.

2. వీక్షకులకు ఇష్టమైన **TV** రకం గురించి కింది సమాచారం ఆధారంగా పై చార్ట్ గీయండి. వినోదం -50%, క్రీడలు -25% వార్తలు - 15%, సమాచారం - 10%

3. మీ తరగతిలోని విద్యార్థులకు ఇష్టమైన సబ్జెక్టులను చూపించే పై చార్టును తయారు చేయండి. మీరు విద్యార్థుల సంఖ్యా దత్తాంశాన్ని సేకరించవచ్చా. ప్రతి సబ్జెక్ట్స్ కింది పట్టికలో చూపబడింది. ప్రతి విద్యార్థి ఒకటి మాత్రమే ఎన్నుకోవాలి. తర్వాత ఆ సంఖ్యలను పట్టికలో రాసి పై చార్టును నిర్మించండి.

విషయం.	భాష	కళా శిక్షణ	వృత్తివిద్య	సమాజ విజ్ఞానం	దైహిక శిక్షణ	గణితం	విజ్ఞానం
విద్యార్థుల సంఖ్య							

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.6 విలోమానుపాతం (Inverse proportions)

త్రైరాసిక నియమం మీకు గుర్తుందా? రెండు నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నప్పుడు

a :b :: c : d అయితే **d=** $\frac{bc}{a}$

అవుతుంది ఇటువంటి అనుపాతాలకు అనులోమాను పాతాలు (**d**) అంటారు.**(a, b, c)**అనే మూడు పరిమాణాలు ఇవ్వబడినపుడు నాల్గవ పరిమాణం విలువను కనుగొనడానికి (**d**) ఈ అవగాహనను ఉపయోగిస్తాం.

ఉదాహరణ 1: 5 మంది కార్మికులు ఒక రోజులో 4500 ఇటుకలను కదిలించగలిగితే, ఒక రోజులో 18000 ఇటుకలను కదిలించడానికి ఎంత మంది కార్మికులు కావాలి? దీనిని అనుపాత ప్రకటనగా ఇలా చూపవచ్చు:

$$4500 : 18000 :: 5 : x$$

ఇందులో x విలువను కనుగొనవచ్చు $x = \frac{18000 \times 5}{4500} = 20$

అందువల్ల అవసరమైన కార్మికుల సంఖ్య = 20

ఉదాహరణ 2: పునీత్ లక్నో నుంచి కాన్పూరుకుతన మోటార్ సైకిల్ పై గంటకు 30 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణించి 3 గంటల్లో చేరాడు. అతను కారులో గంటకు 60 కి.మీ వేగంతో వెళితే, కాన్పూర్ చేరడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

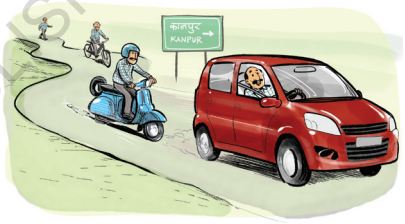
ఈ సమస్యను ఈ క్రింది అనుపాత ప్రకటనతో చూపవచ్చునా? — **30 : 60 :: 3 :** x మోటార్ సైకిల్ వేగం పెరిగినపుడు ప్రయాణ సమయం పెరుగుతుందా లేదా తగ్గుతుందా?



లక్నో నుండి కాన్పూరుకు వివిధ ప్రయాణ సాధనాల ద్వారా తీసుకునే సమయాన్ని క్రింది పట్టిక చూపుతుంది.

వేగం కి.మీ	నడక (గం)	సైకిల్	మోటర్ సైకిల్	కారు
సమయం(గం)	5	15	30	60
	18	6	3	1.5

ఈ పట్టికనుండి వేగం **పెరిగితే** ప్రయాణం చేసే సమయం **తగ్గుతుందని** మనం గమనించవచ్చు.



ఇది అదే రేటు (లేదా గుణకం)తో తగ్గుతుందా?

సైకిల్ పై వెళ్ళడం నడక కంటే 3రెట్లు వేగంగా ఉంటుంది. (15÷5) వేగం 3 రెట్లు పెరిగింది. ప్రయాణానికి పట్టే సమయం కూడా 3 రెట్లు తగ్గింది (18÷6) అంటే వేగం ఎంత గుణకం మేరకు పెరిగిందో, అదే గుణకం మేరకు సమయం తగ్గింది.?

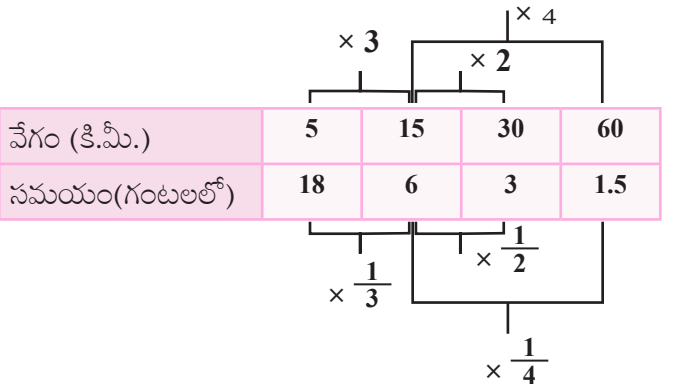
ఇది ఇతర రవాణా మార్గాలకూ వర్తిస్తుందా? వేగం మరియు సమయం అనే రెండు పరిమాణాలు ఒకే గుణకం మేరకు మారుతున్నాయి. కానీ అవి వ్యతిరేఖ దిశల్లో మారుతున్నాయి. అందుకే ఈ విధమైన అనుపాతాలను విలోమాను పాతం అంటారు.

పట్టికను గమనిస్తే, అన్ని రవాణా మార్గాలకూ వేగం సమయం విలువ ఒకటే అని తెలుస్తుంది . అది 90 కి.మీ.

x మరియు y అనే రెండు పరిమాణాయి $xy=k$ (ఇక్కడ **K** ఒక స్థిర సంఖ3) అనే సంబంధం ఉంటే అవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయని అంటారు.

మునుపటి ఉదాహరణలో x వేగాన్ని మరియు y సమయాన్ని సూచిస్తే k– అనేది లక్నో మరియు కాన్పూర్ మధ్య దూరం అది స్థిరంగా ఉంటుంది.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



వేగం (కి.మీ.)	5	15	30	60
సమయం(గంటలలో)	18	6	3	1.5

అందువల్ల పరిమాణాలు x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో ఉంటే, x_1 మరియు x_2 లు 'x' యొక్క విలువలు దీనికి అనుగుణంగా ఆవిలువలు y_1 మరియు y_2 y అయితే

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = k \text{ (స్థిరాంకం)}$$

దీని నుండి అని మనం చూడవచ్చును $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

ఇది నడక మరియు కారు వంటి ఇతర రవాణా మార్గాలకు నడక సరిపోతుందో లేదో పరిశీలిద్దాం.

x ను వేగంగా మరియు y ను సమయంగా తీసుకుంటే

$$\mathbf{x_1 = 5, x_2 = 60, y_1 = 18, y_2 = 1.5.}$$

విలువ ఏమి? ఇది కూడా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{60} = 0.08333.$

$\frac{1.5}{18}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ విలువ ఏమి? ఇది కూడా 0.08333.....

? దీన్ని గుర్తించండి.Figure it out)

1. వీటిలో ఏవి విలోమానుపాతంలో కలవు?

(i)

x	40	80	25	16
y	20	10	32	50

(ii)

x	40	80	25	16
y	20	10	12.5	8

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii)

x	30	90	150	10
y	15	5	3	45

2. x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో ఉండే ఖాళి గడులను పూరించండి.

x	16	12		36
y	9		48	

ఉదాహరణ 3 : 30 మంది కార్మికులు ఒక రోడ్డును వేయడానికి 4 రోజులు పడితే, అదే పొడవు ఉన్న రోడ్డును వేయడానికి 10 మంది కార్మికులకు ఎన్ని రోజులు పడతాయి?

మనం కార్మికుల సంఖ్యను తగ్గిస్తే, పని పూర్తి చేయడానికి కావలసిన రోజుల సంఖ్య అదే గుణకంతో పెరుగుతుంది. కాబట్టి ఈ పరిమాణాలు విలోమాను పాతంలో ఉంటాయి. $x_1y_1 = x_2y_2$.

అందువల్ల, $\mathbf{20 \times 4 = 10 \times y_2}$

$$\mathbf{y_2 = \frac{20 \times 4}{10} = 8.}$$

10 మంది కార్మికులకు పని పూర్తి చేయడానికి 8 రోజులు పడుతుంది. కార్మికుల సంఖ్య సగానికి తగ్గినపుడు పనిని పూర్తి చేయడానికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్య రెట్టింపు అవుతుందని మనం గమనించాం. పరిమాణాలు విలోమా మ పాతంలో ఉంటాయి. ఒక పరిమాణ n కారకంతో మారినపుడు విలోమం $\frac{1}{n}$ తో మారుతుంది.

ఉదాహరణ 4: 2 పంపులు ఒక ట్యాంకును 18 గంటల్లో నింపగలవు. అదే రకమైన మరో 2. పంపులు చేర్చితే, ట్యాంక్ ను నింపడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

మనం మరో 2 పంపులు చేర్చితే, మొత్తం 4 పంపులు అవుతాయి.

'x' గంటల్లో ట్యాంకు నిండుతుందని అనుకుందాం. పంపుల సంఖ్య పెరిగితే ట్యాంకును నింపడానికి పట్టే సమయం అదే నిష్పత్తిలో తగ్గుతుంది. అందువల్ల పరిమాణాలు విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి. విలోమానుపాతంలో గుణలబ్ధం స్థిరంగా

$$\mathbf{2 \times 18 = 4 \times x}$$

$$x = \frac{2 \times 18}{4} = 9$$

అందువల్ల ట్యాంకును నింపడానికి 9 గంటలు పడతాయి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 5 : ఒక పాఠశాలలో 80 మంది విద్యార్థులకు 15 రోజులకు సరిపడే ఆహార నిల్వలు ఉన్నాయి. మరోక 20 మంది విద్యార్థులు చేరితే ఆ నిల్వలు ఎన్ని రోజులకు సరిపోతాయి?

విద్యార్థుల సంఖ్య పెరిగితే ఆహార నిల్వలు నిలిచే రోజులు తగ్గుతాయి. కాబట్టి 'x' ఇవి విలోమానుపాతం లో ఉంటాయి.

$$80 \times 15 = 100 \times x$$

$$x = \frac{80 \times 15}{100} = 12.$$

ఆహార నిల్వలు కేవలం 12రోజులకు మాత్రమే సరిపోతాయి.

ఉదాహరణ 6 : రామ్ ఒక నిర్దిష్ట పరిమాణం కూరగాయలను కోయడానికి 1గంట పడుతుంది. శ్యామ్‌కు అదే పరిమాణం కూరగాయలను కోయడానికి 1.5 గంటలు పడుతుంది. ఇద్దరూ కలిసి పనిచేస్తే అదే పని పూర్తిచేయడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

పనిని యూనిట్లలో కొలుద్దాం.

- రామ్ గంటలో చేసే పని = 1 యూనిట్
- శ్యామ్ 1.5 గంటలో పని పూర్తిచేస్తాడు. అతడు గంటలో చేసేపని $\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ యూనిట్లు

అందువల్ల ఇద్దరూ కలిసి 1 గంటలో చేసేపని $=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ యూనిట్లు

అంటే $\frac{5}{3}$ యూనిట్ల పని చేయడానికి 1 గంట పడుతుంది.

ఇద్దరూ కలిసి 1 యూనిట్ పనిచేయడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

పని పరిమాణం మరియు దానిని పూర్తిచేయడానికి తీసుకునే సమయం అనులోమ లేదా విలోమాన పాతంలో ఉన్నాయా?



చక్ర, పని పరిమాణం మరియు దానిని పూర్తిచేయడానికి తీసుకునే సమయం అనులోమ లేదా విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయా?

ఇవి అనుపాతంలో ఉన్నాయి. దీనిని ఇలా సూచించవచ్చు

$\frac{5}{3} : 1 :: 1 : x$ ఇవి అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

ఇక్కడ x = సమయం

x రోజుల సంఖ్య అనుకుందాం

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఇది అనులోమానుపాతం మనకు తెలుసు

$$\frac{5}{3} \times x = 1 \times 1$$

$$x = \frac{1 \times 1}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

వారు కూరగాయలను కలిసి కోస్తే వారు $\frac{3}{5}$ గంటల్లో పూర్తి చేస్తారు.

దీన్ని గుర్తించండి.(Figure it out)

1. క్రింది పరిమాణాల జతల్లో ఏవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి?

   (i) నీటి ట్యాంకును నింపే కుళాయిల సంఖ్య మరియు దాన్ని నింపడానికి పట్టే సమయం.

   (ii) కూలీల(పెయింటర్ల సంఖ్య మరియు ఒక గోడను నిర్ణీత పరిమాణంలో రంగు వేయడానికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్య

   (iii) ఒక కారు ప్రయాణించగల దూరం మరియు ట్యాంకులో ఉన్న పెట్రోల్ పరిమాణం

   (iv) సైక్లిస్ట్ వేగం మరియు నిర్ణీత దూరాన్ని పూర్తిచేయడానికి పట్టే సమయం

   (v) కొనుగోలు చేసిన గుడ్డ పొడవు మరియు మీటరు కొరకు చెల్లించే ధర

   (vi) పుస్తకంలో పేజీల సంఖ్య మరియు స్థిరమైన పఠన వేగంతో చదవడానికి పట్టే సమయం

2. 24 పెన్సిళ్ళు ₹120 అయితే, 20 పెన్సిళ్ళ ధర ఎంత?

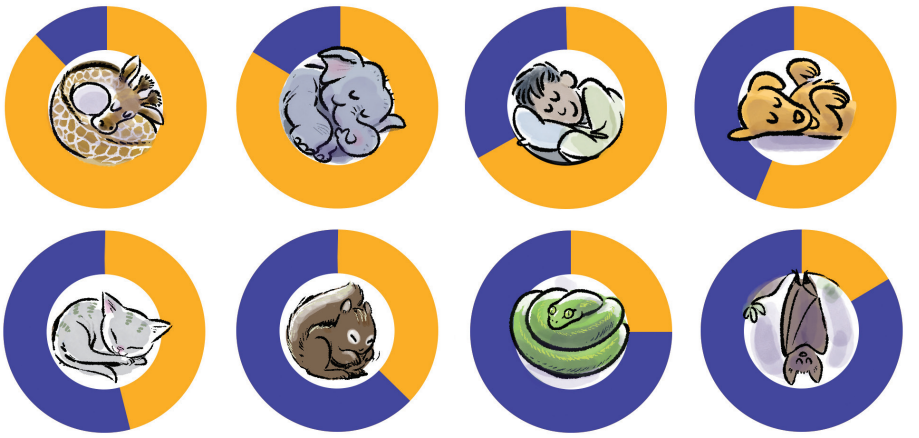


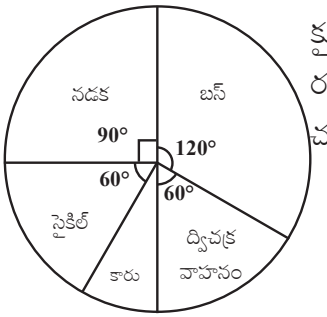
3. ఒక భవనంలోని ట్యాంక్ లో 20 కుటుంబాలకు 6రోజులకు సరిప నీరు ఉంది. అక్కడ 10 కుటుంబాలు మాత్రమే ఉంటే, నీరు ఎంత కాలం సరిపోతుంది? ఈ సమస్యను పరిష్కరించడానికి మీరు ఎలాంటి ఊహాగానాలు చేస్తారు?

4. చార్టులను గమనించి, ఒకరోజు ప్రతి జీవి సగటున ఎన్ని గంటలు నిద్రపోతుందో పూరించండి. ఈ జాబితా నుండి సరైన గంటలను ఎంచుకోండి.

15, 2.5, 20, 8, 3.5, 13, 10.5, 18

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



5. 

కుడివైపున ఉన్న పై చార్ట్ పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి పిల్లలు ఉపయోగించే రవాణా మార్గాలను తెలుసుకునేందుకు నిర్వహించిన సర్వే ఫలితాలను చూపిస్తుంది పై చార్టును పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబు లివ్వండి.

(i) అత్యంత సాధారణంగా ఉపయోగించే రవాణా సాధనం ఏది?

(ii) ఎంత భాగం పిల్లలు కారులో ప్రయాణిస్తున్నారు?

(iii) 18 మంది పిల్లలు కారులో ప్రయాణిస్తే, ఆ సర్వేలో మొత్తం ఎంత మంది పిల్లలు పాల్గొన్నారు? పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి టాక్సీలు ఉపయోగించే పిల్లల సంఖ్య ఎంత?

(iv)) ఏ రెండు రవాణా మార్గాలలో పిల్లల సంఖ్య సమానంగా ఉంది?

6. ముగ్గురు కార్మికులు ఒక కంచెకు రంగు 4 రోజుల్లో వేయ గలరు. ఇంకొక కార్మికుడు ఆ గుంపులో చేరితే, ఆ పని పూర్తి చేయడానికి ఎన్ని రోజులు పడుతుంది? మీరు చేయాల్సిన ఊహాగానాలు ఏమిటి?

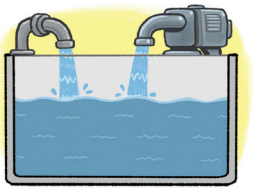
7. ఒకే పరిమాణం ఉన్న 2 ట్యాంకులను ఒక పంపుతో నింపడానికి 6 గంటలు పడుతుంది. అదే పంపుతో 5 అటువంటి ట్యాంకులను నింపడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

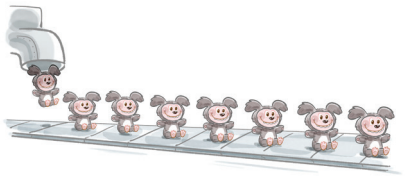
8. కొన్ని కుర్చీలు 25 వరుసలుగా అమర్చబడ్డాయి. ప్రతి వరుసలో 12 కుర్చీలు ఉన్నాయి. ప్రతి వరుగులో 20 కుర్చీలు ఉండేలా మళ్ళీ అమర్చితే, కొత్త ఏర్పాటులో ఎన్ని వరుసలుంటాయి?

9. ఒక పాఠశాలలో రోజుకు 8 పిరియడ్లు ఉన్నాయి. ప్రతి పిరియడ్ 45 నిముషాల పాటు ఉంటుంది. పాఠశాల రోజువారీ పని గంటలు మారవని భావిస్తే, రోజుకు 9 పిరియడ్లు ఉంటే ప్రతి పిరియడ్ ఎంత సమయం ఉంటుంది?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10. ఒక చిన్న పంపు ఒక ట్యాంకును 3 గంటల్లో నింపగలదు. ఒక పెద్ద పంపు అదే ట్యాంకును 2 గంటల్లో నింపగలదు. రెండు పంపులు కలిసి ఉపయోగిస్తే, ట్యాంకు నిండడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?



11. 

ఒక కర్మాగారంలో నిర్ధిష్ట సంఖ్యలో బొమ్మలు తయారు చేయడానికి 42 యంత్రాలకు 63 రోజులు పడతాయి. అదే సంఖ్యలో బొమ్మలను 54 రోజులో తయారు చేయడానికి ఎన్ని యంత్రాలు అవసరం?

12. .ఒకకారు గంటకు 60 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణిస్తూ ఒక గమ్యస్థానాన్ని చేరుకోవడానికి 2 గంటలు పడుతుంది. అదే కారు గంటకు 80 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణిస్తే చేరుకోవడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సారాంశం

- **a** : b : c : d : ... . రూపంలోని నిష్పత్తులు ఏమి సూచిస్తాయంటే, మొదటి పరిమాణంలో ప్రతి a యూనిట్లకు, రెండో పరిమాణంలో b యూనిట్లు, మూడో పరిమాణంలో c యూనిట్లు x ను $p : q : r : s : \cdots$,నిష్పత్తిలో అనేక భాగాలుగా విభజిస్తే. అలాగే కొనసాగుతాయి.
- మొదటి భాగం పరిమాణం $= x \times \frac{p}{(p+q+r+s+\cdots)}$,

  $x \times \frac{q}{(p+q+r+s+\cdots)}$,
- రెండు పరిమాణాలు ఒకే గుణకంతో మారి, వాటి నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటే అవి అనులోమానుపాతంలో ఉన్నట్లు. ఉదాహరణకు a మరియు b అనులోమాన పాతంలో ఉంటే $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ మరియు $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ అనుకమ విలువలైతే x మరియు y, అపుడు $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = k$, ఇక్కడ k క స్థిరరాశి.
- ఒక పరిమాణం n అనే గుణకంతో మారితే మరొక పరిమాణం దానికి విరుద్ధంగా $\frac{1}{n}$ తో మారితే, ఆవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నట్లు x మరియు y, విలోమానుపాతంలో ఉంటే $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ మరియు $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ అనేవి అనుక్రమ విలువలైతే $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \cdots = n$ ఇక్కడ n ఒక స్థిరరాశి

11 కొన్ని జ్యామితీయ అంశాల అన్వేషణ

Exploring Some Geometric Themes

Y1X4S1

ఈ అధ్యాయంలో, మనం రెండు జ్యామితీయ అంశాలను అన్వేషిస్తాము. మనం ఫ్రాక్టల్స్ (Fractals)గురించి చదువుకుంటాము, ఇవి స్వయం- సారూప్యత (self&similar) కలిగిన ఆకారాలు. ఇవి ఒకే రకమైన లేదా సారూప్యమైన నమూనాను పదేపదే ప్రదర్శిస్తాయి - కానీ చిన్నవిగా మారుతూ ఉండే పరిమాణాలలో ఉంటాయి. ఆ తర్వాత మనం ఘనరూపాలను (Fractals) దృశ్యమానం చేసే వివిధ పద్ధతులను పరిశీలిస్తాము.

11.1 పునరావృతమయ్యే జ్యామితీయ ఆకారాలు ఫ్రాక్టల్స్ (Fractals)



ప్రకృతిలో కనిపించే ప్రాక్టల్కు అత్యంత అందమైన ఉదాహరణలలో ఒకటి ఫెర్న్ (fern) మొక్క. ఫెర్న్ మొక్క ఆకులను గమనిస్తే, అందులో ఆ ఆకును పోలిన చిన్న చిన్న ఆకులు ఉంటాయి, మళ్ళీ ఆ ఉప-ఆకులలో అంతకంటే చిన్న ఆకులు ఉంటాయి, ఇలా కొనసాగుతూనే ఉంటుంది!

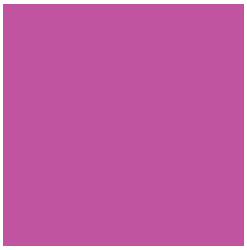
ఇటువంటి స్వయం-సారూప్యత కలిగిన దృగ్విషయాలు చెట్లలో (మొదలుకు కొమ్మలు, కొమ్మలకు రెమ్మలు ఇలా...), మేఘాలు, తీరప్రాంతాలు, పర్వతాలు, మెరుపులు మరియు ప్రకృతిలోని అనేక ఇతర వస్తువులలో కనిపిస్తాయి.

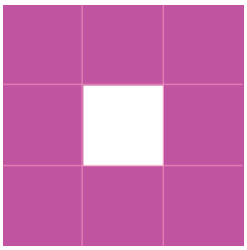
ఇతర గణిత ప్రాక్టల్స్ కూడా చాలా అందంగా ఉంటాయి. వాటిలో కొన్నింటిని మనం ఇక్కడ అన్వేషిద్దాం.

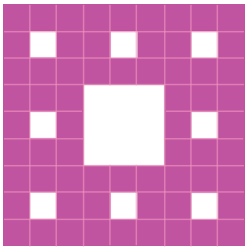
@KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

సియర్పిన్స్కి కార్పెట్ (Sierpinski Carpet)

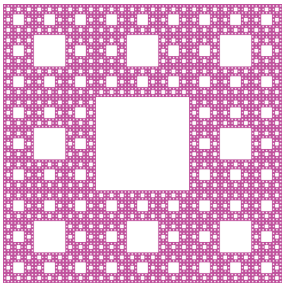
పోలిష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు సియర్పిన్స్కి, 'సియర్పిన్స్కి కార్పెట్' అని పిలువబడే ఒక రకమైన ఫ్రాక్టల్ను కనుగొన్నారు. ఇది ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకుని, దానిని 9 చిన్న చతురస్రాలుగా విభజించి, ఆపై మధ్యలో ఉన్న చతురస్రాన్ని తొలగించడం ద్వారా తయారు చేయబడుతుంది (క్రింద ఉన్న చిత్రాన్ని చూడండి); ఇదే పద్ధతిని మిగిలిన 8 చతురస్రాలపై పదేపదే చేస్తారు. అప్పుడు ఒకే విధమైన నమూనా చిన్న చిన్న పరిమాణాలలో కనిపిస్తుంది


దశ 0


దశ 1


దశ 2

. . .


సియర్పిస్స్కి కార్పెట్

? సియర్పిన్స్కి కార్పెట్కు దారితీసే ఆకార క్రమంలో మొదటి కొన్ని దశలను (కనీసం స్టెప్ 2 వరకు) గీయండి.

దీని నిర్మాణం ప్రకారం, క్రమంలోని ప్రతి దశలో ఇవి ఉంటాయి:

i) చిత్రంలో మిగిలి ఉన్న ఒకే పరిమాణపు చతురస్రాలు; దశ సంఖ్య పెరిగేకొద్దీ ఈ చతురస్రాల పరిమాణం తగ్గుతూ ఉంటుంది.

ii) చతురస్ర ముక్కలను తొలగించడం ద్వారా ఏర్పడిన చతురస్రాకార రంధ్రాలు,

? ప్రశ్న: ప్రతి దశలో మిగిలి ఉన్న రంధ్రాల సంఖ్య మరియు చతురస్రాల సంఖ్యలో ఏదైనా నమూనాను మీరు గమనించారా?

R_n అనేది n–వ దశలో మిగిలి ఉన్న చతురస్రాల సంఖ్యను సూచిస్తుంది అనుకుందాం. H_n అనేది n–వ దశలో ఉన్న రంధ్రాల సంఖ్యను సూచిస్తుంది అనుకుందాం.

మునుపటి దశ నుండి మిగిలి ఉన్న రంధ్రాలు మరియు చతురస్రాలు ఎలా పెరుగుతాయో విశ్లేషించడం ద్వారా ఈ సంఖ్యలను అర్థం చేసుకుందాం.

ఒక నిర్దిష్ట దశలో (ఉదాహరణకు స్టెప్) మిగిలి ఉన్న ప్రతి చతురస్రం, తర్వాత దశలో (n+1) మిగిలి ఉండే 8 చతురస్రాలకు దారి తీస్తుంది.

$$R_{n+1} = 8R_n$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? కాబట్టి, మనకు Rm.e = 8 R ఉంటుంది. R_n ప్రశ్న: దీనిని R కోసం సూత్రాన్ని (formula) పొందడానికి ఉపయోగించవచ్చా? మనకు ఉన్నది.

$$R_0 = 1$$
$$R_1 = 8 \times 1 = 8$$
$$R_2 = 8 \times 8 = 8^2.$$

సాధారణంగా, $R_n = 8^n$

? అదేవిధంగా, ఒక నిర్దిష్ట దశలో రంధ్రాల సంఖ్యను ఎలా కనుగొనాలి?

n వ దశలో మిగిలి ఉన్న ప్రతి చతురస్రం, (n + 1) వ దశలో ఒక రంధ్రానికి దారి తీస్తుంది. n-వ దశలో ఉన్న రంధ్రాలన్నీ (n + 1)-వ దశలో కూడా అలాగే ఉంటాయి.

కాబట్టి, $H_{n+1} = H_n + R_n$.

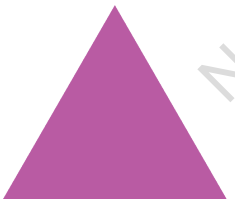
అందువల్ల:

$R_0 = 1$ $\quad$ $H^0 = 0$
$R_1 = 8$ $\quad$ $H_1 = 1$
$R_2 = 8^2$ $\quad$ $H_2 = 1 + 8$
$R_3 = 8^3$ $\quad$ $H_3 = 1 + 8 + 82$

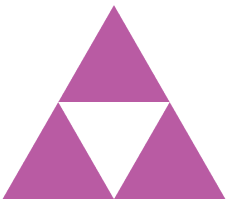
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సియర్పిన్స్కి గ్యాస్కెట్ (sierpinski Gasket)

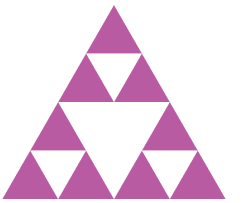
సియర్పిన్స్కి ఇదే విధంగా మరొక ప్రాక్టల్ను రూపొందించారు. ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని (equilateral triangle), దాని భుజాల మధ్యబిందువులను కలపడం ద్వారా 4 సమానమైన సమబాహు త్రిభుజాలుగా విభజించి, ఆపై మధ్యలో ఉన్న త్రిభుజాన్ని తొలగిస్తారు. ఈ పద్ధతిని మిగిలిన 3 త్రిభుజాలపై పదేపదే చేస్తారు. ఈ ఫ్రాక్టల్ను సియర్పిన్స్కి త్రిభుజం (Sierpinski Triangle) లేదా గ్యాస్కెట్ అని పిలుస్తారు.



దశ 0

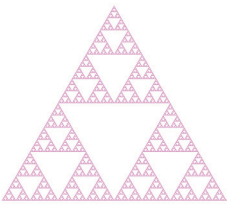


దశ 1



దశ 2

...



సియర్పిన్స్కి త్రిభుజం

? ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క మధ్యబిందువులను కలపడం ద్వారా, మనం దానిని 4 సమానమైన సమబాహు త్రిభుజాలుగా విభజించగలమని చూపండి.

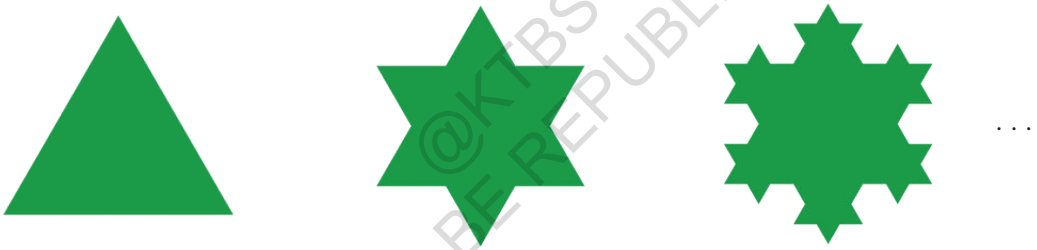
(సూచన: మూలల్లో ఏర్పడే త్రిభుజాలు సమద్విబాహు త్రిభుజాలని (isosceles) గమనించండి.)

? **దీనిని సాధించండి** (Figure it out) :

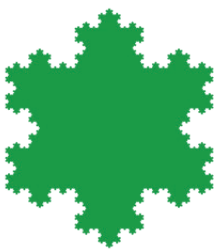
1. సియర్పిన్స్కి త్రిభుజానికి దారితీసే ఆకార క్రమంలో మొదటి కొన్ని దశలను (కనీసం స్టెప్ 2 వరకు) గీయండి.
2. సియర్పిన్స్కి త్రిభుజ క్రమంలోని ప్రతి దశలో మిగిలి ఉన్న త్రిభుజాల సంఖ్యను మరియు ఏర్పడిన రంధ్రాల సంఖ్యను కనుగొనండి.
3. ప్రారంభ చతురస్రం లేదా త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం 1 చదరపు యూనిట్ అనుకుంటే, ఈ సియర్పిన్స్కి ఫ్రాక్టల్స్ యొక్క n–వ దశలో మిగిలి ఉన్న ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.ఉ

కోక్ స్నో ఫ్లేక్ (Koch Snowflake)

స్వీడిష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు హెల్ట్ వాన్ కోక్ (Von Koch) పేరు మీద పిలువబడే కోక్ స్నో ఫ్లేక్ మరొక రకమైన ఫ్రాక్టల్, దీనిని ఆయన మొదటిసారిగా 1904లో వివరించారు. ఇప్పటికే ఈ ఫ్రాక్టల్ను6వ తరగతి గణిత ప్రకాశలో ఎదుర్కొన్నాము.



దశ 0 దశ 1 దశ 2 . . .



కోక్ స్నోఫ్లేరు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీనిని రూపొందించడానికి, మనం ఒక సమబాహు త్రిభుజంతో (equilateral triangle) ప్రారంభిస్తాము. ప్రతి భుజం:

i) 3 సమాన భాగాలుగా విభజించబడుతుంది, మరియు

ii) మధ్య భాగంపై ఒక చిన్న సమబాహు త్రిభుజం నిర్మించబడుతుంది, ఆపై ఆ మధ్య భాగం (base) తొలగించబడుతుంది.

క్లుప్తంగా చెప్పాలంటే, ప్రతి భుజం ఒక 'బంప్' (bump) వంటి ఆకారంతో భర్తీ ⌒ చేయబడుతుంది. ఈ పద్ధతిని కొత్తగా ఏర్పడిన ఆకారం యొక్క ప్రతి భుజంపై పదేపదే చేస్తారు.

? దీనిని సాధించండి (Figure it out) :

1. కోక్ స్నో ఫ్లేకు దారితీసే ఆకార క్రమంలో మొదటి కొన్ని దశలను (కనీసం స్టెప్ 2 వరకు) గీయండి.
2. కోక్ స్నో ఫ్లేక్ క్రమంలోని n-వ దశలో ఉండే భుజాల సంఖ్యను కనుగొనండి.
3. ప్రారంభ సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భుజం పొడవు 1 యూనిట్ అని అనుకుంటే, n-వ దశలో ఆ ఆకారం యొక్క చుట్టుకొలతను (perimeter) కనుగొనండి

కళలలో ఫ్రాక్టల్స్ (Fractals in Art)

మానవ నిర్మిత కళలలో కూడా ఫ్రాక్టల్స్ చాలా కాలంగా ఉపయోగించబడుతున్నాయి! బహుశా ఇలాంటి పురాతన ఫ్రాక్టల్స్ భారతదేశంలోని దేవాలయాలలో కనిపిస్తాయి. దీనికి ఒక ఉదాహరణ మధ్యప్రదేశ్ లోని ఖజురహూలో ఉన్న కందారియా మహాదేవ్ దేవాలయం, ఇది సుమారు క్రీ.శ. 1025లో పూర్తయింది. అక్కడ ఒక ఎత్తైన దేవాలయ నిర్మాణాన్ని చూడవచ్చు. ఇది పూర్తి నిర్మాణాన్ని పోలిన చిన్న చిన్న ప్రతిరూపాలతో నిర్మించబడింది, వాటిపై మళ్ళీ అదే నిర్మాణాన్ని పోలిన మరిన్ని చిన్న ప్రతిరూపాలు ఉంటాయి, ఇలా కొనసాగుతూనే ఉంటుంది. మధురై, హంపి, రామేశ్వరం, వారణాసి వంటి అనేక ఇతర ప్రదేశాలలోని దేవాలయాలలో కూడా ఫ్రాక్టల్స్ వంటి నమూనాలు కనిపిస్తాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



కందారియా మహాదేవ్ దేవాలయం

సంప్రదాయ ఆఫ్రికన్ సంస్కృతులలో కూడా ఫ్రాక్టల్స్ సర్వ సాధారణం ఉదాహరణకు నైజీరియన్ ఫులానీ (Fulani) వివాహ దుప్పట్లపై ఉండే నమూనాలు తరచుగా ఫ్రాక్టల్స్ నిర్మాణాలను ప్రదర్శిస్తాయి.



నైజీరియన్ ఫులానీ (Fulani) వివాహ దుప్పట్

నైజీరియన్ వివాహ దుప్పటి చిత్రంలో వలె, అందులో వజ్రం (diamond) ఆకారపు నమూనాలు ఉంటాయి, వాటి లోపల మళ్లీ చిన్న చిన్న వజ్రం ఆకారపు నమూనాలు ఉంటాయి, ఇలా కొనసాగుతూనే ఉంటుంది. ఫ్రాక్టల్ ఆర్ట్ (fractal art) లో ఆధునిక నిపుణుడు నిస్సందేహంగా డచ్ కళాకారుడు M.C. ఎషర్ (Escher). ఆయన వేసిన కొన్ని ప్రింట్లు టైలింగ్ (tiling) అనే గణిత అంశాన్ని అన్వేషిస్తాయని మనం ఇప్పటికే చూశాము. ఫ్రాక్టల్స్‌తో కూడిన ఆయన ప్రసిద్ధ రచనలలో ఒకటి 'స్మాలర్ అండ్ స్మాలర్' (Smaller and Smaller). ఇది బల్లుల (lizards) యొక్క ఒకే రకమైన నమూనాను ప్రదర్శిస్తుంది, కానీ అవి చిన్నవిగా మరియు మరింత చిన్నవిగా మారుతూ ఉండే పరిమాణాలలో ఉంటాయి. ఇక్కడ ఎషర్ యొక్క 'స్మాలర్ అండ్ స్మాలర్' నుండి ప్రేరణ పొందిన ఒక ప్రింట్ ఉంది.

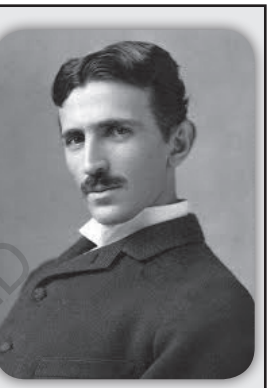


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11.2 ఘనరూపాలను దృశ్యమానం చేయడం (Visualising Solids)

మీ ఊహలో నిర్మించండి (Build it in your Imagination)

? మనం ఈ విభాగాన్ని దృశ్యమానం చేయడం (visualisation) ప్రాక్టీస్ చేయడం ద్వారా ప్రారంభిద్దాం. ప్రతి ప్రాంప్ట్ కోసం, మీ భాగస్వామితో మాట్లాడండి, సైగలు చేయండి లేదా గాలిలో గీయండి – కానీ కాగితంపై మాత్రం గీయకండి!



నా పద్ధతి భిన్నంగా ఉంటుంది. నేను వెంటనే అసలు పనిలోకి దిగను.

నాకు ఏదైనా ఆలోచన వచ్చినప్పుడు, వెంటనే నా ఊహలోనే దానిని నిర్మించడం ప్రారంభిస్తాను. నేను దాని నిర్మాణాన్ని మారుస్తాను, మెరుగుపరుస్తాను మరియు ఆ పరికరాన్ని పూర్తిగా నా మనస్సులోనే నడుపుతాను.

నికోలాస్ టెస్లా (Nikolas Tesla) (1856–1943), గొప్ప సెర్బియన్–అమెరికన్ ఇంజనీర్ మరియు ఆవిష్కర్త ఈయన ఎలక్ట్రికల్ ఇంజనీరింగ్ మరియు ఇతర రంగాలలో విశేషమైన కృషి చేశారు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

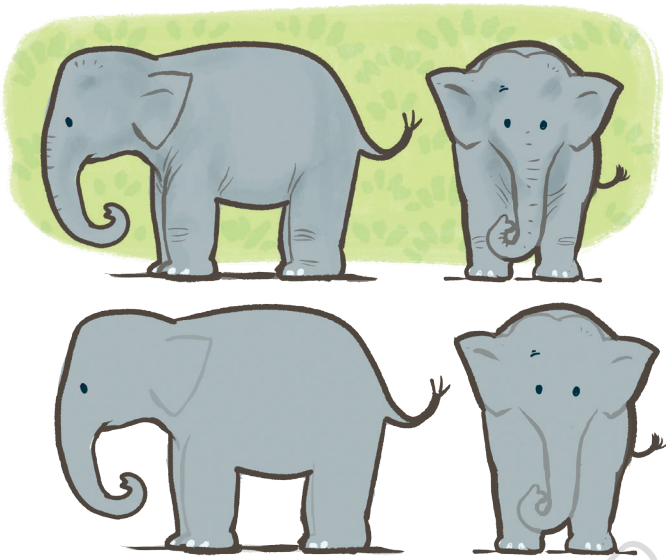
1. మీ పేరును ఊహించుకోండి, ఆపై ఆ అక్షరాలను వెనుక నుండి ముందుకు చదవండి. దీనిని శబ్దం ద్వారా కాకుండా, కేవలం చూపు (దృశ్యం) ద్వారానే చేస్తున్నారని నిర్ధారించుకోండి – నిజంగా మీ పేరును చూడండి! ఇప్పుడు మీ స్నేహితుడి పేరుతో కూడా ప్రయత్నించండి.

2. ఒక ఊహాజనిత చతురస్రం (square) యొక్క నాలుగు మూలలను కత్తిరించండి. ఈ ప్రతి కత్తిరింపు పక్కపక్కనే ఉన్న అంచుల మధ్య బిందువుల గుండా వెళ్లాలి. అప్పుడు మిగిలిన ఆకారం ఏమిటి? ఆ నాలుగు మూలలను తిరిగి కలిపి మరొక చతురస్రాన్ని ఎలా తయారు చేయవచ్చు?

3. ఒక సమబాహు త్రిభుజం (equilateral triangle) భుజాలను మూడు సమాన భాగాలుగా (thirds) గుర్తించండి. త్రిభుజం యొక్క ప్రతి మూలను ఆ గుర్తుల వరకు కత్తిరించండి. మీకు ఏ ఆకారం వస్తుంది?

4. ఒక చతురస్రం భుజాలను మూడు సమాన భాగాలుగా గుర్తించి, దాని ప్రతి మూలను ఆ గుర్తుల వరకు కత్తిరించండి. అప్పుడు మిగిలిన ఆకారం ఏమిటి?

మనం ఒక ఘన వస్తువును చూసినప్పుడు, నిజానికి మనం ఒక నిర్దిష్ట కోణం నుండి దాని రూపురేఖలను (profile) ను చూస్తున్నాము. మన దృష్టి కోణం (viewpoint) ఆధారంగా, ఆ రూపురేఖలు యొక్క అవుట్ లైన్ (outline) నాటకీయంగా మారిపోవచ్చు!



మీరు ఫోటో తీస్తున్నప్పుడు లేదా ఏదైనా వస్తువు యొక్క నీడను గమనిస్తున్నప్పుడు బహుశా ఆ వస్తువుల ఆసక్తికరమైన ప్రొఫైల్లను గమనించి ఉండవచ్చు? లేదా, ఒక పాత్ర గోడను బద్దలు కొట్టుకుంటూ బయటకు వచ్చినప్పుడు, వారి అవుట్ లైన్ ఆకారంలోనే రంధ్రం పడటం వంటి కార్టూన్లను మీరు చూసి ఉండవచ్చు!



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

మునుపటి తరగతులలో, మీరు ఏనుగు లేదా పిల్లి కంటే చాలా సరళంగా ఉండే ఘనరూపాలను (solids) చూశారు, ఉదాహరణకు ఘనాలు (cubes), గోళాలు (spheres), స్థూపాలు (cylinders) మరియు శంకువులు (cones). వివిధ కోణాల నుండి చూసినప్పుడు వీటి రూపురేఖలు (profiles) ఎలా కనిపిస్తాయి?

? కింది సందర్భాలలో ప్రతిదానికీ దారితీసే ఒక ఘనరూపాన్ని మరియు దానిని చూసే కోణాన్ని (viewpoint) మీరు వివరించగలరా? దీని కోసం, ఒక ఘన వస్తువు గోడను బద్దలు కొట్టుకుంటూ బయటకు వస్తున్నట్లు వ ఎరియు ఆ గోడపై తగిన ఆకారంలో రంధ్రం పడినట్లు మీరు ఊహించుకోవచ్చు.

5. చతురస్రాకార (square) అవుట్ లైన్ కలిగిన రూపురేఖలు ఉన్న ఘనరూపం.

6. వృత్తాకార (circular) అవుట్ లైన్ కలిగిన రూపురేఖలు ఉన్న ఘనరూపం.

7. త్రిభుజాకార (triangular) అవుట్ లైన్ కలిగిన రూపురేఖలు ఉన్న ఘనరూపం.

? మనం ఏనుగు విషయంలో చూసినట్లుగా, ఒక నిర్దిష్ట ఘనరూపం వివిధ కోణాల నుండి చూసినప్పుడు చాలా భిన్నమైన ప్రొఫైల్లను కలిగి ఉండవచ్చు. ఈ క్రింది విరుద్ధమైన రూపు రేఖలు కలిగిన ఘనరూపాలను మీరు ఊహించగలరా? దీనిపై కొంత సమయం వెచ్చించండి.

ఒకవేళ మీకు దృశ్యమానం చేయడం (visualise) కష్టంగా అనిపిస్తే, మీ చుట్టూ ఉన్న వస్తువులను చూడండి లేదా మీరే కొన్ని వస్తువులను తయారు చేయండి. ఆ వస్తువును ఏదైనా దిశ నుండి, చివరకు నేరుగా పై నుండి కూడా పరిశీలించండి.

8. ఒక కోణం నుండి దీర్ఘచతురస్రాకార (rectangular) రూపురేఖలు మరియు మరొక కోణం నుండి వృత్తాకార (circular) రూపురేఖలు కలిగిన ఘనరూపం.

9. ఒక కోణం నుండి దీర్ఘచతురస్రాకార రూపురేఖలు మరియు మరొక కోణం నుండి త్రిభుజాకార రూపురేఖలు కలిగిన ఘనరూపం.

10. ఒక కోణం నుండి దీర్ఘచతురస్రాకార రూపురేఖలు మరియు మరొక కోణం నుండి త్రిభుజాకార రూపురేఖలు కలిగిన ఘనరూపం.

11. ఒక కోణం నుండి ట్రాపీజియం (trapezium) ఆకారపు రూపురేఖలు మరియు మరొక కోణం నుండి వృత్తాకార రూపురేఖలు కలిగిన ఘనరూపం.

12. ఒక కోణం నుండి పంచభుజి (pentagonal) రూపురేఖలు మరియు మరొక కోణం నుండి దీర్ఘచతురస్రాకార రూపురేఖలు కలిగిన ఘనరూపం.

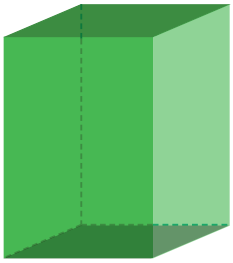
? పైన పేర్కొన్న ప్రతి నిబంధనకూ ప్రత్యేకమైన ఘనరూపాలు ఉన్నాయా లేదా బహుళ అవకాశాలు ఉండవచ్చా?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

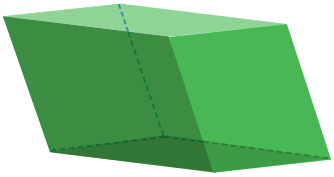
ఘనరూపాలను తయారు చేయడం (Making Solids)

దీర్ఘఘనము (cuboid) సమాంతర చతుర్భుజపట్టకం (parallelopiped), స్తూపం (cylinder), శంకువు (cone), పట్టకం (prism) మరియు పిరమిడ్ (pyramid) వంటి అనేక ప్రాథమిక ఘన ఆకారాలను కాగితం, కార్డ్ బోర్డ్ మరియు లోహపు షీట్ల వంటి మడవగలిగే ఫ్లాట్ పదార్థాలను ఉపయోగించి తయారు చేయవచ్చు! బోలు ఘనరూపాలను (hollow solids) తయారు చేయడానికి ఇది ఒక పద్ధతి.

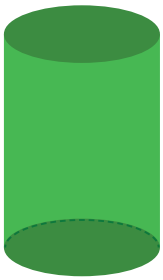
సమతల ఉపరితలాలను (plane surfaces) సరిహద్దులుగా కలిగి ఉన్న ఘనరూపాల గురించి చర్చించేటప్పుడు, ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు అనే భావనలు చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటాయి.



