कर्नाटक सरकार

गणित

MATHEMATICS

10

इयत्ता दहावी

TENTH STANDARD

मराठी माध्यम

MARATHI MEDIUM

भाग - 2

PART - 2

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरबिंदो मार्ग नवी दिल्ली

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

अनुक्रमणिका

Z6C9T9

भाग - 2

अ.नं.	प्रकरण	पृष्ठ क्रमांक
8	त्रिकोणमितीचा परिचय	1-20
9	त्रिकोणमितीचे काही उपयोग	21-30
10	वर्तुळे	31-39
11	वर्तुळाशी संबंधीत क्षेत्रफळे	40-46
12	पृष्ठफळ आणि घनफळ	47-57
13	सांख्यिकी	58-87
14	संभाव्यता	88-104
A2	गणिती नमुना	105-116
	उत्तरे	117-126

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्रिकोणमितीचा परिचय

INTRODUCTION OF TRIGONOMETRY

8

त्रिकोणमिती गणितमधील अशी एक शाखा आहे की जीचे मध्य असणारे स्थान इतर कोणतीही शाखा घेऊ शकत नाही

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

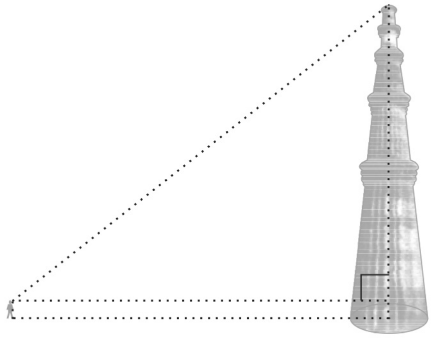
J.F. Herbart (1890)

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

8.1 परिचय :

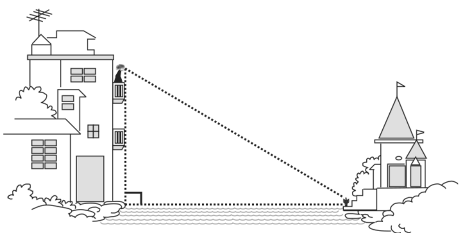
आपण मागील इयत्तेत या अगोदर त्रिकोण आणि त्याचे भाग, काटकोन त्रिकोण या संबंधी शिकला आहात. आता आपल्या सभोवतालची उदाहरणे घेऊ की ज्यामध्ये काटकोन त्रिकोणाविषयी उपयोग केला आहे.

1. समजा शाळेचे विद्यार्थी कुतुबमिनारला भेट देतात असे मानू. आता, जर विद्यार्थी मिनारच्या वरील टोकाकडे पाहत असेल तर तेथे एक काटकोन त्रिकोण निर्माण होतो, अशी कल्पना करा. आकृती 8.1 पहा. तर विद्यार्थी प्रत्यक्ष मोजमापन करता त्या मिनारची उंची काढू शकेल का?



आकृती 8.1

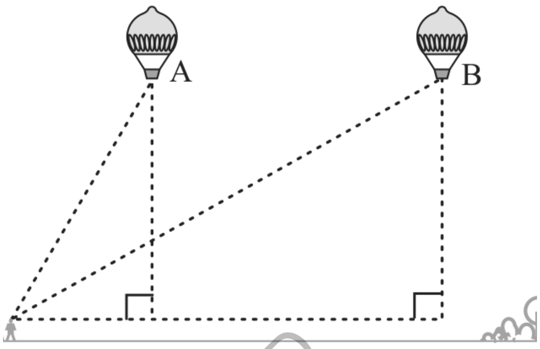
2. समजा एक मुलगी घराच्या बाल्कनीतून घरासमोर असलेल्या नदीच्या किनाऱ्याकडे पाहत आहे आणि तेथून किनारपट्टीच्या दुसऱ्या बाजूला असणाऱ्या मंदीराच्या पायरीवर ठेवलेल्या फुलांच्या कुंडाकडे पाहत आहे. (आकृती 8.2) या स्थितीमध्ये एक काटकोन



आकृती 8.2

त्रिकोण तयार होतो. यावरून ती मुलगी जमिनीपासून किती उंचीवर थांबली आहे आणि त्या नदीची रूंदी किती आहे हे काढू शकाल का?

३. समजा आकाशामध्ये एक गरम हवा भरलेला फुगा तरंगत आहे. एक मुलगी आपल्या आईसोबत त्या फुग्याला पाहायला जाते. आता ती मुलगी त्या फुग्याला पाहत आहे तेथे A बिंदू घेऊ. जेव्हा ती मुलगी आणि आई तो फुगा पाहण्यासाठी आले तेव्हा तो फुगा एका ठिकाणाकडून दुसऱ्या ठिकाणी गेल्यामुळे तेथे B बिंदू तयार झाला. B पासून जमिनीपर्यंतचे अंतर काढू शकाल का? (आकृती ८.३ पहा).



आकृती ८.३

वरील सर्व स्थितीचे निरीक्षण केले असता गणिती तंत्राचा उपयोग करुन आपण