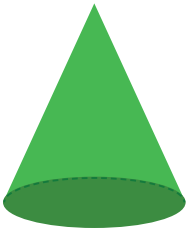
ఘనం



సమాంతర చతుర్భుజం



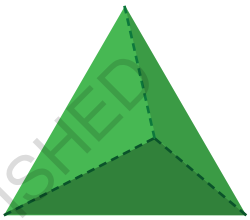
స్థూపం
(సిలిండర్)



శంకువు



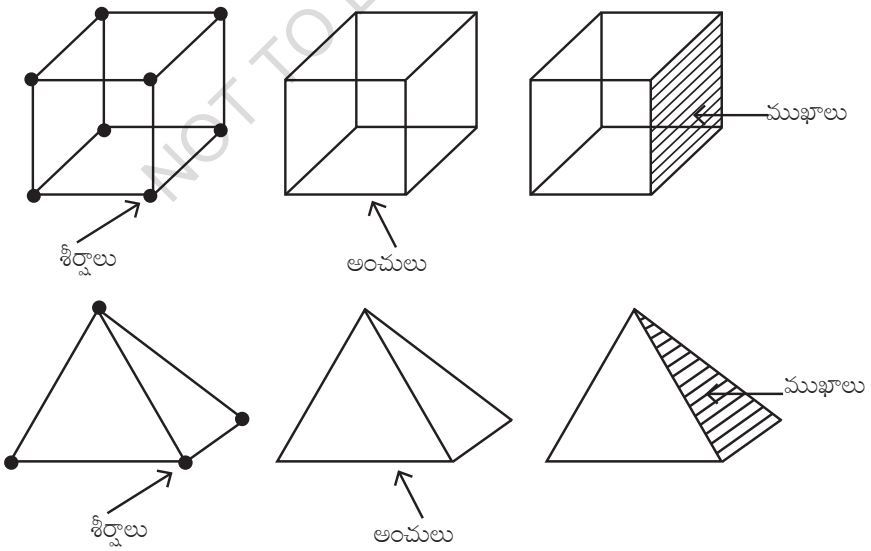
త్రిభుజాకార పట్టకం



త్రిభుజాకార పిరమిడ్

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

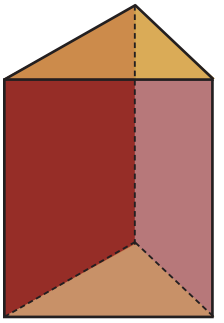
ముఖాలు (Faces): ఒక ఘనరూపం యొక్క సరిహద్దును ఏర్పరిచే సమతల లేదా ఫ్లాట్ ఉపరితలాలను ముఖాలు అంటారు.



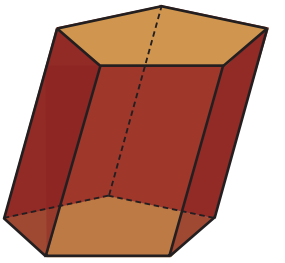
అంచులు (Edges): ముఖాల భుజాలను ఏర్పరిచే రేఖాఖండాలను అంచులు అంటారు.

శీర్షాలు (Vertices): అంచులు కలిసే బిందువులను శీర్షాలు అంటారు.

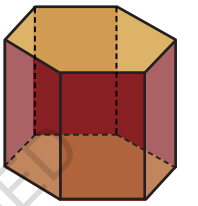
ఉదాహరణ: ఒక దీర్ఘఘనము (cuboid) లేదా ఘనం (cube) కు 6 ముఖాలు, 12 అంచులు మరియు 8 శీర్షాలు ఉంటాయి. అనేక రకాల పట్టకం మరియు పిరమిడ్లు ఉన్నాయి. వాటి పేర్లు వాటి ముఖాల ఆకారాలపై ఆధారపడి ఉంటాయి.



త్రిభుజాకార పట్టకం



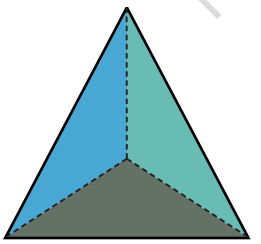
పంచభుజి పట్టకం



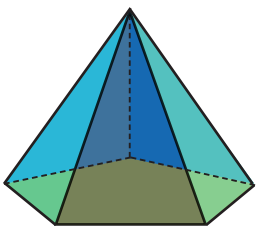
షడ్భుజ పట్టకం

పట్టకం (Prism): సాధారణంగా, ఒక పట్టకం ఎదురెదురుగా రెండు సర్వసమాన బహుభుజి (congruent polygon) ముఖాలు ఉంటాయి. ఈ బహుభుజుల శీర్షాలను కలిపే అంచులు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి. మిగిలిన ముఖాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు (parallelograms). ఆ సర్వసమాన బహుభుజుల ఆకారాన్ని బట్టి, పట్టకంను త్రిభుజాకార పట్టకం, పంచభుజి పట్టకం, షడ్భుజి పట్టకం అని పిలుస్తారు.

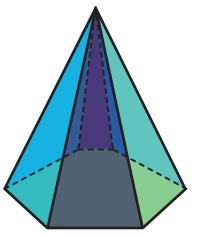
పిరమిడ్స్ (Pyramids): సాధారణంగా, ఒక పిరమిడ్‌కు ఒక బహుభుజి ఆధారం (base) మరియు దానికి వెలుపల ఒక బిందువు ఉంటుంది. ఆధారం యొక్క ప్రతి శీర్షాన్ని ఆ వెలుపల ఉన్న బిందువుతో అంచులు కలుపుతాయి. ఆధారం యొక్క ఆకారాన్ని బట్టి, పిరమిడ్లను త్రిభుజాకార పిరమిడ్, చతురస్రాకార పిరమిడ్, పంచభుజి పిరమిడ్ అని పిలుస్తారు. త్రిభుజాకార పిరమిడ్ను చతుర్ముఖి (tetrahedron) అని కూడా పిలుస్తారు.



త్రిభుజాకార పట్టకం



పంచభుజ పట్టకం



షడ్భుజ పట్టకం

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

? ఒక పట్టకం యొక్క సర్వసమాన బహుభుజులు 10 భుజాలను కలిగి ఉంటే, ఆ పట్టకం ఎన్ని ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు ఉంటాయి? ఒకవేళ ఆ బహుభుజాలకు n భుజాలు ఉంటే అప్పుడెన్ని ఉంటాయి?

? ఒక పిరమిడ్ ఆధారం 10 భుజాలను కలిగి ఉంటే, ఆ పిరమిడ్కు ఎన్ని ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు ఉంటాయి? ఒకవేళ ఆధారం n భుజాల బహుభుజి అయితే అప్పుడెన్ని ఉంటాయి?

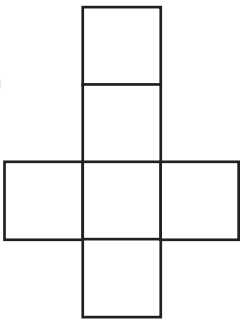
ఇప్పుడు కాగితం, కార్డ్ బోర్డ్ వంటి మడవగలిగే ఫ్లాట్ ఉపరితలాలను ఉపయోగించి వివిధ ఘనరూపాలను ఎలా తయారు చేయాలో చూద్దాం.

దీని ప్రాథమిక ఆలోచన ఏమిటంటే, ఒక సమతల ఉపరితలంపై ఒక ఆకారాన్ని సృష్టించడం, దానిని మడవడం ద్వారా ఘనరూపాన్ని తయారు చేయవచ్చు. ఇటువంటి ఆకారాన్ని వల (net) అని పిలుస్తారు. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, ఒక ఘనరూపాన్ని ఒక సమతలంపై 'విప్పడం' (unfolding) ద్వారా వల లభిస్తుంది.

? ఘనం (Cube) యొక్క నెట్ అంటే ఏమిటి?

చిత్రం 4.1 ఒక ఘనం యొక్క నెట్ను చూపుతుంది.

? అది ఎలా మడవబడి ఘనంగా మారుతుందో ఊహించండి.

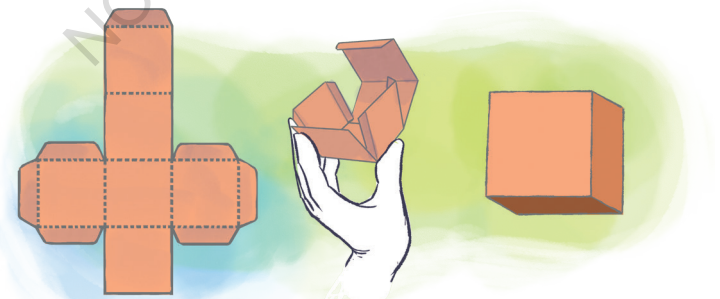


చిత్రం 4.1

నెట్ ఉపయోగించడంలో అదరణాత్మక అంశాలు (Practical Aspects of Using a Net)

నెట్ ఉపయోగించడంలో ఆచరణాత్మక అంశాలు నెట్ నుండి అసలైన ఘనాన్ని తయారు చేయడానికి, కొన్ని ఆచరణాత్మక అంశాలను గుర్తుంచుకోవాలి. ఒకటి, ఉపయోగించే పదార్థం ఘనం నిలబడటానికి తగినంత దృఢత్వాన్ని కలిగి ఉండాలి. రెండవ అంశం ఏమిటంటే, ముఖాలను (faces) కలిపి ఉంచడానికి ఏదైనా యంత్రాంగం ఉండాలి. ఒకవేళ కార్డ్ బోర్డ్ లేదా అలాంటి పదార్థాన్ని ఉపయోగిస్తే, పక్కపక్క ముఖాలను అతికించడానికి సెల్లో టేప్ ఒక మార్గం. చార్ట్ పేపర్ వంటి తక్కువ దృఢత్వం ఉన్న పదార్థాలకు, కొన్ని ముఖాలపై అదనపు 'ఫ్లాప్స్' (flaps) ఉండటం ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది, వీటిని పక్క ముఖాలకు అంటించవచ్చు. మీరు ప్యాకేజింగ్ బాక్సులలో ఈ పద్ధతిని గమనించి ఉండవచ్చు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



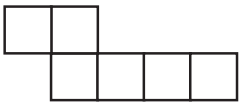
(i) (ii) (iii)

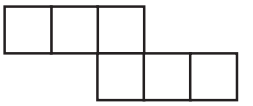
అయితే, ఘనాకృతి యొక్క నెట్ గురించి మనం మాట్లాడేటప్పుడు, ఘనాన్ని విడదీయడం ద్వారా ఏర్పడిన ఆకారాన్ని మాత్రమే పరిగణిస్తాము, దానిని తయారు చేయడానికి ఉపయోగించే ఇతర సహాయక ఫ్లాప్లను కాదు.

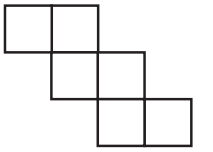
నెట్ను ఉపయోగించడమే కాకుండా, కాగితం నుండి ఘనాన్ని తయారు చేయడానికి ఇతర మార్గాలు కూడా ఉన్నాయి. ఒక ఘనాన్ని నిర్మించడానికి అనేక రకాలైన నెట్లు సాధ్యమవుతాయి.

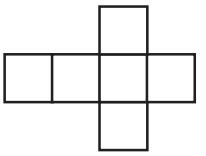
? ఆలోచించండి (Figure it out)

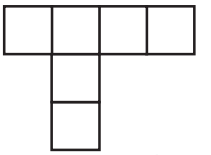
1. కింది వాటిలో ఏవి ఘనం యొక్క నెట్లు? మొదట ఊహించి సమాధానం చెప్పడానికి ప్రయత్నించండి. ఆ తర్వాత, కటౌట్లను ఉపయోగించి ప్రయత్నించవచ్చు.

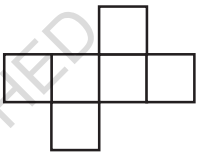

(i)


(ii)

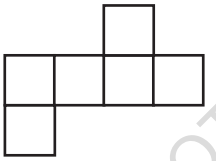
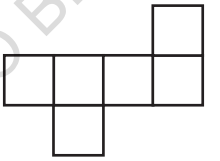
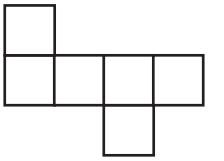

(iii)


(iv)


(v)


(vi)

2. ఒక ఘనం (cube) మొత్తంగా 11 సాధ్యమయ్యే నెట్ నిర్మాణాలను కలిగి ఉంటుంది. ఈ గణనలో, ఒక నెట్ను తిప్పడం (rotation) ద్వారా లేదా తిరగవేయడం (flip) ద్వారా మరొకటి వస్తే, ఆ రెండింటినీ ఒకే నెట్ గా పరిగణిస్తారు. ఉదాహరణకు, కింది నెట్లన్నీ ఒకే రకమైనవిగా పరిగణించబడతాయి –

ఘనం యొక్క మొత్తం 11 నెట్లను కనుగొనండి.

3. కింది కొలతలు కలిగిన ఒక దీర్ఘఘనం (cuboid) యొక్క నెట్ను గీయండి:



i) 5 సెం.మీ, 3 సెం.మీ, మరియు 1 సెం.మీ

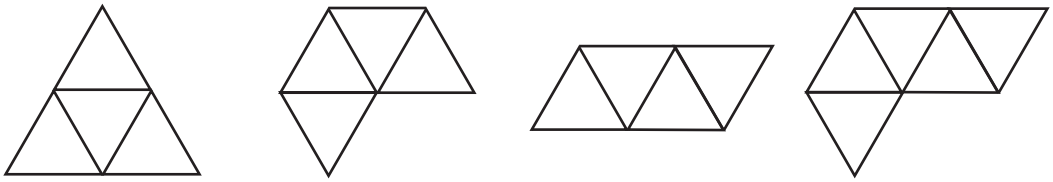
ii) 6 సెం.మీ, 3 సెం.మీ, మరియు 2 సెం.మీ

మనం ఇతర ఘనాకృతుల నెట్లను కూడా కనుగొందాం.

ఏ టెట్రా హెడ్రన్ (tetrahedron) ముఖాలైతే సమబాహు త్రిభుజాలుగా (equilateral triangles) ఉంటాయో, దానిని క్రమ టెట్రాహెడ్రన్ (regular tetrahedron) అని పిలుస్తారు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? క్రమ టెట్రాహెడ్రన్ యొక్క నెట్ అంటే ఏమిటి? కింది వాటిలో ఏవి క్రమ టెట్రా హెడ్రన్ యొక్క నెట్లు?



? ఇంకేవైనా ఇతర నెట్లు సాధ్యమేనా?

ఒక క్రమ టెట్రాహెడ్రన్కు కేవలం 2 సాధ్యమయ్యే నెట్లు మాత్రమే ఉంటాయి.

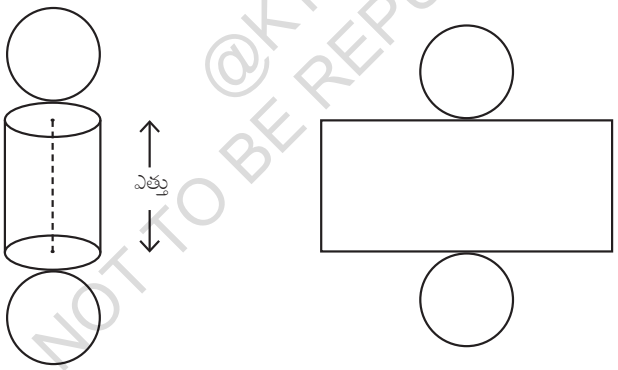
? సరైన కొలతలతో ఒక నెట్ను గీయండి, దానిని మడవడం ద్వారా క్రమ టెట్రాహెడ్రన్ను తయారు చేయవచ్చు. దానిని ఒక కటౌట్ (cutout) ద్వారా సరిచూడండి.



? సరైన కొలతలతో ఒక నెట్ను గీయండి, దానిని మడవడం ద్వారా ఒక చతురస్ర పిరమిడ్ (square pyramid) ను తయారు చేయవచ్చు. దానిని ఒక కటౌట్ ద్వారా సరిచూడండి.

? సిలిండర్ (స్తూపం) యొక్క నెట్ (net) అంటే ఏమిటి?

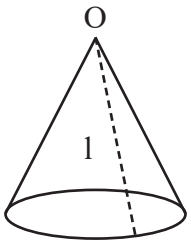
ఒకవేళ సిలిండర్ యొక్క వృత్తాకార ముఖాలను విడదీసి, కింద చిత్రంలో చూపిన విధంగా దాని ఎత్తు వెంబడి ఒక కట్ చేస్తే, మనకు ఇలా వస్తుంది:



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? పొందిన దీర్ఘచతురస్రం యొక్క భుజాల పొడవు ఎంత ఉంటుంది?

? శంకువు (cone) యొక్క నెట్ ఎలా కనిపిస్తుంది?



? ఒకవేళ శంకువును '1' అనే రేఖ వెంబడి కత్తిరించి, ఆపై దాన్ని విప్పితే (unroll), మనకు ఏమి వస్తుంది?



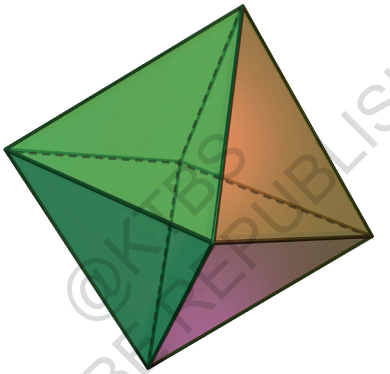
పునాది వృత్తం (base circle) యొక్క అంచుపై ఉన్న అన్ని బిందువులు "O' నుండి సమాన దూరంలో ఉన్నాయని గమనించండి. కాబట్టి శంకువును విప్పిన తర్వాత, నెట్ యొక్క సరిహద్దు "O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తంలో ఒక భాగం (sector) అవుతుంది.

? 'o' కేంద్రంగా లేని పై నెట్ను ఉపయోగించి మీరు ఏ ఉపరితలాన్ని నిర్మిస్తారు? ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం ఇవ్వడానికి ఒక భౌతిక నమూనాను తయారు చేయండి!



? త్రిభుజాకార ప్రిజం (triangular prism) గా మడవగలిగే తగిన కొలతలతో కూడిన నెట్ను గీయండి. ఒక కటౌట్ తయారు చేయడం ద్వారా అది సరిగ్గా వస్తుందో లేదో తనిఖీ చేయండి.

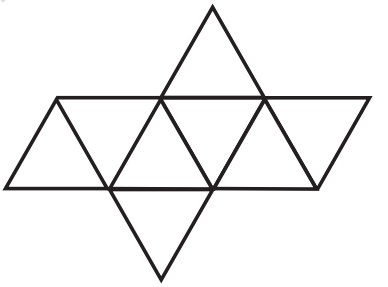
రెండు చతురస్ర పిరమిడ్లను వాటి చతురస్ర పునాదుల వద్ద కలపడం ద్వారా తయారైన అష్టముఖి (octahedron) అనే ఘనరూపం ఇక్కడ ఉంది.



అష్టముఖి

@KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

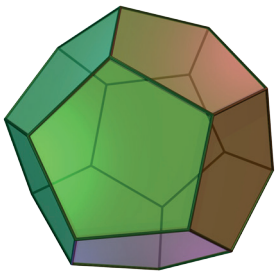
దీని నెట్ (net) ను మీరు ఊహించగలరా? ఇది దాని నెట్లలో ఒకటి.



? నెట్లోని అన్ని త్రిభుజాలను సమబాహు త్రిభుజాలుగా తీసుకుని, ఒక నెట్ కటౌట్ తయారు చేసి, దానిని అష్టముఖిగా మలచండి.



క్యూబ్స్ (cubes) లాగే, అష్టముఖికి కూడా 11 రకాల నెట్లు ఉంటాయి. ఇప్పటివరకు మనం అన్ని ముఖాలు సమబాహు త్రిభుజాలు (క్రమ టెట్రాహెడ్రాన్లు) మరియు అన్ని ముఖాలు చతురస్రాలు (క్యూబ్స్) కలిగిన ఘనరూపాలను చూశాము. అన్ని ముఖాలు పంచభుజాలుగా (pentagons) కలిగిన ఘనరూపం ఏదైనా ఉందా? ఆశ్చర్యకరంగా, సమాధానం అవును! ఈ ఘనరూపాన్ని ద్వాదశ ముఖి (dodecahedron) అంటారు. ఈ ఘనరూపాన్ని కూడా ఒక నెట్ నుండి తయారు చేయవచ్చు! ద్వాదశ ముఖి ఖచ్చితంగా ఎన్ని నెట్లు ఉంటాయో కూడా గణిత శాస్త్రజ్ఞులు కనుగొన్నారు–43,380.



ద్వాదశ ముఖి

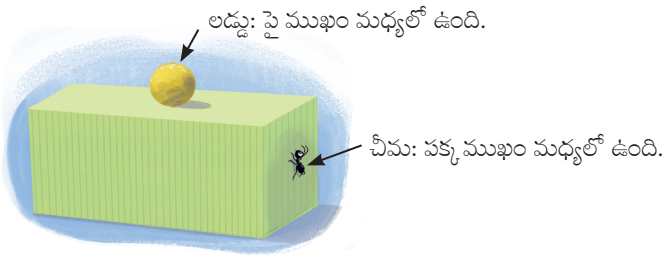
? గోళం (sphere) యొక్క నెట్? ముడతలు, ఖాళీలు లేదా అతివ్యాప్తి (overlaps) లేకుండా ఒక బంతిని ఖచ్చితంగా చుట్టగలిగే కాగితం కటౌట్ను మీరు తయారు చేయగలరో లేదో ప్రయోగాత్మకంగా చూడండి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఘనం పై అతి తక్కువ దూర మార్గాలు (Shortest Paths on a Cubs)

ఇప్పటివరకు జరిగిన చర్చకు సంబంధించి ఒక ఆసక్తికరమైన సమస్యను పరిశీలిద్దాం. ఒక తలం (plane) మీద రెండు బిందువుల మధ్య అతి తక్కువ దూరం వాటి మధ్య ఉండే సరళ రేఖ అని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు, ఒక క్యూబాయిడ్ (దీర్ఘఘనం) ఉపరితలంపై మాత్రమే ప్రయాణించాల్సి వస్తే, దాని ఉపరితలంపై ఉన్న రెండు బిందువుల మధ్య అతి తక్కువ దూరం ఎంత?

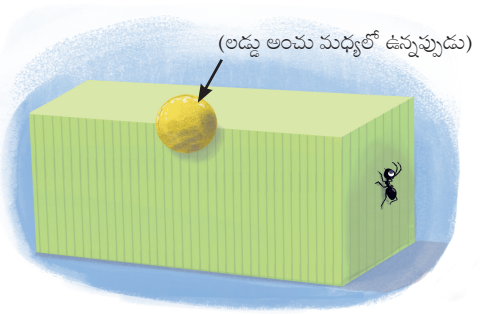
ఒక దీర్ఘఘనం ఉపరితలంపై నివసించే ఆకలితో ఉన్న చీమను ఊహించుకోండి. దాని అదృష్టం కొద్దీ, ఉపరితలం పై ఒక లడ్డు ఉంది.



? చీమ లడ్డును చేరుకోవడానికి అతి తక్కువ దూర మార్గం ఏది?

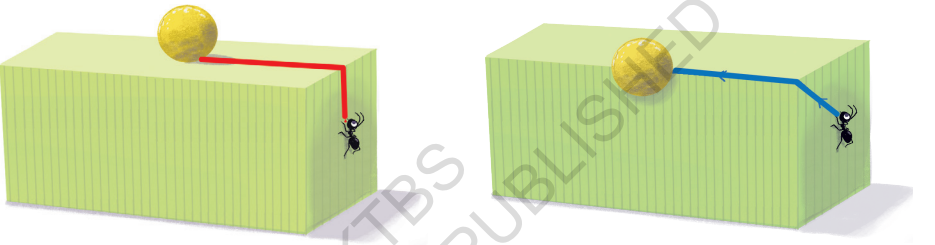
? కింది సందర్భంలో పరిస్థితి ఏమిటి?

గణిత చర్చ



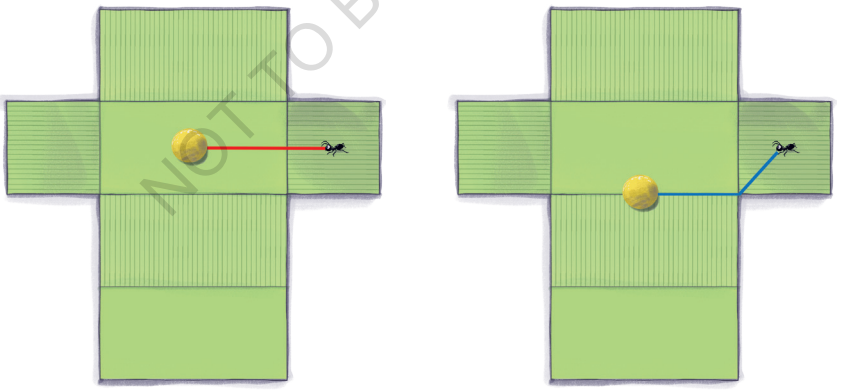
? ఒక నిర్దిష్ట మార్గం అతి తక్కువ దూర మార్గం అని మనం భావిస్తే, అనంతమైన అవకాశాలలో అది నిజంగా తక్కువ అని మనం ఎలా ఖచ్చితంగా చెప్పగలం?

? ఉదాహరణకు, వీటిలో ఏదైనా అతి తక్కువ దూర మార్గం అవుతుందా?



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సలహా : నెట్ గీసి ఆ మార్గాలు నెట్ మీద ఎలా కనిపిస్తాయో చూడండి).

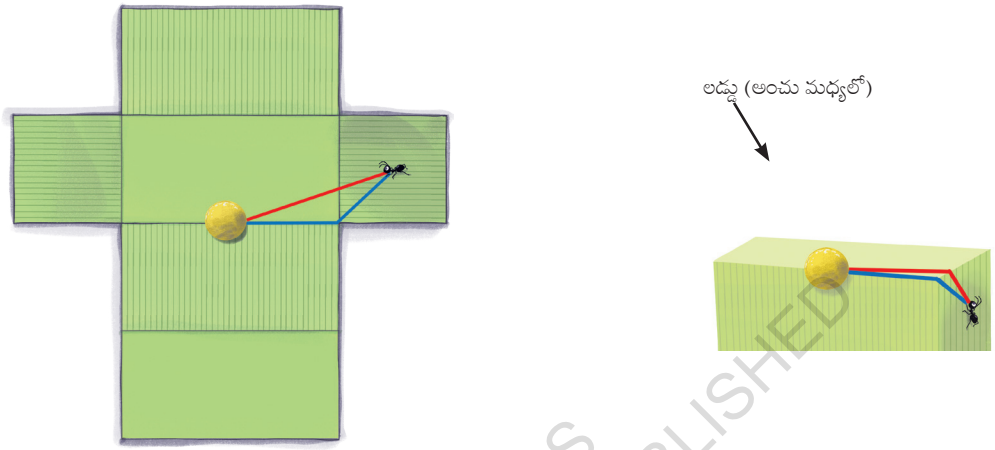


? **ఇది దేనిని సూచిస్తుంది?**

దీర్ఘఘనం ఉపరితలంపై ఉన్న మార్గాన్ని అదే పొడవుతో నెట్ మీదకు మార్చవచ్చు. దీనికి విరుద్ధంగా, నెట్ మీద ఉన్న ప్రతి మార్గాన్ని దీర్ఘఘనం మీదకు మార్చవచ్చు.

మొదటి సందర్భం: క్యూబాయిడ్ మీద గుర్తించిన మార్గం నెట్ మీద చీమ మరియు లడ్డు మధ్య ఒక సరళ రేఖగా నూరుతుంది, కాబట్టి ఇదే అతి తక్కువ దూరం.

రెండవ సందర్భం: దీర్ఘఘనం మీద గుర్తించిన మార్గం నెట్ మీద సరళ రేఖగా మారదు, కాబట్టి అది అతి తక్కువ దూర మార్గం కాదు.

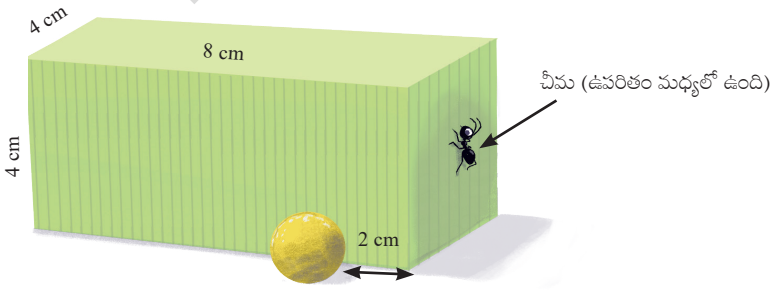


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

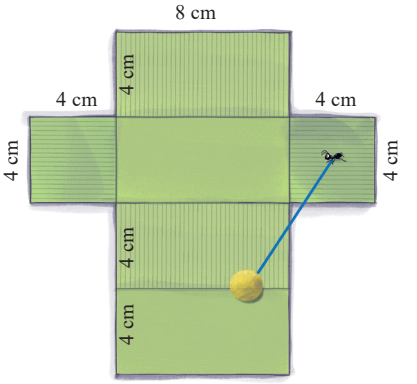
నెట్ను ఉపయోగించడం ద్వారా, దీర్ఘఘనం అతి తక్కువ దూర మార్గాన్ని కనుగొనే సమస్యను, నెట్ అతి తక్కువ దూర మార్గాన్ని కనుగొనే సమస్యగా మార్చవచ్చు.

కింది సందర్భంలో చీమ మరియు లడ్డు మధ్య అతి తక్కువ దూర మార్గాన్ని కనుగొనండి: మనం ముందుపటిలాగే దీర్ఘఘనం విడదీస్తే (unfold), మనకు ఇలా వస్తుంది:

? చీమ మరియు లడ్డు మధ్య ఉన్న రేఖాఖండం నెట్ వెలుపలికి వెళ్లడాన్ని గమనించండి! స్పష్టంగా, ఇది దీర్ఘఘనం మీద ఏ మార్గానికి సరిపోలదు.



మరి ఇప్పుడు మనం ఏమి చేయాలి?

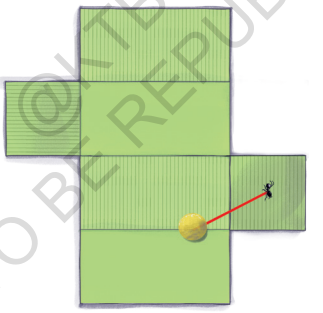


ఒకవేళ నెట్ను కింది విధంగా విడదీస్తే, మనకు దీర్ఘఘనం మీద ఒక మార్గం లభిస్తుంది. చిత్రం: వేరొక విధంగా విడదీయబడిన నెట్, దీనిలో ఎరుపు రంగులో అతి తక్కువ దూర మార్గం చూపబడింది.

మరి ఇప్పుడు మనం ఏమి చేయాలి?

? అతి తక్కువ దూర మార్గం (The shortest path)

కాబట్టి, ఒక దీర్ఘఘనం ఏ విధంగా విడదీస్తాం అనేది ముఖ్యం!



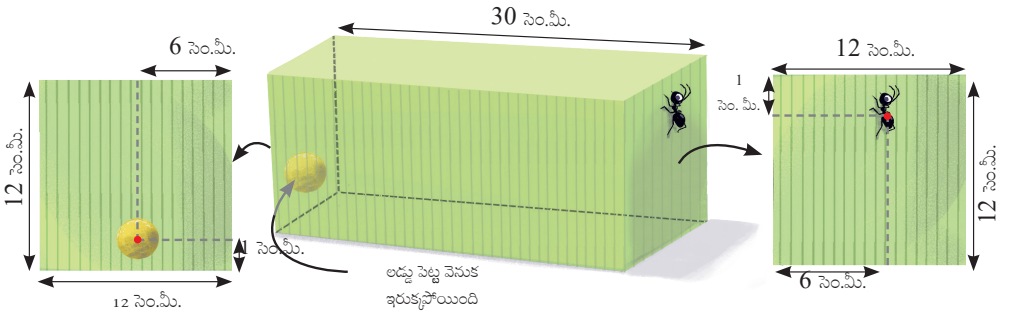
అతి చిన్న మార్గం

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

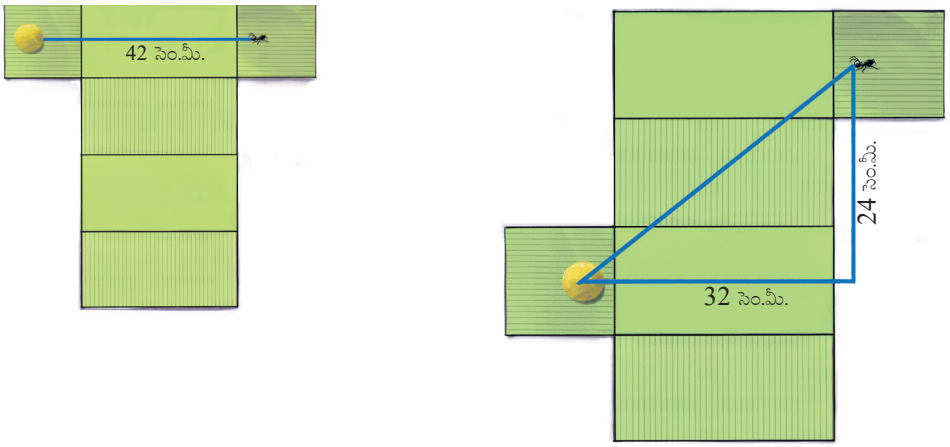
ఇప్పుడు మనం మరికొంత క్లిష్టమైన సందర్భాన్ని చూద్దాం.

ప్రయత్నించండి

? చీమ మరియు లడ్డు మధ్య అతి తక్కువ దూర మార్గం యొక్క పొడవు ఎంత?



దీర్ఘ ఘనమును విడదీయడానికి (unfolding) ఇక్కడ కొన్ని మార్గాలు ఉన్నాయి.



ఇక్కడ చీమ మరియు లడ్డు మధ్య దూరం ఛేని బౌధాయన సిద్ధాంతం (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం) ఉపయోగించి లెక్కించవచ్చు, ఎందుకంటే ఇక్కడ ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడింది.

$$d^2 = 24^2 + 32^2$$

$$d = \sqrt{1600} = 40 \text{ సెం.మీ}$$

వివిధ రకాలుగా విడదీసినప్పుడు చీమ మరియు లడ్డు మధ్య రేఖాఖండాల పొడవు మారుతుందని మనం గమనించవచ్చు! కాబట్టి సరైన సమాధానం కనుగొనడానికి సాధ్యమయ్యే అన్ని విడదీసే మార్గాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించాలి.

© DTES NOT TO BE REPUBLISHED

సమతల ఉపరితలంపై ఘనరూపాల ప్రాతినిధ్యం
(Representation of Solids on a Plane Surface)

చిత్రలేఖనం అనేది అత్యంత పురాతనమైన మానవ కార్యకలాపాలలో ఒకటి. ప్రజలు వేల సంవత్సరాలుగా సౌందర్యం కోసం మరియు ఆచరణాత్మక ఇంజనీరింగ్ అవసరాల కోసం చిత్రాలను గీస్తున్నారు. ఒక వస్తువు యొక్క చిత్రాన్ని గీయడం అనేది దాని గురించి సమాచారాన్ని నమోదు చేయడానికి లేదా ఇతరులకు తెలియజేయడానికి ఒక ఉపయోగకరమైన మార్గం. వస్తువులు గురించి ఆలోచించడానికి కూడా దృశ్య ప్రాతినిధ్యం సహాయపడుతుంది. భవనాల నిర్మాణం, యంత్రాల రూపకల్పన వంటి ఇంజనీరింగ్ రంగాలలో ఇటువంటి అవసరాలు తరచుగా వస్తుంటాయి.

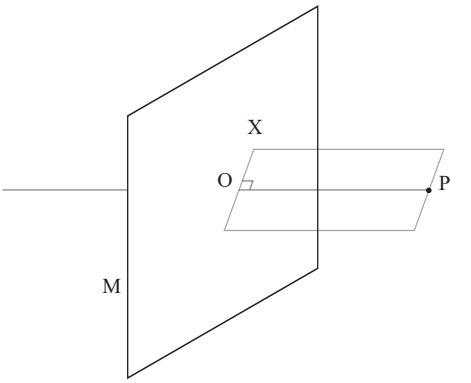
ఒక వస్తువును భౌతికంగా నిర్మించడానికి వీలుగా, ఇంజనీరింగ్ డ్రాయింగ్లు తగినంత వివరంగా ఉండాలి.

సమతలంపై ఘనరూపాలను గీసే కొన్ని మార్గాలను ఇప్పుడు మనం అన్వేషిద్దాం.

ప్రదర్శన (Projections)

ఘనరూపాన్ని సమతలంపై సూచించడానికి ఒక మార్గం దాని నెట్ (net) గీయడం. అయితే, నెట్ను భౌతికంగా కత్తిరించి మలచకుండా, ఆ ఘనరూపాన్ని ఊహించుకోవడం కష్టంగా ఉంటుంది.

ఘనరూపాన్ని సూచించడానికి మరొక మార్గం ఏమిటంటే, ఒక సమతలంపై దాని అన్ని బిందువుల ప్రదర్శన చూడటం. ఈ ఆలోచన ఒక ఘనరూపం యొక్క రూపురేఖలు(profile) దగ్గరగా ఉంటుంది. ఈ పద్ధతి ఎలా పనిచేస్తుందో చూద్దాం.

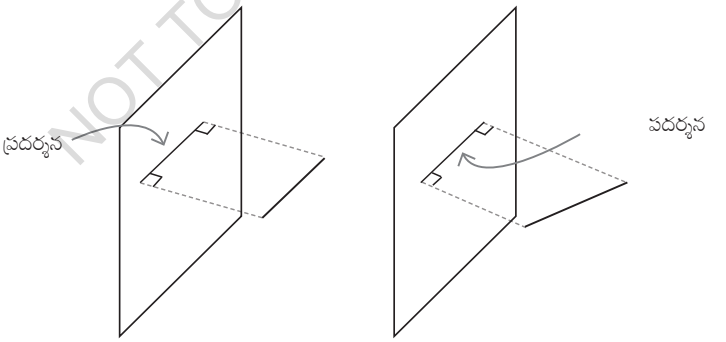


O అనేది P యొక్క ప్రదర్శన

అంతరాళం (space) లో ఒక బిందువు P ని మరియు ఒక సమతలం M ని ఊహించుకోండి. P నుండి వచ్చే ఒక రేఖ సమతలం M నీ o అనే బిందువు వద్ద ఖండిస్తోందని అనుకుందాం.

సమతలంపై ఉన్న ఏదైనా రేఖ OX కి, $\angle POX = 90^0$.ని అయితే, OP అనేది సమతలానికి లంబంగా (perpendicular) ఉందని మనం చెబుతాము. ఈ సందర్భంలో, బిందువు o ని సమతలంపై బిందువు P యొక్క ప్రదర్శన అంటారు. ఒక వస్తువు యొక్క అన్ని బిందువుల పదర్శన కలిసి సమతలంపై ఆ వస్తువు యొక్క ప్రదర్శనను ఏర్పరుస్తాయి

? ఒక రేఖ యొక్క ప్రదర్శన ఊహించుకుందాం.



చిత్రం 11.2

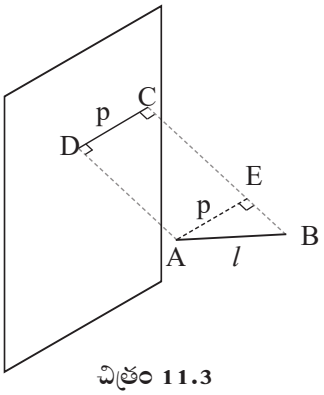
© CRTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? ప్రక్షేపంలో ఒక రేఖ యొక్క పొడవుకు ఏమవుతుంది?

చిత్రం 4.3 లోని ప్రక్షేపాలను గమనిద్దాం. ఉదాహరణకు, అసలు రేఖ పొడవును l అని మరియు దాని ప్రక్షేపం పొడవును p అని అనుకుందాం.

$AE \perp BC$ అయ్యేలా రేఖను గీయండి. అప్పుడుAECD ఒక చతురస్రం అవుతుంది (ఎందుకు?).

కావున, $AE = DC = p$. అలాగే, $\angle AEB = 90°$.



చిత్రం 11.3

? ఇప్పుడు మీరు p మరియు 1 పొడవులను పోల్చగలరా?

? ప్రక్షేపించబడిన రేఖ పొడవు, దాని అసలు పొడవుకు సమానంగా ఎప్పుడు ఉంటుంది?

? ఒక చతురస్రం (Square) ఉంచబడిన దిశను (orientation) బట్టి మనకు లభించే వివిధ రకాల ప్రక్షేపాలు ఏమిటని మీరు అనుకుంటున్నారు?

గణిత చర్చ

? వివిధ దిశలలో ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజం (Parallelogram) యొక్క ప్రక్షేపం ఎలా ఉంటుందని మీరు భావిస్తారు?

ఇది ఎప్పుడైనా సమాంతర చతుర్భుజం కాని చతుర్భుజం అయ్యే అవకాశం ఉందా? దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి, ఒక జత సమాంతర రేఖల ప్రక్షేపం గురించి ఆలోచించడం ద్వారా ప్రారంభించవచ్చు.

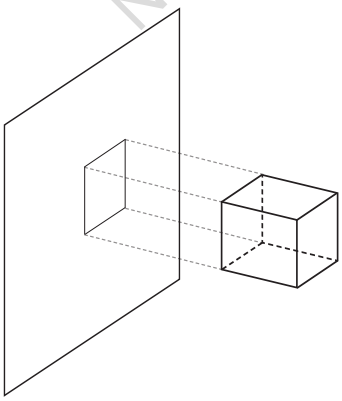
? ఒక n భుజాలు గల క్రమ బహుభుజి (Regular Polygon) ప్రక్షేపం గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

సూచన: ఒక బహుభుజి యొక్క ప్రక్షేపం దాని భుజాల ప్రక్షేపాలతో నిర్మించబడుతుంది.

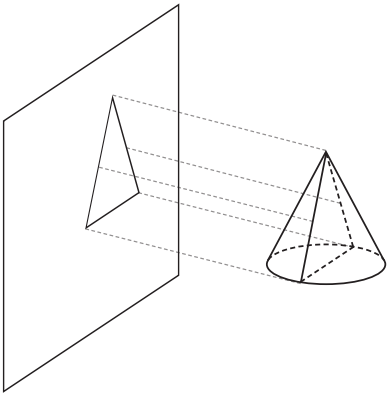
గణిత చర్చ

ఘనరూపాల ప్రక్షేపాలు (Projections of Solids) ఇప్పుడు మనం ఘనరూపాల ప్రక్షేపాలను పరిశీలిద్దాం.

? ఒక ఘనం (Cube) మరియు శంకువు (Cone) యొక్క ప్రక్షేపాలు ఎలా కనిపిస్తాయి?



చిత్రం 11.4

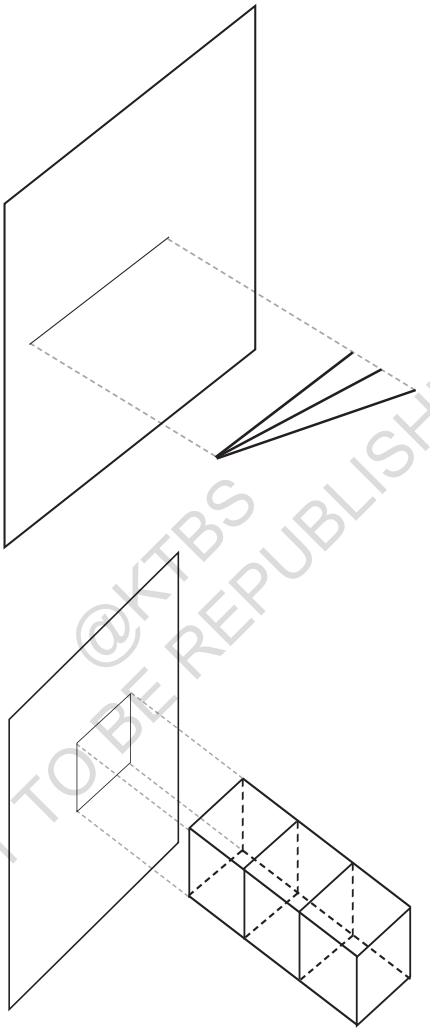


చిత్రం 11.5

© KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక వస్తువు ఒక సమతలం గుండా లంబంగా ప్రయాణించి రంధ్రం చేస్తే, ఆ రంధ్రం యొక్క ఆకారం ఆ వస్తువు యొక్క ప్రక్షేపం వలె ఉంటుంది.

? చిత్రాలు 11.2–11.5 చూడండి. ప్రతి సందర్భంలోనూ, అదే ప్రక్షేపాన్ని ఇచ్చే మరొక వస్తువును మీరు ఊహించగలరా?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

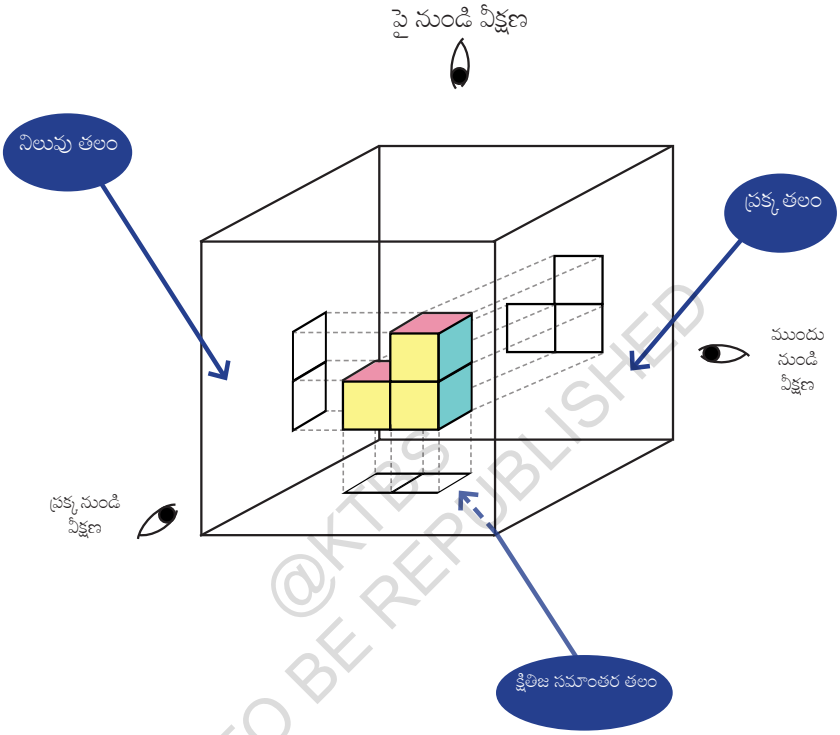
చిత్రం 11.6

వేర్వేరు రేఖలు మరియు వేర్వేరు దీర్ఘఘనాలు (cuboids) ఒకే ప్రక్షేపాన్ని ఇవ్వగలవు.

దీని ద్వారా మనకు తెలిసేది ఏమిటంటే, ఒక ప్రక్షేపం అనేది ఒకే ఒక ప్రత్యేకమైన వస్తువు ద్వారా మాత్రమే ఏర్పడదు.

? ఇచ్చిన శంకువు వలె సమానమైన ప్రక్షేపాన్ని ఇచ్చే మరొక వస్తువును కనుగొనండి.

ఈ కారణం చేత, మనం తరచుగా ఒక వస్తువు యొక్క మూడు పరస్పర లంబ ప్రక్షేపాలను తీసుకుంటాము. చిత్రంలో చూపిన విధంగా: వస్తువుకు ఎదురుగా ఉండే సమతలాన్ని నిలువు సమతలం (vertical plane) అంటారు. వస్తువుకు కింద ఉండే సమతలాన్ని క్షితిజ సమాంతర సమతలం (horizontal plane) అంటారు. వస్తువుకు ప్రక్కన ఉండే సమతలాన్ని ప్రక్క సమతలం (side plane) అంటారు.

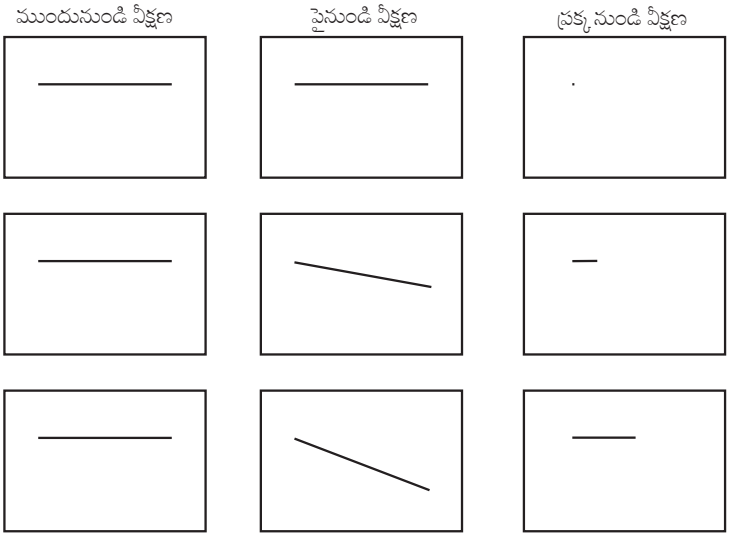


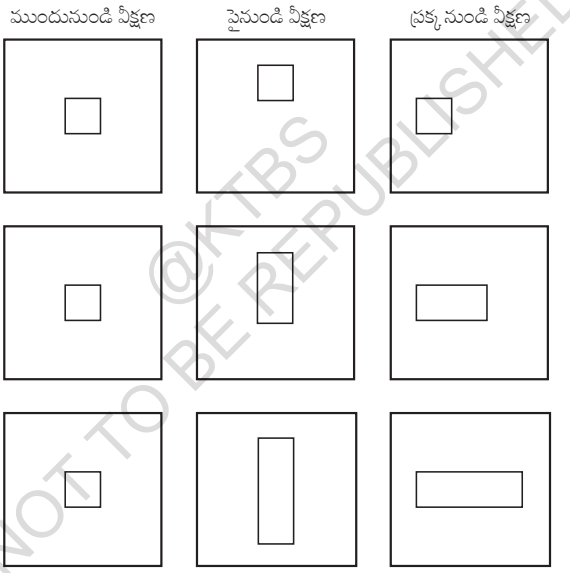
@KTE NOT TO BE REPUBLISHED

వస్తువును చూసే దిశల ఆధారంగా ఈ మూడు తలాలపై ఉండే ప్రక్షేపాలకు (projections) మనం పేర్లు ఇస్తాము. నిలువు తలంపై (vertical plane) ఉండే ప్రక్షేపాన్ని ముందు వైపు దృశ్యం (front view) అని, క్షితిజ సమాంతర తలంపై (horizontal plane) ఉండే దానిని పై నుండి దృశ్యం (top view) అని మరియు పక్క తలంపై (side plane) ఉండే దానిని ప్రక్క వైపు దృశ్యం (side view) అని అంటారు. మనం అంతకుముందు విభాగంలో చర్చించిన రూపురేఖలు (profiles) అనే భావనను ఈ ప్రక్షేపాలు క్రమబద్ధీకరిస్తాయి.

? చిత్రం 11.6 లో చూసిన వస్తువుల ప్రక్షేపాలు ఎలా ఉంటాయో చూద్దాం, ఇక్కడ చూపిన తలాలను నిలువు తలాలుగా పరిగణించాలి.

చిత్రం 11.6 లోని వివిధ రేఖల ప్రక్షేపాలు





@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? దీనిని పరిష్కరించండి (Figure it out)

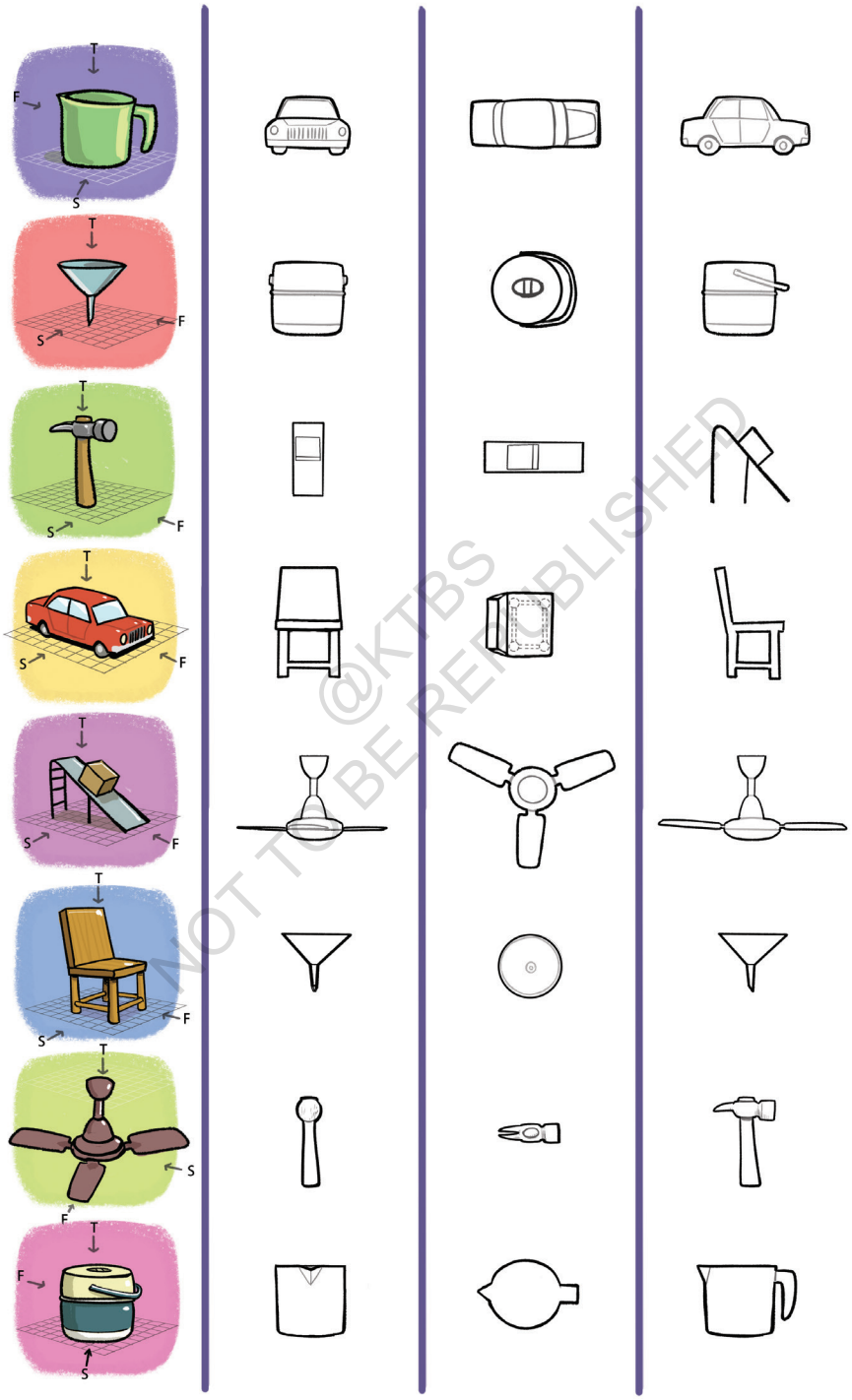
1. చిత్రం 11.6 లోని వివిధ రేఖల యొక్క ముందు వైపు దృశ్యం (front view), పై నుండి దృశ్యం (top view) మరియు ప్రక్క వైపు దృశ్యాలను (side view) పరిశీలించండి. వాటి పొడవుల మధ్య ఏవైనా సంబంధం ఉందా?

2. ఈ క్రింది ఘనరూపాలను నిలువు (vertical), క్షితిజ సమాంతర (horizontal) మరియు ప్రక్క తలాలకు (side planes) అనుగుణంగా ఉంచి, వాటి ముందు వైపు దృశ్యం, పై నుండి దృశ్యం మరియు ప్రక్క వైపు దృశ్యాలను కనుగొనండి: ఘనం (cube) దీర్ఘఘనం (cuboid) సమాంతర చతుర్భుజ ఘనం (parallelepiped) స్థూపం (cylinder) శంకువు (cone) పట్టకం (prism) పిరమిడ్ (pyramid) అవసరమైతే సూచనల కోసం తర్వాతి సమస్యను చూడండి.

గణిత చర్చ

3. కింది ప్రతి వస్తువును దాని ప్రొజెక్షన్లతో (ముందరి, పై మరియు పక్క దృశ్యాలతో) జతపరచండి.

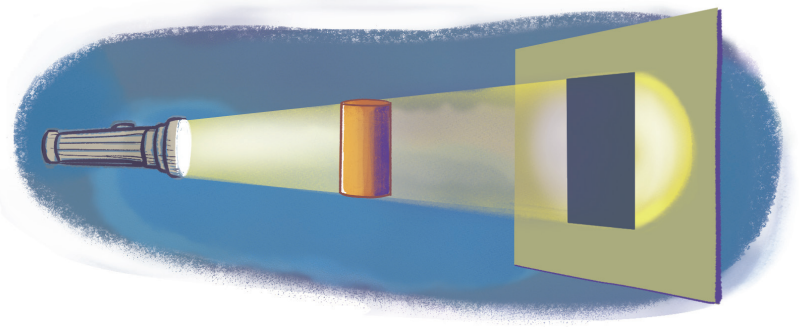
వస్తువు	ముందరి దృశ్యం	పై దృశ్యం	పక్క దృశ్యం



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

నీడలు (Shadows)

మీ గది గోడ వంటి ఒక తలం (plane) ముందు ఒక వస్తువును ఉంచండి. గోడకు లంబంగా ఉండే దిశలో వస్తువుపై టార్చ్ లైట్ను ప్రకాశింపజేయండి.



? మీరు ఏమి చూస్తున్నారు?

ఒక తలంపై ఏర్పడే నీడ ఆకారం, ఆ తలంపై ఏర్పడే ప్రొజెక్షన్ ఆకారాన్ని పోలి ఉంటుందని మనం గమనిస్తాము! అయితే, వస్తువును పట్టుకున్న విధానాన్ని బట్టి నీడ పరిమాణం పెరగవచ్చు (scaled up), సాగదీయబడవచ్చు (stretched), లేదా కొద్దిగా వికృతంగా (distorted) మారవచ్చు.

? టార్చ్ మరియు వస్తువు మధ్య దూరాన్ని మారుస్తున్నప్పుడు నీడ పరిమాణానికి ఏమవుతుందో గమనించండి.

? ఇది ఎందుకు జరుగుతుంది?

ప్రయత్నించండి

ఇప్పుడు, మీ టార్చ్ చాలా శక్తివంతమైనదని మరియు మీరు దానిని ఎంత వెనక్కి జరిపినా వస్తువు యొక్క నీడను గోడపై వేస్తూనే ఉంటుందని ఊహించుకోండి.

ఈ ఊహాజనిత టార్చ్ ఎల్లప్పుడూ గోడకు లంబంగా ఉండే దిశలో ఉంటే, టార్చ్ మరియు వస్తువు మధ్య దూరం పెరుగుతున్న కొద్దీ, వస్తువు యొక్క నీడ గోడ తలంపై ఉండే ప్రొజెక్షన్ నుండి వేరు చేయలేనంతగా (అంటే ప్రొజెక్షన్ లాగే) మారుతుంది!

ఈ ప్రయోగం వినడానికి వింతగా అనిపించినప్పటికీ, మీరు ఇప్పటికే అంతటి శక్తివంతమైన మరియు దూరంగా ఉన్న టార్చ్ ను చూశారు... అదే సూర్యుడు! వాస్తవానికి, సూర్యరశ్మి ఒక తలానికి లంబంగా ఉన్నప్పుడు, ఆ తలంపై పడే నీడలు ప్రొజెక్షన్ల నుండి వేరు చేయలేనంత సమానంగా ఉంటాయి!

ముందుగా మనం సమాంతర చతుర్భుజం (parallelogram) యొక్క ప్రదర్శన ఎలా ఉంటుందో అడిగాము. ఇప్పుడు మీరు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఆకారపు కాగితాన్ని కత్తిరించి, సూర్యరశ్మిలో దాని నీడలను చూడటం ద్వారా ఈ ప్రశ్నకు స్వయంగా సమాధానం చెప్పవచ్చు. మీరు ఆ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ఏ దిశలో తిప్పినా, దాని నీడ ఎల్లప్పుడూ సమాంతర చతుర్భుజంగానే ఉండటాన్ని మీరు గమనిస్తారు!

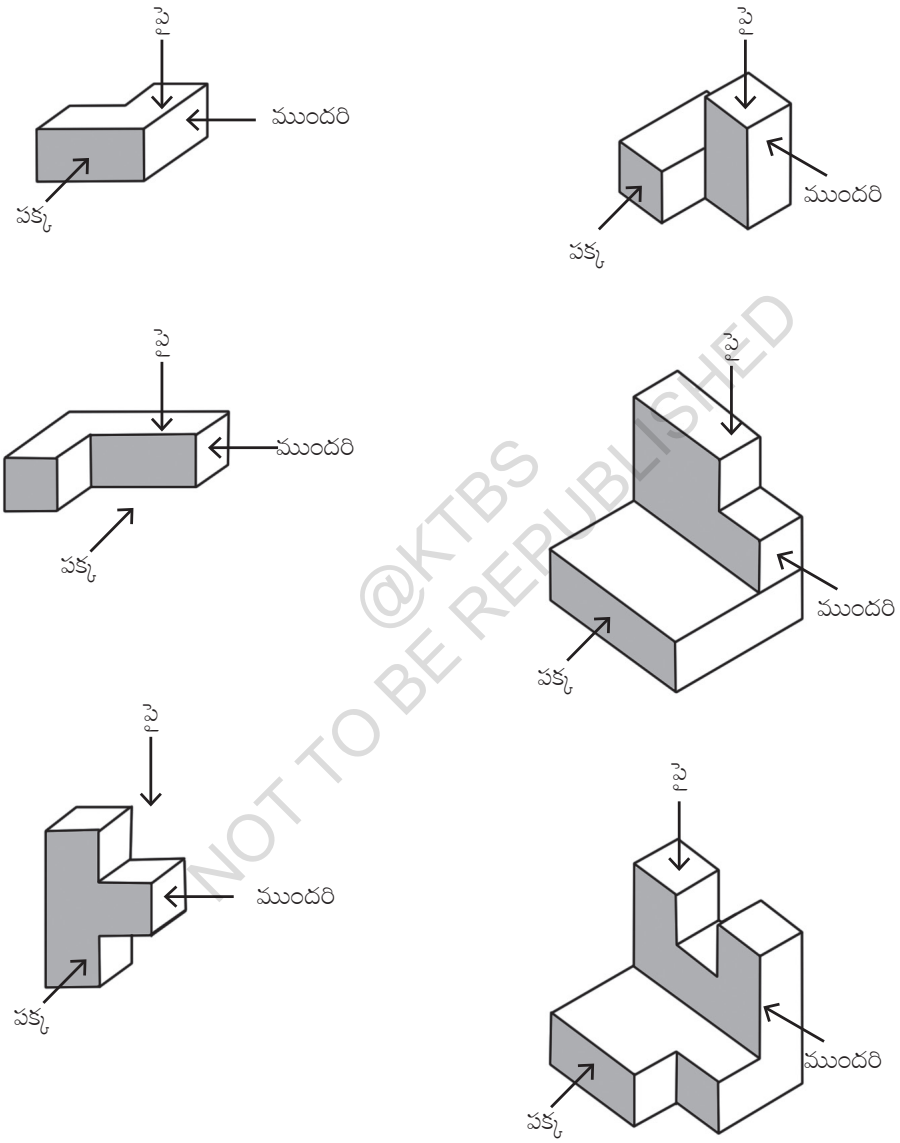
> సాధారణంగా, ఒక జత సమాంతర రేఖల ప్రొజెక్షన్ ఎల్లప్పుడూ సమాంతరంగానే ఉంటుంది.

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

ప్రాజెక్షన్లను గీయడానికి ఈ లక్షణం చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

? దీనిని పరిష్కరించండి (Figure it out)

1. కింది ప్రతి ఒకే రకమైన ఘనాల (identical cubes) కలయికల యొక్క పై దృశ్యం, ముందరి దృశ్యం మరియు పక్క దృశ్యాలను గీయండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ఎనిమిది ఒకే రకమైన ఘనాలను వాటి ముఖాల ద్వారా అతికించి '  ' ఆకారాన్ని తయారు చేశారని ఊహించుకోండి.

i) ఇది ముందరి నుండి చూస్తే వలె కనిపిస్తుంది. ‘  ’ ఎక్క నుండి మరియు పై నుండి చూస్తే ఇది ఎలా కనిపిస్తుంది?

ii) ముందరి నుండి వలె మరియు పై నుండి వలె కనిపించే ఆకారాన్ని తయారు చేయడానికి ‘  ’ మరికొన్ని ఘనాలను అతికించండి. ‘  ’

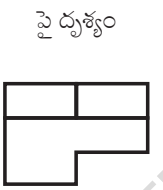


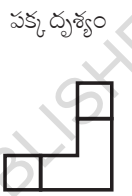
iii) ఇప్పుడు, ముందరి నుండి ‘  ’ పై నుండి మరియు పక్క  ’ నుండి వలె కనిపించేలా ‘  ’మరిన్ని ఘనాలను అతికించగలరా?

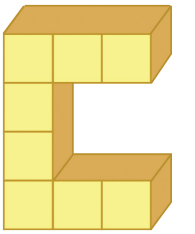
iv) ఒకే రకమైన ఘనాల అమరికతో తయారు చేయగల ఇతర అక్షరాల కలయికల గురించి మీరు ఆలోచించగలరా?

3. ఇవ్వబడిన పై దృశ్యం (top view), ముందరి దృశ్యం (front view) మరియు పక్క దృశ్యాలకు (side view) ఏ ఘనరూపం సరిపోతుంది?

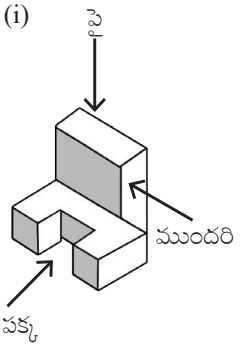


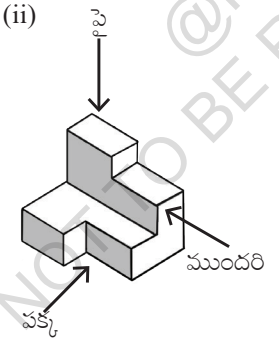


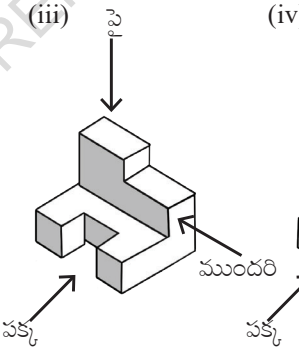


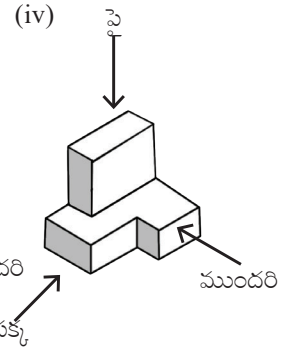


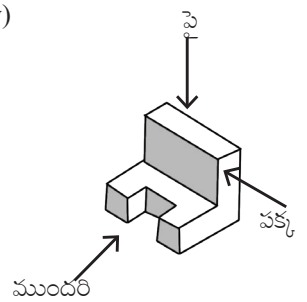
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

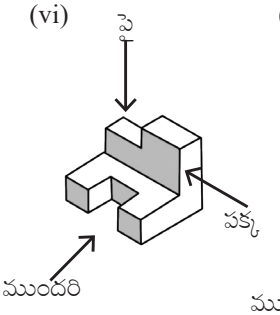
(i)


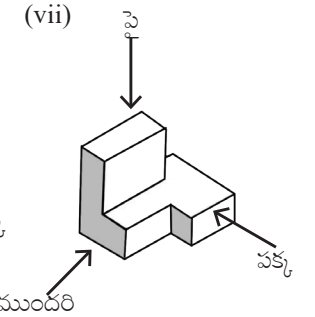
(ii)


(iii)


(iv)


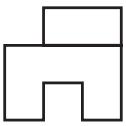
(v)


(vi)


(vii)


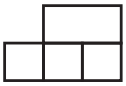
4. ఒకే రకమైన ఘనాలను ఉపయోగించి, కింది ప్రదర్శన ఇచ్చే ఘనరూపాన్ని తయారు చేయండి:.

(i)



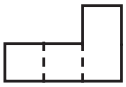
పై వీక్షణ

(ii)



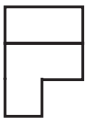
ముందరి వీక్షణ

(iii)



పక్క వీక్షణ

(iv)



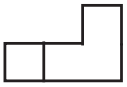
పై వీక్షణ

(v)



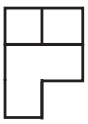
ముందరి వీక్షణ

(vi)



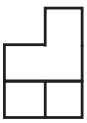
పక్క వీక్షణ

(vii)



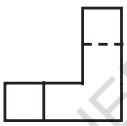
పై వీక్షణ

(viii)



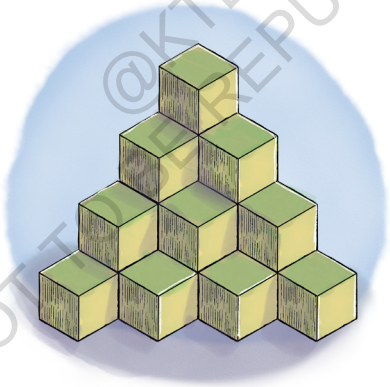
ముందరి వీక్షణ

(ix)



పక్క వీక్షణ

5. ఇవ్వబడిన ఒకే రకమైన ఘనాల సమూహంలో (stack) ఎన్ని ఘనాలు ఉన్నాయో కనుగొనండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. వేర్వేరు దిశలలో ఉంచినప్పుడు ఒక ఘనం యొక్క ప్రదర్శన ఏయే ఆకారాలలో ఉండవచ్చు?

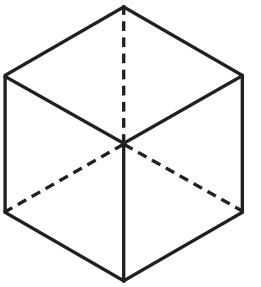
గణిత చర్చ

ఐసోమెట్రిక్ ప్రొజెక్షన్లు (Isometric Projections)

సాధారణంగా ఒక ఘనరూపాన్ని తలంపై ప్రదర్శన చేసినప్పుడు మనం కొంత సమాచారాన్ని కోల్పోతాము. కానీ ఘనరూపం యొక్క అమరికను బట్టి ఆ సమాచారాన్ని తిరిగి పొందవచ్చు.

ఒక ఘనం యొక్క అన్ని అంచుల (edges) పొడవుల ప్రదర్శన సమానంగా ఉండేలా దానిని అమర్చినట్లయితే, దానిని ఐసోమెట్రిక్ ప్రొజెక్షన్ అంటారు. గ్రీకు భాషలో 'ఐసోమెట్రిక్' అంటే 'సమాన కొలత' అని అర్థం.

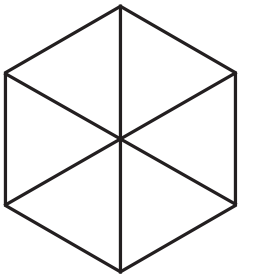
ఒక ఘనాన్ని దాని ఒక మూల (corner vertex) మీద నిలబెట్టి నేలపై ప్రదర్శన చేస్తే అది ఐసోమెట్రిక్ ప్రొజెక్షన్ అవుతుంది.



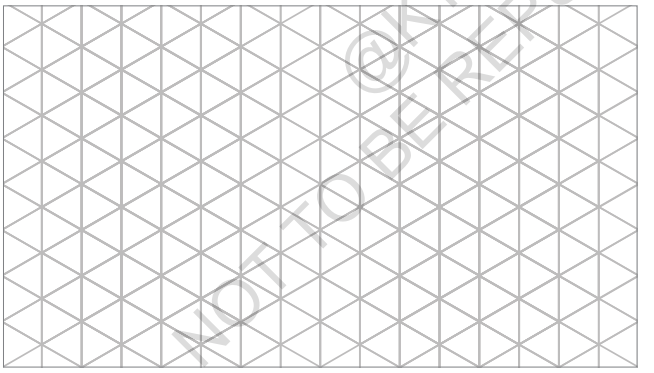
? దీన్ని నిర్మించండి: ఒక ఘనరూపం యొక్క నమూనాను తయారు చేసి, అది ఒక మూల మీద నిలబడేలా ఉంచి, అన్ని అంచులు సమాన పొడవును కలిగి ఉన్నాయో లేదో గమనించండి.

గణిత చర్చ

ఒక ఘనం యొక్క ఐసోమెట్రిక్ ప్రాతినిధ్యం క్రమ షడ్భుజి (regular hexagon) వలె ఉంటుంది. ఘనం గాజుతో చేయబడితే అన్ని అంచులు కనిపిస్తాయి.

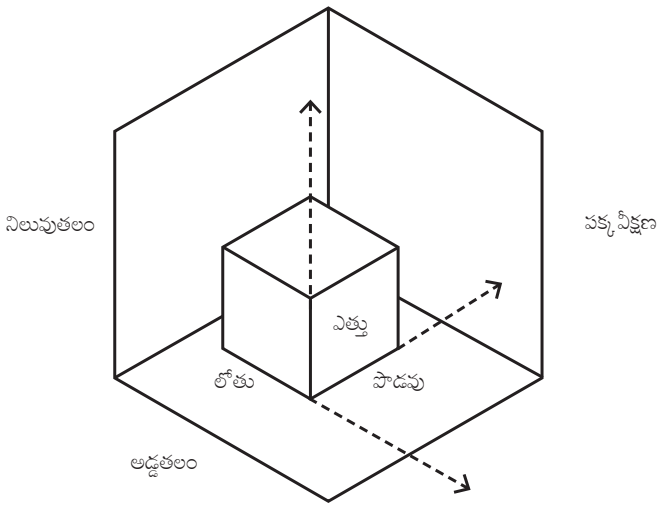


ఈ నిర్మాణమే ఐసోమెట్రిక్ డ్రాయింగ్కు ప్రాతిపదిక! షడ్భుజులతో తలాన్ని నింపితే మనకు ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ లభిస్తుంది.



@NTBS NOT TO BE REPUBLISHED

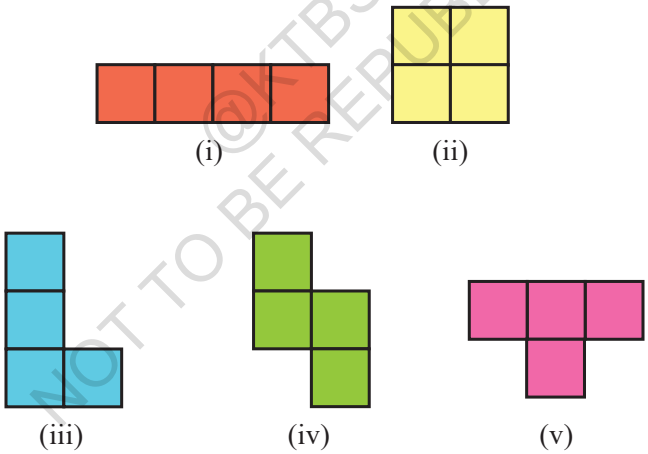
ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్లు (Isometric grids) ఇంజనీరింగ్లో విస్తృతంగా ఉపయోగించబడతాయి. చిత్రం 4.7లో చూపిన విధంగా, ఇవి ఘనరూపాల ప్రదర్శన గీయడం మరియు మూడు ప్రాథమిక దిశలలో (పొడవు, లోతు మరియు ఎత్తు) కొలతలు తీసుకోవడం సులభతరం చేస్తాయి.



చిత్రం 11.7

ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్లపై గీయడం (Drawing on Isometric Grids)

? దీన్ని పరిష్కరించండి: మీరు ఎప్పుడైనా టెట్రిస్ (Tetris) ఆటను ఆడారా? టెట్రిస్లో ఐదు ప్రాథమిక ఆకారాలు ఉంటాయి, ఇవి నాలుగు చతురస్రాలను వేర్వేరు విధాలుగా అమర్చడం ద్వారా ఏర్పడతాయి.



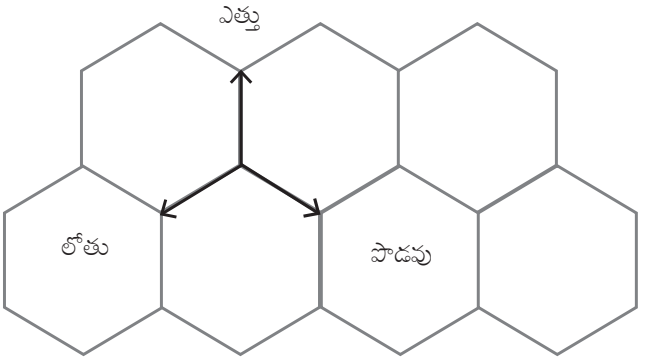
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 11.8

? ఇవి చతురస్రాలు కావు, ఘనాలు (cubes) అని ఊహించుకోండి. వీటిలో ప్రతి దానిని మీ ఐసోమెట్రిక్ పేపర్ మీద గీయండి (ఇది పుస్తకం చివరలో మీకు లభిస్తుంది).

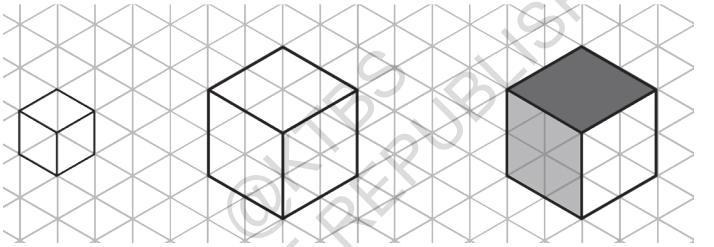
చిత్రం 11.7లో చూసినట్లుగా, ఘనరూపానికి మూడు ప్రధాన అక్షాలు (axes) ఉన్నాయి. వాటిని మనం లోతు అక్షం (depth axis), పొడవు అక్షం (length axis), మరియు ఎత్తు అక్షం (height axis) అని పిలుస్తాము.

గ్రిడ్ యొక్క అంచులు మూడు వేర్వేరు దిశలలో కనిపిస్తాయి: / మరియు మనం ఎత్తును కు, లోతును / కు, మరియు పొడవును) కు అనుబంధిస్తాము.



గ్రిడ్ మీద గీసేటప్పుడు, ఒక నిర్దిష్ట అక్షం వెంట మీరు వెళ్లాలనుకునే యూనిట్ల సంఖ్యను లెక్కించి, అంచు వారీగా గీయడం ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

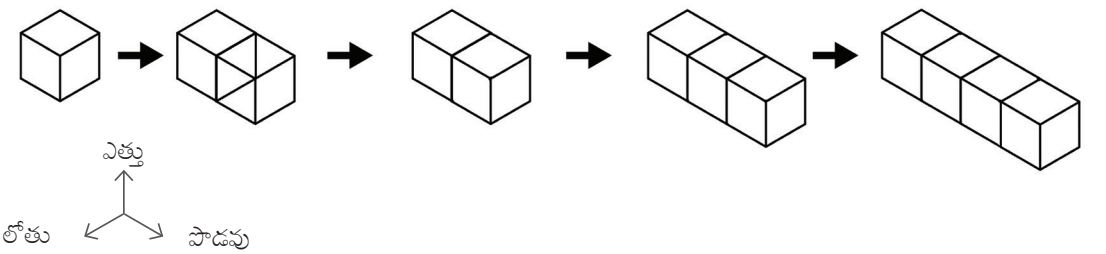
ఉదాహరణకు, మీరు $1 \times 1 \times 1$ ఘనాన్ని కింది విధంగా గీయవచ్చు. మీరు $2 \times 2 \times 2$ ఘనాన్ని ఎలా గీస్తారు?



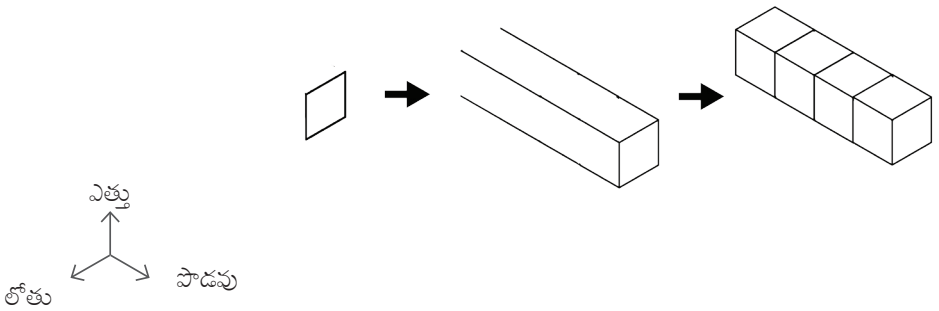
©KIDS NOT TO BE REPUBLISHED

ఘనరూపాన్ని స్పష్టంగా చూడటానికి అవసరమైతే షేడింగ్ (shading) చేయండి. మొదటి ట్రెట్రిస్ ఆకారం ముఖానికి ముఖం కలిపి అమర్చిన నాలుగు ఘనాల వరుస. ఈ ఘనరూపాన్ని గీయడానికి, మీరు ఆ నాలుగు ఘనాల వరుస కోసం ఒక దిశను ఎంచుకోవాలి.

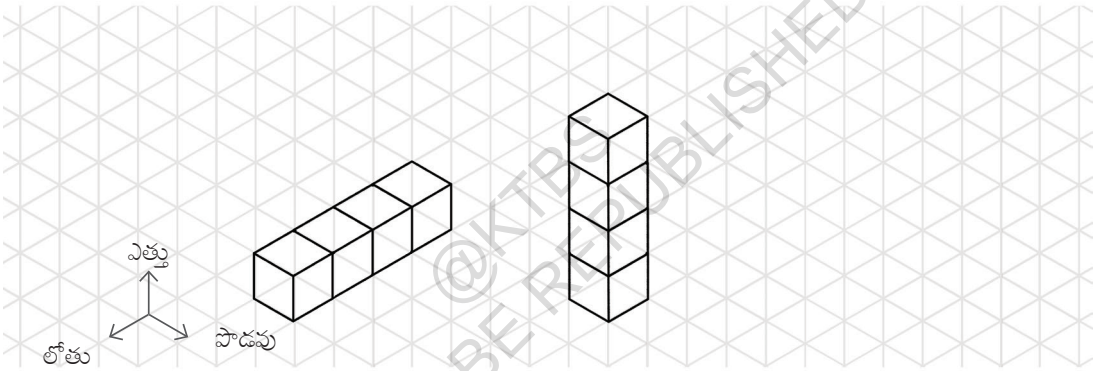
దీనిని లోతు అక్షం వెంట అనుర్చి గీద్దాం. మీరు దీనిని ఘనం తర్వాత ఘనంగా (cube&by&cube) గీయవచ్చు, కానీ అలాంటప్పుడు అదనపు ఘనాల వల్ల లోపల దాగిపోయే గీతలను చెరిపివేయాల్సి ఉంటుంది. (మీ దగ్గర ఎరేజర్ లేకపోతే, మొదట మసక గీతలు గీసి, ఆపై కనిపించే గీతలను ముదురు చేయవచ్చు.)



మీరు అంచుల వెంట లెక్క పెడుతూ ఒకేసారి కూడా బొమ్మను గీయవచ్చు:



అదేవిధంగా, మీరు ఆ ఆకారాన్ని ఎత్తు అక్షం (height axis) లేదా పొడవు అక్షం (length axis) వెంట కూడా అమర్చి గీయవచ్చు.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మీ డ్రాయింగ్, ఐసోమెట్రిక్ పేపర్పై నిలువు (vertical) దిశలో కదలడం అనేది ఘనరూపం యొక్క ఎత్తు అక్షం వెంట కదలడానికి సమానం. అదేవిధంగా, పేపర్పై లేదా / దిశలలో కదలడం అనేది వరుసగా ఘనరూపం యొక్క పొడవు లేదా లోతు అక్షాల వెంట కదలడానికి సమానం.

? ఐసోమెట్రిక్ పేపర్పై దిశలకు మరియు ఘనరూపం యొక్క అక్షాలకు మధ్య ఉన్న ఈ అనుబంధం, ఘనరూపం యొక్క ఆకారాన్ని తెలపడంలో ఎందుకు అంత ప్రభావవంతంగా ఉంటుంది?

సమాంతర రేఖల ప్రదర్శనను ఎల్లప్పుడూ సమాంతర రేఖలుగానే ఉంటాయని మనం ముందే గమనించాము. ఈ రేఖాగణిత నిజం వల్ల, ఘనరూపంపై ఉండే మూడు రకాల సమాంతర అంచులు (ఎత్తు, పొడవు మరియు లోతు), ఐసోమెట్రిక్ పేపర్పై ఉండే మూడు రకాల సమాంతర రేఖల (మరియు మీదకు ప్రదర్శనను చేయబడతాయి. అంతేకాకుండా, ఐసోమెట్రిక్ ప్రదర్శననుస్వభావం వల్ల మూడు అక్షాల వెంట ఉండే యూనిట్ దూరాల ప్రదర్శనను సమానంగా ఉంటాయి.

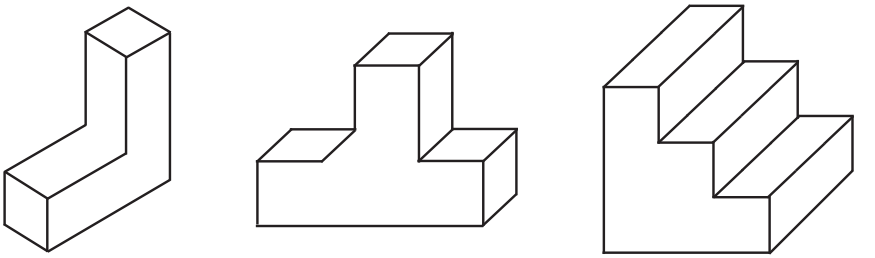
మీరు ఇతర టట్రిస్ ఆకారాలను ఐసోమెట్రిక్ పేపర్పై గీయడానికి ప్రయత్నించగలరా?

దీన్ని పరిష్కరించండి (Figure it out)

గణిత చర్చ

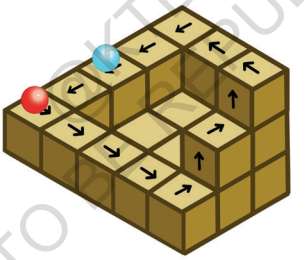
1. చిత్రం 11.8లో చూపిన 5 మార్గాలే కాకుండా, నాలుగు ఘనాలను వాటి ముఖాల ద్వారా అతికించి తయారు చేయగల ఇతర మార్గాలు ఏవైనా ఉన్నాయా? మీరు వాటిని ఊహించి గీయగలరా?

2. ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ మీద కింది బొమ్మలను గీయండి.



సూచన: ప్రస్తుతం గీస్తున్న అంచు ఉదాహరణకు, ఎత్తు వెంట కింద నుండి పైకి వెళ్తుందా లేదా పై నుండి కిందకు వెళ్తుందా అని నిర్ణయించుకోవడం ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. దానికి అనుగుణంగా, గ్రిడ్ మీద ఎత్తు అక్షం దిశలో లేదా దానికి వ్యతిరేక దిశలో రేఖాఖండాన్ని గీయండి.

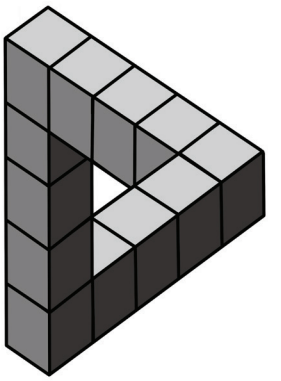
3. ఈ బంతి ప్రయాణించే మార్గంలో ఏదైనా వింతగా అనిపిస్తుందా? దీనిని ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ మీద మళ్లీ గీయండి.



గణిత చర్చ

సూచన: ఈ చిత్రంలోని భౌతికంగా సాధ్యమయ్యే ఒక భాగాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకోండి మరియు 3 ప్రాథమిక దిశలను గుర్తించండి.

4. ఈ త్రిభుజాన్ని గమనించండి.



NOT TO BE REPUBLISHED © SCERT

i) నిజమైన ఘనాలతో (actual cubes) ఇలాంటి నమూనాను నిర్మించడం సాధ్యమేనా? ఈ అసాధ్యమైన త్రిభుజం యొక్క ముందరి, పై మరియు పక్క దృశ్యాల రూపురేఖలు (profiles) ఏమిటి?

గణిత చర్చ

ii) దీనిని ఒక ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ మీద తిరిగి గీయండి.

iii) ఈ భ్రమ (illusion) ఎందుకు పనిచేస్తుంది?

సారాంశం

- ఫ్రాక్టల్స్ (Fractals) అనేవి ప్రకృతిలో మరియు కళలో కనిపించే స్వయం-సారూప్య (self&similar) రేఖాగణిత వస్తువులు.
- సియర్పిన్స్కి కార్పెట్ (Sierpinski Carpet), సియర్పిన్స్కి గాస్కెట్ (Sierpinski Gasket), మరియు కోచ్ స్నో ఫ్లేక్ (Koch Snowflake) అనేవి గణిత శాస్త్ర ఫ్రాక్టల్స్కు కొన్ని ఉదాహరణలు. ఫ్రాక్టల్ను చేరుకునే ఆకారాల క్రమాన్ని రూపొందించే కొన్ని రేఖాగణిత ప్రక్రియలను పదేపదే వర్తింపజేయడం ద్వారా వీటిని పొందవచ్చు.
- తగిన వలలను (nets) మడవడం ద్వారా పొందగలిగే కొన్ని ఘనరూపాలలో దీర్ఘఘనాలు (cuboids), చతుర్ముఖిలు (tetrahedrons), స్థూపాలు (cylinders), శంకువులు (cones), పట్టకాలు (prisms), పిరమిడ్లు (pyramids), మరియు అష్టముఖిలు (octahedrons) ఉన్నాయి.
- దీర్ఘఘనం యొక్క ఉపరితలంపై ఉన్న రెండు బిందువుల మధ్య అతి తక్కువ దూరాన్ని ఆ దీర్ఘఘనం యొక్క తగిన వల (net) ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చు.
- ఏదైనా వస్తువును దాని ప్రదర్శనను (projections) ఉపయోగించి ఒక సమతలంపై సూచించవచ్చు. ఇందుకోసం మనం సాధారణంగా ముందరి దృశ్యం (front view – నిలువు తలంపై ప్రదర్శన), పై దృశ్యం (top view – అడ్డ తలంపై ప్రదర్శన), మరియు వస్తువు యొక్క పక్క దృశ్యం (side view – పక్క తలంపై ప్రదర్శన)లను ఉపయోగిస్తాము.
- ఒక ఘనం యొక్క అన్ని అంచుల పొడవుల ప్రొజెక్షన్లు సమానంగా ఉండేలా దానిని అమర్చవచ్చు. అటువంటి ప్రదర్శన ఐసోమెట్రిక్ ప్రదర్శన (isometric projection) అంటారు. ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ పేపర్ను ఉపయోగించి వివిధ ఘనరూపాల ఐసోమెట్రిక్ ప్రదర్శనను గీయవచ్చు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

12 చుక్కలు మరియు గీతలు ద్వారా కథలు
Tales by Dots and Lines

P2W6Y8

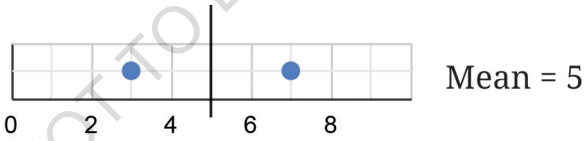
12.1 సమతోలన చట్టం

గత సంవత్సరం, మనం సరాసరి, మధ్యగతం గురించి నేర్చుకున్నాం. కొన్ని దత్తాంశం యొక్క సరాసరి అనేది దత్తాంశంలోని అన్ని విలువల మొత్తాన్ని విలువల సంఖ్యచే భాగింప బడేది అని గుర్తుంచుకోండి దత్తాంశాన్ని క్రమబద్ధీకరించినపుడు మధ్యలో విలువ మధ్యగతం అవుతుంది.

సరాసరి మరియు మధ్యగతాన్ని వేరే దృక్కోణం నుండి అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం. మరియు మారుతున్న దత్తాంశంతో సరాసరి ఎలా ప్రవర్తిస్తుందో చూద్దాం.

? ఏవైనా 2 సంఖ్యలను పరిగణించండి. వాటి సరాసరి/ అంకమధ్యమం కనుగొనండి. ఇతర జతలను తీసుకొని దీన్ని పునరావృతం చేయండి. మీరు ఏమి గమనిస్తారు?

ఉదాహరణకు, రెండు సంఖ్యలు 3 మరియు 7 అనుకుందాం. వాటి సరాసరి $\frac{3+7}{2} = 5.$ 8 మరియు 9, అనే మరొక జతను తీసుకుందాం వాటి సరాసరి $\frac{8+9}{2} = 8.5.$ వీటిని చుక్కల ప్లాట్‌లగా దృశ్యమానం చేయవచ్చు.



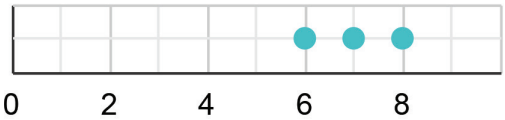
సరాసరి రెండు సంఖ్యల మధ్య సరిగ్గా సగందూరంలో ఉదని గమనించండి.

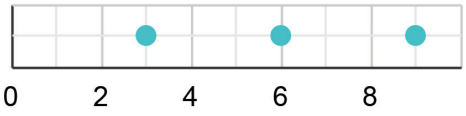
అంకగణిత సరాసరి అనేది కేంద్రస్థానపు కొలత అని మరియు దత్తాంశం యొక్క 'కేంద్రం' ను సూచిస్తుందని మనం ఇంతకు ముందు నేర్చుకున్నాం.

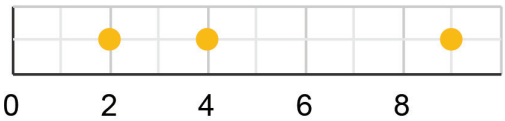
3 సంఖ్యల విషయంలో సరాసరి 'కేంద్రం' ను ఎలా సూచిస్తుందో చూద్దాం.

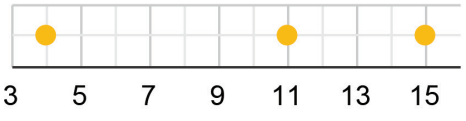
? క్రింది ప్రతి దత్తాంశ సేకరణ యొక్క సరాసరి లెక్కించి గుర్తించండి.

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED





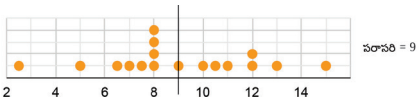


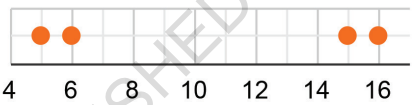


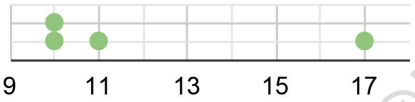


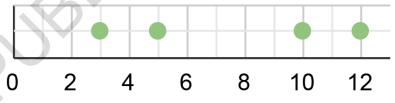
? ప్రతి సేకరణలో సరాసరి కేంద్రంగా కలదని వివరించగలరా?

? క్రింది సేకరణల సరాసరిని గుర్తించండి.





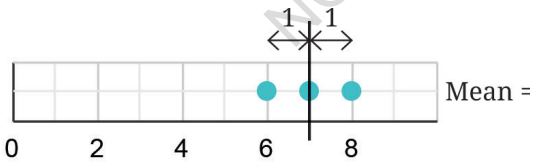


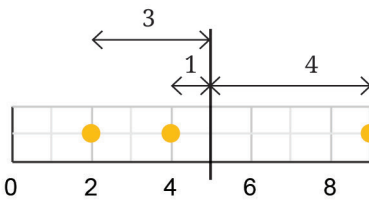


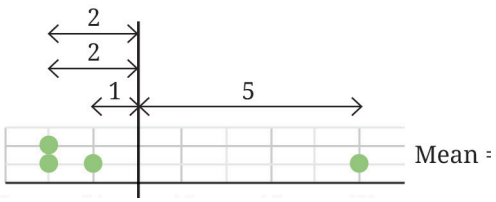
? ప్రతి సేకరణలో సరాసరి కేంద్రంగా కలదని వివరించగలరా?

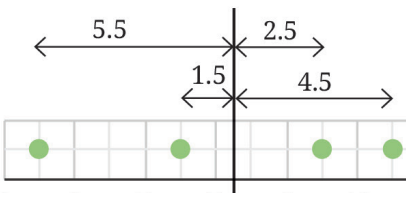


సరాసరి అనేది దత్తాంశం యొక్క రెండు చివరి బిందువుల మధ్య బిందునా? ఇది ఎల్లప్పుడూ అలా ఉండదు బదులుగా సరాసరి యొక్క రెండువైపులా మొత్తం దూరాలు సమానంగా ఉంటాయి. ఇది క్రింది చుక్కల పాటలలో చూపబడింది.









@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

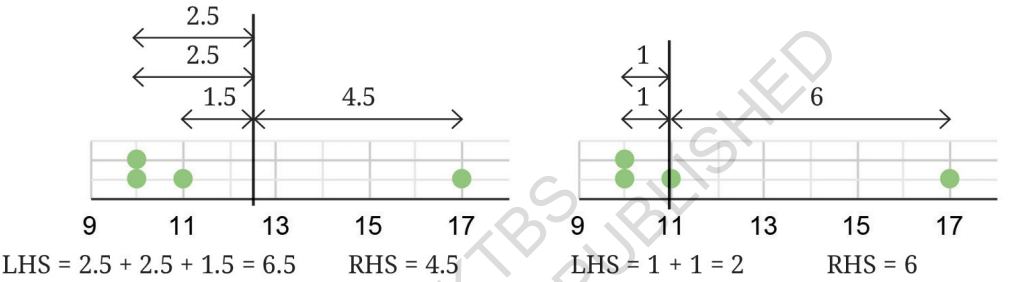
? ఇంతకు ముందు చూపిన అన్ని దత్తాంశాలకు ఇది వర్తిస్తుందని ధృవీకరించండి.

? అలాంటి 'కేంద్రాలు' ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఉండవచ్చా? మరోమాటతో చెప్పాలంటే దాని కంటే తక్కువ విలువలకు మరియు దాని కంటే ఎక్కువ విలువలకు దూరాల మొత్తం ఇప్పటికీ సమానంగా ఉండే ఏదైనా విలువ ఉందా?

? సరాసరి 12 అయిన 10, 10, 11, మరియు 17 సేకరణ విషయంలో, 12 కంటే పెద్ద కేంద్రం వేరే ఉందని అనుకుందాం.

స్పష్టంగా LHS పై అన్ని దూరాలు పెరుగుతాయి మరయు RHS పై దూరాలు తగ్గుతాయి అందువలన, ఇది ఇకపై 'కేంద్రం' కాదు అదే విధంగా 12 కంటే తక్కువ విలువలకు, LHS పై దూరాలు తగ్గుతాయి. RHS పై దూరాలు పెరుగుతాయి.

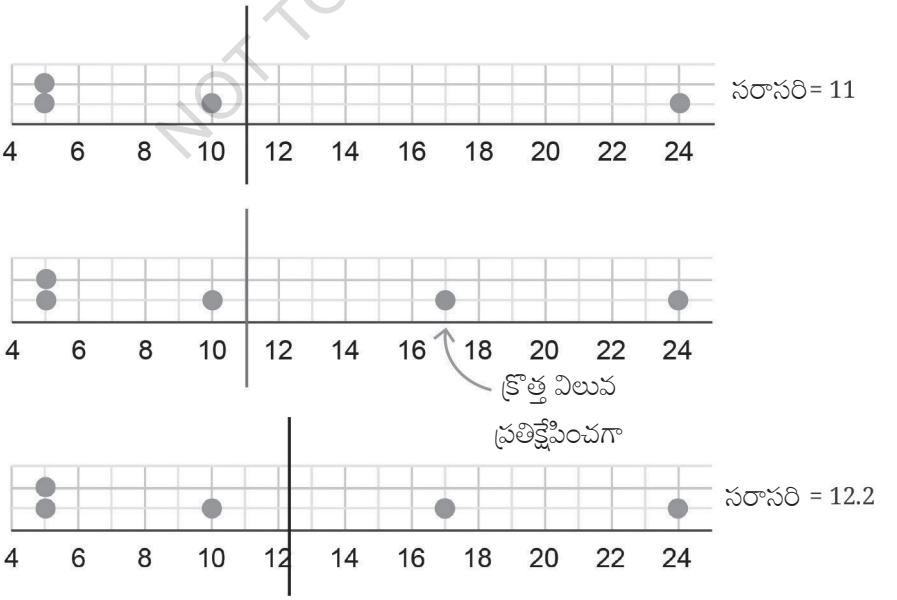
ఈ రెండు సందర్భాలు క్రింది రేఖాచిత్రంలో వివరించబడ్డాయి. కాబట్టి ఒకే ఒక కేంద్రం ఉంది.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? దత్తాంశంలో కొత్త విలువను చేర్చడం వల్ల సరాసరి పెరుగుతుందా లేదా తగ్గుతుందా?

సరాసరి కంటే ఎక్కువ కొత్త విలువను చేర్చినపుడు, క్రింది చూపిన విధంగా LHS మరియు RHS పై దూరాల మొత్తం మధ్య సమతుల్యతను కొనసాగించడానికి సరాసరి పెరుగుతుంది.



అదే విధంగా, సరాసరి కంటే చిన్న విలువను చేర్చినట్లయితే కొత్త సరాసరి ముందుపటి కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

గణిత చర్చ

? ఉన్న విలువను తీసివేసినపుడు సరాసరికి ఏమి జరుగుతుంది? సరాసరి ఎపుడు పెరుగుతుంది. తగ్గుతుంది లేదా అలాగే ఉంటుంది?

? సరాసరికి సమానమైన విలువను చేర్చినా లేదా తీసివేసినా సరాసరికి ఎమి జరుగుతుంది?

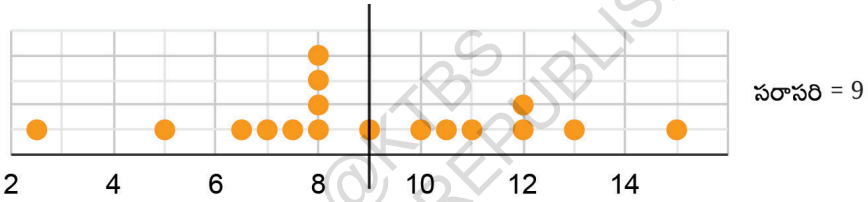
గత సంవత్సరం మనం అధ్యయనం చేసిన సరాసరి యొక్క న్యాయమైన వాటా వివరణను ఉపయోగించి దీనిని వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

మారని సరాసరి

ఒక విలువను చేర్చినపుడు లేదా తీసివేసినపుడు సరాసరి ఎలా మారుతుందో ఇంతకు ముందు మనం చూశాం.

? సరాసరి మారకుండా ఉండేలా 2 విలువలను చేర్చడం లేదా తొలగించడం సాధ్యమేనా అని అన్వేషించండి.

మీరు ప్రయోగం చేయడానికి ఈ క్రింది దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

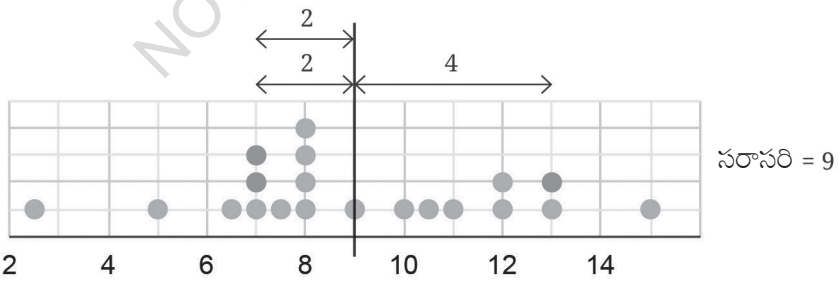


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? సరాసరిని మార్చుకుండా 3 విలువలను చేర్చడం లేదా తొలగించడం ఎలా? అది సాధ్యమేనా?

? సరాసరిని అలాగే ఉంచడానికి, సరాసరి కంటే 2 తక్కువ విలువలను మరియు 1 ఎక్కువ విలువను చేర్చవచ్చా?

అవకాశాలలో ఒకటి ఇక్కడ చూపబడింది.



? సరాసరి కంటే 2 విలువలు ఎక్కువ మరియు 1 విలువ తక్కువ చేర్చడానికి ప్రయత్నించండి. తద్వారా సరాసరి అలాగే ఉంటుంది.

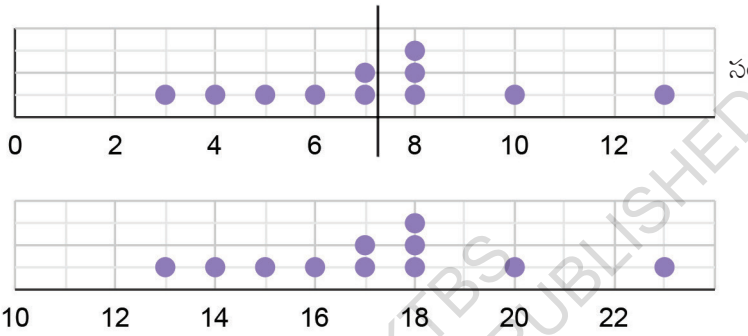
సాపేక్షంగా మారలేదు

? సేకరణలోని విలువలను చేర్చినపుడు లేదా తీసివేసినపుడు సరాసరికి ఏమి జరుగుతుందో మనం చూశాం. సేకరణలోని ప్రతి విలువ కొంత స్థిర సంఖ్యపెరిగితే సరాసరికి ఏమి జరుగుతుంది?

? దత్తాంశాన్ని పరిగణించండి: 8, 3, 10, 13, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 5 సరాసరి లెక్కించండి.

? ప్రతి విలువను 10 పెంచి ఇపుడు ఈ దత్తాంశాన్ని పరిగణించండి 18, 13, 20, 23, 14, 16, 17, 17, 18, 18, 15 దాని అర్థం ఏమిటి? తెలుసుకోవడానికి వేగవంతమైన మార్గం ఉందా?

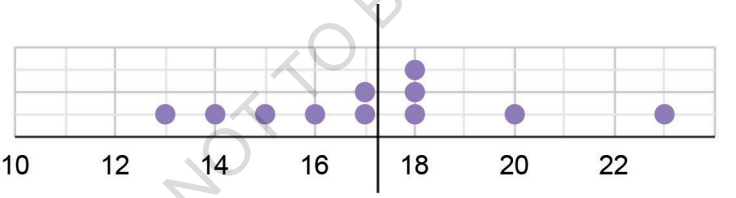
(**సూచన :** రెండు దత్తాంశ సేకరణలకు అనుగుణంగా క్రింది చుక్కల ప్లాట్‌లను గమనించండి)



సరాసరి = 7.18

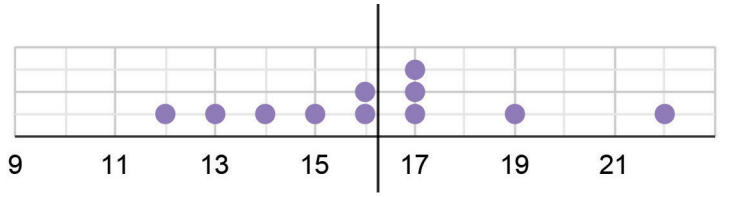
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కొత్త సేకరణ యొక్క సరాసరి కూడా 10 పెరుగుతుంది. సాపేక్ష సరాసరి అదే విధంగా ఉంటుంది.



సరాసరి = 17.18

ప్రతి విలువకు 1 ద్వారా ఈ క్రింది చుక్కల ప్లాట్ వస్తుంది.



సరాసరి = 16.18

దీనిని బీజగణితాన్ని ఉపయోగించి వివరించవచ్చు.

సేకరణలో n విలువలు ఉన్నాయని అనుకుందాం. ఆ విలువలను $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ తో సూచిస్తే వాటి సరాసరి.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

సేకరణలోని ప్రతి విలువకు ఒక స్థిర సంఖ్య ఉదాహరణకు 3 ను జోడించినపుడు, కొత్త సరాసరి

$$\frac{(x_1 + 3) + (x_2 + 3) + (x_3 + 3) + \ldots + (x_n + 3)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + 3n}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} + \frac{3n}{n}$$

$$= a + 3.$$

అంటే, కొత్త సరాసరి మునుపటి సగటు కంటే 3 ఎక్కువ.

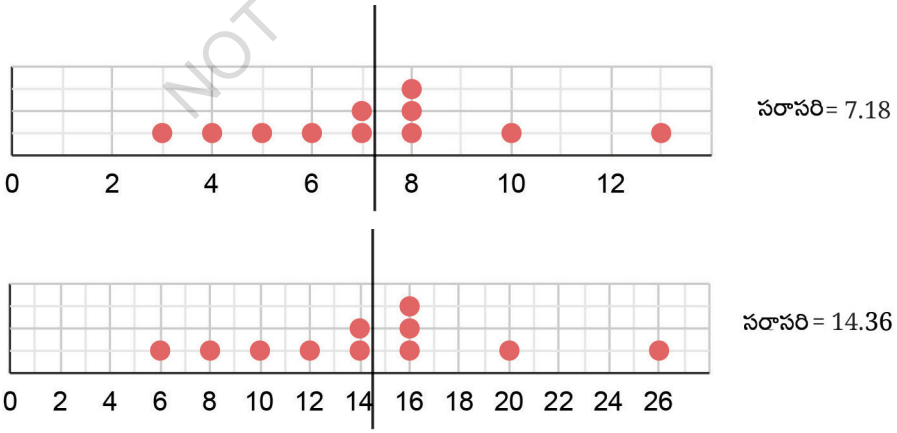


? సేకరణలోని ప్రతి విలువ నుండి ఒక స్థిర సంఖ్య ఉదా 2 ను తీసివేసినపుడు సరాసరి ఎంత ఉంటుందో బీజగణితాన్ని ఉపయోగించి వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

? మీరు గత సంవత్సరం నేర్చుకున్న న్యాయోచిత–పంచండం వివరణను ఉపయోగించి దీనిని వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

? సేకరణలోని ప్రతి విలువ రెట్టింపు అయితే సరాసరికి ఏమి జరుగుతుంది?

సరాసరి కూడా రెట్టింపు అయితుందని మీరు ఊహించి ఉండవచ్చు. మనం ఇంతకు ముందు చూసిన దత్తాంశంతో కిందిది ఒక ఉదాహరణ.



సరాసరి రెట్టింపు అయిందని మనం చూడవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

బీజగణితం ఉపయోగించి దానిని నిరూపిద్దాం.

సేకరణలో n విలువ ఉన్నాయని అనుకుందాం. ఈ విలువలను $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. ద్వారా సూచించండి వాటి సరాసరి

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

ఒక స్థిర సంఖ్య, ఉదాహరణకు, 5 ను సేకరణలోని ప్రతి విలువకు గుణించినపుడు, కొత్త సరాసరి n అవుతుంది.

$$\frac{(5x_1) + (5x_2) + (5x_3) + \cdots + (5x_n)}{n}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \times 5}{n} \text{ (విభాగ ధర్మాన్ని ఉపయోగించడం ద్వారా)}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)}{n} \times 5.$$

$$= 5a.$$

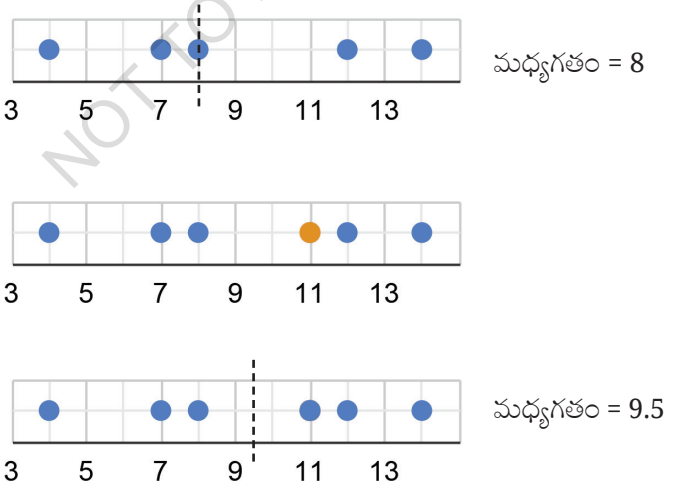
అంటే, కొత్త సరాసరి మునుపటి సరాసరి కంటే 5 రెట్లు ఎక్కువ.

మధ్యగతానికి మరమ్మత్తు చేయడం (Tinkering with Median)

క్రమ బద్ధీకరించ బడిన దత్తాంశంలో మధ్యలో ఉన్న విలువ మధ్యగతం. అని మనకు తెలుసు-దాని కంటే తక్కువ మరియు దాని కంటే ఎక్కువ విలువలు సమాన సంఖ్యలో ఉంటాయి.

? దత్తాంశానికి కొత్త విలువను చేర్చడం వల్ల మధ్యగతం పెరుగుతుందా లేదా తగ్గుతుందా?

కింది దత్తాంశానికి పరిశీలిద్దాం. ఈ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతం 8.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనం 11 విలువను చేర్చాము అనుకుందాం కొత్తగా చేర్చబడిన విలువ మునుపటి మధ్యగతం కంటే ఎక్కువగా ఉంది దాని కంటే ఎక్కువ విలువలు ఉన్నందున మధ్యగతం ఇకపైరా కాకూడదు. కాబట్టి మధ్యతగం కూడా పెరుగుతుంది. ఇపుడు మధ్యగతం రెండు మధ్యగత విలువలు 8 మరియు 11 యొక్క సరాసరి అవుతుంది అది 9.5.

అదే విధంగా మధ్యగతం కంటే తక్కువ విలువను చేర్చినపుడు, మధ్యగతం తగ్గుతుందని మనం వాదించవచ్చు.

తెలియని వాటిని కనుగొనడం

42
40
39
33
48
38
42
35
32

సరాసరి 39.2

? కోచ్ బల్యాన్ కుస్తీ ఆటగాళ్ళ (రెజ్లర్లు) బరువులు మరియు చూపిన విధంగా సరాసరిని నమోదు చేసుకున్నాడు కానీ రాయబడిన ఒక విలువ మసక బారింది తప్పిపోయిన విలువను మీరు కనుగొనగలరా?

$$\text{ఆటగాళ్ల సరాసరి బరువు} = \frac{\text{ఆటగాళ్ళందరి బరువు మొత్తం}}{\text{ఆటగాళ్ళ సంఖ్య}}$$

$$= \frac{42 + 40 + 39 + 33 + 48 + 38 + 42 + 35 + 32 + w}{10} = 39.2.$$

తెలియని బరువు w కిలో అనుకుందాం
దీనిని సూక్ష్మీకరించినట్లయితే

$$349 + w = 392,$$
$$w = 392 - 349 = 43.$$

తప్పిపోయిన విలువ 43 కిలోలు



? వెంకయ్య తన పొలంలో కొబ్బరి తోటను ట్రాక్ చేస్తున్నాడు. అతను చెట్టుకు సగటు పంటను 25.6 గా లెక్కిస్తాడు. అతని కొడుకు గణనను ధృవీకరిస్తాడు మరియు ఒక చెట్టు యొక్క పంట గణన వాస్తవ సంఖ్య కంటే 3 ఎక్కువగా గుర్తించబడిందని కనుగొంటాడు చెట్ల సంఖ్య 15 అయితే మీరు సరైన సరాసరిని కనుగొన గలరా?

$$\text{చెట్టుకు సగటు పంట} = \frac{\text{పండించిన మొత్తం కొబ్బరి కాయల సంఖ్య}}{\text{చెట్ల సంఖ్య}}$$

చెట్టుకు పంట దత్తాంశం ఇవ్వబడలేదు.

? ఎన్ని కొబ్బరి కాయలు కోసారో ఇంకా మనం కనుక్కొగలమా?

మొదట కోసిన కొబ్బరికాయల సంఖ్య z అనుకుందాం. ఇచ్చిన దాన్ని సరళీకరించడం

$$25.6 = \frac{z}{15},$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$z = 25.6 \times 15 = 384.$$

ప్రారంభ లెక్క ప్రకారం పండించిన కొబ్బరి కాయలు 384.

ఒక చెట్టు లెక్కింపు అసలు చెట్టుకన్నా 3 ఎక్కువ అని మనకు తెలుసు. కాబట్టి అసలు మొత్తం పంట లెక్కింపు $384 - 3 = 381$

సరైన సగటు పంట $\frac{381}{15} = 25.4.$

పౌనఃపున్యాలతో సరాసరి మరియు మధ్యగతం

సంఖ్య	పౌనఃపున్యం
3	3
4	11
5	9
6	7
7	3
8	1
9	1
10	1

? మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల సగటు కుటుంబ పరిమాణం ఎంత? మీరు దీనిని ఎలా కనుగొంటారు?

ప్రతి విద్యార్థికి ఎంత మంది కుటుంబ సభ్యులు ఉన్నారో మనం సేకరించి, వారిని కలిపి విద్యార్థుల సంఖ్యచే భాగించవచ్చు. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల కుటుంబ పరిమాణ దత్తాంశం ఇక్కడ పట్టికలో చూపబడింది.

? ఈ తరగతి సగటు కుటుంబ పరిమాణం ఎంత?

మీలో కొందరు "సులభం" ఇది $\frac{3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{8}$ $= \frac{52}{8} = 6.5.$" అవుతుందని అనుకున్నారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సగటును కనుగొనడం అంటే దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలను కూడడం అని గుర్తుంచుకోండి. సంఖ్య 3 మూడు సార్లు వస్తుంది. సంఖ్య 4 పదకొండు సార్లు వస్తుంది. మరియు ఇవి ఇలా మీ గణనలో ప్రతిబింబిస్తాయా?

$$\text{మనకు తెలుసు సగటు} = \frac{\text{దత్తాంశంలోని విలువ మొత్తం}}{\text{దత్తాంశంలోని విలువల సంఖ్య}}$$

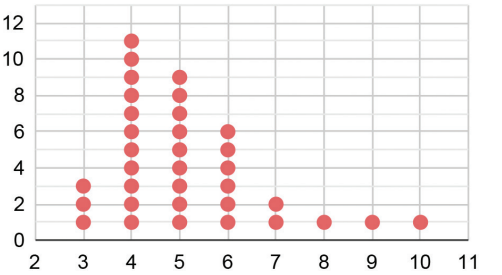
పౌనఃపున్యాల ప్రతి విలువను లెక్కించడం ద్వారా సగటు

$$= \frac{(3 \times 3) + (4 \times 11) + (5 \times 9) + (6 \times 7) + (7 \times 3) + (8 \times 1) + (9 \times 1) + (10 \times 1)}{3 + 11 + 9 + 7 + 3 + 1 + 1 + 1}$$

$$= \frac{9 + 44 + 45 + 42 + 21 + 8 + 9 + 10}{36}$$

$$= \frac{188}{36} = 5.22.$$

తరగతిలోని కుటుంబ పరిమాణం సగటు 5.22.



? ఈ తరగతి యొక్క కుటుంబ పరిమాణ మధ్యగతం ఎంత?

దత్తాంశంలో 36 విలువలున్నాయని మనకు తెలుసు. క్రమబద్ధీకరించిన దత్తాంశంలో 18వ మరియు 19 వ విలువల సరాసరి మధ్యగతం అవుతుంది.

? అన్ని 36 సంఖ్యలను క్రమంగా రాయాల్సిన అవసరం ఉందా? ఏదైన త్వరిత మార్గం ఉందాదీనిని కనుగొనడానికి.

పౌనం పున్యాలు జాబితా చేయపడిన పట్టికను ఉపయోగిద్దాం. చిన్న విలువ నుండి ప్రారంభించి వరుసగా పౌనఃపున్యాలను వరుసగా 18 మరియు 19 వచ్చే వరకు కూడదాం.

సంఖ్య	3	4	5	6	7	8	9	10
పౌనఃపున్యం	3	11	9	7	3	1	1	1

3 మరియు 4 యొక్క పౌనఃపున్యాలను కలిపితే 3 + 11 = 14 వస్తుంది. దీని అర్థం దత్తాంశాన్ని క్రమబద్ధీకరించినపుడు 14 వ స్థానంలో ఉన్నవిలువ 4. 3, 4 మరియు 5 పౌనఃపున్యాలను కలిపితే, మనకు 3 + 11 + 9 = 23 వస్తుంది. దీని అర్థం దత్తాంశాన్ని క్రమబద్ధీకరించినపుడు 23 వ స్థానంలో ఉన్న విలువ 5. 15 నుండి 23 స్థానాలవరకు ఉన్న అన్ని విలువలు 5 అని మనం చూడవచ్చును. కావున ఈ దత్తాంశం మధ్యగతం 5.

స్ప్రెడ్‌షీట్‌లు (Spreadsheets)

సుధాకర్ సేకరించిన 8వ తరగతి విద్యార్థుల అర్ధవార్షిక పరీక్ష మార్కులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

పేరు	ఒరియా	తెలుగు	ఇంగ్లీషు	గణితం	సమాజ విజ్ఞాన	విజ్ఞాన
రత్న	25	39	29	36	34	37
నాగేశ	41	43	48	39	40	39
అశ్విన్	29	31	33	34	30	28
ఫారుఖ్	47	46	38	42	49	44
మృణాల్	33	35	28	32	30	36
గౌరి	27	29	34	31	32	30
పంకజ్	16	19	22	17	18	20
జయ	31	38	40	50	43	46
గణేశ్	39	37	35	38	36	40

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

శరవణ్	12	17	21	20	14	18
ఐశ్వర్య	48	45	46	47	44	43
హరి	25	28	24	21	23	26
తృప్తి	29	36	30	33	27	33
వీరేష్	23	25	28	31	19	22
విద్య	34	36	37	40	32	34
సరస్వతి	35	42	41	46	38	40
శంకర్	42	45	39	36	31	39
వైష్ణవి	37	32	29	33	31	35
గోవింద్	15	18	12	20	20	18
శివ	29	24	32	34	28	30
తరుణ్	41	44	39	43	37	42
జ్యోతి	29	30	33	28	34	29

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సుధాకర్ ప్రతి విద్యార్థి పొందిన మొత్తం మార్కులు లెక్కించాలి. అతనికి ప్రతి విషయంలో సాధించిన సగటు మార్కులు తెలుసుకోవలనే ఆసక్తి కూడా ఉంది. కానీ సంఖ్యలు చాలా ఎక్కువగా ఉన్నాయి? ఈ పనిని పూర్తి చేయడానికి ఎక్కువ సమయం ఖర్చు చేయాలి. అవును, ఈ పనిని వేగంగా పూర్తి చేయడానికి కాలిక్యులేటర్‌ను ఉపయోగించవచ్చు.

ఈ ప్రక్రియను త్వరగా చేయడానికి మరేదైనా మార్గం ఉందా?

ఒక మార్గం కంప్యూటర్‌ను ఉపయోగించడం. కంప్యూటర్లు వివిధ అనువర్తనాలు / పరికరాలను నిర్వహించగలవు. అలాంటి ఒక అనువర్తనం స్ప్రెడ్‌షీట్ – ఇది డిజిటల్ నోట్‌బుక్ లాంటింది. ఇందులో అడ్డువరుసలు నిలువు వరుసలతో చిన్న పెట్టెలు (సెల్స్) మరియు గ్రిడ్‌లు ఉంటాయి.

క్రింద ఉన్న చిత్రం ఒక స్ప్రెడ్‌షీట్ యొక్క ఉదాహరణను చూపిస్తుంది. ఇందులో సుధాకర్ తన డేటాను నమోదు చేశాడు. కంప్యూటర్‌ను ఉపయోగించడానికి ముందు మనం కొన్ని విషయాలను తెలుసుకోవాలి.

A	B	C	D	E	F	G	T
పేరు	ఒరియా	తెలుగు	ఇంగ్లీషు	గణితం	సమాజ విజ్ఞాన	విజ్ఞాన	మొత్తం
రత్న	25	39	29	36	34	37	
నాగేశ	41	43	48	39	40	39	
అశ్విన్	29	31	33	34	30	28	
ఫారుఖ్	47	46	38	42	49	44	
మృణాల్	33	35	28	32	30	36	
గౌరి	27	29	34	31	32	30	
పంకజ్	16	19	22	17	18	20	

సగటు మార్కులను ప్రతి విషయం మరియు ప్రతి విద్యార్థి కోసం లెక్కించడం నేర్చుకునే ముందు, స్ప్రెడ్‌షీట్‌ల నిర్మాణాలను మరియు వాటిని ఎలా చదవాలో తెలుసుకుందాం.

(?) ఫరూక్ గణితంలో సాధించిన మార్కులు ఏ సెల్‌లో ఉన్నాయో చెప్పగలరా?

A, B, C, ... , అనే లేబల్ చేయబడిన కాలం హెడ్డులను మరియు 1, 2, 3, ... అనే లేబల్ చేయబడిన వరుస హెడర్‌లను ఉపయోగించి సెల్‌లకు పేరు పెట్టడం మరియు సూచించడం జరుగుతుంది గణితంలో ఫరూక్ సెల్ E5 లో ఉంది.

(?) కాలమ్ B7 లో ఏ దత్తాంశం ఉందో మీరు చెప్పగలరా?

(?) అశ్విన్ ఏ సబ్జెక్టులలో 30 కంటే ఎక్కువ మార్కులు సాధించండి.

మొత్తాలు మరియు సగటులను త్వరగా లెక్కించడానికి స్ప్రెడ్‌షీట్‌లను ఎలా ఉపయోగించవచ్చు? టెక్ట్ మరియు సంఖ్యలతో పాటు, మనం సెల్‌లో సూత్రాలను కూడా నమోదు చేయవచ్చు. సెల్‌ల అడ్డు వరుస మరియు నిలుపు వరుసల యొక్క మొత్తం లేదా సగటును గుణించే సూత్రాన్ని మనం రాయవచ్చును.

వరుసలోని మొదటి మరియు చివరి సెల్‌ను సూచించే Start:End రూపం యొక్క వ్యక్తీకరణ ద్వారా మనం కణాల వరుసను వివరించ వచ్చు ఉదాహరణకు, నాగేష్ మార్కులను B3:G3 వ్యక్తీకరణ ద్వారా వర్ణించగా, గౌరీ మార్కులను ఒడియా, తెలుగు మరియు ఆంగ్లంలో B7:D7 వ్యక్తీకరణ ద్వారా వర్ణించారు. నిలువు వరుసలను వివరించడానికి మనం ఇలాంటి వ్యక్తీరకణలను ఉపయోగించవచ్చు. ఉదాహరణకు D2:D6 మొదటి ఐదు గురు విద్యార్థులకు ఆంగ్లంలో మార్కులను వివరిస్తుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

తరువాత మనం ఒక వరుస లేదా నిలువు వరుస యొక్క మొత్తం లేదా సగటును లెక్కించడానికి ఒక సూత్రాన్ని రాయవచ్చును.

ఉదాహరణకు =SUM(B3:G3) అనేది అన్ని సబ్జెక్ట్‌లలో నగేష్ కోసం మొత్తం మార్కులను లెక్కిస్తుంది, అయితే AVERAGE(B7:D7) అనేది ఒడియా, తెలుగు మరియు ఇంగ్లీష్‌లలో గౌరి యొక్క మొత్తం మార్కులను లెక్కిస్తుంది.

H_3 fx = SUM (B3 : G3)

A	B	C	D	గణితం	సమాజ విజ్ఞాన	విజ్ఞాన	మొత్తం
పేరు	ఒరియా (R_1)	తెలుగు (R_2)	ఇంగ్లీషు (R_3)				
రత్న	25	39	29	36	34	37	
నాగేశ	41	43	48	39	40	39	
అశ్విన్	29	31	33	34	30	28	
ఫారుఖ్	47	46	38	42	49	44	
మృణాల్	33	35	28	32	30	36	
గౌరి	27	29	34	31	32	30	
పంకజ్	16	19	22	17	18	20	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? సైన్స్‌లో తరగతి సగటు మార్కులను తెలుసుకోవడానికి మీరు ఏ సూత్రం టైప్ చేస్తారు?

? ఒడియాలో తరగతి సగటు మార్కులు తెలుగులో సగటు మార్కులు కంటే ఎక్కువగా ఉన్నాయో లేదో కనుక్కోండి.

? చివరి వరుస తర్వాత తగిన సూత్రాలను టైపు చేయడం ద్వారా ఇతర సబ్జెక్ట్‌లలో సగటు మార్కులను చూపించండి. వీటిని కంప్యూటర్‌లో ప్రయత్నించండి. మీరు ఈ QR కోడ్‌నుండి పట్టిక దత్తాంశాన్ని డౌన్‌లోడ్ చేసుకోవచ్చు.

? తగిన సూత్రాలను టైప్ చేయడం ద్వారా ప్రతి విద్యార్థి మొత్తం స్కోర్‌లను పొందండి.

ఉపాధ్యాయునికి గమనిక: మీరు మైక్రో సాఫ్ట్ ఎక్సెల్, గూగల్ షీట్స్ లిబ్రే ఆఫీస్ కాల్క్ మొదలైన ఏదైనా స్ప్రెడ్‌షీట్ సాఫ్ట్‌వేర్ అప్లికేషన్‌ను ఉపయోగించవచ్చు. ప్రతి విద్యార్థికి తగినంత కంప్యూటర్లు లేకపోతే, విద్యార్థులు సమూహాలలో కంప్యూటర్‌ను పంచుకోవచ్చు. అది సాధ్యం కాక పోతే, ఒక కంప్యూటర్ అందుబాటులో ఉంటే కంప్యూటర్ స్క్రీన్‌ను మొత్తం తరగతికి ప్రాజెక్ట్ చేయవచ్చు.

దీన్ని గుర్తించండి.



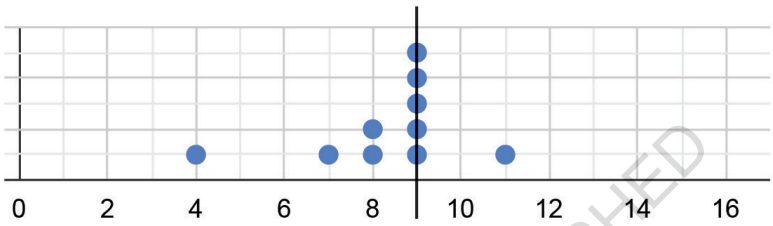
1. క్రింది డేటా యొక్క సగటును కనుగొని మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి.

   (i) మొదటి 50 సహజ సంఖ్యలు.

   (ii) మొదటి 50 బేసి సంఖ్యలు

   (iii) 4 యొక్క మొదటి 50 గుణిజాలు

2. క్రింద ఉన్న డాట్ ప్లాట్ డేటా సేకరణ మరియు దాని సగటును చూపుతుంది కానీ డాట్ లేక తప్పిపోయిన విలువను గుర్తించండి. తద్వారా సగటు 9 అవుతుంది. (క్రింది చూపిన విధంగా)



3. తరగతి ఉపాధ్యాయుడు సుధాకర్, తన తరగతిలోని 24 మంది విద్యార్థుల ఎత్తును కొలిచి సగటు లెక్కించమని శ్రేయాస్‌ను అడుగుతాడు సగటు ఎత్తు 150.2 సెం.మీ. అని శ్రేయాస్ ఉపాధ్యాయుడికి తెలియజేస్తాడు. కొలతలు తీసుకున్నప్పుడు విద్యార్థులు యూనిఫాం బూట్లు ధరించారని మరియు బూట్లు ఎత్తుకు 1 సెం.మీ. జోడించాయని సుధాకర్ కనుగొన్నాడు.

   (i) సరైన సగటు ఎత్తును కనుగొనడానికి ఉపాధ్యాయుడు బూట్లు లేకుండానే అన్ని ఎత్తులను మళ్ళీ కొలవాలా? లేదా సరళమైన మార్గం ఉందా?

   (ii) తరగతి యొక్క సరైన సగటు ఎంత?

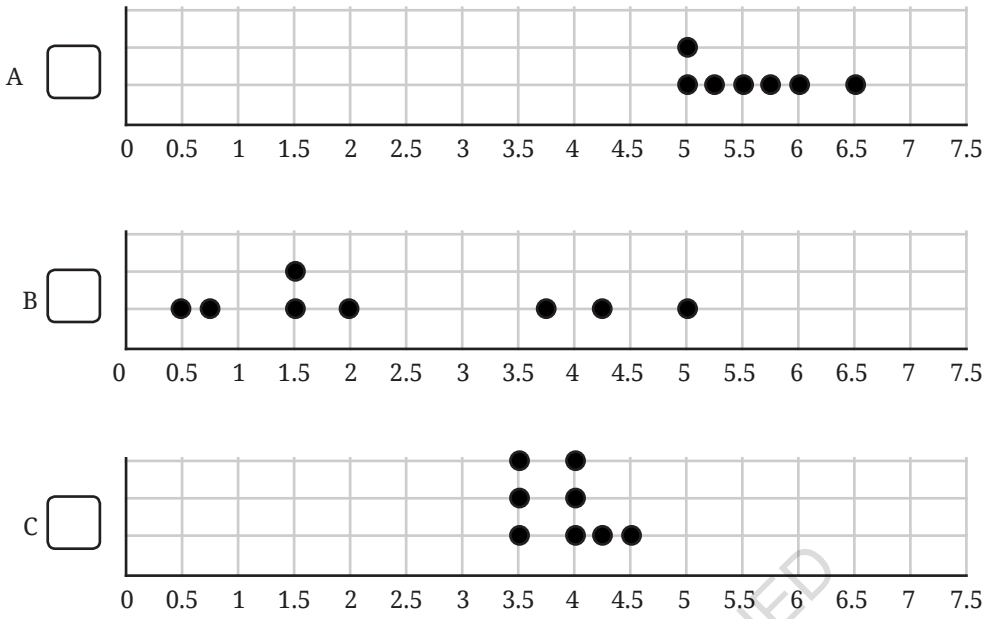
   (a) 174.2 సెం.మీ. (b) 126.2 సెం.మీ. (c) 150.2 సెం.మీ.

   (d) 149.2 సెం.మీ. (e) 151.2 సెం.మీ. (f) పైవేవి కావు

   (g) తగినంత సమాచారం లేదు

4. క్రింద ఉన్న మూడు చుక్కల ప్లాట్‌ల వివిధ ఆల్బమ్‌ల పాటల నిడివిని నిముషాల్లో చూపుతాయి వీటిలో దేని సగటు నిడివి 5.57 నిమిషాలు? మీరు సమాధానానికి ఎలా వచ్చారో వివరించండి.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



5. 8, 10, 19, 23, 26, 34, 40, 41, 41, 48, 51, 55, 70, 84, 91, 92 మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.



(i) మధ్యగతాన్ని ప్రభావితం చేయకుండా (ఇచ్చిన జాబితాలో) దత్తాంశానికి ఒక విలువను చేర్చితే ఆ విలువ ఎంత కావచ్చు?

(ii) మధ్యగతాన్ని ప్రభావితం చేయకుండా దత్తాంశానికి రెండు విలువలను చేర్చినట్లయితే ఆ రెండు విలువలు ఏమవుతాయి?

(iii) మధ్యగతాన్ని ప్రభావితం చేయకుండా దత్తాంశం నుండి ఒక విలువను తేసివేస్తే ఆవిలువ ఎంత అవుతుంది?

6. కింది వివరణలను పరిశీలించి, ఆ వివరణలు ఎల్లప్పుడూ నిజమేనా? కొన్ని సార్లు నిజమా లేదా ఎప్పటికీ నిజం కాదేమో సమర్థించండి.

(i) మధ్యగతం కంటే తక్కువ విలువను చేర్చడం వలన సగటు తగ్గుతుంది.

(ii) సగటు కంటే తక్కువ విలువలను చేర్చడం ద్వారా మధ్యగతం తగ్గుతుంది.

(iii) ఏవైనా నాలుగు విలువలను చేర్చడం వలన మధ్యగతం ప్రభావితం కాదు?

(iv) మధ్యగతం కంటే తక్కువ 4 విలువలను చేర్చడం వలన మధ్యగతం పెరుగుతుంది.

7. 8, 13, 10, 4, 5, 20, y, 10 సంఖ్యల సగటు 10.375, y విలువను కనుగొనండి

8. 15 విలువలు కలిగిన దత్తాంశం సమితి యొక్క సరాసరి 10.375, y విలువను కనుగొనండి.

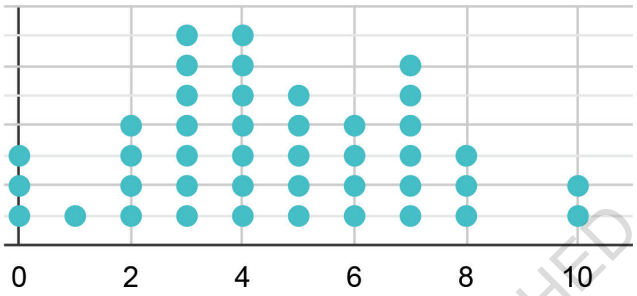
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. దత్తాంశాన్ని పరిగణించండి : 12, 47, 8, 73, 18, 35, 39, 8, 29, 25, p. ఈ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతం 29 అయితే కింది సంఖ్య (లు) లో ఏది p కావచ్చు?

(i) 10 (ii) 25 (iii) 40 (iv) 100

(v) 29 (vi) 47 (vii) 30

10. ఒక వారంలో విద్యార్థులు ఎన్ని సార్లు సైకిల్ తొక్కారో క్రింద ఉన్న డాట్ ప్లాట్‌లో చూపబడింది. ఆ వారంలో నలుగురు విద్యార్థులు రెండుసార్లు సైకిల్ తొక్కారు.



(i) విద్యార్థులు తమ సైకిళ్ళను సగటు ఎన్ని సార్లు నడిపారో కనుగొనండి.

(ii) విద్యార్థులు తమ సైకిళ్ళను ఎన్ని సార్లు నడిపారో మధ్యగతం కనుగొనండి?

(iii) కింది వాటిలో ఏవి చెల్లుతాయో? ఎందుకు?

(a) ప్రతి ఒక్కరూ కనీసం ఒక సారైనా వారిసైకిల్‌ను ఉపయోగించారు?

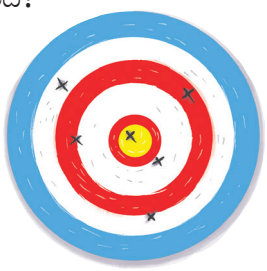
(b) దాదాపు అందరూ తమ సైకిల్‌ను కొన్నిసార్లు ఉపయోగించారు.

(c) కొన్ని రోజులలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ సార్లు సైకిల్ తొక్కిన విద్యార్థులు ఉన్నారు.

(d) కొన్ని రోజులలో సరిగ్గా 5 మంది విద్యార్థులు తమ సైకిళ్ళను ఒకటి కంటే ఎక్కువ సార్లు ఉపయోగించారు.

(e) తరువాత వారంలో వారందరూ మునపటి వారం కంటే 1 సారి ఎక్కువ సైకిల్ తొక్కితే తరువాత వారం దత్తాంశం యొక్క సగటు మరియు మధ్యగతం ఎంత అవుతుంది?

11. ఒకపాఠశాలలో డార్ట్-త్రోయింగ్ పోటీ నిర్వహించబడింది. బుల్స్ ఐ (మధ్యవృత్తం)ను తాకడానికి పాల్గొనే వారు ఎన్ని త్రోలు వేశారో క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడింది. దత్తాంశాన్ని దాని కనిష్ఠ గరిష్ఠ సగటు మరియు మధ్యగతాన్ని ఉపయోగించి వివరించండి.



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ప్రయత్నాల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	1	0	0	1	4	9	12	15	10	10

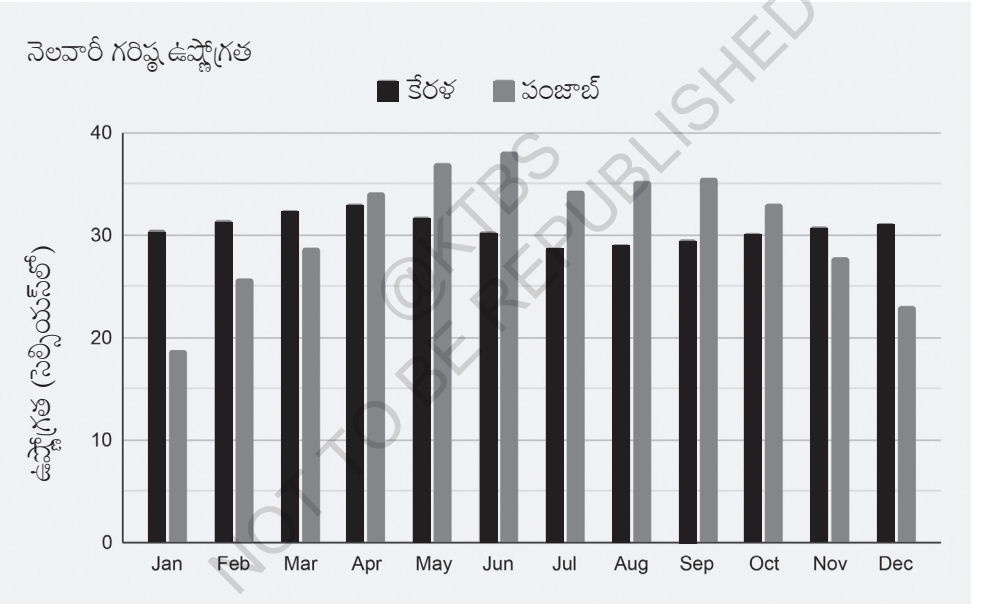
5.2 దత్తాంశాన్ని దృశ్య మానం చేయడం మరియు వివరించడం

ఇప్పటవరకు మనం చిత్ర గ్రాఫ్‌లు బార్ గ్రాఫ్‌లు, క్లస్టర్–బార్ గ్రాఫ్‌లు మరియు డాట్ ప్లాట్‌లను ఎలా చదవాలో మరియు ఎలా తయారు చేయాలో నేర్చుకున్నాము. ఇప్పడు దత్తాంశాన్ని దృశ్యమానం చేయడానికి మరికొన్ని మార్గాలను పరిశీలిస్తాము.

లైన్ గ్రాఫ్‌లు

ఉష్ణోగ్రత

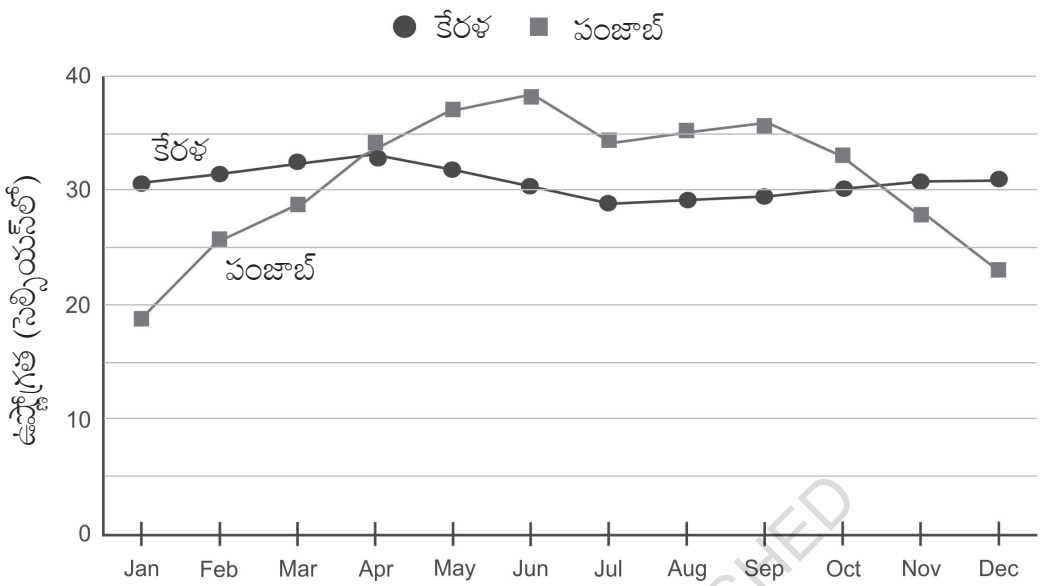
కేరళ మరియు పంజాబ్‌లలో నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతను చూపించే క్లస్టర్–కాలమ్ గ్రాఫ్ క్రింది బొమ్మ



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? ఇప్పడు క్రింది గ్రాఫ్‌ను గమనించండి. ఈ రెండు గ్రాఫ్‌లు ఒకే సమాచారాన్ని సూచిస్తాయి.

నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత



రేఖలతో రూపొందించ బడిన అటువంటి గ్రాఫ్‌ను మనం **లైన్ గ్రాఫ్** అని పిలుస్తాము. రేఖ గ్రాఫ్‌లు సాధారణంగా కాల క్రమేణా దత్తాంశాన్ని దృశ్య మానం చేయడానికి ఉపయోగించబడతాయి.

? ఒక రాష్ట్రంలో ఒక నెలలో గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతను మనం ఎలా పొందగలం?

రాష్ట్ర వ్యాప్తంగా స్థానిక ఉష్ణోగ్రతను క్రమం తప్పకుండా ట్రాక్ చేసే కొన్ని వాతావరణ కేంద్రాలు ఉండవచ్చు రాష్ట్ర వ్యాప్తంగా నమోదైన అన్ని విలువలలో గరిష్ఠ విలువను పరిశీలించడం ద్వారా మనం నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతను పొందవచ్చు.



దత్తాంశాన్ని ఎలా సేకరించ బడుతుందో లేదా ఉత్పత్తి చేయబడుతుందో అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నించినపుడు దాని పరిధి గురించి మనం స్పష్టమైన ఆలోచన వస్తుంది మరియు దానిని మరింత అర్థవంతంగా అర్థం చేసుకోగలుగుతాము. ఇది పక్షపాతం లేదా తప్పిపోయిన సమాచారంవంటి ఏవైన పరిదులను గుర్తించడంలో మరియు దత్తాంశం నుండి మనం ఎంత నమ్మకంగా తీర్మానాలు చేయవచ్చో నిర్ణయించడంలో కూడా మాకు సహాయపడుతుంది.

సమర్థించబడిన సమాచారాన్ని గుర్తించడానికి మరియు అర్థం చేసుకోవడానికి మనం రెండు దశల ప్రక్రియను అనుసరిద్దాం.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

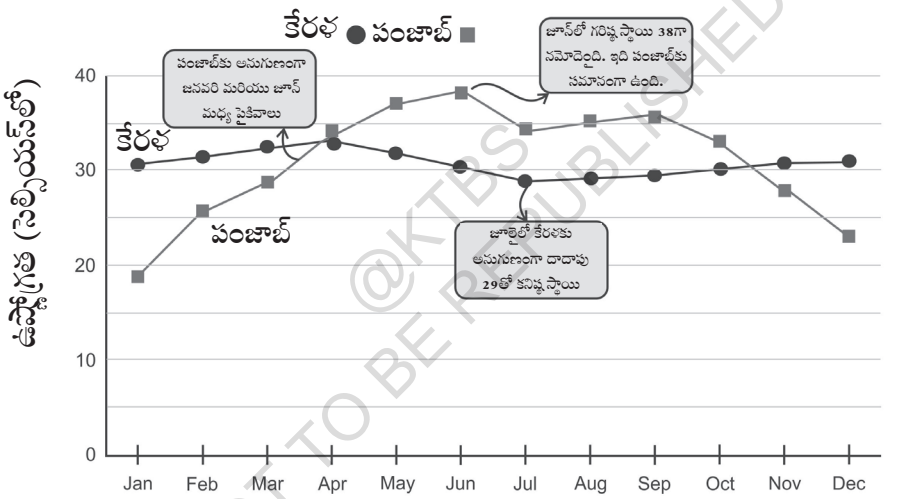
దశ 1: ఏమి ఇవ్వబడిందో మరియు దత్తాంశం నమూనాలను చూపిస్తుందో గమనించండి.

? ఒక నగరానికి సంబంధించిన నెల దత్తాంశాన్ని గుర్తించి కాలక్రమేణా మార్పును చూపించడానికి.

- పంక్తుల ద్వారా అనుసంధానించారు. కేరళ దత్తాంశాన్ని నీలిరంగు రేఖలతో అనుసంధానించ బడిన నీలి రంగు వృత్తాకార గుర్తులను ఉపయోగించి చూపారు మరియు పంజాబ్ దత్తాంశాన్ని ఎరుపురంగులో చూపారు
- క్షితిజ సమాంతర రేఖ సంవత్సరంలో నెలలను చూపుతుంది నిలువురేఖ ఉష్ణోగ్రతను ^{o}C లో చూపుతుంది.

గ్రాఫ్ గ్రేస్కేల్ / నలుపు-తెలుపు రంగుల్లో ముద్రింప బడిందా లేదా రంగులను వేరు చేయండం కష్టంగా భావించే వ్యక్తులకు విభిన్న ఆకార గుర్తులు సులభంగా గుర్తించడంలో సహాయ పడుతాయి.

నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దశ 2 : ఇవ్వబడిన దానినుండి ఊహించి అర్థంచేసుకోండి. ఏమి ఆలోచిస్తున్నారు.

? ప్రతి పరిశీలనలను విశ్లేషించితగిన సారాంశం / ముగింపు ప్రకటనలను వివరించండి.

- పంజాబ్‌లో నెలవారీ ఉష్ణోగ్రత జనవరి నుండి జూన్ వరకు పెరుగుతుంది. గరిష్ఠంగా $38^{o}C$ కి చేరుకుంటుంది. తరువాత జులైలో ఇది $35^{o}C$ కంటే కొంచెం తక్కువగా ఉంటుంది. సెప్టెంబర్ వరకు ఎక్కువగా ఉంటుంది. ఆ పై డిసెంబర్‌వరకు నిరంతరం పడిపోతుంది. దాదాపు $23^{o}C$ కి చేరుకుంటుంది. జనవరి నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత దాదాపు $19^{o}C$ లో అత్యల్పంగా ఉంటుంది.
- కేరళలో ఉష్ణోగ్రత భిన్నంగా ఉంటుంది. ఏడాది పొడవున ఇది చాలావరకు చదునుగా ఉంటుంది. ఏప్రిల్‌లో గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత $33^{o}C$ మరియు జులైలో అత్యల్ప ఉష్ణోగ్రత $29^{o}C$ వేసవి మరియు శతాకాలంలో కేరళలో నెలవారీ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు ఒకే విధంగా ఉంటాయని గమనించండి.

- సంక్లిష్టంగా చెప్పాలంటే పంజాబ్‌లో ఉష్ణోగ్రతలు ఎక్కువగా మారుతూ కేరళకంటే చల్లగా మరియు వెచ్చగా ఉన్నాయి.

ఇది వివిధ దశలలో ప్రశ్నలను రెకెత్తిస్తుంది వాటిలో కొన్నింటకి దత్తాంశాని? ఉపయోగించి సమాధానం ఇవ్వవచ్చు ఆలోచించడానికి ఇక్కడ కొన్ని దశలు ఉన్నాయి.



- ఈ రెండు రాష్ట్రాలలో దోరణులు ఎందుకు అంత భిన్నంగా ఉన్నాయి? ఒక ప్రాంతం యొక్క ఉష్ణోగ్రతను ఏ అంశాలు నిర్ణయిస్తాయి.
- మరి కొన్ని రాష్ట్రాలలో దోరణులను పరిశీలించడానికి మీరు ఆపక్తిగా ఉండవచ్చు. రాష్ట్రాలు ప్రదర్శించే ఇతర రకాల దోరణులు ఏవైన ఉన్నాయా? పంజాబ్‌లాంట దోరణులు ఏరాష్ట్రాలలో కనిపుస్తున్నాయి? ఈ రాష్ట్రాల మధ్య ఏదైన ఉమ్మడిగా ఉందా?

? ఈ రాష్ట్రాలలో నెలవారీ కనీస ఉష్ణోగ్రతల ప్లాట్ ఎలా ఉంటుంది? మీకు ఏ ఆలోచనలు లేదా ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి?

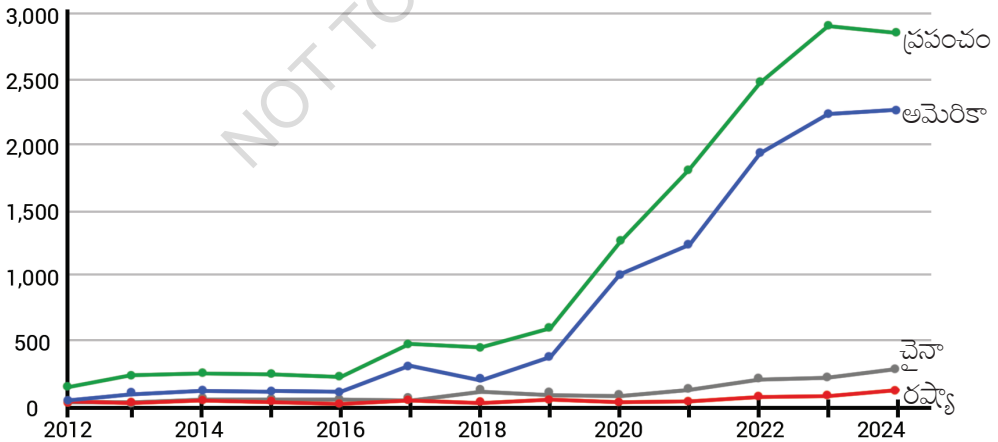
గణిత చర్చ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

స్పేస్ జామ్ ల భవిష్యత్తులో ట్రాఫిక్ సమస్య

అంతరిక్షంలోకి ప్రవేశ పెట్టబడిన వస్తువుల వార్షిక సంఖ్యను చూపించే క్రింద లైన్ గ్రాఫ్‌ను పరిశీలించండి.

అంతరిక్షంలోని ప్రవేశ పెట్టిన వస్తువుల వార్షిక సంఖ్య ఉపగ్రహాలు, ప్రోబోలు, ల్యాండర్‌లు, సిబ్బందితో కూడిన అంతరిక్షనౌకలు మరియు భూమి పై లేదా అంతకు మించి ప్రయోగించబడిన అంతరిక్ష కేంద్రం వివరిచ అంశాలు



మూలం యునైటైడ్ నేషన్స్ ఆఫీస్ ఫార్ ఔటర్ స్పేస్ ఆఫైర్ (2025)

? ఈ దత్తాంశాన్ని పొందడానికి ఉపయోగించె పద్ధతి ఏమిటి? చర్చించండి.

గణిత చర్చ

దశ: 1: ఏమి ఇవ్వబడిందో గుర్తించండి

ఏవిధంగా గ్రాఫ్ గీయబడింది. ఏ విధంగా స్కేలును గుర్తించాలో

దశ: 2: ఇవ్వబడిన దానినుండి ఊహించి అర్థం చేసుకోండి

(?) మీరు చేసిన ప్రతి పరిశీలనను. విశ్లేషించి అర్థం చేసుకోండి. అన్ని వివరణలు చేసిన తరువాత సంగ్రహణ/ముగింపు ప్రకటనలు చేయవచ్చు.

- 2024 లో ప్రపంచ వ్యాప్తంగా ఈ సంఖ్య దాదాపు 2800, కాగా 2023లో ఈ సంఖ్య దాదాపు 2900. 2023 లో ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంతరిక్షంలోకి అత్యధిక సంఖ్యలో వస్తువులు ప్రయోగించబడ్డాయని మనం చెప్పవచ్చు (2012 లొ ముందు ట్రెండ్ తగ్గుతుందని ఊహిస్తే)
- మూడు దేశాలు గణనలు ప్రపంచ వ్యాప్త గణనతో కలిపి ఉండవు. కాబట్టి మనం ఈ దృశ్య మానతలో ఇతర దేశాల గణనను చూపబడలేదు మనం ఊహించవచ్చు.
- USA విషయంనకు వస్తే 2022 నుండి 2023 వరకు పెరుగుదల 2023 నుండి 2024 వరకు కంటే ఎక్కువ లైన్ విభాగాలు ఎంత నిటారుగా ఉన్నాయో చూడటంద్వారా మనం దీనిని చెప్పవచ్చు లైన్ ఎంత నిటారుగా ఉంటే పెరుగుదల అంత ఎక్కువగా ఉంటుంది.

(?) క్రింది వాటిలో ఏ ప్రకటనలు చెల్లు బాటు అయ్యే అనుమతులు?

- 2012 నుండి 2024 వరకు ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంతరిక్ష వస్తువుల ప్రయోగాల సంఖ్య ప్రతి సంవత్సరం పెరుగుతుంది.
- 2022 – 24 సంవత్సారాలలో USA ప్రధాన సహకారిగా ఉంది ప్రపంచ వ్యాప్త గణనలో దాదాపు 3 వ వంతును ప్రారంభించింది.
- 2012 – 24 కాలంలో నేపాల్ ఏ వస్తువును ప్రయోగించలేదు.
- 2024 లో చైనా మరియు రష్యాలు కలిపి 400 వస్తువును ప్రయోగించాయి.

(?) ప్రపంచ వ్యాప్తంగా జనాభా సంఖ్య 2 రెట్లు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పెరిగిన వరుసగా రెండు సంవత్సరాలను గుర్తించండి.

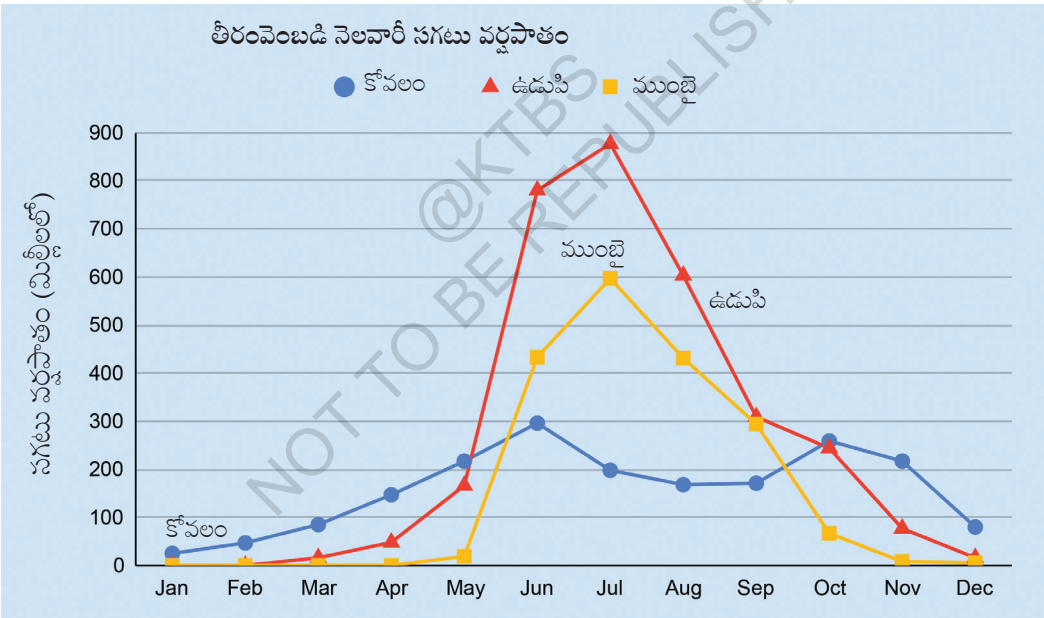
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అదే దత్తాంశాన్ని క్లస్టర్ కాలమ్ గ్రాఫ్ లాగా చూపించడాన్ని ఊహించుకోండి. 13 క్లస్టర్‌లు ఉంటాయి. ప్రతి సంవత్సర మునకు ఒకటి మరియు ప్రతికస్టర్‌లో 4 నిలువు వరుసలు మొత్తం 52 బార్‌లను తయారు చేస్తాయి. అలాంటి గ్రాఫ్ రద్దీగా మరియు చదవడానికి కష్టంగా కనిపిస్తుంది. దీని వలన ట్రెండ్‌లను. స్పష్టంగా అర్థంచేసుకోవడం కష్టమవుతుంది. మరో వైపు. కాల క్రమేణా వచ్చే మార్పులను వివరించడానికి లైన్ గ్రాఫ్ బాగా సరిపోతుంది. డెటా పాయింట్లను లైన్ విభాగలతో అనుసంధానించడం ద్వారా ఇది ట్రేండ్‌లు మరియు వైవిధ్యాల యొక్క స్పష్టమైన దృశ్యమాన ప్రాతినిద్యాన్ని అందిస్తుంది వివిధ సంవత్సరాలలొ ఒక పరామతి ఎలా అభివృద్ధి చెందుతుందో పాఠకుడు సులభంగా ట్రాక్ చేయడానికి అనుమతిస్తుంది.

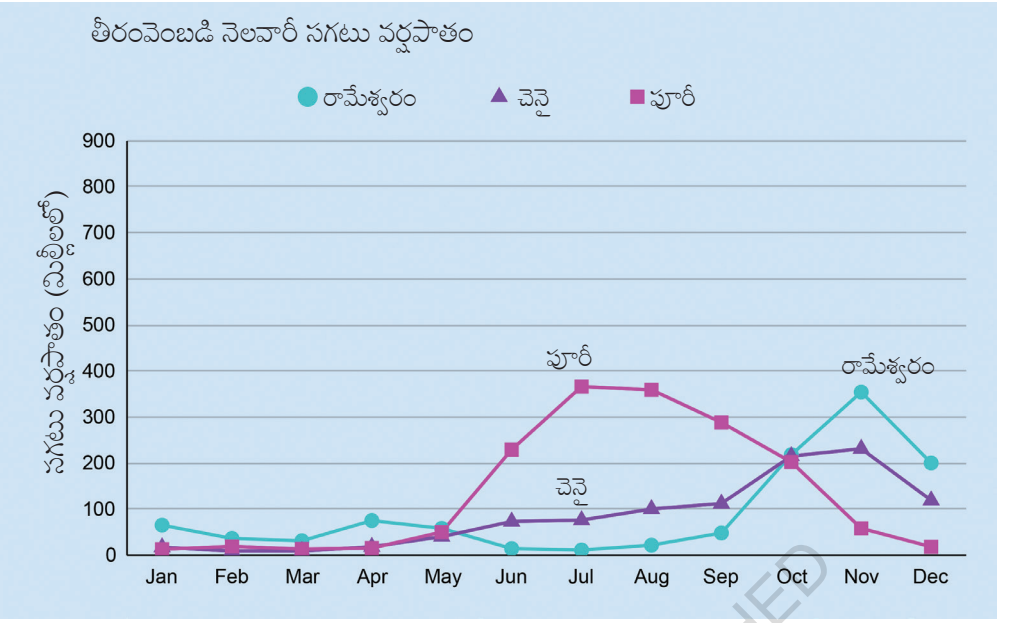
(నమూనాలో) వర్షాన్ని పట్టుకోండి

క్రిందిగ్రాఫ్‌లు కొన్ని సెంటి గ్రేడ్‌ల నెలవారీ సగటువర్ష పాతం దత్తాంశాన్ని చూపుతాయి.

తీరంవెంబడి నెలవారీ సగటు వర్షపాతం



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



మూలం : *weather-and-climate.com*

? ఈ డేటాను సంకలనం చేయడానికి సాధ్యమయ్యే పద్ధతి ఏమిటి?

ఈ డేటా ఆనగరాల్లో నెలవారీ సగటు వర్షపాతాన్ని చూపిస్తుంది అంటే ప్రతి నగరంలో కొన్ని సంవత్సారాంలొ వర్షపాతండేటాను. సేకరిస్తారు. జూన్ నెలలో ఒక నెలలో కురిసిన మొత్తం వర్షపాతం సగటును లెక్కించబడి. ఒకనగరం జూన్ నెలలో నెలవారీ సగటు వర్షపాతం లభిస్తుంది.



? ఈ నగరాలను భారతదేశపటంలో గుర్తించండి. గ్రాఫ్‌లలో వాటిని ఎలా వర్గీకరించారో దానికి ఉమ్మడిగా ఏమిటి? గ్రాఫ్‌ల గుర్తించి మీ పరిశీలనలు మరియు అనుమానాలను పంచుకోండి.

కేవలం, ఉడుపి మరియు ముంబై పశ్చిమ తీరం వెంబడి ఉన్నాయి. రామేశ్వరం, చెన్నై మరియు పూరి తూర్పు తీరం వెంబడి ఉన్నాయి. పశ్చిమ తీరం వెంబడి ఉన్న ప్రాంతాలలో ఎక్కువ వర్షాలు కురుస్తున్నట్లు కనిపిస్తోంది.

? ప్రతి నగరంలో వర్షపాతం గరిష్ఠ నెలలు మరియు అత్యల్ప నెలలను గుర్తించండి.

ఉడుపి-ముంబై కోవలంలో జూన్-ఆగస్ట్ నెలలో అత్యధిక వర్షపాతం నమోదు అవుతుంది. రామేశ్వరం అక్టోబర్-డిసెంబర్ నెలలో ఎక్కువ వర్షాలు కురుస్తాయి. చెన్నైలో జూన్ నుండి వర్షాలు ప్రారంభమవుతాయి. ఇది నవంబర్‌లో గరిష్ఠంగా ఉంటుంది మరియు డిసెంబర్ వరకు కొనసాగుతుందీ. తూర్పు తీరంలో ఉన్నప్పటికి పూరీలో జులై-సెప్టెంబర్‌లలో అత్యధిక వర్షపాతం నమూదు అవుతుంది. జనవరి-మార్చి అన్ని నగరాలకు పొడినెలలు తక్కువ వర్షపాతం ఉంటుంది. జనవరి-డిసెంబర్ వరకు రామేశ్వరంలో చాలా తక్కువ వర్షాలు కురుస్తాయి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? నైరుతి ఋతుపవనాలు మరియు ఈశాన్యరుతు పవననాల గురించి మరియు ఏ ప్రాంతాలు వీటి ప్రభావంలోనికి వస్తాయి. మరియు ఎప్పుడు వస్తాయో చదవండి.

? దాన్ని గుర్తించండి

1. వారంలో వివిధ రోజులలో ఒకదు కాణలను సందర్శించే సగటు క్లస్టమర్ల సంఖ్య మరియు వాస్తవానికి వస్తువులను కొనుగో లు చేసే సగటు కస్టమర్లసంఖ్య క్రింది పట్టికలో చూపబడింది. ఈ దత్తాంశాన్ని లైన్ గ్రాఫ్‌లో దృశ్యమానం చేయండి.

	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది
సందర్శిస్తున్నారు	16	19	10	14	20	22	35
కానుగోలుచేయడం	10	8	7	11	12	16	26

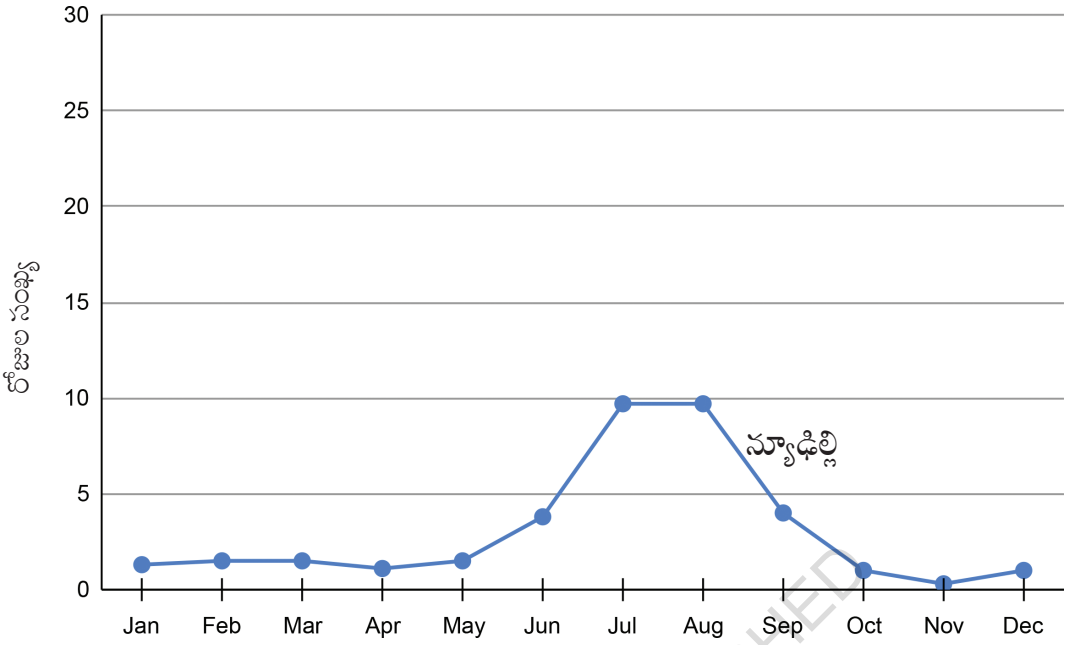
2. కొన్ని నగరాల్లో ప్రతి నెలలో సగటు వర్షపాతం రోజులు సంఖ్య క్రింది పట్టికలో చూప బడింది.

	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
మంగళూరు	0.1	0	0.1	1.8	6.2	24.1	27.7	24.5	14	8.8	3.9	0.9
న్యూడిల్లీ												
పోర్ట్ బ్లెయిర్	2.4	1.3	0.9	3.3	15.5	18.7	17.3	18.8	16.8	14.1	11.3	5.4
రామేశ్వరం	2.6	1.3	1.9	3.4	2.5	0.4	1	1	1.9	8.1	10.4	7.8

(i) ఈ డేటాను సంకలనం చెయడానికి సాధ్యమయ్యే పద్ధతి ఏమిటి?

(ii) క్రిందచూపిన లైన్ గ్రాఫ్‌లో మంగళూరు పోర్ట్ బెయిర్ మరియు రామేశ్వరం డేటాను గుర్తించండి మీరు విలువలను సమీప పూర్ణాంకానికి రౌండ్ చేయవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



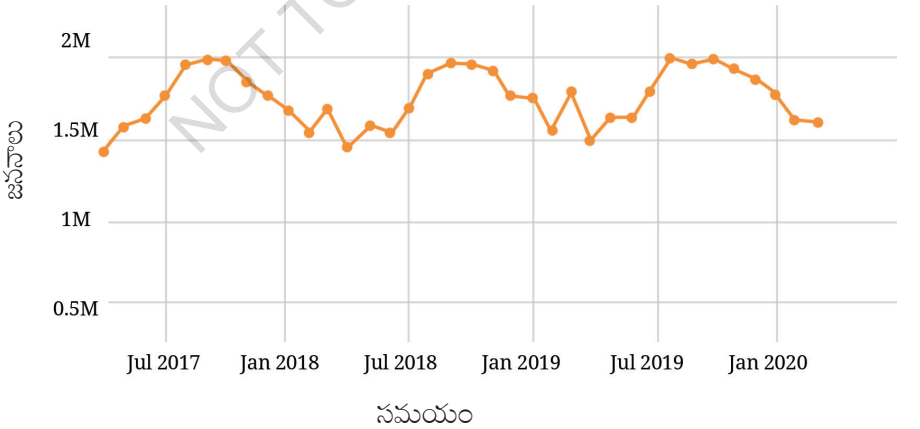
Source: weather-and-climate.com

(iii) గ్రాఫ్ లోని న్యూఢిల్లి రేఖ ఆధారంగా, పట్టికలోని సమాచారాన్ని పూరించండి

(iv) ఈ నగరాల్లో ఏ నగరం సంవత్సరానికి అత్యధిక వర్షపాత దినాలను నమోదు చేస్తుంది? ఏ నగరం అత్యల్ప వర్షపాత దినాలను నమోదు చేస్తుంది?

(v) పట్టికను చూసి, న్యూఢిల్లీ మరియు రామేశ్వరంలో వర్షాకాలం ఎప్పుడు ఉంటుందో చెప్పండి?

3. వనరు: సంబియార్ మరియు ఇతరులు రాబోయే కాలం) 'భారతదేశంలో లోని కాలానుగుణ వైవిధ్యాలు:



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) మీ పరిశీలనలు ఏమిటి?

(ii) జూలై 2017లో సుమారుగా ఎన్ని జననాలు జరిగాయి!

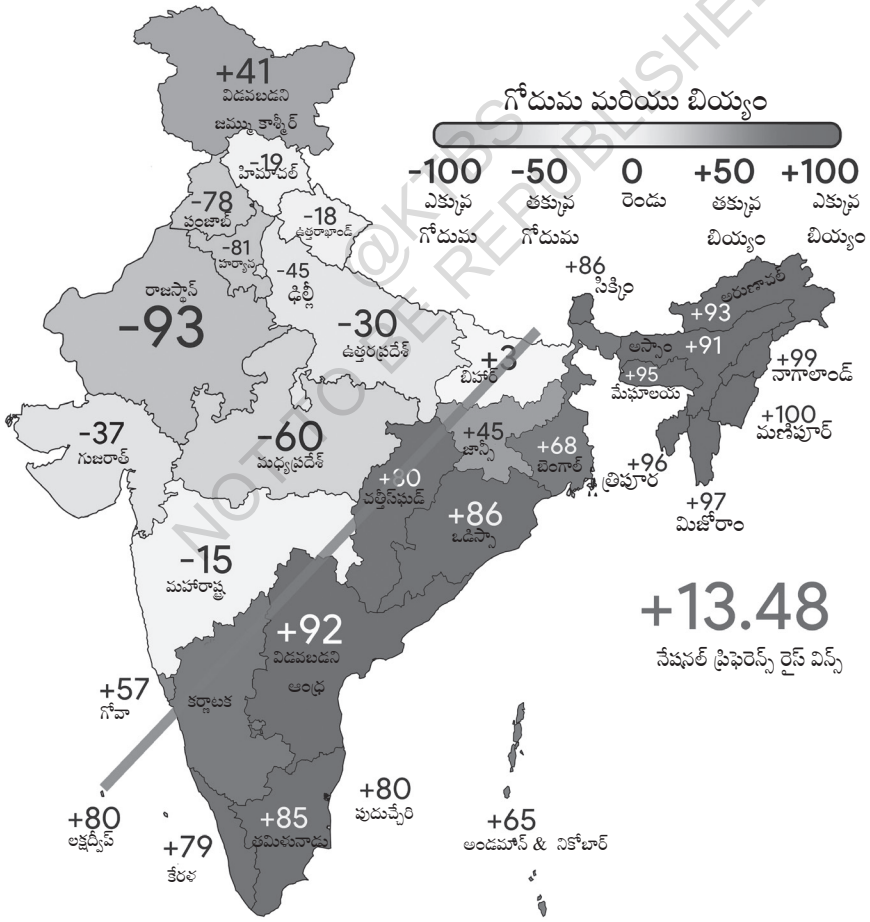
(iii) ఈ గ్రాఫ్ ఏ కాల వ్యవధిని తెలియజేస్తుంది!

(iv) 2018, 2019, మరియు 2020 సంవత్సరాల్లోని జనవరి నెల జననాల సంఖ్యను పోల్చండి.

(v) 2019 సంవత్సరంలో జరిగిన మొత్తం జననాల సంఖ్యను అంచనా వేయండి..

ఇన్ఫోగ్రాఫిక్స్ (Infographics)

సమాచారాన్ని మరియు అంతర్దృష్టులను మరింత స్పష్టంగా, వేగంగా మరియు దృశ్యపరంగా ఆకర్షణీయంగా కమ్యూనికేట్ చేయడానికి ఇన్ఫోగ్రాఫిక్స్‌ను ఎలా ఉపయోగించవచ్చో మనం 6వ తరగతిలో ఒక ఉదాహరణను చూశాము కింది ఇన్ఫో గ్రాఫికను ఒకసారి చూడండి. ఇక్కడ అందించిన సమాచారాన్ని మీరు అర్థం చేసుకోగలుగుతున్నారా?



NOT TO BE REPUBLISHED @KSSS

వనరు: 68వ నేషనల్ శాంపిల్ సర్వే జూన్ 2014, 2011–12 డేటా

ఈ ఇన్ఫోగ్రాఫిక్ వివిధ రాష్ట్రాల్లో వరి మరియు గోధుమల మధ్య ఉన్న ప్రాధాన్యతను పోలుస్తుంది. పైన కుడి వైపున ఉన్న రంగుల స్కేల్, వివిధ రంగుల షేడ్స్ ప్రాధాన్యతల పరంగా ఎలా అర్థం చేసుకోవాలో సూచిస్తుంది.

తలసరి వరి మరియు గోధుమ వినియోగం మధ్య వ్యత్యాసం −100 మరియు −100 మధ్య విలువలకి మ్యాప్ చేయబడింది. + 100 విలువ అంటే ఆ రాష్ట్రం గోధుమలను అస్సలు వినియోగించదని కాదు. దీని అర్థం ఆ రాష్ట్రం ఎక్కువగా వరిని ఇష్టపడుతుందిని మరియు తలసరి వరి మరియు గోధుమ వినియోగం మధ్య వ్యత్యాసం అత్యధికంగా ఉందని అర్థం. ఎరుపి గీత ద్వారా చూపబడిన వరి ఎర్సెస్ గోధుమ ప్రాధాన్యతలలో స్పష్టమైన భౌగోళిక విభజన ఉండటం ఆసక్తికరంగా లేదు?

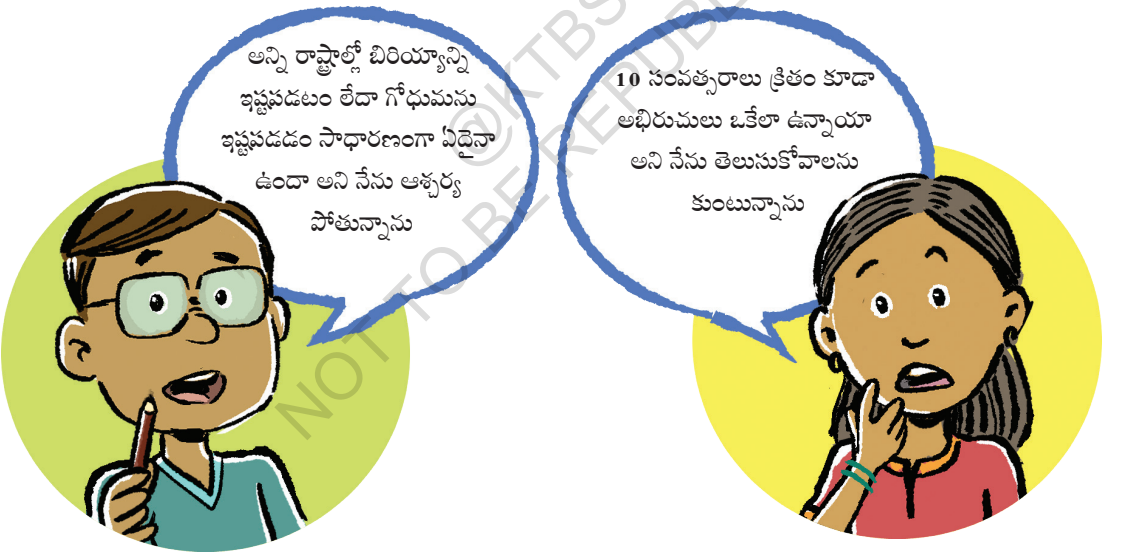
? మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి ఈ ఇన్ఫోగ్రాఫీ ఆధారంగా, కింద వాటికి సమాధానం ఇవ్వండి.

(i) కర్ణాటక విలువ దాచబడింది. అది ఎంత ఉండవచ్చో మీరు ఊహించగలరా?

(ii) వరి అత్యంత ప్రాచుర్యం పొందిన మొదటి 5 రాష్ట్రాలు ఏవి?

(iii) గోదుమలు అత్యంత ప్రాచుర్యం పొందిన మొదటి 5 రాష్ట్రాలు ఏవి?

(iv) వరి మరియు గోధుమల మధ్య ప్రాధాన్యత ఇంచుముంచు సమతుల్యంగా ఉన్న కొన్ని రాష్ట్రాలను జాబితా చేయండి.

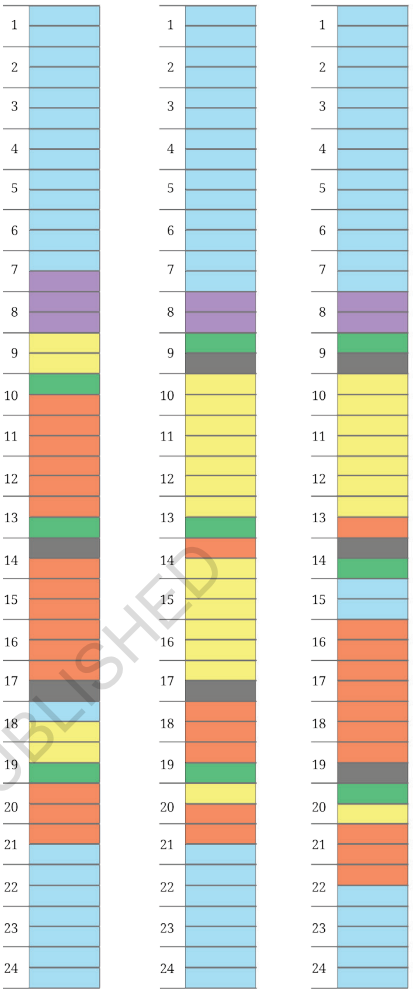


© SCERT TBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక స్ట్రిప్ (పట్టీ) ఏం చెప్పగలదు?

మనోజ్‌కు ఒక ఆసక్తికరమైన అలవాటు ఉంది. అతను రోజంతా తను చేసే పనులను నోట్ చేసుకుంటాడు. అతను అర్ధరాత్రి నుండి అర్ధరాత్రి వరకు ఉన్న సమయాన్ని 30 నిమిషాల వ్యవధిగా గుర్తిస్తూ, 48 గడులు ఉన్న ఒక కాగితపు పట్టికి రంగులు వేయడం ద్వారా తన కార్యకలాపాలను రికార్డ్ చేస్తాడు.

అతను వారంలోని మూడు వేర్వేరు రోజులలో తను చేసి ఐదు రకాల కార్యకలాపాలను కుడివైపున చూపిన మూడు రంగుల పట్టీలపై రికార్డ్ చేశారు.



(i) నిద్రించడం

(ii) తినడం

(iii) స్నేహితులను కలవడం, అభిరుచులు, మీడియా, కుటుంబంతో గడపడం.

(iv) తరగతులకు హాజరుకావడం, చదువుకోవడం మరియు హోంవర్క్

(v) స్నానం చేయడం మరియు దుస్తులు ధరించడం, యోగా లేదా వ్యాయామం.

(vi) ప్రయాణం

? **ఈ మూడు రంగుల పట్టీలను జాగ్రత్తగా చూడండి.**

(i) ప్రతి రంగు ఏ కార్యకలాపాన్ని సూచిస్తుంది?

(ii) ఈ మూడు పట్టీలు ఏదో ఒక క్రమంలో శుక్రవారం నుండి ఆదివారం వరకు ఉన్న రోజులకు సంబంధించినవి. ఏపట్టి ఏ రోజును సూచిస్తుందని మీరు అనుకుంటున్నారు?

(iii) ఈ రోజుల్లో ఒకరోజు, అతను స్నేహితులతో కలిసి ఒక సుదీర్ఘమైన సినిమా చూడటానికి వెళ్ళాడు. ఇది ఎప్పుడు జరిగిందని మీరు అనుకుంటున్నారు?

(iv) అతని పాఠశాల భోజన విరామం ఏ సమయంలో ఉంటుంది?

(v) ఈ పట్టీలు మనకు ఇంకా ఏమి చెప్పగలవు?

? ఒక సాధారణ పనిదినం కోసం మీ పట్టి ఎలా ఉంటుంది? అది మనోజ్ పట్టితో ఎంతవరకు పోలి ఉంటుంది లేదా ఎంత భిన్నంగా ఉంటుంది.

ప్రయత్నించండి

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? మీ సెలవు దినాల్లో ఒక సాధారణ రోజు కోసం పట్టీ ఎలా ఉంటుంది? అది ఎంత భిన్నంగా కనిపిస్తుంది?

? మీ ఇంట్లోని పెద్దల కోసం పట్టీ ఎలా ఉంటుంది? ఇంట్లో ఉండే ఎవరైనా ఒక పెద్దవారి కోసం ఒక పట్టీని తయారు చేయండి. మీ పట్టీని వారితో పోల్చండి మీకు ఏది ఆసక్తికరంగా అనిపించింది?



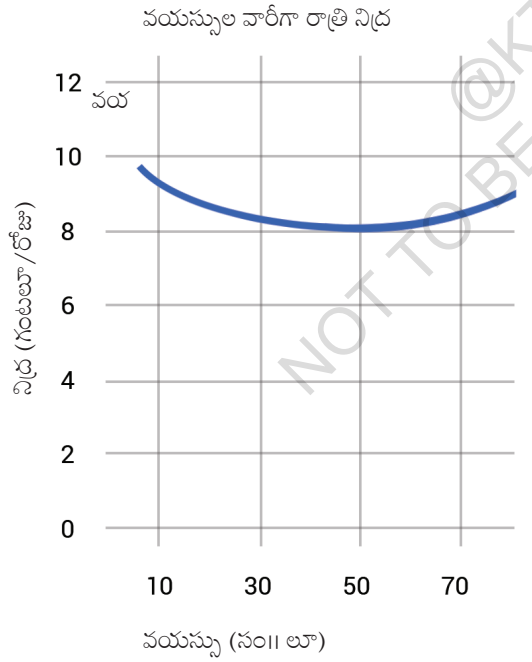
డెటా స్టోరి : స్లీపీ-డీపి (Data Story: Sleepy-Deepy)

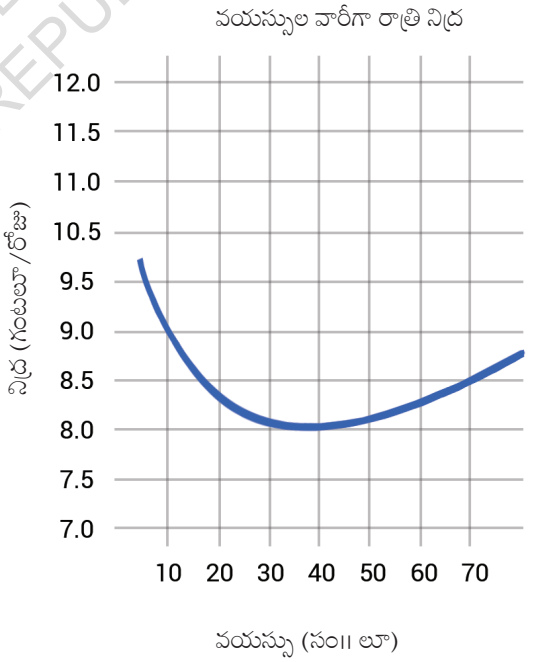
అనుపాతం అధ్యాయంలోని నిద్ర సమయం పై ఛార్ట్ మీకు గుర్తుందా?

రోజుకు కేవలం 2 గంటలు మాత్రమే నిద్రపోయే జంతువులు మరియు రోజుకు 20 గంటల వరకు నిద్రపోయే జంతువులు ఉండటం ఆశ్చర్యంగా లేదు? కీటకాల గురించి ఏమిటీ మీరు ఎప్పుడైనా ఏదైనా కీటకం నిద్రపోవడం లేదా విశ్రాంతి తీసుకోవడం చూశారా? మానవులు సాధారణంగా రోజుకు సుమారు 7-9 గంటలు నిద్రపోతారు. నిద్రపోయే సమయం వయస్సు. జీవన పరిస్థితులు, జీవనశైలి. (వారు తినే ఆహారం, వారు చేసే పనులు మొదలైన వి) మరియు ఇతర అంశాల'పై ఆధారపడి వ్యక్తుల మధ్య చాలా మారుతూ ఉంటుంది. శిశువులు పెద్దల కంటే ఎక్కువ సమయం నిద్రపోతారని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

కింది రేఖాచిత్రాలు (line graphs) 6 నుండి 75 సంవత్సరాల వయస్సు గల భారతీయుల సాధారణ నిద్ర సమయాలను చూపుతాయి. రెండవ చిత్రం మొదటి చిత్రాన్ని పెద్దదిగా చూపుట.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED





Source: National Time Use Survey 2024

గ్రాఫ్ వివరాలు: వివిధ వయస్సులలో రాత్రి నిద్ర

X-అక్షం వయస్సు (సంవత్సరాలలో)

Y-అక్షం: నిద్ర (గంటలు/రోజుకు)

వనరు. నేషనల్ టైమ్ యూజ్ సర్వే 2024

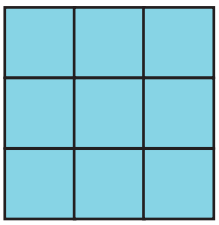
? ఈ గ్రాఫ్ పై మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి. మీకు ఏది ఆసక్తికరంగా అనిపించింది?

ముసుపటి గ్రాఫ్‌ల వలె కాకుండా కొన్ని అనుసంధానించబడిన రేఖాఖండాలతో రూపొందించబడిన ఈ లైన్ గ్రాఫ్ ఒక మృదువైన వక్రరేఖలా కనిపిస్తుంది. ఎందుకంటే ఇందులో ఒకదానికొకటి చాలా దగ్గరగా ఉంచబడిన 80 డేటా పాయింట్లు ఉన్నాయి. కాలమ్ గ్రాఫ్. ఉపయోగించి అదే డేటాను సూచించడానికి 70 కాలము అవసరమవుతాయి. దీనివల్ల గ్రాఫ్ గందరగోళంగా మరియు భారంగా కనిపిస్తుంది. ఇక్కడ లైన్ గ్రాఫ్ ఒక మెరుగైన ఎంపిక ఇది తేలికగా ఉంటుంది మరియు డేటాలోని సరళిని చక్కగా చూపిస్తుంది.

గ్రాఫ్ నుండి మనం గమనించవచ్చు ఏంటంటే, 5 ఏళ్ల పిల్లల సగటు నిద్ర సమయం రోజుకు సుమారు 9.5 గంటలు. మనం టీనేజ్ సంవత్సరాల ద్వారా ఎదుగుతూ వయోజన దశలోకి ప్రవేశించే కొద్ది రోజువారీ నిద్ర సమయం తగ్గుతూ వస్తుంది. 30 నుండి 50 సంవత్సరాల మధ్య వయస్సులో రోజుకు సుమారు 8 గంటలకు చేరుకుంటుంది. 50 సంవత్సరాల తర్వాత, రోజువారీ నిద్ర సమయం మళ్లీ పెరుగుతూ సుమారు 8.5 గంటలకు చేరుకుంటుంది. నవజాత శిశువులు మరియు చిన్న పిల్లలు అంత ఎక్కువ సమయం ఎందుకు నిద్రపోతారో మీరు ఆశ్చరపోవచ్చు వివిధ దేశాల్లోని ప్రజలు భిన్నంగా నిద్రపోతారా? జంతువులు కూడా వయస్సును బట్టి నిద్ర వ్యవధిలో ఇటువంటి మార్పులన ు ప్రదర్శి స్థాయా?

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

? **గుర్తించండి:**



1. సగటు గ్రిడ్లు:

   (i) ప్రతి అడ్డు వరుస (row), నిలువు వరుస column), మరియు కర్ణం (diagonal) సగటు 10 వచ్చేలా 9 విభిన్న సంఖ్యలతో గ్రిడ్‌ను నింపండి.

   (ii) కొన్ని సంఖ్యలను మార్చడం ద్వారా అన్ని దిశలలో సగటు 10 వచ్చేలా మనం నింపగలమా?

2. కింది ప్రతి నిబంధనను సంతృప్తి ఎరిచే డేటాకు రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

   (i) సగటు (meam) కలిగిన 3 సంఖ్యలు.

   (ii) మధ్యగతం (median) 15.5 కలిగిన 4 సంఖ్యలు.

   (iii) సగటు 13.6 కలిగిన 5 సంఖ్యలు

   (iv) సగటు = మధ్యగతం కలిగిన 6 సంఖ్యలు

   (v) సగటు > మధ్యగతం కలిగిన 6 సంఖ్యలు

3. సేకరణ యొక్క మధ్యగతం 13 అయ్యేలా ఖాళీలను పూరించండి. 5, 21, 14, _____, _____, _____. కేవలం పూర్ణాంకాలను మాత్రమే అనుమతించినట్లయితే ఎన్ని అవకాశాలు ఉన్నాయి?

4. సేకరణ యొక్క సగటు 6.5 అయ్యేలా ఖాళీలను పూరించండి. 3, 11, _____, _____, 15, 6 కేవలం పూర్ణాంకాలను మాత్రమే అనుమతించినట్లయితే ఎన్ని అవకాశాలు ఉన్నాయి?

5. కింది ప్రతి ప్రకటన నిజమో కాదో తనిఖీ చేయండి. మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి. అవసరమైతే బీజగణితాన్ని ఉపయోగించండి.

(i) రెండు సరి సంఖ్యల సగటు సరి సంఖ్య అవుతుంది.

(ii) 5 యొక్క ఏవైనా రెండు గుణిజాల సగటు 5 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

(iii) 5 యొక్క ఏవైనా 5 గుణిజాల సగటు కూడా 5 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

6. సుధాకర్ క్లాస్ సగటు ఎత్తు 150.2 సెం.మీ. అని తెలిసిన కొన్ని రోజులకే ఆ తరగతిలో ఇద్దరు కొత్త విద్యార్థులు చేరారు.

(i) కింది వాటిలో ఏ ప్రకటనలు సరైనవి? ఎందుకు?

(a) రెండు కొత్త విలువలు ఉన్నందున తరగతి సగటు ఎత్తు పెరుగుతుంది.

(b) తరగతి సగటు ఎత్తు అలాగే ఉంటుంది.

(c) కొత్త సగటును కనుగొనడానికి కొత్త విద్యార్థుల ఎత్తులను కొలవాలి.

(d) కొత్త సగటు ఎత్తును మళ్ళీ లెక్కించడానికి తరగతిలోని ప్రతి ఒక్కరి ఎత్తును మళ్ళీ కొలవాలి

(ii) కొత్తగా చేరిన ఇద్దరు విద్యార్థుల ఎత్తులు 149 సెం.మీ మరియు 152 సెం.మీ తరగతి సగటు ఎత్తు గురించి కింది వాటిలో ఏ ప్రకటనలు సరైనవి? ఎందుకు?

(a) సగటు అలాగే ఉంటుంది.

(b) సగటు పెరుగుతుంది.

(c) సగటు తగ్గుతుంది.

(d) సగటు గురించి ఖచ్చితంగా చెప్పడానికి సమాచారం సరిపోదు.

(iii) కొత్త తరగతి మధ్యగతం (median) ఎత్తు గురించి కింది వాటిలో ఏ ప్రకటనలు సరైనవి? ఎందుకు?

(a) మధ్యగతం అలాగే ఉంటుంది.

(b) మధ్యగతం పెరుగుతుంది.

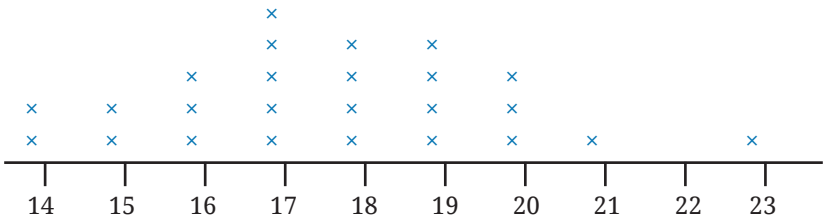
(c) మధ్యగతం తగ్గుతుంది.

(d) మధ్యగతం గురించి ఖచ్చితంగా చెప్పడానికి సమాచారం సరిపోదు.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. కింద ఉన్న డాట్ ప్లాట్ (dot plot) లో చూపిన డేటా యొక్క సగటు 17 అవుతుందా? ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం ఇవ్వడానికి మీరు ఉపయోగించిన పద్ధతిని పంచుకోండి.



8. ఒక సమూహంలోని వ్యక్తుల బరువులు ప్రతి నెలా కొలవబడ్డాయి. గత నెల సగటు బరువు 65.3 కిలోలు మరియు మధ్యగతం బరువు 67 కిలోలు ఈ నెల డేటా ప్రకారం.

గణిత చర్చ

ఈ నెలలో ఒక వ్యక్తి 2 కిలోల బరువు తగ్గారు మరియు ఇద్దరు వ్యక్తులు కిలో బరువు పెరిగారు. ఈ నెలలో సగటు బరువు మరియు మధ్యగతం బరువులో వచ్చిన మార్పు గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

9. కింది పట్టిక 10 సంవత్సరాల కాలంలో కొన్ని రాష్ట్రాల్లో జనవరి నెలలో అయోడైజ్డ్ ఉప్పు రిటైల్ ధరను (₹ లలో) చూపుతుంది. మీ గణనలు మరియు గ్రాఫ్ గీయడం కోసం మీరు విలువలను సమీప పూర్ణాంకానికి సవరించవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సంవత్సరం	అండమాన్ మరియు నికోబార్ దీవులు	అస్సాం	గుజరాత్	మిజోరాం	ఉత్తర ప్రదేశ	పశ్చిమ బెంగాల్
2016	16	6	16.5	20	16.15	9.47
2017	12	12	14.75	20	16.97	11.65
2018	12	12	14.75	22	16.18	11.63
2019	12	12	14.75	22	18.24	11.43
2020	13.88	12	13	20	18.96	11.11
2021	18.22	15	14.45	22	20.63	12.79
2022	18.73	14	14.28	25	21.3	16.14
2023	20.63	12.02	14.54	27.65	25.39	18.43
2024	19.73	13.72	14.8	29.03	26.9	21.66
2025	20.99	12.35	19.2	29.8	24.81	23.99

(i) మీకు ఆసక్తికరంగా

అనిపించిన ఏవైనా 3 రాష్ట్రాల డేటాను ఎంచుకుని, తగిన స్కేల్‌ను ఉపయోగించి లైన్ గ్రాఫ్ ద్వారా ప్రదర్శించండి.

(ii) ఈ డేటాలో మీకు ఆసక్తికరంగా అనిపించిన అంశాలు ఏమిటి? మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి.

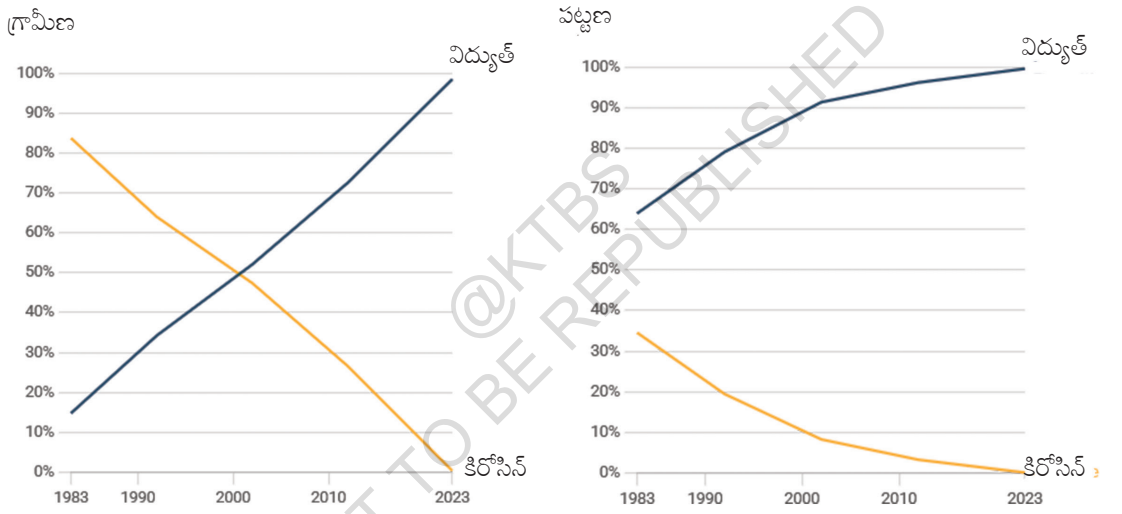
(iii) గుజరాత్ మరియు ఉత్తర ప్రదేశ్‌లో ధరల వైవిధ్యాన్ని పోల్చండి.

(iv) ఏ రాష్ట్రంలో 2016 నుండి 2025 వరకు ధర అత్యధికంగా పెరిగింది?

(v) మీరు ఇంకా దేని గురించి అన్వేషించాలని ఆసక్తిగా ఉన్నారు?

10. కింది గ్రాఫ్‌ను ఉటంకిస్తూ, కింది వాటిలో ఏ ప్రకటనలు చెల్లుబాటు అవతాయి (valid) ఎందుకు?

కాలక్రమేణా గృహ దీపాల కోసం ప్రాథమిక ఇంధన వనరు



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గ్రామీణ (Rural) పట్టణ (Urban)

సంఖ్యలు దీపాల కోసం ఉపయోగించే ప్రాథమిక ఇంధన వనరు కలిగిన గృహాల వాటాను. సూచిస్తాయి. వనరు: నేషనల్ శాంపిల్ సర్వే ఆఫీస్ (NSSO) ద్వారా వివిధ సంవత్సరాల్లో నిర్వహించబడిన గృహ వినియోగదారుల వ్యయ సర్వే (HCES)

(i) 1983లో, గ్రామీణ ప్రాంతాల్లోని మెజారిటీ ప్రజలు కిరోసిన్‌ను ప్రాథమిక లైటింగ్ వనరుగా ఉపయోగించగా, పట్టణ ప్రాంతాల్లోని మెజారిటీ ప్రజలు విద్యుత్తును ఉపయోగించారు.

(ii) గ్రామీణ మరియు పట్టణ ప్రాంతాలు రెండింటిలోనూ కాలక్రమేణా కిరోసిన్ ప్రాథమిక లైటింగ్ వనరుగా వాడటం తగ్గింది.

(iii) 2000 సంవత్సరంలో 10% పట్టణ గృహాలు విద్యుత్తును ప్రాథమిక లైటింగ్ వనరుగా ఉపయోగించాయి.

(iv) 2023లో, ఎక్కడ విద్యుత్ కోతలు లేవు.

11. లెన్ గ్రాఫ్ ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి.

(i) పట్టణ ప్రాంతాల్లోని 10 సంవత్సరాల వయస్సు గల పిల్లలు ప్రతిరోజూ హాబీలు మరియు ఆటల కోసం ఎంత సమయం గడుపుతారు)

(ii) ఏ వయస్సులో గ్రామీణ పిల్లలు హాబీలు మరియు ఆటల కోసం గడిపే సగటు సమయం 1.5 గంటలుగా ఉంటుంది?

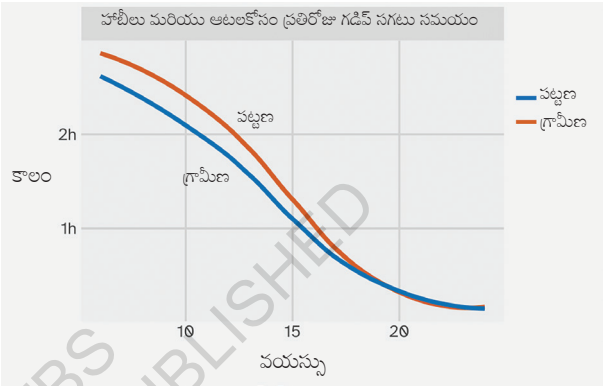
(a) 8 సంవత్సరాలు

(b) 10 సంవత్సరాలు

(c) 12 సంవత్సరాలు

(d) 14 సంవత్సరాలు

(e) 18 సంవత్సరాలు



గ్రాఫ్ వివరాలు: హాబీలు మరియు ఆటల కోసం గడిపే సగటు రోజువారీ సమయం

X–అక్షం: వయస్సు

Y-అక్షం: సమయం

నీలం రంగు పట్టణ

నారింజ రంగు: గ్రామీణ

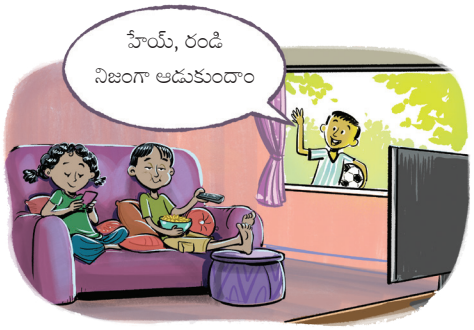
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చుక్కలు మరియు గీతల కథలు (Tales by Dots and Lines)

(iii) కింది ప్రకటనలు సరైనవేనా?

(a) 15 సంవత్సరాల పిల్లలు హాబీలు మరియు ఆటల కోసం గడిపే నగలు రోజువారీ సమయం. 10 సంవత్సరాల పిల్లలు గడిపే సమయానికి రెట్టింపు..

(b) 15 సంవత్సరాల వయస్సు గల గ్రామీణ పిల్లలం దరూ ప్రతిరోజూ హాబీలు మరియు ఆటల కోసం కనీసం 1 గంట సమయం గడుపుతారు.



12. **వ్యక్తిగత ప్రాజెక్ట్ :** వారంలోని వివిధ రోజుల కోసం మీ స్వంత యాక్టివిటీ స్ట్రిప్ కార్యకలాపాల పట్టీని తయారు చేయండి.

(i) మీరు ప్రతిరోజూ క్రమబద్ధమైన సమయాల్లో తింటున్నారా మరియు నిద్రపోతున్నారా? సాధారణంగా మీరు ఎంత సేపు బయట గడుపుతారు?

(ii) ప్రతి కార్యకలాపానికి గడిపిన సగటు సమయాన్ని లెక్కించండి స్ట్రిప్‌ని ఉపయోగించి ఈ సగటు రోజును ప్రదర్శించండి.

(iii) అదేవిధంగా, మీ ఇంట్లోని ఎవరైనా ఒక పెద్దవారి కార్యకలపాలను ట్రాక్. చేయండి. మీ డేటాను వారితో పోల్చండి.



13. చిన్న సమూహ ప్రాజెక్ట్ (Small group project) 3-4 సభ్యులతో ఒక సమూహాన్ని ఏర్పాటు. చేయండి కింది వాటిలో కనీసం ఒకటి చేయండి

(i) మీ కుటుంబ సభ్యులందరి రోజువారీ నిద్ర సమయాన్ని ఒక వారం పాటు ట్రాక్ చేయండి. రోజువారీ నిద్ర సమయంలో రాత్రి నిద్ర కుమకం (naps) మరియు పగటిపూట నిద్ర కూడా ఉండాలి.

(a) దీనిని స్ప్రిప్స్ (పట్టీల) పై సూచించండి.

(b) మీ సమూహ సభ్యులందిరి డేటాను కలిపి ఉంచండి పిల్లలు, పెద్దలు మరియు వృద్ధుల నగలు మరియు మధ్యగత (median) నిద్ర సమయాన్ని లెక్కించండి.

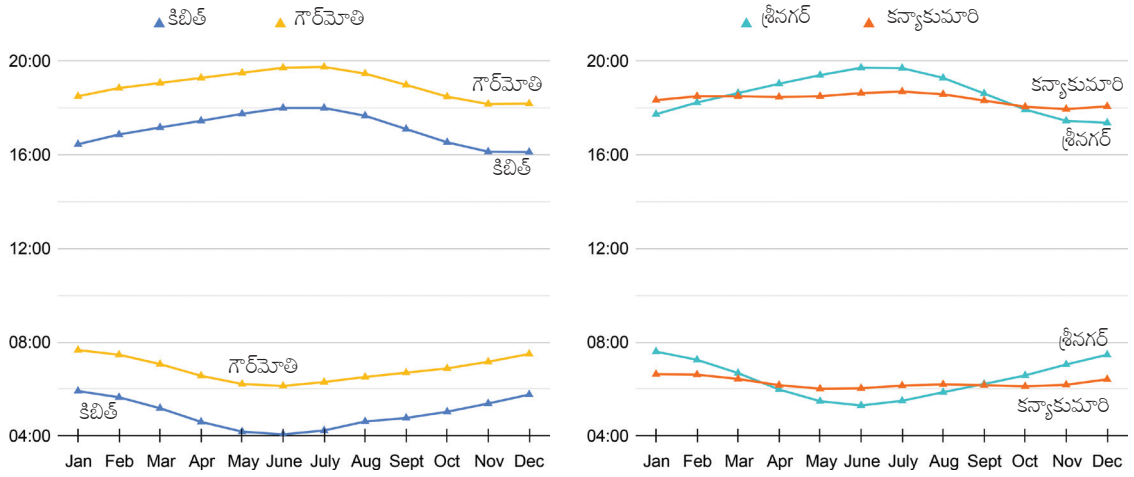
(c) మీ ఫలితాలను మరియు పరిశీలనలను పంచుకోండి.

(ii) పాఠశాలలు ఎప్పుడు మొదలవుతాయి మరియు ఎప్పుడు ముగుస్తాయి? ఒక పనిదినం (weekday) లో మనోజ్ పాఠశాల ఉదయం 9.30 గంటలకు ప్రారంభమై సాయంత్రం 4.30 గంటలకు ముగుస్తుంది. అంటే తరగతి సమయం మరియు విరామ సమయాలతో కలిసి మొత్తం 7 గంటలు. దేశంలోని వివిధ ప్రాంతాలలో ఉన్న 8వ తరగతికి సంబంధించిన వివిధ పాఠశాలల రోజువారీ.

సమయాల సమాచారాన్ని సేకరించండి. మీ పొరుగువారు, బంధువులు, తల్లిదండ్రులు మరియు స్నేహితుల ద్వారా దీనిని కనుగొవచ్చు సేకరించిన డేటాను విశ్లేషించి ప్రదర్శించండి.

14. కింది గ్రాఫ్‌లు భారతదేశంలోని 4 ప్రాంతాలలో ఏడాది పొడవునా సూర్యోదయాన్ని మరియు సూర్యాస్తమయం సమయాలను చూపుతాయి గ్రాఫ్‌లు ఎలా రూపొందించబడ్డాయో గమనించండి ఏ గీతలు ఏ గీతలు సూర్యోదయాన్ని మరియు ఏ గీతలు సూర్యాస్తమయాన్ని సూచిస్తాయో మీరు గుర్తించగలరా?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



గ్రాఫ్ ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి.

(i) జనవరిలో ఏ ప్రాంతంలో సూర్యుడు అందరికంటే ముందుగా ఉదయిస్తాడు? జనవరిలో ఆ ప్రాంతంలో సుమారు సగటి సమయం (day length) ఎంత?

(ii) ఏ ప్రాంతంలో ఏడాది పొడవునా పగటి సమయం అత్యంత ఎక్కువగా ఉంటుంది?

(iii) మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి మీకు ఏది ఆసక్తికరంగా అనిపించింది? మీరు దేని గురించి తెలుసుకోవాలని కుతూహలపడుతున్నారు.

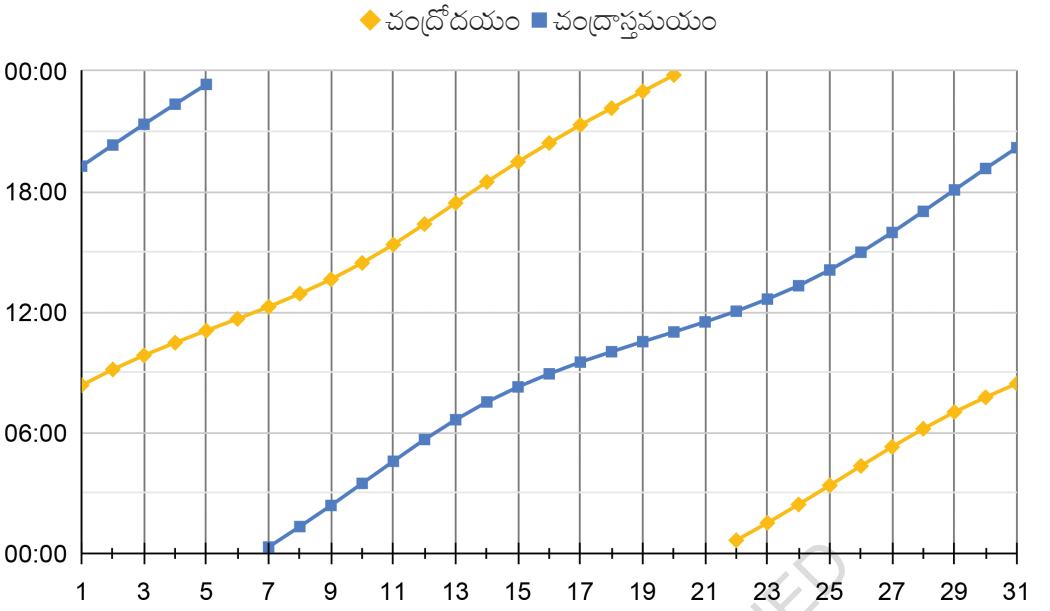
15. సాధారణ సూర్యోదయ మరియు సూర్యాస్తమయ సమయాలు మనందరికీ తెలుసు చంద్రుడు ఎప్పుడు ఉదయిస్తాడో మరియు ఎప్పుడు అస్తమిస్తాడో మీకు తెలుసా? సూర్యుని వలె ఇది కూడా క్రమబద్ధమైన నమూనాను అనుసరిస్తుందా? మనం తెలుసుకుందాం కింది గ్రాఫ్ ఒక నెల కాలంలో చంద్రోదయం (moonrise) మరియు చంద్రాస్తమయం (moonset) సమయాలను చూపుతుంది.

ప్రయత్నించండి

(i) ఈ నెలలో ఏ తేదీలలో అమావాస్య (new moon) మరియు పౌర్ణమి (full moon) వచ్చాయో కనుగొనండి.

(ii) మీరు ఏమి గమనించారు? మీకు ఏమని ఆశ్చర్యం కలుగుతోంది?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



సారాంశం

- గత సంవత్సరం మనం సగటును (mean) 'సమాన వాటాగా చూశాము ఇక్కడ ఒక విలువల సముదాయంలో సగటు నుండి ఎడమ వైపున మరియు కుడి వైపున ఉన్న విలువల దూరాల మొత్తం ఎలా సమానంగా ఉంటుందో తెలుసుకున్నాము.
- సగటు కంటే పెద్దవైన విలువలను చేర్చినప్పుడు, సగటు పెరుగుతుందని మనం చూశాము. అదేవిధంగా సగటు కంటే తక్కువ విలువలను చేర్చినప్పుడు సగటు తగ్గుతుంది. మధ్యగతం విషయంలో కూడా ఇలాంటి మార్పులనే గమనించవచ్చు.
- కాల క్రమేణా జరిగే మార్పులను దృశ్యరూపంలో చూపేందుకు లైన్ గ్రాఫ్‌లను ఉపయోగించవచ్చు.
- డేటాను నిశితంగా పరిశీలించడం వల్ల కొత్త ప్రశ్నలు ఉద్భవిస్తాయని మరియు మరింత లోతుగా అన్వేషించడానికి కొత్త మార్గాలు లభిస్తాయని మనం గ్రహించాం.

NOT TO BE REPUBLISHED © SCERT

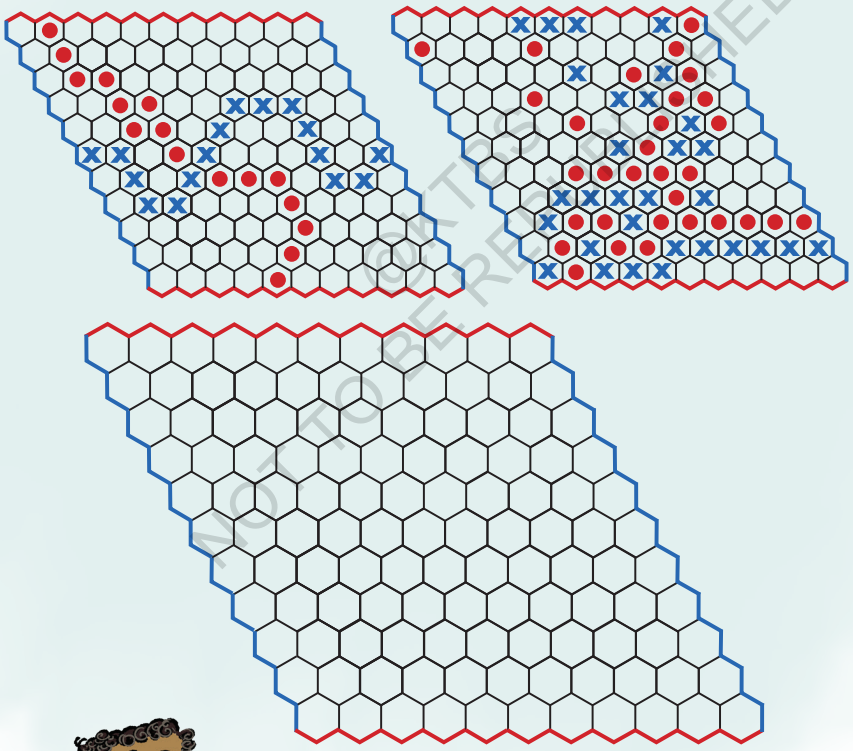


ఇది పజిల్ సమయం

గేమ్ ఆఫ్‌హెక్స్

హెక్స్ అనేది సాధారణంగా 11 × 11 పరిమాణంలో ఉండే షట్కోణ గదులతో నిర్మితమైన రాంబస్ ఆకారపు బోర్డుపై ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు ఆడే ఊహాత్మక ఆట. ప్రతి ఆటగాడికి ఒక రంగు మరియు బోర్డు యొక్క రెండు ఎదురెదురు వైపులా కేటాయింప బడతాయి. ఆటగాళ్ళు వంతుల వారిగా ఖాళీగా ఉన్న ఏ గడిలోనైనా తమరంగు ముక్కలను ఉంచుతారు ఒక సారి ఉంచిన ముక్కలను మళ్ళీ కదపడం లేదా తీసి వేయడం సాధ్య పడదు తమకు కాటాయించిన రెండు వైపులా కదుపుతూ తమ స్వంత రంగు ముక్కలతో ఒక తెగని గొలుసును (unbroken chain) సృష్టించడం ఈ ఆట యొక్క లక్ష్యం ఎవరైతే మొదట ఆటవంటి కనెక్షన్‌ను పూర్తి చేస్తారో వారు ఆటను గెలుస్తారు. కింద ఉన్న చిత్రాలతో మొదటి బోర్డులో నీలం రంగు మరియు రెండవ బోర్డులో ఎరుపు రంగు గెలిచిన రెండు విభిన్న ఆటల తీరును చూడవచ్చు.

ఇక్కడ ఒక ఖాళీ బోర్డు ఇవ్వబడింది మీరు ప్రతి రౌండ్ ఆడటానికి పెన్సిళ్ళను ఉపయోగించవచ్చు. మరియు కొత్త రౌండ్ ఆడటానికి ఆ గుర్తులను తుడిచి వేయవచ్చు.





NOT TO BE REPUBLISHED

13 బీజగణితం ఆట
Algebra Play

U7Z3K2

13.1 బీజగణిత ఆట

గతరెండు సంవత్సరంలుగా మేము వివిధ పరిస్థితులను నమూనా చేయడానికి బీజగణితాన్ని ఉపయోగించాము. బీజగణిత సమీకరణాలను ఎలా పరిష్కరించాలో మరియు తెలియని అక్షరాల సంఖ్యల విలువలను ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకున్నాము. ఇపుడు బీజగణితంతో ఆనందించండి. మనం ట్రిక్స్ మరియు ఫజిల్స్‌ను పరిశీలిస్తాము. మరియు అవి బీజగణితాన్ని ఉపయోగించి. ఎందుకు పని చేస్తాయో వివరిస్తాము. ఇతరులను అలరించడానికి కొత్త ట్రిక్స్ మరియు ఫజిల్స్‌ను ఎలా కనిపెట్టాలో చూద్దాం.

13.2 ఒక సంఖ్య గురించి ఆలోచించండి ఉపాయాల గురించి ఆలోచించండి

7 వ తరగతిలో '' మనం ఇలాంటి ఒక సంఖ్య గురించి ఆలోచించండి'' సంఖ్య ఉపాయాల గురించి నేర్చుకొన్నాము.

1. ఒక సంఖ్య గురించి ఆలోచించండి
2. రెట్టింపు (రెండింతలు)
3. నాలుగు కలపండి
4. రెండుతో భాగించండి
5. మీరు అనుకున్న అసలు సంఖ్యను ఆ సంఖ్యనుండి తీసివేయండి.

? మీకు 2 వస్తుందని నేను అంచనా వేస్తున్నాను. నేను నిజమెనా? వేర్వేరు ప్రారంభ సంఖ్యలతో దీన్ని ప్రయత్నించండి. మీకు ఎల్లప్పుడు ఒకే విలువ 2 వస్తుందా? ఎందుకు?

బీజగణితంద్వారా మనం అలాంటి ఉపాయాలను అర్థం చేసుకోగలము. అని చూశాము.

1) x అనే సంఖ్యను తీసుకొందాం.

2) x ను రెండింతలు చేయగా $2x$

3) 4ను కూడగా $2x + 4$

4) 2తో భాగించగా $x + 2$

5) x సంఖ్యను $x + 2$ చే తీసివేయగా $x + 2 - x = 2$

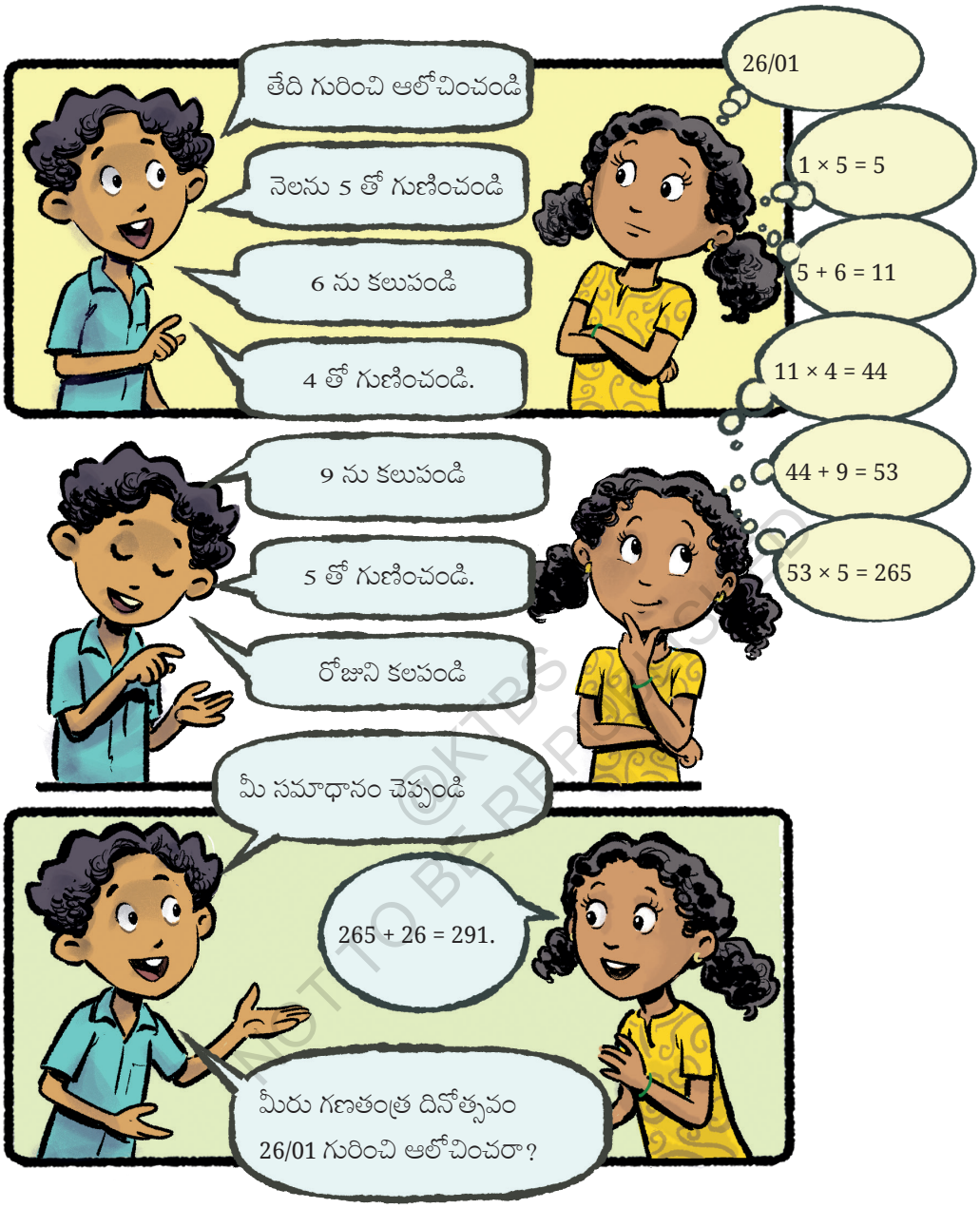
కాబట్టి ప్రారంభ సంఖ్య ఏదైన తుది ఫలితం ఎల్లప్పుడు 2 గానే ఉంటుంది.

? ఈ యొక్క ఆటలో తుది ఫలితం 3గా వచ్చేది ఏ విధంగా చేయగలము? 5 తుది ఫలితం ఏ విధంగా?

? ఎల్లప్పుడూ ఒకే తుదివిలువకు దారి తీసే మరింత క్లిష్టమైన దశలను మీరు రూపొందించగలరా?

ఈ రకమైన వేరే ఉపాయాన్ని ఇప్పుడుచూద్దాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



? ముక్త ఎంచుకొన్న తేదిని శుభం ఎలా కనిపెట్టాడు

- నెల M గా మరియు రోజు D గా ఉండనివ్వండి.
- 5 ను నెల M తో గుణించండి $5M$
- 6 ని కలుపండి $5M + 6$

- 4 తో గుణించండి $20M + 24$
- $20M + 24$ కు 9 ను కలుపండి. $20M + 33$
- 5 తో గుణించండి $100M + 165$
- రోజును కలపండి $100M + 165 + D$

ముక్త సమాధానం 291.

- $291 = 100M + 165 + D$
- $291 - 165 = 100M + D$
- $126 = 100M + D$

D అనేది నెలలోపల ఒక రోజు కాబట్టి అది దాదాపు 31 మరియు 2 అంకెలు మాత్రమే అవసరం కాబట్టి చివరి 2 అంకెలు D మరియు దాని ముందు వచ్చేది M ఈ సందర్భంలో M అనేది 1 మరియు D అనేది 26 అంటే జనవరి 26.

? ముక్త మరొక తేది గురించి ఆలోచిస్తుంది అదే దశలను అనుసరిస్తుంది మరియు 1390 అని సమాధానం ఇస్తుంది. ఈ సారి ముక్త ఏ తేదితో ప్రారంభించింది?

- 1390 నుండి 165 తీసివేస్తే మనకు 1225 వస్తుంది.
- దీని అర్థం ఆమె అనుకున్న తేదీ డిసెంబర్ 25 అని

? తుది సమాధానాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటే తేదిలను కనుగొనండి.

(i) 1269
(ii) 394
(iii) 296



మీరు ఈ ట్రిక్‌ని వారి పుట్టిన రోజును ప్రారంభ తేదీని ఎంచుకోమని చెప్పి ప్రయత్నించవచ్చు.

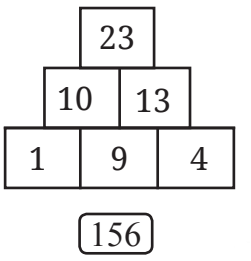
? ఈ ట్రిక్, ట్రిక్ లోని దశలను మార్చి కూడా అసలు లేదని కనుగొనగలరా? తుది సమాధానంనుండి 165 తీసివేయడానికి బదులుగా, మీరు వేరే సంఖ్యను తీసి వేయవలసి ఉంటుంది.

? మీ స్వంత థింక్ ఆఫ్ నంబర్ ట్రిక్‌ను రూపొందించడానికి ప్రయత్నించండి.



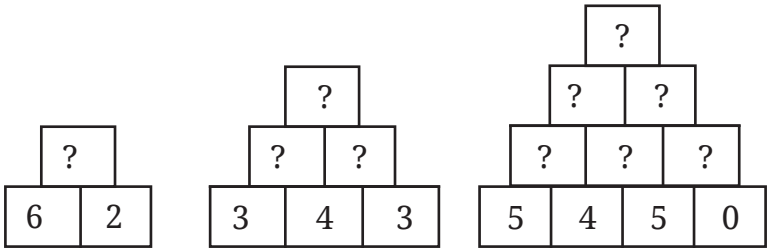
13.3 సంఖ్య పిరమిడ్లు

ఒక సంఖ్యా పిరమిడ్‌లో ప్రతి సంఖ్య దాని క్రిందవున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తం (చిత్రాన్ని చూడండి)

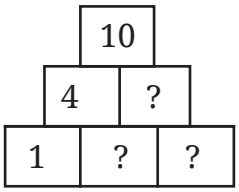


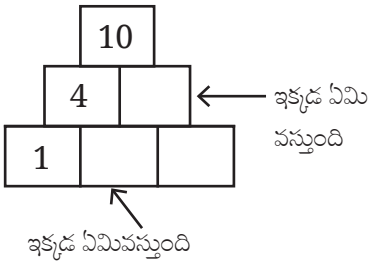
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

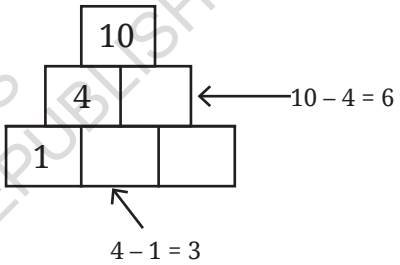
ఈ పిరమిడ్లను పూరించడానికి అదే నియమంను ఉపయోగించండి.

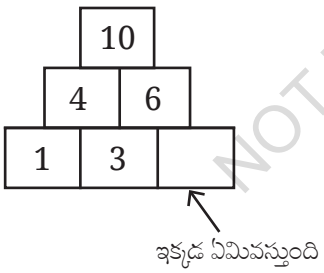


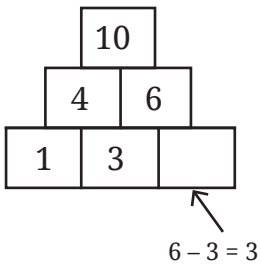
ఈ పిరమిడ్‌ను ఎలా నింపాలి?

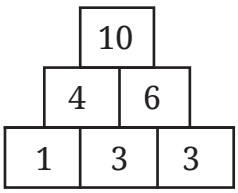






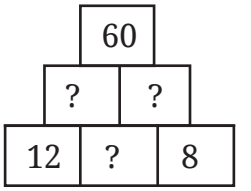




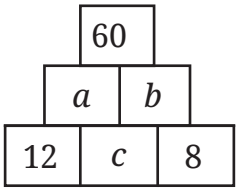


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ పిరమిడ్‌లో సంఖ్యలను పూరించడం గురించి ఏమిటి? మనం ఎక్కడ ప్రారంభించాలి?



ఖాళీ పెట్టెలను అక్షరాల సంఖ్యతో నింపుదాం



పిరమిడ్‌లను నింపేనియ మాలనుండి మనకు ఈ క్రింది సమీకరణం లభిస్తుంది.

- $a + b = 60$
- $12 + c = a$
- $c + 8 = b$

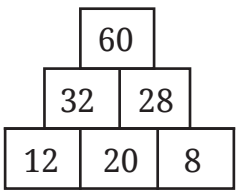
దీని నుండి మనం చూస్తాము

- $(12 + c) + (c + 8) = a + b = 60$

అందుకే

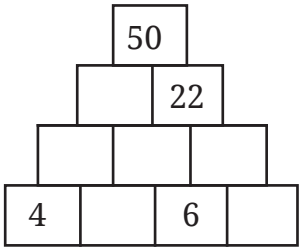
- $20 + 2c = 60$
- $2c = 60 – 20 = 40$
- $c = 20$.

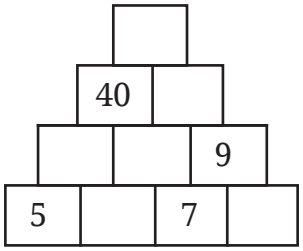
ఒక సారి మనం c ని తెలుసుకొన్న తరువాత a మరియు b లను కనుగొని పిరమిడ్‌ను పూర్తి చేయవచ్చు.

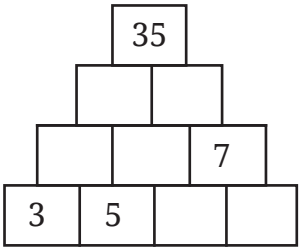


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

క్రింది పిరమిడ్‌లను పూరించండి.

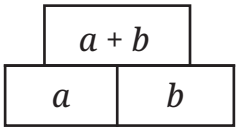






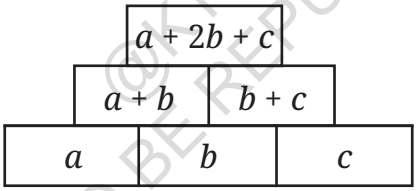
దిగువన వున్న సంఖ్యల పై భాగంలో ఉన్న సంఖ్యకు మధ్య సంబంధం ఏమిటి?

సరళమైన పిరమిడ్ ప్రారంభిద్దాం



మూడు వరుసలు వున్న పిరమిడ్ సంగతేంటి?

క్రింది వరుసకు అక్షరాల సంఖ్యను ఉపయోగించి మనం పై వరుసకు సమాసాన్ని వ్రాయవచ్చు.



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీన్ని కనుగొనండి.

1. మొత్తం పిరమిడ్‌ను నిర్మించకుండా ఈ సందర్భాలతో ప్రతిదానిలోను దిగువ వరుసకు ఇవ్వబడిన పై వరుసలోని సంఖ్యను కనుగొనండి.

4	13	8

7	11	3

10	14	25

2. పిరమిడ్ యొక్క పై వరుసలోని 4 వరుసలకు క్రింది వరసులోని విలువల పరంగా ఒక వ్యక్తీకరణను వ్రాయండి.

3. మొత్తం పిరమిడ్‌ను నిర్మించకుండా ఈ సందర్భాలలో ప్రతిదానిలోను దిగువ వరుసకు ఇవ్వబడిన పై వరుసలోని సంఖ్యను కనుగొనండి.

8	19	21	13

7	18	19	6

9	7	5	11

విరాహంక-ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యల శ్రేడి 1, 2, 3, 5, ... ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఇక్కడ ప్రతిసంఖ్య దాని ముందువున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తం.

4. మొదటి మూడు విరాంకా-ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యలు మూడు వరుసలు వున్న సంఖ్య పిరమిడ్ యొక్క దిగువ వరుసలో వ్రాయబడితే మిగిలిన పిరమిడ్‌ను. పూరించండి. గ్రిడ్‌లో ఏ సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి? పై భాగంలో వున్న సంఖ్య ఏమిటి? అవన్నీ విరాంకా ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యలా?

5. క్రింది సందర్భాలలో పిరమిడ్‌లాని సంఖ్యలు మరియు పై భాగంలో ఉన్న సంఖ్య గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

(i) నాలుగు వరుసల పిరమిడ్ యొక్క దిగువ వరుసలో మొదటి నాలుగు విరాహంకా - ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యలు వ్రాయబడ్డాయి.

(ii) మొదటి 29 విరాంకా ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యలు 29 వరుసల పిరమిడ్ యొక్క దిగువ వరుసలో వ్రాయబడ్డాయి.

6. n వరుస పిరమిడ్ యొక్క దిగువ వరుసలో మొదటి n విరాహంకా ప్లైబోనాక్సి సంఖ్యలు ఉంటే పిరమిడ్‌లోని సంఖ్యల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం? పైభాగంలో ఉన్న సంఖ్య గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

13.4 గ్రిడ్‌తో తమాశా

క్యాలెండర్ మ్యాజిక్

ఒక క్యాలెండర్ నుండి ఒక పేజీ క్రింద ఇవ్వబడింది. మీ స్నేహితుడు ఈ క్యాలెండర్ నుండి 2×2 ఎంచుకొని ఈ గ్రిడ్‌లోని 4 సంఖ్యలను కలిపి మొత్తాన్ని మీకు చెబుతాడు

ఆగస్ట్ 2025						
ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

6	7
13	14

$6 + 7 + 13 + 14 = 40$

ఈ మొత్తాన్ని తెలుసుకోవడం ద్వారా గ్రిడ్‌లోని 4 సంఖ్యలను మనం కనుగొన గలమా? మనం బీజగణితంను ఉపయోగిద్దాం 2×2 గ్రిడ్‌ను పరిగణించండి. a అనేది ఎగువ ఎడమ సంఖ్యను సూచిస్తుందని అనుకొందాం a పరంగా ఇతర సంఖ్యలు ఏమిటి?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

a	$a + 1$
$a + 7$	$a + 8$

నాలుగు సంఖ్యలను కలిపితే వచ్చే మొత్తం $a + (a + 1) + (a + 7) + (a + 8) = 4a + 16$ మొత్తం

? 36 అని మీరు చెప్పారు అనుకుందాం. మీరు గ్రిడ్‌లోని 4 సంఖ్యలను కనుగొనగలరా?

- $4a + 16 = 36$ ను జత చేయండి
- $4a = 20$ (రెండు వైపులనుండి 16 తీసివేయడం)
- $a = 5$ (రెండు వైపులా 4 తో భాగించండి)

ఇప్పుడు మనం a, ను కనుగొన్నాము. మిగిలిన మూడు సంఖ్యలు $a + 1$, $a + 7$ మరియు $a + 8$ అని మన కు తెలుసు కాబట్టి, గ్రిడ్ ఈ క్రింది విధంగా వుండాలి.

5	6
12	13

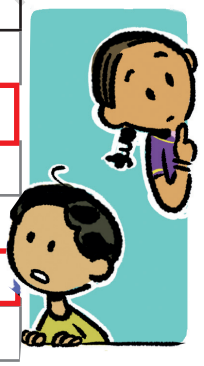
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? మీ స్వంత క్యాలెండర్ ట్రిక్‌ను సృష్టించండి. ఉదాహరణకు వేరే పరిమాణం మరియు ఆకారంను వున్న గ్రిడ్‌ను ఎంచుకొండి..

గణిత చర్చ

ఆగస్ట్ 2025

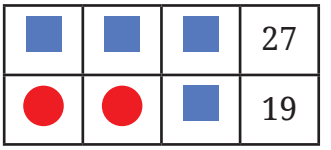
ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

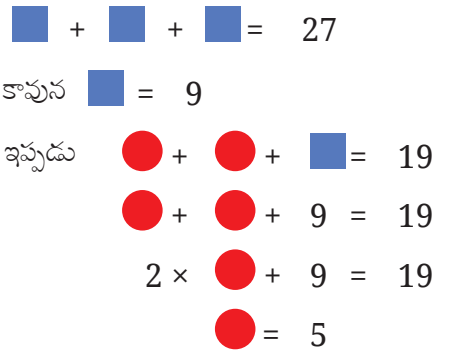


2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	23	24	25	26	27	28	29	30
32	33	34	35	36	37	38	39	40
42	43	44	45	46	47	48	49	50

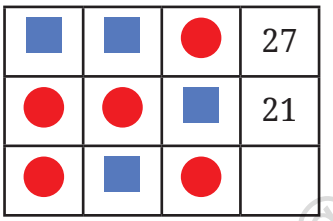
బీజగణిత గ్రిడ్‌లు

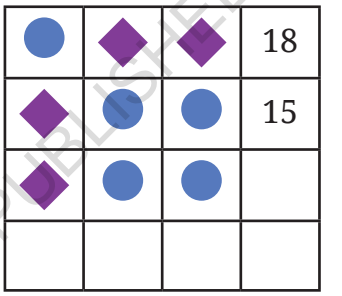
క్రింది గ్రిడ్‌లలో ఆకారాలు, సంఖ్యలను సూచిస్తాయి. ప్రతి వరుసలో చివరి నిలువ వరుస దాని ఎడమ వైపున ఉన్నా నిలువల మొత్తం కనుగొంటాము?





? క్రింది గ్రిడ్‌లలో ఆకారాల నిలువ కనుగొని ఖాళీ చతురస్రాలను పూరించండి.





@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.5 అతి పెద్ద లబ్ధం

? □□ × □, 2, 3, మరియు 5 అంకెలను పూరించడం ప్రతి అంకెను ఒకసారి ఉపయోగించడం సాధ్యమయ్యే అతి పెద్ద లబ్ధం ఏది?

ఈ సమస్యను క్రమపద్ధతిలో పరిశీలిద్దాం. ఈ క్రింది వాటిని పరిష్కరించడానికి ఆరు మార్గాలు ఉన్నాయి. మూడు అంకెలు

- మనం మొదటి పెట్టెను 2, 3 లేదా 5 తో నింపవచ్చు.
- ఈ ఎంపికలలో ప్రతిదానికి మిగిలిన వాటిని పూరించడానికి మనకు 2 మార్గాలు ఉన్నాయి.
- ఆరు ఎంపికలు 23 × 5, 25 × 3, 32 × 5, 35 × 2, 52 × 3, 53 × 2.

? ఈ ఆరు ఎంపికలలో అతి పెద్ద లబ్ధం మనం ఎలా కనుగొనగలం?

గుణకం ఒకేలా ఉన్న చోటమనం వాటిని జతలుగా సమూహ పరచవచ్చు

- 35 × 2 మరియు 53 × 2

- 25×3 మరియు 52×3
- 23×5 మరియు 32×5

ప్రతి జతలో పెద్ద గుణకారం కలిగినది లబ్ధాన్ని ఉత్పత్తి చేస్తుంది. కాబట్టి మనం ఈ మూడు సమూహాలతో పోలికను

- 53×2
- 52×3
- 32×5

52×3 అనేది 53×2, 52×3 కంటే పెద్దది అని స్పష్టంగా ఉంది. కాబట్టి మనం 32×5 మరియు లను మాత్రమే పోల్చాలి వీటని విస్తరిద్దాం.

- $32 \times 5 = (3 \times 10 \times 5) + (2 \times 5)$
- $52 \times 3 = (5 \times 10 \times 3) + (2 \times 3)$

రెండు సమాసాలలో మొదట పదాలు ఒకటే, రెండవ పదం 32×5 పెద్దదని చూపిస్తుంది. అందువల్ల 2, 3 మరియు 5 లతో మనం ఏర్పరచగల ఆరు సాధ్యమైన లబ్ధాలలో ఇది అది పెద్దది.

? ఈ సందర్భంలో మేము అతి పెద్ద అంకెను గుణకంగా ఉపయోగించాము. గుణకారాన్ని ఏర్పరచడానికి మిగిలిన రెండు అంకెలను అవరోహణ క్రమంలో అమర్చారు. ఇది ఎల్లప్పుడూ అలాగే ఉంటుందా? బీజగణితంను ఉపయోగించి తెలుసుకొందాం?

p, q, మరియు r అనేవి మూడు అంకెలు అని అనుకుందాం.

అంటే $p < q < r$ మునుపటిలాగే మనకు ఆరు సాధ్యమైన లబ్ధాలు ఉన్నాయి. వాటిని గుణకంద్వారా సమూహ పరుస్తాము

- $qr \times p, rq \times p$
- $pr \times q, rp \times q$
- $pq \times r; qp \times r$

ప్రతి జతలో పెద్ద పదులు అంకెలతో కూడిన గుణకారం పెద్ద లబ్ధాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. కాబట్టి మనం పోల్చడానికి మూడు లబ్ధాలు ఊన్నాయి.

- $rq \times p$
- $rp \times q$
- $qp \times r$

$q > p$, కాబట్టి $rp \times q$ అనేది $rq \times p$ కంటే పెద్దదని మనం చూడవచ్చు. దీనివలన $qp \times r$ మరియు $rp \times q$ ల మధ్య పోలిక లభిస్తుంది. వీటిని మనం విస్తరిస్తే మనకు లభిస్తుంది.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

- $qp \times r = (10 \times q \times r) + (p \times r)$
- $rp \times q = (10 \times r \times q) + (p \times q)$

మళ్ళీ రెండు సమాసాలలో మొదటి పదం ఒకేలా ఉంటుంది $r > q$ మొదటి సమాసం యొక్క రెండవ పదం పెద్దది కాబట్టి అతి పెద్దలబ్ధం $qp \times r$. గుణాకారాన్ని ఏర్పరచడానికి అతి పెద్ద అంకె గుణకం వుండాలి. మరియు మిగిలిన రెండు అంకెలను తగ్గుతున్న క్రమంలో అమర్చాలి. అనే మామునుపటి పరిశీళనలకు ఇది సరిపోతుంది.

? **దీన్ని కనుగొనండి :**

1. 1, 3, మరియు 7 అంకెలను పూరించండి ☐☐ × ☐ అతి పెద్ద లబ్ధంను సాధ్యం చేయడానికి.
2. అతి పెద్ద లబ్ధం సాధ్యం ☐☐ × ☐ చేయడానికి 3, 5, మరియు 9 అంకెలను పూరించండి.

13.6 డికోడింగ్ డివిజిబిలిటి ట్రిక్స్

ఇప్పుడు శుభంకి గణిత ఉపాయం చూపించండం ముక్తవంతు



© TSBSE TEXTBOOKS NOT TO BE REPUBLISHED

మనం ఇతర 2-అంకెల సంఖ్యలను ఎంచుకొని దశలను అనుసరిస్తే ఎల్లప్పుడు ఉండదు కదా? ముక్త ట్రిక్ ఎలా పని చేస్తుందో అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

రెండంకెల సంఖ్యను తిప్పి కొట్టినప్పుడు ab అని అనుకొందాం కొత్త సంఖ్య ba అవుతుంది అలా అయితే లేదా ఏమిటంటే $b > a$ అప్పుడు $ba > ab$

$$(10b + a) - (10a + b)$$
$$= 10b - b - 10a + a$$
$$= 9b - 9a = 9\,(b - a).$$

ఈ వ్యత్యాసం 9 చే భాగించబడుతుంది.

$a > b$ అయితే ఏమి జరుగు తుందో మీరు చెప్పగలరా?

దీన్ని కనుగొనండి

1. పైన ఇచ్చిన ట్రిక్‌లో మీరు 9 ద్వారా భాగించినప్పుడు. భాగాహారం ఎంత? రెండు సంఖ్యలకు మరియు భాగాహారం మధ్య సంబంధం ఉందా?

2. పైన ఇచ్చిన ట్రిక్‌లో రెండు 2 – అంకెల సంఖ్యల వ్యత్యాసం కనుగొనండి నకు బదులుగా వాటి మొత్తంను కనుగొనండి. ఏమి జరుగుతుంది? ఉదాహరణకు.

   - మనం 31 తో ప్రారంభిస్తాము రివర్స్ చేసిన తర్వాత 13 వస్తుంది. 31 మరియు 13 లను కలిపితే 44 వస్తుంది.
   - మనం 28 తో ప్రారంభిస్తాము రివర్స్ చేసిన తరువాత మనకు 82 వస్తుంది. 28 మరియు 82 లను కలిపితే మనకు 110 వస్తుంది.
   - మనం 12 తో ప్రారంభిస్తాము రివర్స్ చేసిన తరువాత మనకు 21 వస్తుంది 12 మరియు 21 లను కలిపితే మనక 33 వస్తుంది.

   ఈ సంఖ్యలు అన్ని 11 ద్వారా భాగించబడుతాయని గమనించండి. ఇది ఎల్లప్పుడు నిజమేనా? బీజగణితంను ఉపయోగించిమనం ఈ వాదనను మాత్రమే చెప్పగలమా?

3. ఏదైనా 3- అంకెల సంఖ్యను పరిగణించండి abc $(100a + 10b + c)$ అనిచెప్పండి. ఈ అంకెలచుట్టూ ఈ అంకెలను తారుమారు చేయడం ద్వారా ఈ అంకెలనుండి. మరో రెండు 3-అంకెల సంఖ్యలను తయారు చేయండి. దీనివలన bca మరియు cab వస్తాయి. ఇప్పుడు మూడు సంఖ్యలను జోడించండి. బీజగణితంను ఉపయోగించి మొత్తం ఎల్లప్పుడూ 37 ద్వారా భాగించబడుతుందని సమర్థించండి. ఇది ఎల్లప్పుడూ 3 ద్వారా భాగించబడుతుందా? (సూచన 37 కొన్ని గుణిజాలను చూడండి]



4. ఏదైనా 3- అంకెల సంఖ్యను పరిగణించండి abc అనుకొందాం అంకెలను పునారావృత్తం చేయడం ద్వారా దానిని 6-అంకెల సంఖ్యగా చేయండి. అనగా $abcabc$ ఈ సంఖ్యను 7 తో తరువాత 11 తో చివరికి 13 తో భాగించండి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మీకు ఏమిలభిస్తుంది? ఇతర సంఖ్యలతో దీన్ని ప్రయత్నించండి. ఇది ఎందుకు పని చేస్తుందో గుర్తించండి (సూచన : 7, 11 మరియు 13 లను గుణించండి.]

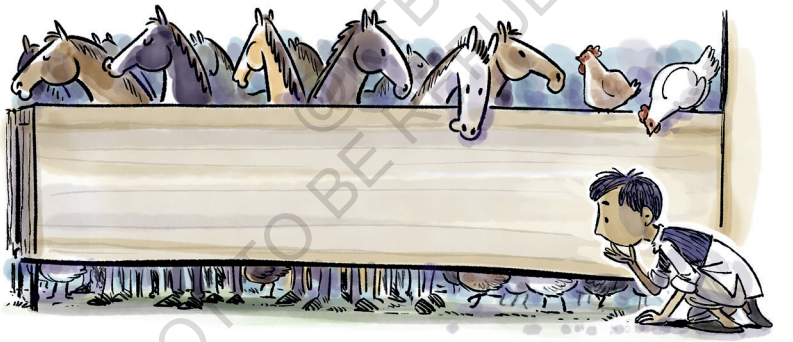
5. మందిరాలు వున్నాయి. ప్రతిదాని ముందు భాగంలో ఒక మాయా చెరువు వుంది. ఈ మాయా చెరువులో ఎవరైనా పువ్వులు ముంచితే పువ్వుల సంఖ్య రెట్టింపు అవుతుంది. ఒక వ్యక్తి వద్ద కొన్ని పువ్వులు వుంటాయి. అతను వాటి అన్నింటిని చెరువులో ముంచి తరువాత కొన్ని పువ్వులను పూజగదిలో ఉంచుతాడు 1 తరువాత అతను మిగిలిన పువ్వులను రెండవ చెరువులో ముంచు కొన్ని పువ్వులను పూజగదిలో ఉంచుతాడు. 2. చివరగా అతను మిగిలిన పువ్వులను మూడవ చెరువులో ముంచి. ఆపై వాటన్నింటిని పూజగదిలో ఉంచుతాడు. 3. అతను ప్రతిపూజ గదిలో సమాన సంఖ్యలో పువ్వులను ఉంచినట్లయితే అతను ఎన్ని పువ్వులతో ప్రారంభించాడు? ప్రతిపూజగదిలో ఎన్ని పువ్వులు ఉంచాడు?

6. ఒక పొలంలో కొన్ని గుర్రాలు, కోళ్ళు వున్నాయి. ఈ జంతువుల యొక్క మొత్తం తలలసంఖ్య 55 మరియు మొత్తం కాళ్ళ సంఖ్య 150 అతను ఆపొలంలో ఎన్ని గుర్రాలు, ఎన్ని కేళ్ళు పెంపకం చేస్తాడు.

గణిత చర్చ

అక్షరాలు – సంఖ్యలు లేకుండా మీరు దీన్ని పరిష్కరించగలరా?

(సూచన : 55 జంతువులు అన్నీ కోళ్ళు అయితే ఎన్ని కాళ్ళు వుంటాయి ఈ సంఖ్యకు మరియు 150 కి మధ్యవున్న వ్యత్యాసం ఉపయోగించి. మీరు గుర్రాలసంఖ్యను కనుగొన గలరా?



© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

7. ఒక తల్లి తన కూతురి వయస్సుకు 5 రెట్లు 6 సంవత్సారాల తర్వాత ఆ తల్లి తన కూతురు వయస్సుకు 3 రెట్లు అవుతుంది. ఇప్పుడు కూతురు వయస్సు ఎంత?

8. గౌరి మరియు నైనా అనే ఇద్దరు స్నేహితులు గోసంరక్షకులు ఒక రోజు వారుతమ ఆవులతో రోడ్ల పై ఒకరినొకరు. దాటుకుంటు. వెళతారు. గౌరి నైనాతో నీదగ్గర నాకంటే రెండింతలు ఆవులు ఉన్నాయి. అని అంటుంది. నైనా ''అది నిజమే'' కానీ నీదగ్గర ఉన్న మూడు ఆవులను. నాకు ఇస్తే మనిద్దరికి ఒకే సంఖ్యలో ఆవులు ఉంటాయి'' అని అంటుంది గౌరి మరియు నైనాకు ఎన్ని ఆవులు ఉన్నాయి?

9. నేను ఒక చిన్న దోసె బండి నడుపుతాను మరియు నాఖర్చులు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

- దోసె బండి అద్దెరోజుకు ₹ 5000

- ఒక దోసె తయారీకి (అన్ని పదార్థాలు మరియు ఇంధనంతోసహా) ₹10 ఖర్చు అవుతుంది.

(i) నేను రోజుకు 100 దోసెలు అమ్మ గలిగితే ₹2000 లాభం రావాలంటే నా దోసె – అమ్మకపుధర ఎంత ఉండాలి?

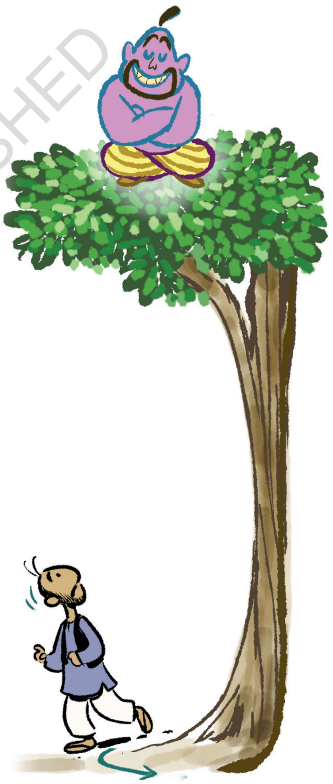
(ii) నా కస్టమర్లు ఒక దోసెకు ₹50 మాత్రమే చెల్లించడానికి సిద్ధంగా ఉంటే ₹2000 లాభం పొందడానికి నేను ఒక రోజులో ఎన్నిదోసెలు అమ్మాలి?

10. క్రింది భిన్నాల క్రమాన్ని అంచనా వేయండి.

$$\frac{1}{3}, \frac{(1+3)}{(5+7)}, \frac{(1+3+5)}{(7+9+11)}$$

మీరు ఏమి గమనించారు? ఇది ఎందుకు జరుగుతుందో వివరించగలరా? (సూచన : మొదట n బేసి మొత్తం గురించి మీకు తెలిసిన వాటిని గుర్తు చేసుకోండి]

11. కరీం మరియు జీనీ



కరీం ఒక చెట్టు క్రింద నిద్రపోతున్నాడు. అతనికి ఒక మాయా దీపం మరియు ఒక జీనీ గురించి కలవచ్చింది.

''ఓ మాస్టర్ నేను మీకు సేవచేయడానికి వచ్చాను'' అని ఒక స్వరం వినిపించింది. అతను మేల్కొన్నాడు మరియు అతని ఆశ్చర్యానికి అదిజీనీ!

''నువ్వు డబ్బు సంపాదించాలను కుంటున్నావా? అని జీనీ అడిగాడు కరీం దిగ్భ్రాంతితో మూగగా తల ఉపాడు. జీనీ ఇంకా ఇలా అన్నాడు. ''అక్కడ మర్రి చెట్టు కనిపిస్తుందా? నువ్వు చేయాల్సిందల్లా దాని చుట్టూ ఒకసారి తిరగడమేని జోబులో ఉన్న డబ్బు రెట్టింపు అవుతుంది.

కరీం వెంటనే చెట్లువైపు వెళ్ళాడు. కానీ జీనీ ఆ పాడు ''ఒక్కక్షణం'' అని జీని అన్నాడు నేను నీకుగొప్ప సంపదలు తెస్తాను. కాబట్టి నువ్వు సంపాదించిన వాటిలో కొంతనాతో పంచుకోవాలి నువ్వు చెట్లు చుట్టూ తిరిగే ప్రతిసారి నాకు 8 నాణేలు ఇవ్వాలి

అది చాలా తక్కువ మొత్తం అని భావించి కరీం వెంటనే అంగీకరించాడు.

అతను చెట్టు చుట్టూ ఒకసారి తిరిగాడు. జీని చెప్పినట్లగానే

అతని జేబులో ఉన్న నాణేల సంఖ్య రెట్టింపు అయ్యింది. జీనీకి మరో 8 నాణేలు ఇచ్చాడు. అతను మూడవసారి చెట్టు చూట్టూతిరిగాడు నాణేల సంఖ్య మళ్ళీ రెట్టింపు అయ్యింది కానీ అతని భయంనకు అతని దగ్గర 8 నాణేలు మాత్రమే మిగిలి పోయాయి. సరిగ్గా జీనీకి అతను బాకీ వున్న నాణేల సంఖ్య!

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఆజీనీ అతను ఎలా మోసం చేసాడో అని కరీం ఆశ్చర్య పోవడం ప్రారంభించగానే జీనీ బిగ్గరగా నవ్వి అదృశ్యమైంది.

(i) కరీం వద్ద మొదట ఎన్ని నాణేలు ఉన్నాయి?

(ii) కరీం తన వద్దవున్న నాణేలను పంచుకోవాలను కుంటే రౌండ్‌కు ఎంత ధరకు ఒప్పందానికి అంగీకరించాడు?



(iii) తనమాయా శక్తుల ద్వారా జీనీ కరీం వద్ద ఉన్న నాణేల సంఖ్యను తెలుసుకుంటాడు. జీనీ కరీం యొక్క అన్నీ నాణేలను పొందేలా ఒక రౌండ్‌కు ఖర్చును ఎలా నిర్ణయించాలి?

సారాంశం

- సంఖ్యా దృశ్యాలను మోడలింగ్ చేయడంలో మరియు అర్థం చేసుకోవడంలో బీజగణితం చాలా ఉపయోగ కరంగా ఉంటుంది. ఈ కారణంగా ఇది గణితం ,సైన్స్ మరియు అంతకు మించి దాదాపు అన్ని రంగాలలో కనిపిస్తుంది.
- గణిత శాస్త్ర ప్రకటనలను సమర్థించడంలో బీజ గణితం ఒక అనివార్య సాధనం.
- ఒక సంఖ్య గురించి ఆలోచించడం 'ఉపాయాలు' సంఖ్య పిరమిడ్‌లు, గ్రిడ్‌లు, కొన్ని ఉత్పత్తులను గరిష్టీకరించడానికి ఇచ్చిన అంకెలను ఉపయోగించి సంఖ్యలను రూపొందించే మార్గాలు, భాగాహార ఉపాయాలు మరియు అనేక ఇతర సమస్యలను విశ్లేషించడానికి మేము బీజగణితాన్ని ప్రయోగించాము.

@ATBS NOT TO BE REPUBLISHED

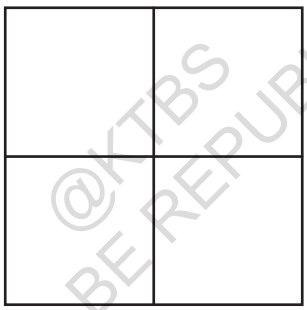
14 వైశాల్యం
Area

A3H9E9

14.1దీర్ఘ చతురస్రం మరియు చతురస్రం

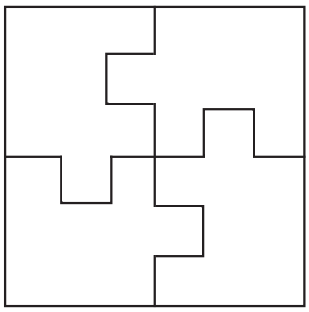
? ఒక చతురస్రంను సమాన వైశాల్యంగల 4 భాగాలుగా ఎన్ని రకాలుగా విభజించవచ్చు?

వాస్తవంనకు ఇలాంటి అనేక మార్గాల గురించి మనం ఆలోచించవచ్చు! ఒక విభజనను పరిగణించండి ఉదాహరణకు—



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మరియు ప్రతి భాగాలను ఈ క్రింది విధంగా మార్చండి.



ప్రతిభాగం వైశాల్యం ఒక అంచు వెంబడి కుదించబడి మరొక అంచు వెంబడి విస్తరిస్తుంది కుదింపు మరియు విస్తరణ రెండు ఒకే పరిమాణంలో ఉంటే అప్పుడు 4 భాగాలుగా ఇప్పటికి ఒకే వైశాల్యంను కలిగి వుంటాయి!

? ఒక చతురస్రాన్ని సమాన వైశాల్యంగల 4 భాగాలుగా విభజించడానికి వివిధ సృజనాత్మక మార్గాల గురించి ఆలోచించడానికి ప్రయత్నించండి.

గణిత చర్చ

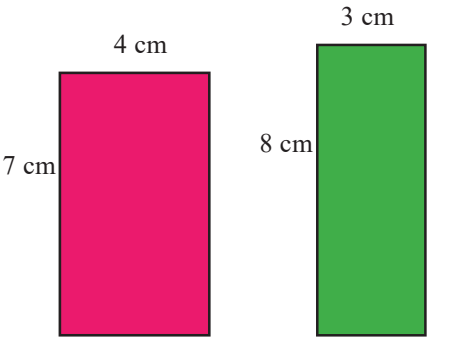
మీరు రంగోళి కళారూపాన్ని చూసి ఉండవచ్చు దీనిలో వివిధ ఆకారాలలో ప్రాంతాలను రంగోళి పొడిని ఉపయోగించి అందంగా రంగులు వేస్తారు.



© KSSIA NOT TO BE REPUBLISHED

? రంగు వేయడం సమానంగా జరిగితే ఈ దీర్ఘచతురస్రాలలో దేనికి రంగు వేయడానికి ఎక్కువ రంగోళి పొడి అవసరం?

దీనికోసం మనం అతివ్యాప్తి చెందిన చదరపు మీటర్‌లలో (cm) సంఖ్యను లెక్కించాలి. (ఈ సందర్భంలో సెం.మీ. లో భుజం పొడవుగల చతురస్రాలు)



వీటిని లెక్కించి ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రంలో సర్దడం ద్వారా మీరు సమాధానం పొందవచ్చు.

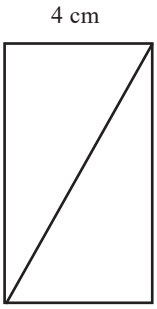
స్పష్టంగా 7 సెం.మీ. లు మరియు 4 సెం.మీ. లు భుజాలు పొడవుగల దీర్ఘ చతురస్రం $7 \times 4 = 28$ చదరపు సెం. మీ. లు మరియు 8 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ.ల భుజాల పొడవుగల దీర్ఘ చతురస్రం $8 \times 3 = 24$ చదరపు సెం.మీ. ఉంటుంది.

ఇచ్చిన వైశాల్యంనకు సమానమైన చదరపు సెంటిమీటర్లను (ఇది ఒక భిన్నం కూడా కావచ్చు) మనం ఒక ప్రాతం యొక్క వైశాల్యంను కొలుస్తామని గుర్తించుకోండి. ఒక దీర్ఘ చతురస్రంలో యూనిట్ సంఖ్య దాని పొడవు మరియు వెడల్పులు లబ్ధం నకు సమానం మనం చూశాము.

దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

మునుపటి సమస్యలో చూసినట్లుగా దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యాన్ని సాధారణంగా 28 sq. cm మరియు 24 sq. cm, లేదా 28 cm^2 మరియు 24 cm^2గా వ్రాస్తారు.

? ఈ దీర్ఘచతురస్రంలోని ప్రతి త్రిభుజం వైశాల్యం ఎంత?



ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణం దానికి రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది మనం చూశాము కాబట్టి ప్రతి త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యంలో సగం ఉంటుంది.

యూనిట్ స్కేల్ పరంగా సగం వైశాల్యం యూనిట్ స్కేలల సంఖ్యలో సరిగ్గా సగంనింపుతుంది.

కాబట్టి ప్రతి త్రిభుజం వైశాల్యం $\frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14\ cm^2$.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

చుట్టు కొలత వైశాల్యాన్ని కొలవడం ఎందుకు సాధ్యకాదు?

? వైశాల్యానికి కొలతలు కేటాయించడానికి మనం యూనిట్ చతురస్రాల సంఖ్యను ఎందుకు లెక్కిస్తాము? ఒక ప్రదేశం యొక్క చుట్టు కొలతను అన్ని భుజాల పొడవును దాని వైశాల్యానికి కొలమానంగా ఉపయోగించలేక పోయామా?

? రెండు ప్రదేశాలకు ఒకే చుట్టు కొలత ఉంటే వాటికి ఒకే వైశాల్యం ఉండును అని మనం నిర్ధారించ లేరా? లేదా ఒక ప్రదేశం మరొక ప్రదేశం కంటే పెద్ద చుట్టు కొలతను కలిగివుంటే దాని వైశాల్యం కూడా ఎక్కువగా ఉందని మనం నిర్ధారించ లేమా?

ఒక ప్రదేశం యొక్క చుట్టు కొలత దాని వైశాల్యాన్ని సూచించదు కారణం ఏమిటంటే ప్రదేశాలు ఒకే చుట్టు కొలత ఉండవచ్చు కానీ వేర్వేరు ప్రాంతాలను కలిగివుంటాయి దీనికి విరుద్ధంగా కూడా మనం రెండు ప్రాంతాలను కూడా కనుగొవచ్చు ఉపరితలం 1 మరియు ఉపరితలం 2 అంటే

ఉపరితలం 1 చుట్టు కొలత > ఉపరితలం 2 చుట్టు కొలత

కానీ ఉపరితలం 1 యొక్క వైశాల్యం < ఉపరితలం 2 యొక్క వైశాల్యం

అటువంటి ఉపరితలాలకు ఉదాహరణగా ఉన్నరెండు దీర్ఘ చతురస్రాలను కనుగొనండి అవసరమైనతే దీని కోసం గ్రిడ్ పేపర్‌ను (పుస్తకం చివర ఇవ్వబడింది) ఉపయోగించండి.

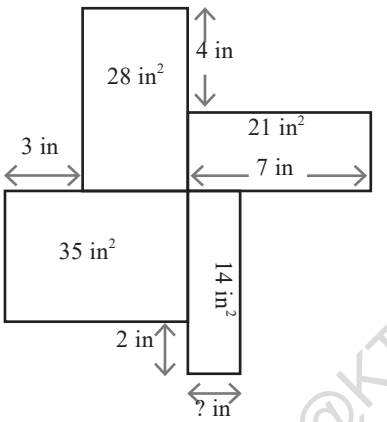
పెద్ద చుట్టు కొంత ఉన్న ఉపరితలం చిన్న వైశాల్యాన్ని కలిగి వున్న రెండు ఇతర ఆకార ఉపరితలం లను కూడా ఉదాహరణగా ఇవ్వండి! ఈ లక్షణంను మీ ఉదాహరణలో దృశ్య మానంగా స్పష్టంగా ఉండాలి.

గణిత చర్చ

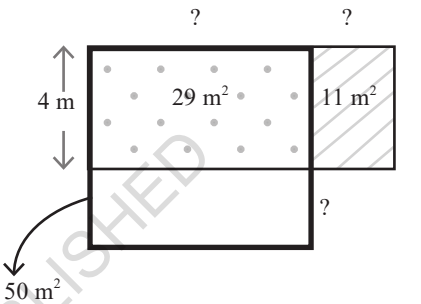
దీన్ని కనుగొనండి.

1. ప్రక్కనే ఉన్న లోపించిన భుజాల పొడవులను గుర్తించండి.

(i)

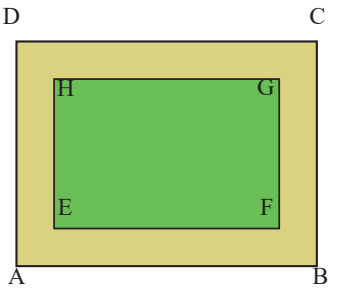


(ii)



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ఈ బొమ్మ EFGH అనే దీర్ఘచతురస్రాకార ఉద్యానవనం చుట్టూ వేయబడిన మార్గాన్ని (నీడ ఉన్న భాగం) చూపిస్తుంది.



(i) మార్గం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి మీకు ఏ కొలతలు అవసరం కావలసిన పొడవును మీరు గుర్తించిన తర్వాత ఈ కొలతలకు మీకు నచ్చిన సాధ్యమైన విలువలకు కేటాయించి మార్గం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి వైశాల్యానికి ఒక సూత్రాన్ని ఇవ్వండి.

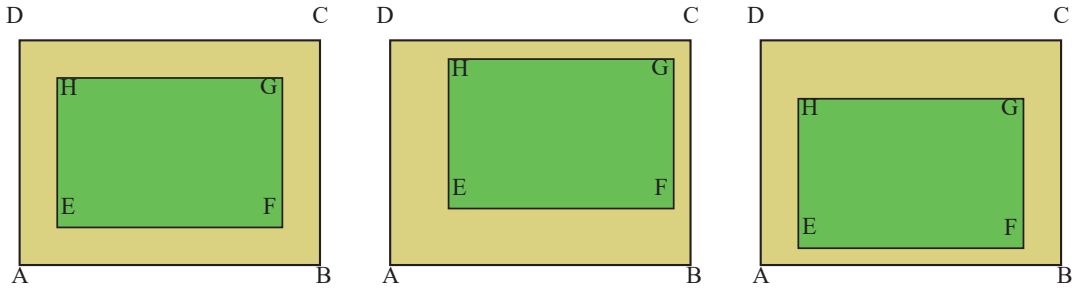
ఒక సూత్రానికి ఉదాహరణ — దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు.

[సూచన : EFGH, మార్గం మరియు ABCD ప్రదేశాల మధ్య సంబంధం ఉంది.]

(ii) ప్రతి వైపు మార్గం యొక్క ప్రక్క భుజం పొడవు, వెడల్పు ఇవ్వబడితే మీరు దాని వైశాల్యాన్ని కనుగొన గలరా? కనుగొనలేకపోతే మీకు ఇంకా ఏకొలతలు అవసరం? ఈ కొలతలకు మీకు నచ్చిన విలువలకు కేటాయించి మార్గం యొక్కవైశాలాన్ని కనుగొనండి. ఈ కొలతలను ఉపయోగించి వైశాల్యానికి ఒక సూత్రాన్ని ఇవ్వండి.

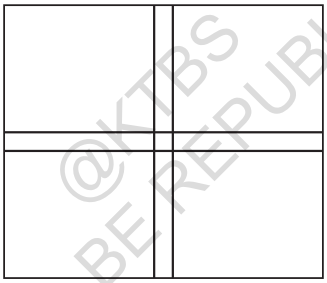
[సూచన : మార్గాన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలుగా విభజించించండి.]

(iii) చూపిన విధంగా EFGH దీర్ఘ చతురస్రాకార ఉద్యానవనం EFGH ని లోపల ఉంచడంవలన మార్గం యొక్క వైశాల్యం మారు తుందా?



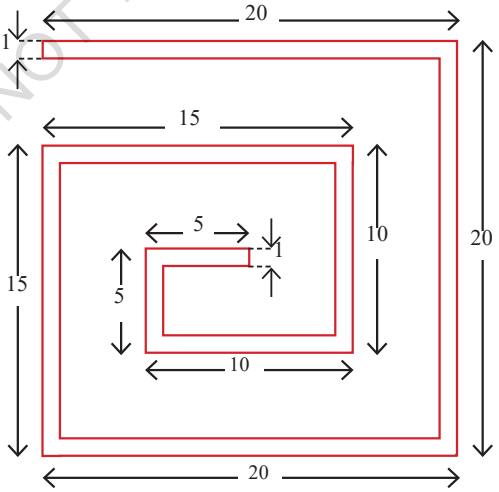
3. పటంలో 14m మరియు 12m, వైపులా ఉన్న ఒక ప్లాట్‌ను చూపిస్తుంది. మరియు దానికి తిర్యక్‌మార్గంకూడా ఉందితిర్యక్‌మార్గంవైశాల్యాన్నికనుగొనడానికిమీకుఇంకాఏకొలతలు అవసరం ? మీరు కొలవవలసిన పొడవులను గుర్తించిన తరువాత మీకు నచ్చిన కొన్ని సాధ్యమైన విలువలను కేటాయించి మార్గం వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. మీరు ఎంచుకొన్న కొలతల ఆధారంగా వైశాల్యానికి ఒక సూత్రంను ఇవ్వండి.



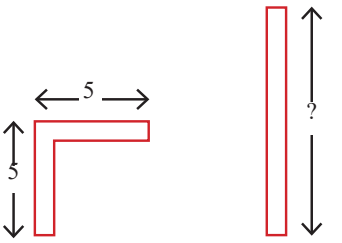


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. చిత్రంలో చూసిన సర్పిలాకార గొట్టం వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి అంతటా గొట్టం ఒకే వెడల్పు కలిగివుంటుంది.

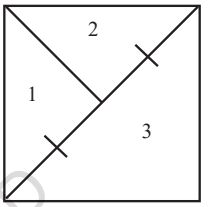


[సూచన: వైశ్యాల్యం కనుగొనడానికి వివిధ మార్గాలు వున్నాయి. ఇక్కడ ఒక పద్ధతి]

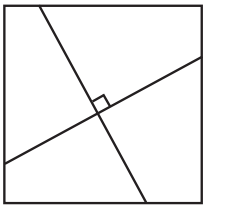


ఎడమ వైపున వంగిన గొట్టం యొక్క వైశాల్యంనకు సమానమైన పొడవు కలిగివుండటానికి నిటారు గొట్టం యొక్క పొడవు ఎంత ఉండాలి?

5. ఈ చిత్రంలో చతురస్రం యొక్క భుజాల పొడవు రెట్టింపు అయితే ఉపరితలం1, 2 మరియు 3 ల వైశాల్యంలో పెరుగుదల ఎంత? కారణాలు ఇవ్వండి.



6. చిత్రంలో చూపిన విధంగా చతురస్రంలోపల రెండు లంబ రేఖలను గీసి ఒక చతురస్రంను 4 భాగాలుగా విభజించండి



లోపల రంధ్రం ఉండేలా ఒక పెద్ద చతురస్రం వచ్చేలా ముక్కలను తిరిగి అమర్చండి .

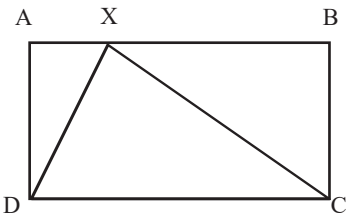
కార్డ్‌బోర్డ్ మందపాటి (చార్ట్ పేపర్) లేదా అలాంటి పదార్థాలను ఉపయోగిం చిచతురస్రాన్ని నిర్మించడం ద్వారా మీరు కార్యాచరణంను ప్రయత్నించవచ్చు.

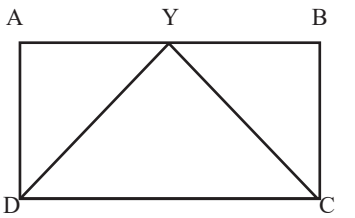
@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

త్రిభుజాలు

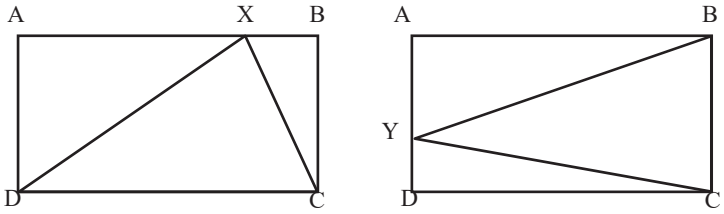
గణిత రచ్చ

? ఇచ్చిన చిత్రంలో ఏ త్రిభుజం ఎక్కువ వైశాల్యంను కలిగి వుటుంది : ΔXDC లేదా ΔYDC, రెండు దీర్ఘ చతురస్రాలు ఒకేలా ఉంటే?



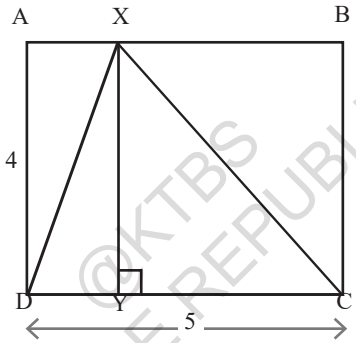


? ఇచ్చిన చిత్రంలో రెండు దీర్ఘ చతురస్రాలు ఒకేలా ఉంటే ఏ త్రిభుజం ఎక్కువ వైశాల్యంను కలిగివుంటుంది. ΔXDC లేదా ΔYBC,



ప్రతి సందర్భంలోను X మరియు Y, నుండి ఎత్తులను తీసివేయడం. ప్రతి త్రిభుజం ABCD దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క సగం వైశాల్యం ను కలిగి వుంది అని అర్థమవుతుంది.

? Δ XDC వైశాల్యంను కనుగొనండి.



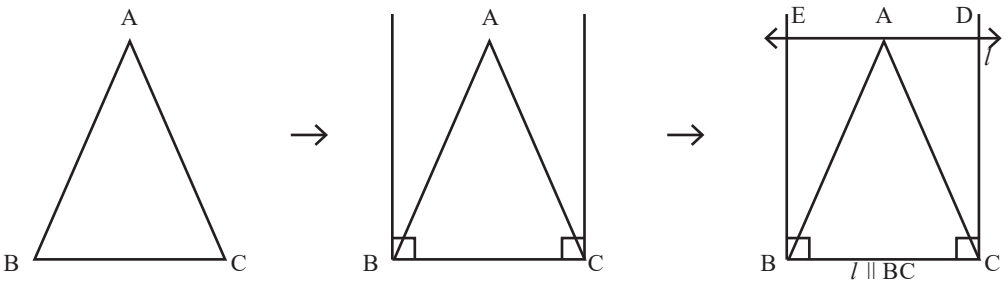
చిత్రం 7.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

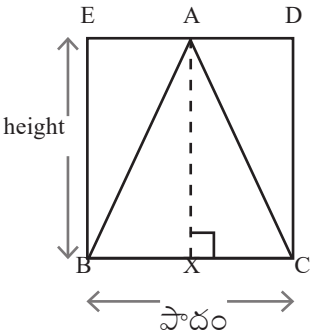
? ఒక త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనడానికి మనకు ఏకొలతలు అవసరం?

చిత్రం 14.1 లో ఉన్నట్లుగా బయట దీర్ఘచతురస్రం యొక్క భుజాలుల పొడవులు మనకు అవసరం

? ఇచ్చిన త్రిభుజంనుండి బయట దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఎలా పొందుతాము?



BCDE ఒక దీర్ఘచతురస్రం (ఎలా?) దాని భుజాలకొలతలను ఎత్తు మరియు పాదంగా తీసుకొందాం

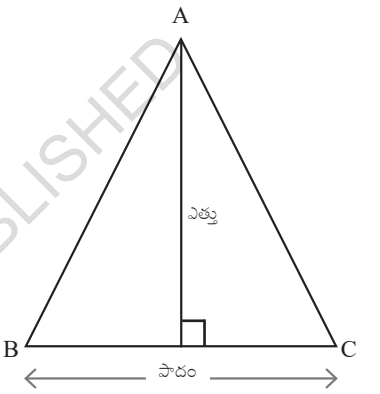


అప్పుడు

$$\text{వైశాల్యం } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times \text{పాదం} \times \text{ఎత్తు}$$

BXAE ఒక దీర్ఘచతురస్రం కాబట్టి (ఎలా?) దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ఎత్తు త్రిభుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానంగా ఉంటుంది.

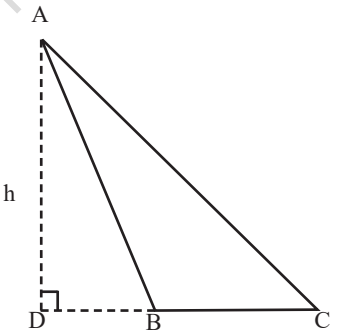
కాబట్టి ఒక త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు మరియు పాదం తెలిస్తే మనం దాని వైశాల్యాన్ని కనుగొనవచ్చు



$$\text{త్రిభుజం వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{పాదం} \times \text{ఎత్తు}.$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? BC ని పాదం చేసుకొని దీర్ఘ చతురస్రాన్ని గీయలేని త్రిభుజం రకానికి ఈ సూత్రం వర్తిస్తుందా?

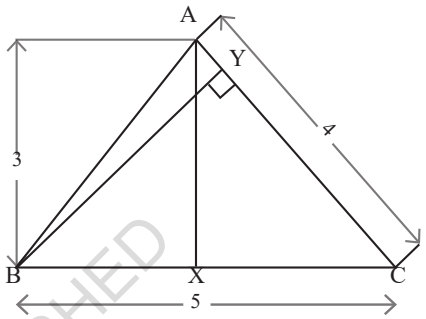


దీన్ని చూడటానికి ఇక్కడ ఒక మార్గం ఉంది ΔABC వైశాల్యం ΔADC మరియు ΔADB, వైశ్యాల్యంల వ్యత్యాసంవుంది. వీటిలో ప్రతి ఒక్కటి చిత్రం 14.1 లో ఉన్నట్లుగా దీర్ఘ చతురస్రంలో జత చేయడింది.

$$\text{వైశాల్యం } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times h \times DC - \frac{1}{2} \times h \times DB$$
$$= \frac{1}{2} \times h \times (DC - DB)$$
$$= \frac{1}{2} \times h \times BC$$

కావున అన్ని రకాలైన త్రిభుజాల వైశాల్యాలకు ఈ సూత్రం వర్తిస్తుంది.

వైశాల్యం సూత్రంను అనుసరించి కొన్ని అన్వయాలు



? BY ను కనుగొనండి.

త్రిభుజం వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ఉపయోగించి BYను కనుగొనవచ్చు

వైశాల్యం (ΔABC) అంటే ఏమిటి?

వైశాల్యం $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times AX \times BC = \frac{15}{2}$ చ యూనిట్లు.

త్రిభుజ వైశాల్యంను ఈ విధంగా కూడ వ్రాయవచ్చు

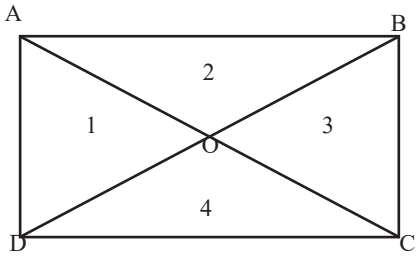
$$\text{వైశాల్యం } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BY \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times BY = 2\,BY.$$

కావున

$$2\,BY = \frac{15}{2}.$$

కావున $BY = \frac{15}{4} = 3.75$ యూనిట్లు ద్వారా

? ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలను (చిత్రంలో 1 to 4 in ప్రదేశాలు) గీసినప్పుడు లభించే 4 త్రిభుజాలు సమాన వైశాల్యాలు కావా?

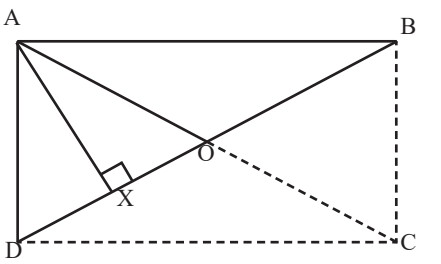


స్పష్టంగా 1 – 4 త్రిభుజాలు నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలు కావు.

వాటి వైశాల్యాలను పోల్చడానికి 1 మరియు 2 అనుకొందాం ఏవైన రెండూ ప్రక్కనే ఉన్న త్రిభుజాలను పరిశీలిద్దాం .

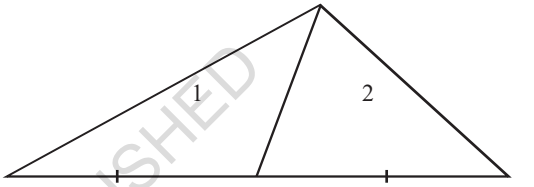
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం దాని ఎత్తు మరియు ఆధారంపై ఆధారపడివుంటుంది. కాబట్టి ప్రతి త్రిభుజంలో తగిన ఎత్తు పాదం జతలను పరిశీద్దాం OD మరియు OB లను పాదాలుగా తీసుకొంటే రెండు త్రిభుజాలు ఒకే ఎత్తున ు కలిగియున్నాయని మనం చూస్తాము.



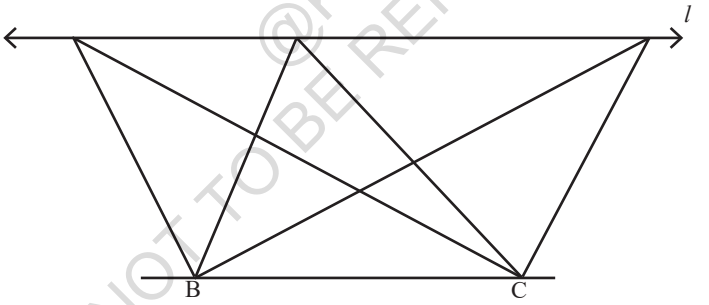
దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఒక దాని నొకటి ఖం డించు కొంటాయి కాబట్టి మనకు OB = OD, కూడా ఉంది కాబట్టి 1 మరియు 2 త్రిభుజాలు సమాన ప్రదేశాల కలిగివుంటాయి ఈ విధంగా వాదించడం ద్వారా నాలుగు త్రిభుజాలు సమాన ప్రదేశాలను కలిగి యున్నాయని మనం చూపించవచ్చు.

ఒక త్రిభుజంలో ఒక శీర్షాన్ని దాని ఎదురుగా ఉన్న మధ్య బిందువుకు కలిపే రేఖ ఆత్రిభుజాలను సమాన వైశాల్యం కలగిన రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.



త్రిభుజం 1 మరియు 2 సమాన వైశాల్యాలు కలిగి ఉంటాయి ఎందుకంటే వాటి ఎత్తు మరియు ఆధారం ఒకే కొలతలను కలిగివుంటాయి.

ఉమ్మడి ఆధారంతో సమాంతర రేఖల మధ్య త్రిభుజాలు



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? రేఖ l || BC. BC, ని పాదంగా కలిగివున్న మరియు వాటి మూడవ శీర్షం పై ఎక్కడైనా వున్న వివిధ త్రిభుజాలను పరిగణించండి.

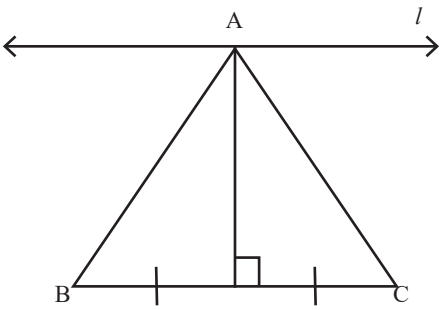
(i) ఈ త్రిభుజాలలో ఏది గరిష్ఠ వైశాల్యంను కలిగి ఉంది మరియు ఏది కనిష్ఠ వైశాల్యంన ు కలిగి ఉంది?

(ii) ఈ త్రిభుజాలలో ఏది గరిష్ఠ చుట్టు కొలతను కలిగివుంటుందిమరియు ఏది కనిష్ఠ చుట్టు కొలతను కలిగి ఉంది?

ఇక్కడ కనీస చుట్టు కొలతతో త్రిభుజంను ఎలాకనుగొనాలో మాత్రమే చూపిస్తాము మరియు ఇతర ప్రశ్నలను వ్యాయామాలుగా వదిల వేస్తాము.

BC యొక్క లంబ ద్వి భాగాన్ని నిర్మించడం ద్వారా కనీస చుట్టు కొలత కలిగిన త్రిభుజంను పొందవచ్చని అంతర్ దృష్టి సూచించవచ్చు.

కానీ ఈ త్రిభుజం అన్ని త్రిభుజాలలో అతి తక్కువ చుట్టు కొలతను కలిగి ఉందని మనం ఎలా సమర్థించగలం?.



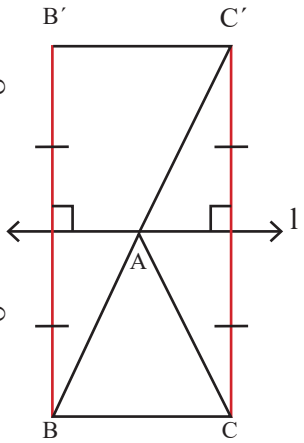
ముందుగా ఈ త్రిభుజాలన్నింటలోనూ BC ఒక ఉమ్మడి వైపు అని గమనించండి కాబట్టి మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకొంటే సరిపోతుంది.

రేఖను అద్దంలా ఊహించుకొందాం అప్పుడు దాని క్రిందవున్న అన్ని బిందువులు మరియు రేఖల ప్రతిబింబం మనకు లభిస్తుంది.

సమతల దర్పణం యొక్క లక్షణాలను అధ్యయనం చేస్తున్నప్పుడు అద్దం వెనుక ఉన్న ప్రతిబింబం దూరం అద్దం ముందు ఉన్న వస్తువు ప్రతిబింబాన్ని స్పష్టించే దూరానికి సమాన మని మేము ప్రయోగత్మకంగాగమనించాము 1 రేఖ క్రింద ఉన్న బిందువుల ప్రతి బింబాలను గుర్తించడానికి ఈ నియమాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

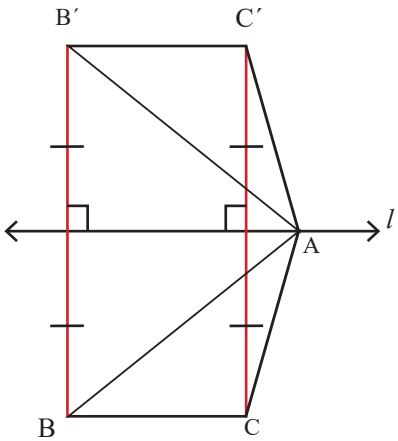
? AB పొడవులు మరియు దాని ప్రతిబింబం AB' గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?



అయితే $\Delta AXB \cong \Delta AXB'$, $AB = AB'$.

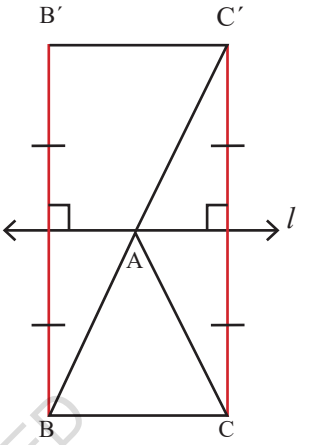
కావున $AC = AC'$.

కాబట్టి $B \rightarrow A \rightarrow C$ మార్గం యొక్క పొడవు $B \rightarrow A \rightarrow C'$ మార్గం యొక్క పొడవుకు సమానం



A బిందువు l వరుసలో ఎక్కడ ఉన్నా ఇది నిజం.

కాబట్టి B→A→C అనే అతి చిన్న మార్గాన్ని ఇచ్చే బిందువు A ని కనుగొనడం అంటే B →A → C′ అనే అతి చిన్న మార్గాన్ని ఇచ్చే బిందువు A ని కనుగొనడం లాంటిదే కానీ తరువాత సమస్యకు పరిష్కారం స్పష్టంగా ఉంటుంది.



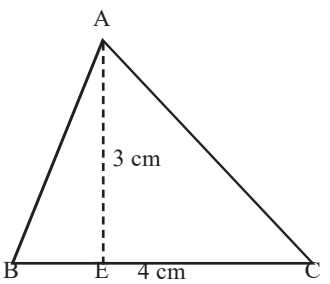
BC′, సరళ రేఖ పై A ని ఎంచుకొండి ఎందుకంటే BC′ అనేది B నుండి C′ కి సాధ్యమైనం తక్కువ మార్గం

కాబట్టి ఈ త్రిభుజం ΔABC కనిష్టం చుట్టు కొలతను కలిగివుంటుంది.

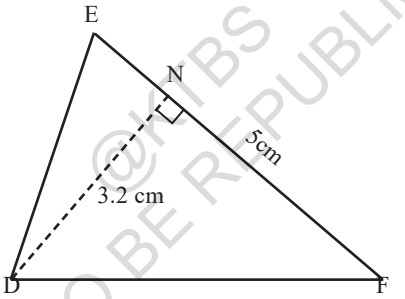
? ABC అనేది లంబద్విఖండం మీద ఉందో లేదో విశ్లేషించండి.

? దీన్ని కనుగొనండి

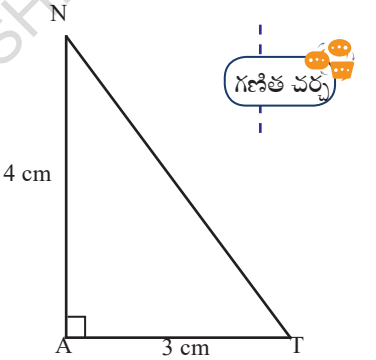
1. క్రింది త్రిభుజాల వైశాల్యంలను కనుగొనండి.



(i)



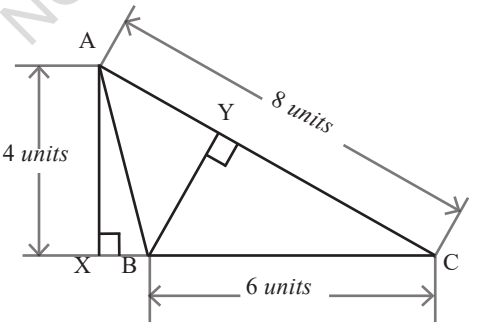
(ii)



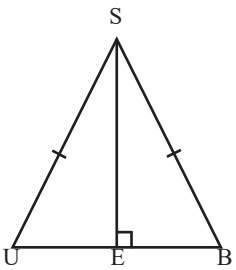
(iii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. BY ఎత్తు మరియు పొడవును కనుగొనండి.



3. ΔSUB, వైశాల్యంను కనుగొనండి అది సమభుజం SE, UB, లంబంగా మరియు ΔSEB వైశాల్యం 24 sq. చదరపు యూనిట్లు.



బలిపీఠాల నిర్మాణాల గురించి విచరించే పురాతన భారతీయ రేఖా గణిత గ్రంథాలు అయిన సులభ సూత్రాలలో వైశాల్యం అనే అంశం పై మనం అనేక ఆసక్తికరమైన సమస్యలను కనుకొనవచ్చు బలిపీఠాలు నిర్మించినప్పుడు వాటికి ఖచ్చితమైన సూచించబడిన ఆకారం మరియు వైశాల్యం ఉండాలి ఇది ఒక నిరిష్ట ఆకారంను అదే వైశాల్యం గల మరొక ఆకారంనకు మార్చాల్సిన సమస్యలకు దారితీస్తుంది. సులభ సూత్రాలు అటువంటి అనేక సమస్యలకు పరిష్కారంలను అందిస్తాయి.

ఇటువంటి సమస్యలు యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్‌లో కూడా ఎక్కువ తలెత్తుతాయి మరియు పరిష్కరించ బడుతాయి ఈ రకమైన రెండు సమస్యలు ఇక్కడ ఉన్నాయి

4. [సులభ – సూత్రాలు] ఒ దీర్ఘ చతురస్రాన్ని సమాన వైశాల్యంలుగల త్రిభుజంగా మార్చాడానికి ఒక పద్ధతిని ఇవ్వండి

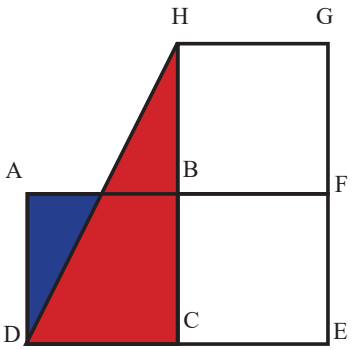
5. [సులభ – సూత్రాలు] ఒక త్రిభుజం సమాన వైశాల్యంగల దీర్ఘచతురస్రంగా మార్చడానికి ఒక పద్ధతిని ఇవ్వండి.

6. ABCD, BCEF, మరియు BFGH లు ఒకే లాంటి చతురస్రాలు.

(i) ఎరుపు ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం 49 చదరపు యూనిట్లు అయితే నీలం ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం ఎంత?

(ii) ఈ రేఖా చిత్రం యొక్క మరొక విధానంలో నీలి మరియు ఎరుపు ప్రదేశాలచే చుట్టు ముట్టబడిన మొత్తం వైశాల్యం 180 చదరపు యూనిట్లు అయితే ప్రతి చతురస్ర వైశాల్యం ఎంత?

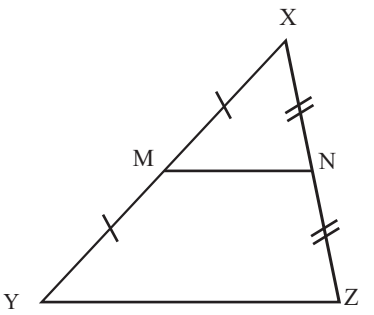
గణిత చర్చ



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

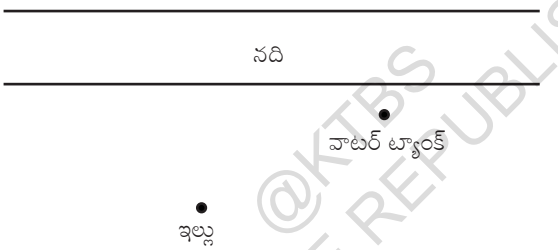
7. M మరియు N లు XY మరియు XZ, ల మధ్య బిందువులు అయితే ΔXYZ వైశాల్యంలో ΔXMN వైశాల్యం ఎంత? [సూచన NY లో చేరండి]

ప్రయత్నించండి



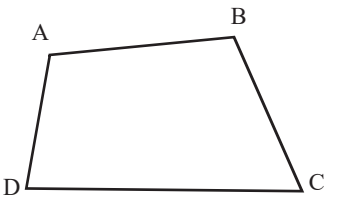
8. గోపాల్ నది నుండి తన నీళ్ళ ట్యాంక్‌కు నీటిని తీసుకెళ్ళాలి అతను తన ఇంటి నుండి బయలు దేరుతాడు తన ఇంటినుండినదికి మరియు తరువాత వాటర్ ట్యాంక్‌కు వెళ్లడానికి అతను తీసుకోగల తక్కువ మార్గం ఏమిటి? మీనోట్ బుక్‌లో మ్యాప్‌ను సుమారుగా తిరిగి తయారు చేసి అతి తక్కువ మార్గాన్ని గుర్తించండి.

గణిత చర్చ



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

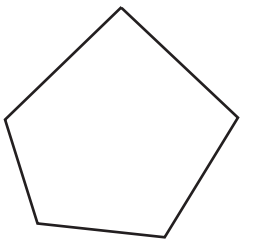
ఏదైన బహుభుజి వైశాల్యం



? ఈ చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని మనం ఎలా కనుగొంటాము ? దీనికి మనకు ఏకొలతలు అవసరం?

మనం BD, ని కలిపితే చతుర్భుజం ABCD రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించబడుతుంది వాటి వైశాల్యాన్ని కనుగొనడం ద్వారా మనం ABCD వైశాల్యాన్ని కనుగొనవచ్చు.

? ఈ పంచభుజి వైశాల్యాన్ని మనం ఎలా కనుగొంటాము?

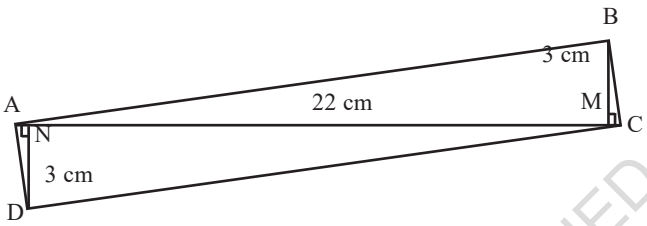


ఏదైనా బహుభుజిని త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చా?

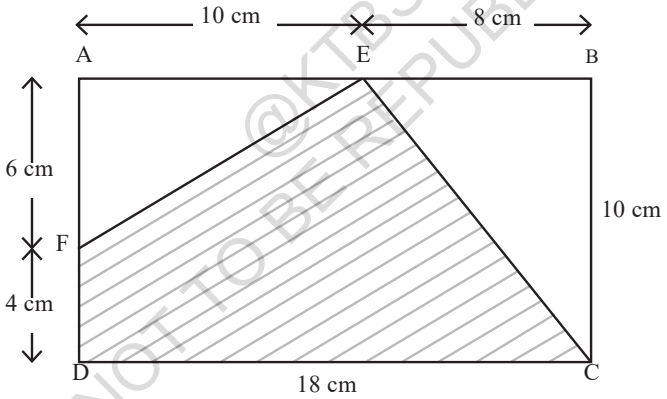
ఏదైనా బహుభుజిని త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చని చూడవచ్చు ఈ విధంగా త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను ఎలా గణించాలో తెలుసు కోవడం ద్వారా ఏదైనా బహుభుజి యొక్క వైశాల్యంను మనం కనుగొనవచ్చు.

దీన్ని కనుగొనండి

1. AC = 22 cm, BM = 3 cm, DN = 3 cm, BM AC, కి లంబంగా మరియు DN ను AC కి లంబంగా ఉంటే చతుర్భుజ ABCD వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.



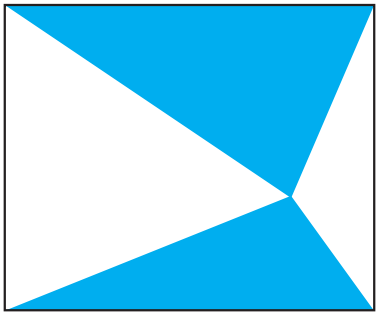
2. ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అయినందున నీడ ఉన్న ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. ఒక సాధారణ షడ్భుజి వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి మీరు ఏ కొలతలు తీసుకోవాలి? గణిత చర్చ

4. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క మొత్తం వైశాల్యంలో నీలం ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం ఎంత? గణిత చర్చ



5. ఇచ్చిన చతుర్భుజం వైశాల్యంలో సగం ఉన్న చతుర్భుజాన్ని పొందే పద్ధతిని తెల్పండి.

గణిత చర్చ

సమాంతరచతుర్భుజంరాంబస్‌మరియుట్రెపీజియంవైశాల్యంనుకనుగొనడానికిప్రత్యేక సూత్రాలను పొందవచ్చు.

సమాంతర చతుర్భుజం

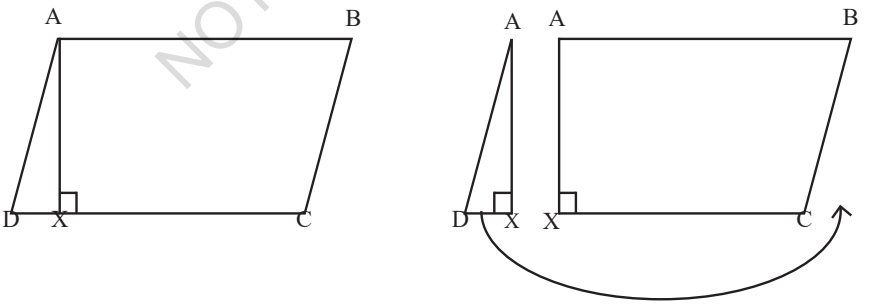
సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యాంను కలిగిన దీర్ఘ చతురస్రంగా మార్చడం ద్వారామనం దాని వైశాల్యానికి ఒక ప్రత్యేక సూత్రాన్ని పొందవచ్చు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యంగ దీర్ఘ చతురస్రంగా మార్చడానికి ఒక విధానంను తెల్పండి.

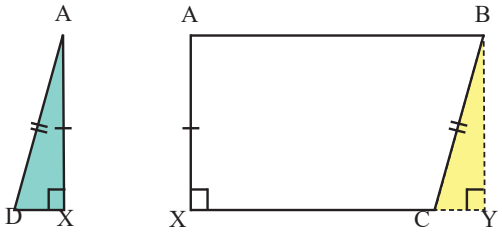
మీరు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కటౌట్ ఉపయోగించి దీనిని ప్రయత్నించవచ్చు.

CD లంబంగా AX ని నిర్మించండి సంక్లిప్తంగా $AX \perp CD$. గా సూచిస్తారు దీనిని మనం సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు అని పిలుస్తాము సమాంతర చుతుర్భుజాన్ని ΔAXD మరియు ట్రెపిజియం ABCX గా కత్తిరించండి.



? చిత్రంలో చూపిన విధంగా ΔAXD మరియు ABCX ఒకదానినొకటి సరిపోయే దీర్ఘ చతురస్రాన్ని పొందగలదా? దీన్ని తనిఖీచేయడానికి దీర్ఘ చతురస్రాన్ని పొందగలదా? దీన్ని తనిఖీచేయడానికి ఒక సులభమైన మార్గం ఏమిటంటే ABCX ని పూర్తి చేయగల త్రిభుజాన్ని గుర్తించండం దీర్ఘ చతురస్రం

మరియు ఆపై ఈ త్రిభుజం ΔAXD సమానంగా ఉందో లేదో తనిఖీచేయడం.



∠X = 90°, అని గమనించండి కాబట్టి ∠A = 90°, ఎందుకంటే AB || XC. దీర్ఘచతురస్రాన్ని పొందడానికి (4వ కోణం ఏది?) 3 వ కోణం పొందడానికి XC ని పొడిగించి ఒక రేఖను గీయండి అది XC కి లంబంగా నిర్మించండి ఆ లంబం B. గుండా వెళుతుంది ΔBYC, ABCX ని దీర్ఘ చతురస్రానికి పూర్తి చేస్తుంది ΔAXD దానికి సమానంగా ఉందా?

BY = AX (ABYX) ఒక దీర్ఘచతురస్రం

కాబట్టి ∠BYC = ∠AXD = 90°

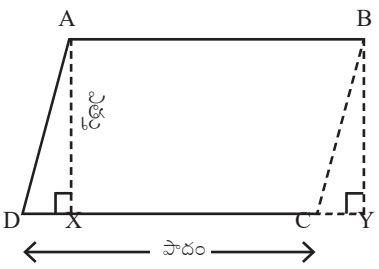
BC = AD (ABCD) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

కాబట్టి RHS సమరూపత నియమం ప్రకారం ΔBYC ≅ ΔAXD. అందువలన ΔAXD అనేది ΔBYC, ఆక్రమించిన ప్రదేశం ఖచ్చితంగా సరిపోతుంది మరియు సమాంతర చతుర్భుజాన్ని దీర్ఘ చతురస్రంగా మారుస్తుంది.

ఒక చిత్రంను ముక్కలుగా విడదీసి సమాన వైశాల్యంగల వేరే చిత్రంను పొందేలా వాటిని తిరిగి అమర్చే ప్రక్రియను **విచ్ఛేదనం** అంటారు.

© DTE&S NOT TO BE REPUBLISHED

? ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను దీర్ఘచతురస్రంగా విడదీయం ద్వారా దాని వైశాల్యాన్ని ఎలా కనుగొనగలం
మన దగ్గర వుంది.



సమాంతర చతుర్భుజం ABCD = వైశాల్యం ABYX దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం

దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం ABYX = AX × XY.

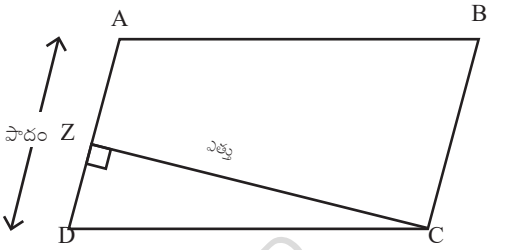
AX అనేది సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు .

? XY మరియు DC మధ్య సంబంధం ఉందా.

DX = CY, కాబట్టి మనకు ఉమ్మడి భాగం CY లను జోడించడం ద్వారా DC = XY పొందుతాము DC సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క పాదం కాబట్టి మనకు లభిస్తుంది.

సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం = పాదం × ఎత్తు

? సమాంతర చతుర్భుజాన్ని CZ వెంబడి కత్తిరించి దీర్ఘ చతురస్రానికి తిరిగి అమర్చవచ్చా?



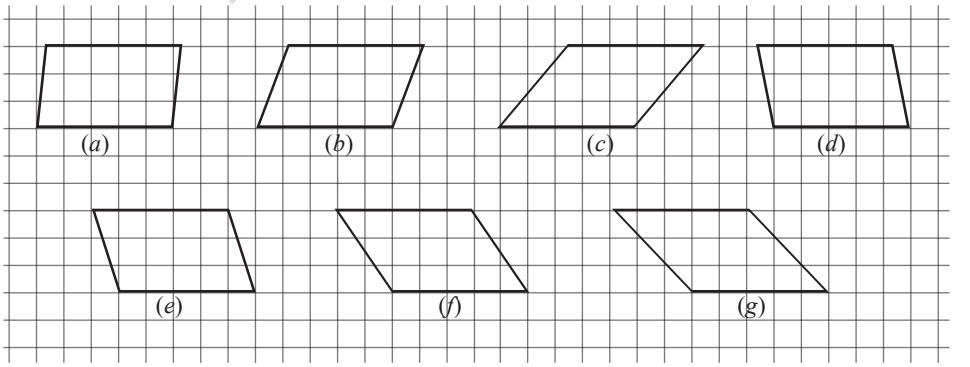
? ఇది నిజంగా సాధ్యమేని చూడవచ్చు. మరియు కాబట్టి ఏదైన వైపు మరియు దాని సంబంధిత ఎత్తును ఉపయోగించి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనవచ్చు.

? దీన్ని కనుగొనండి.

1. క్రింద చూపిన చిత్రంలో సమాంతర చతుర్భుజాలను గమనించండి.

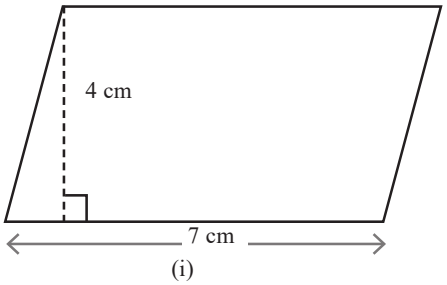
(i) ఈ సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం? ఏ చిత్రం గరిష్ఠ చుట్టు కొలతను కలిగివుండును మరియు ఏ చిత్రం కనిష్ఠచుట్టు కొలతను కలిగివుండును.

(ii) ఇచ్చిన త్రిభుజ వైశాల్యం కంటే రెండు రెట్లు ఎక్కువ ఉన్న దీర్ఘచతురస్రం పొందడానికి ఒ పద్ధతిని ఇవ్వండి మీరు ఆలోచించగల విభిన్న పద్ధతులు ఏమిటి?

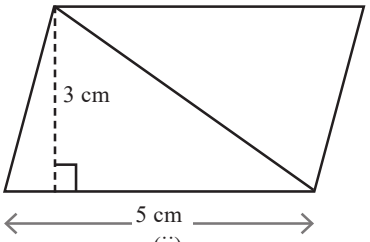


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

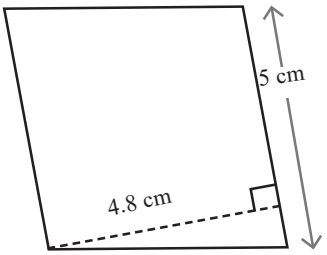
2. ఈ క్రింది సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.



(i)



(ii)

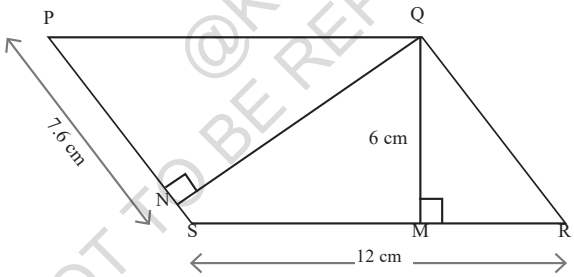


(iii)

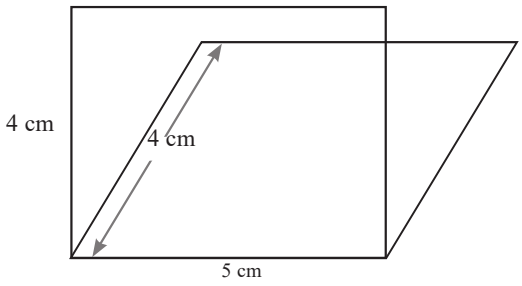


(iv)

3. QN ను కనుగొనండి.



4. 5 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ సమాన భుజాల పొడవుగల కలిగిన దీర్ఘచతురస్రం మరియు సమాంతర చతుర్భుజంను పరిగణించండి. ఏది ఎక్కువవైశాల్యంను కలిగి ఉంటుంది. [సూచన ఒకే ఆధారం పై నిర్మించినట్లు ఊహించుకోండి]

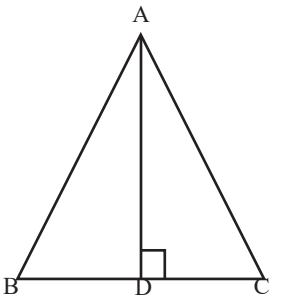


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. ఇచ్చిన త్రిభుజం వైశాల్యం కంటే రెండు రెట్లు ఎక్కువ ఉన్న దీర్ఘచతురస్రం పొందడానికి ఒక పద్ధతిని ఇవ్వండి మీరు ఆలోచించగల విభిన్న పద్ధతులు ఏమిటి?

6. [సుల్బ సూత్రాలు] ఇచ్చిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంనకు సమానమైన వైశాల్యంగల దీర్ఘచతురసం పొందే పద్ధతిని ఇవ్వండి.

7. [సుల్బ – సూత్రాలు] ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని సులభమైన పద్ధతిలో విచ్ఛేదనం ద్వారా దీర్ఘచతురస్రంగా మార్చవచ్చు. అది ఎలాగో మీరు కనుగొన గలరా?



© IRS
NOT TO BE REPUBLISHED

[**సూచన :** ΔADB మరియు ΔADC త్రిభుజాలను దీర్ఘచతురస్రం యొక సగభాగాలుగా చేయవచ్చని చూంచండి దీర్ఘ చతురస్రం పొందడానికి వాటిని ఎలా సమీకరించాలో గుర్తించండి అవసరమైతే కటాట్‌లను ఉపయోగించండి.]

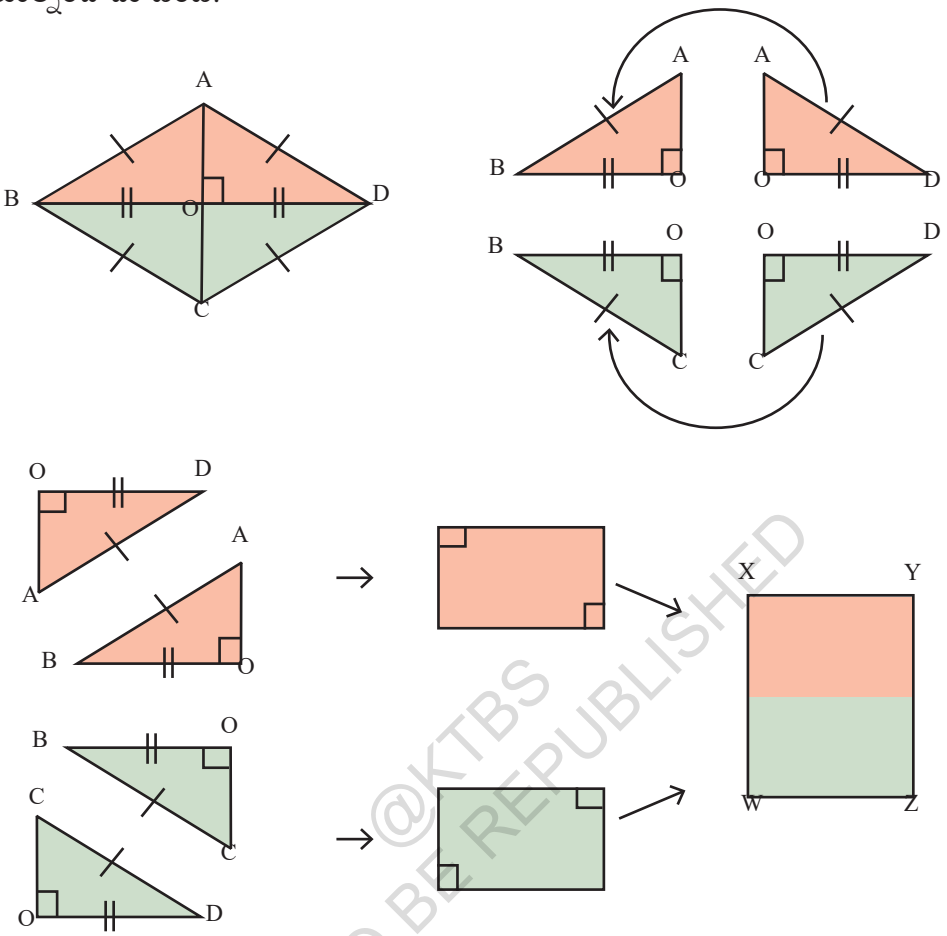
8. [సుల్బ సూత్రాలు] విభజనం ద్వారా దీర్ఘచతురస్రాన్ని సమద్విబాహుత్రిభుజం గా మార్చడానికి ఒక పద్ధతి ఇవ్వండి.

9. సమబాహు త్రిభుజానికా లేక త్రిభుజంతో సమానమైన భుజం పొడవుగల చతురస్రానికా దేని వైశాల్యం ఎక్కువ? రెండు సరూప సమబాహు త్రిభుజాల మొత్తం వైశాల్యా మా లేక త్రిభుజంతో సమానమైన భుజం పొడవు గలచతురస్రానికా దేని వైశాల్యం ఎక్కువ కారణాలు తెల్పండి?

రాంబస్

ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం సూత్రం రాంబస్‌కు కూడా వర్తిస్తుంది అయితే రాంబస్ యొక్క అదనపు లక్షణాలు రాంబస్‌ను విచ్ఛేదనం అదే వైశాల్యంగల దీర్ఘ చతురస్రంగా మార్చడానికి మనకు మరొక పద్ధతిని అందిస్తాయి ఈ పద్ధతి సులభ సూత్రాలలో ఒక దానిలో కనిపిస్తుంది.

? దీన్ని ప్రయత్నించి చూడండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ABCD ఒక రాంబస్ కాబట్టి దాన్ని అన్ని భుజాలు సమాన పొడవు ను కలిగి ఉంటాయి మరియు కర్ణాలు ఒక దానినొకటి లంబద్విభాగాలుగా ఉంటాయి కాబట్టి ΔABD మరియు ΔCBD సమద్విబాహు త్రిభుజాలు వాటిలో ప్రతి ఒక్కటి సమాన వైశాల్యాలు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రంగా రూపాంతరం చెందవచ్చు మరియు రెండు దీర్ఘ చతురస్రాలను కలిపి ఒకే దీర్ఘ చతురస్రాన్ని ఏర్పడవచ్చు ఈ దీర్ఘ చతురస్రం WXYZ, అనుకొందాం రాంబస్ ABCD వలె అదే వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

? WXYZ దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క భుజాల పొడవులు ఎంత?

విచ్ఛేదనం నుండి మనం చూడగలిగేది ఏమనగా

XW = కర్ణం AC, పొడవు మరియు

WZ అనేది రెండవ కర్ణం BD పొడవులో సగం

అందువలన మనకు

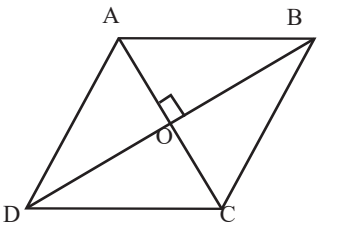
$$\text{రాంబస్ వైశాల్యం } ABCD = \text{దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం } WXYZ$$
$$= XW \times WZ$$
$$= AC \times \frac{BD}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

అందువల్ల

$$\text{రాంబస్ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{కర్ణాల యొక్కలబ్ధం}$$

? ΔADB మరియు ΔCDB. వైశాల్యాన్ని కనుగొనడం ద్వారా కూడా రాంబస్ $ABCD$ వైశాల్యాన్ని కూడాకను గొనవచ్చు దీనిద్వారా మనకు ఏ సూత్రం లభిస్తుంది.

కర్ణాలు ఒకదాని కొకటి లంబంగా ఉన్నందున



$$\text{మనకు వైశాల్యం } (\Delta ADB) = \frac{1}{2} \times AO \times BD, \text{ మరియు}$$

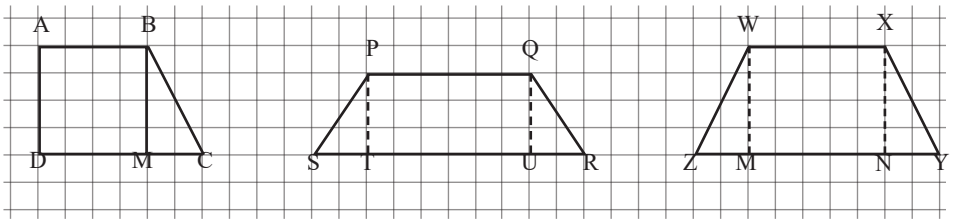
$$\text{వైశాల్యం } (\Delta CDB) = \frac{1}{2} \times CO \times BD, \text{ మరియు}$$

రాంబస్ వైశాల్యం $ABCD$ = వైశాల్యం (ΔADB) + వైశాల్యం (ΔCDB).

? రాంబస్ వైశాల్యానికి దాని, కర్ణాల పరంగాకూడా అదే సూత్రం లభిస్తుందని చూపించడానికి ఆసమీకరణాన్ని సరళీకరించండి.

ట్రెఫిజియం

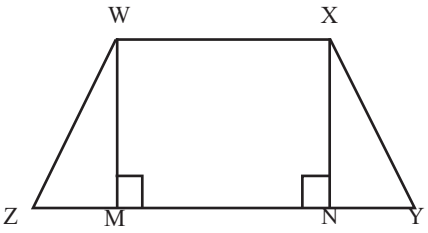
? క్రింది ట్రెఫిజియంలను లెక్కించగల ఆకారాలుగా విభజించడం ద్వారా వాటి వైశాల్యాలను కనుగొనండి.



ట్రెఫిజియం వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి ఒక పద్ధతి దానిని దీర్ఘచతురస్రం మరియు త్రిభుజాలుగా విభజించడం

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? WX || ZY అయ్యేపట్లు WXYZ ఒక ట్రెఫిజియంను పరిగణించండి దాని వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.



$WM \perp ZY$, మరియు $XN \perp ZY$ లను నిర్మించండి (ZY కి లంబంగాWM మరియు XN ఉంటాయి).

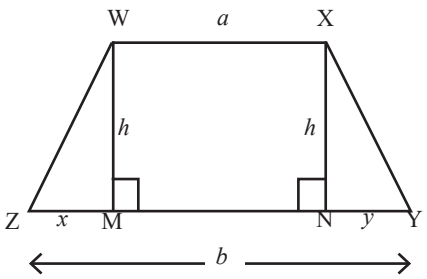
? WXNM ఒక దీర్ఘ చతురస్రమా?

$\angle MWX = \angle NXW = 90°$, ఎందుకంటే WX || ZY మరియు ఒక తిర్యగ్రేఖ యొక్క ఒకే వైపున ఉన్న అంతర్గత కోణాలు (WM మరియు XN) మొత్తం 180°. అవుతుంది. అందువల్ల కాబట్టి, WXNM ఒక దీర్ఘ చతురస్రం

మనకు.

$$\text{వైశాల్యం } WXYZ = \text{వైశాల్యం } (\Delta WMZ) + \text{వైశాల్యం } WXNM + \text{వైశాల్యం } (\Delta XNY)$$
$$= \frac{1}{2} \times MZ \times WM + WX \times WM + \frac{1}{2} \times NY \times XN$$

ట్రెఫిజియం వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి అవసరమైన పొడవులకు అక్షర సంఖ్యలను కేటాయిద్దాం $MZ = x$, $WM = XN = h$, $WX = a$, $NY = y$ అని అనుకుందాం. కాబట్టి మనకు వస్తుంది.



$$\text{వైశాల్యం } WXYZ = \frac{1}{2} hx + ha + \frac{1}{2} hy$$
$$= h\left(\frac{1}{2} x + a + \frac{1}{2} y\right)$$
$$= h\left(\frac{x + y + 2a}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} h(x + y + 2a).$$

సమాంతర భుజాలలో ఒక దాని పొడవు a గా తీసుకున్నాము మరొక సమాంతర భుజం పొడవు b అనుకొందాం

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ట్రెఫిజియం వైశాల్యాన్ని a, b మరియు h ల రూపంలో వ్యక్తీకరించవచ్చునా?

వైశాల్యం సమీకరణంలో x + y ని a మరియు b, లను ప్రతిక్షేపించగా b = x + y + a. అని గమనించండి. రెండు వైపుల a ని తీసివేస్తే మనకు లభిస్తుంది దీనిని ఉపయోగించి.

$$x + y = b - a.$$

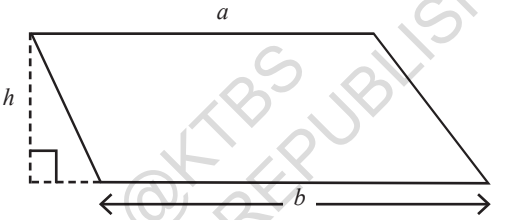
$$\text{వైశాల్యం } WXYZ = \frac{1}{2} h(b - a + 2a)$$

$$= \frac{1}{2} h(a + b).$$

అందువలన,

$$\text{ట్రెఫిజియం వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{ఎత్తు} \times \text{సమాంతర భుజాల మొత్తం}$$

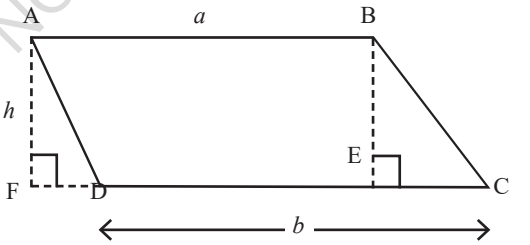
? ఈ సూత్రం ఈ విధంగా కనిపించే ట్రెఫిజియంకు వర్తిస్తుందా?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దీన్ని చేరుకోవడానికి వివిధ మార్గాలు ఉన్నాయి. అవి క్రింద వివరించబడ్డాయి. వాదనలు పూర్తి చేయండి.

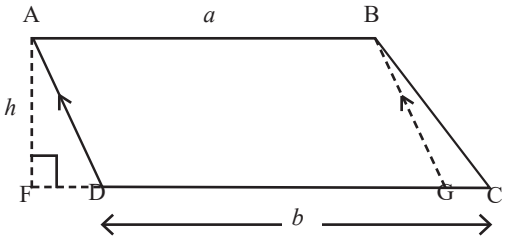
విధానం 1 : దీర్ఘ చతురస్రం మరియు త్రిభుజాలు



వైశాల్యం ABCD = వైశాల్యం ABED + వైశాల్యం ΔBEC

వైశాల్యం ABED = వైశాల్యం ABEF – వైశాల్యం ΔAFD

విధానం 2 : సమాంతర చతుర్భుజం మరియు త్రిభుజం



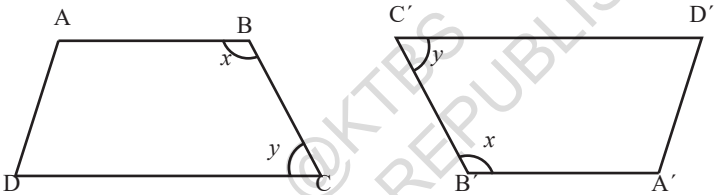
BGAD ని గీయండి

గణిత చర్చ

? విధానం 2 ఏరకమైన ట్రెఫిజియంకైన పనిచేస్తుందా?

ట్రెఫిజియం యొక్క రెండు కాపీలను ఉపయోగించి వైశాల్యం కనుగొనడం

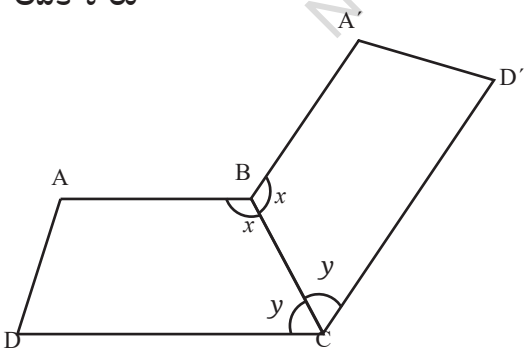
ట్రెఫిజియం వెశాల్యాన్ని కనుగొడానికి మరొక ఆసక్తి కరమైన పద్ధతి ఉంది AB||CD అయ్యే విధంగా ఇవ్వబడిన ట్రెఫిజియం యొక్క రెండు కాఫీలను పరిగణించండి రెండవ కాఫీలను చూపిన విధంగా తిప్పండి. .



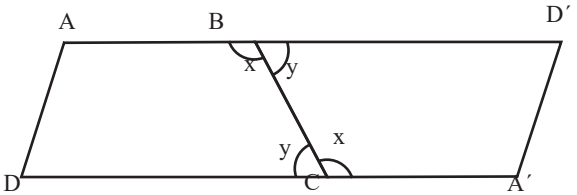
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? రెండు ట్రెఫిజియంలను BC వెంబడి కలిపినపుడు మనకు ఏ ఆకారం లభిస్తుంది? ఏర్పడే అవకాశాలు 6-భుజాల ఆకారం లేదా 4-భుజాల ఆకారం (చతుర్భుజం)

అవకాశాలు



6 వైపుల బొమ్మ



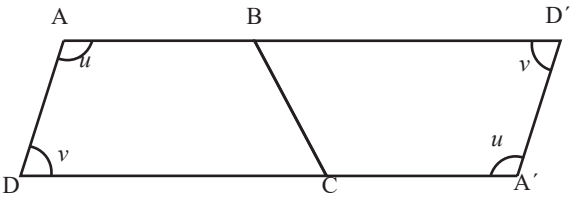
చతుర్భుజం

x మరియు y కోణాల మొత్తాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా మనం మొదటి అవకాశంను త్రోసిపుచ్చవచ్చు

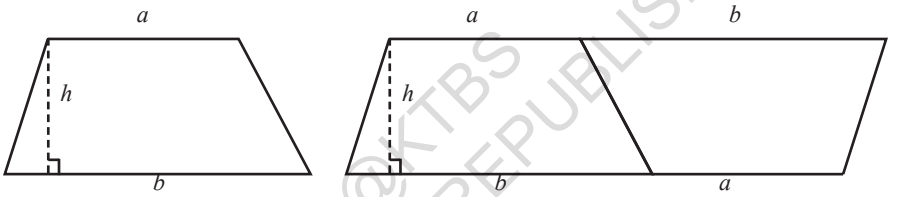
AB ∥ CD, కాబట్టి మనకు $x + y = 180$, ఉంటుంది ఎందుకంటే అవి తిర్యగ్రేఖ (BC). యొక్క ఒకే వైపువున్న అంతర కోణాలు కాబట్టి ABD́ మరియు ÁCD సరళ రేఖలు కాబట్టి ఫలిత చిత్రం చతుర్భుజం

? ఇది ఏరకమైన చతుర్భుజం?

ట్రెపిజియం యొక్క మిగిలిన రెండు కోణాలను చూద్దాం



మనకు $u + v = 180$. ఉంది కాబట్టి తిర్యగ్రేఖ A'D యొక్క ఒకే వైపున ఉన్న అంతర కోణాల మొత్తం 180°. A'ను కలపాలి. మనకు ఇప్పటికే AD || A'D అని ఉంది కాబట్టి AD A'D చతుర్భుజం వాస్తవంన కు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.



ట్రెఫిజియం వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం

$= \frac{1}{2} h(a + b)$.

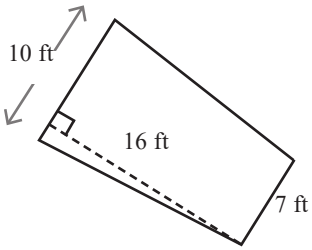
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? దీన్ని కనుగొనండి

1. 20 cm మరియు 15 cm కర్ణాలు కలిగిన రాంబస్ వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

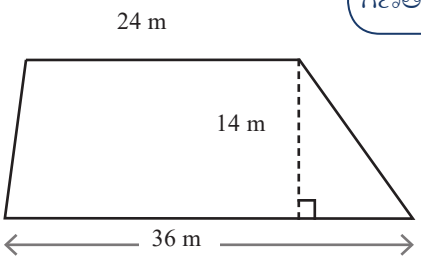
2. విభజించడంను ఉపయోగించి ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని సమాన వైశాల్యం గల రాంబస్‌గా మార్చే పద్ధతిని తెల్పండి

3. క్రింది చిత్రాల వైశాల్యాలను కనుగొనండి:

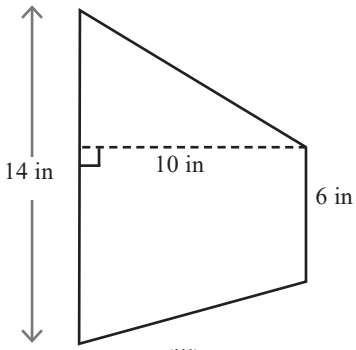


(i)

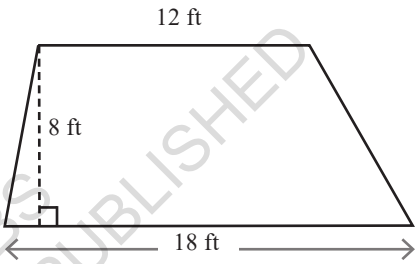
గణిత చర్చ



(ii)



(iii)

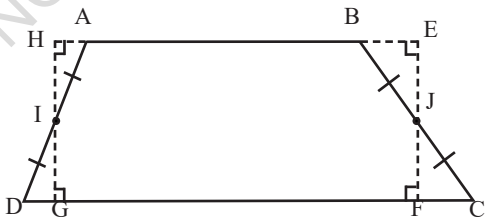


(iv)

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

4. [సులభ – సూత్రాలు] విభజించడం విధానం ఉపయోగించి సమద్విబాహు ట్రెఫిజియంను దీర్ఘ చతురస్రంగా మార్చడానికి ఒక పద్ధతిని కనుగొనండి.

5. ట్రెఫిజియం ABCD ని సమాన వైశాల్యం కలిగిన దీర్ఘ చతురస్రం EFGH గా మార్చడానికి ఇక్కడ ఒక పద్ధతి ఉంది —



ట్రెఫిజియం ABCD, ఇవ్వబడింది దీర్ఘచతురస్రం EFGH యొక్క శీర్షాలను మనం ఎలా కనుగొంటాము?

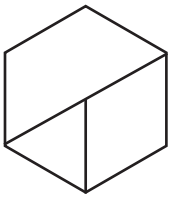
గణిత చర్చ

[సూచన: If $\Delta AHI \cong \Delta DGI$ మరియు $\Delta BEJ \cong \Delta CFJ$, అయితే ట్రెఫిజియం మరియు దీర్ఘచతురస్రం మరియు సమాన వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉంటాయి.]

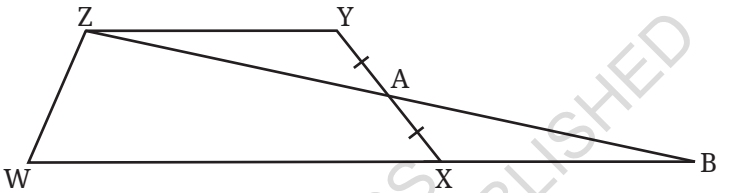
6. ఒక ట్రెఫిజియంను సమాన వైశాల్యం కలిగిన దీర్ఘ చతురస్రంగా మార్చడం మరియు దీనికి విరుద్ధంగా చేయడం అనే ఆలోచనను ఉపయోగించి 144 cm^2 వైశాల్యం కలిగిన ట్రెఫిజియంను నిర్మించండి.

గణిత చర్చ

7. చిత్రంలో చూపిన విధంగా ఒక క్రమ షడ్భుజిని ఒక ట్రెఫిజియం ఒక సమబాహు త్రిభుజం మరియు రాంబస్‌గా విభజించారు వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.



8. ZYXW అనేది ZY || WX. కలిగిన ఒక ట్రెఫిజియం A అనేది XY. యొక్క మధ్యబిందువు ట్రెఫిజియం ZYXW యొక్క వైశాల్యం ΔZWB వైశాల్యానికి సమానమని చూపండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

నిజ జీవితంలోని వైశాల్యాలు

? A_4 షీట్ వైశాల్యం ఎంత అని మీరు అనుకుంటున్నారు?

దాని భుజాల పొడవులు 21 cm మరియు 29.7 cm. ఇపుడు దాని వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

? మీరు పాఠశాలలో లేదా మీఇంట్లో ఉపయోగించి బల్ల వైశాల్యం ఎంత అని మీరు అనుకుంటున్నారు? మీ బల్ల పై ఎన్ని A_4 షీటు సరిపోతాయో మీరు బహుశా ఊహించుకోవడానికి ప్రయత్నించవచ్చు.

బల్లలు మరియు కుర్చీలువంటి ఫర్నిచర్ యొక్క కొలతలు కొన్ని సార్లు అంగుళాలు (in) మరియు అడుగుల (ft) లో కొలుస్తారు.

1 అంగుళం= 2.54 cm

1 అడుగు= 12 అంగుళాలు

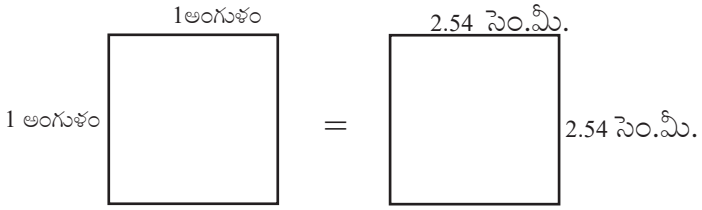
? క్రింది పొడవులను సెంటి మీటర్లలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 5 అంగుళాలు (ii) 7.4 అంగుళాలు

? క్రింది పొడవులను అంగుళాలలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 5.08 సెం.మీ. (ii) 11.43 సెం.మీ.

? 1 అంగుళం^{2} ఎన్ని సెంమీ^{2}?



కాబట్టి 1 అంగుళం^{2} = 2.54 సెం.మీ ^{2} = 6.4516 సెం.మీ^{2}

? 10 అంగుళాలు^{2} అనేది ఎన్ని సెంమీ^{2}?

10 అంగుళాలు^{2} = 10 × 6.4516 సెం.మీ.^{2} = 64.516 సెం.మీ.^{2}.

? 161.29 సెం.మీ.^{2} ని అంగుళాలు ^{2} కి మార్చండి.

ప్రతి 6.45616 సెం.మీ.^{2} ఒక అంగుళాలు^{2}. ఇస్తుంది. అందువల్ల

$$161.29 \text{ సెం.మీ.}^2 = \frac{161.29}{6.4516} \text{ అంగుళాలు}^2.$$

? **భాగఫలంను కనుగొనండి.**

? మీ తరగతి గదివైశాల్యం ఎంత అని మీరు అనుకుంటున్నారు?

తరగతి గది ఇల్లు మొదలైన వాటి వైశాల్యాలను సాధారణంగా చదరపు అడుగులు (ft^2) లేదా చదరపు మీటర్ల (m^2) లో కొలుస్తారు

? 1 చదరపు అడుగుకు ఎన్ని చదరపు అంగుళాలు వుంటాయి?

? మీ పాఠశాల వైశాలం ఎంత అని మీరు అనుకుంటున్నారు? ఒక అంచనా వేసి దానిని వాస్తవ సమా చారంతో పోల్చండి వెశాలంన భూభాగాలను కూడా ఎకరాలలో కొలుస్తారు.

1ఎకరం = 43,560 అడుగులు^{2}.

ఈ యూనిట్ల్ తో పాటు భారత దేశంలోని వివిధ ప్రాంతాలలో వేర్వేరు స్థానిక యూనిట్లను ఉపయోగించి గజ్, కథ, థుర్ సెంటు, అంకణం మొదలైన వాటిని కొలిచే ప్రాంతం

? మీ ప్రాంతంలో వైశాల్య కొలత యొక్క స్థానిక యూనిట్‌ను కనుగొనండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? మీ గ్రామం / పట్టణం/ నగర వైశాల్యం ఎంత అని మీరు అనుకుంటున్నారు? ఒక అంచనా వేసి వాస్తవ సమాచారంతో పోల్చండి.

పెద్ద ప్రాంతాలను చదరపు కిలోమీటర్లలలో కొలుస్తారు.

? ఒక కిలో మీటరుకు ఎన్ని చదరపు మీటర్లు ఉంటాయి?

? మీ గ్రామం / నగరం, మీ పాఠశాలకంటే ఎన్ని రెట్లు పెద్దది?

? (i) భారతదేశంలో మరియు (ii) ప్రపంచంలో అతి పెద్ద వైశాల్యం కలిగిన నగరంను కనుగొనండి.

? (i) భారత దేశంలో మరియు (ii) ప్రపంచంలో అతి చిన్న వైశాల్యం కలిగిన నగరంను కనుగొనండి.

సారాంశం

- త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు.
- ఏదైన బాహుభుజి యొక్క వైశాల్యాన్ని త్రిభుజాలుగా విభజించడం ద్వారా అంచనా వేయవచ్చు.
- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × ఎత్తు
- రాంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణాల లబ్ధం
- ట్రెఫిజియం వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × ఎత్తు × సమాంతర భుజాల మొత్తం

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED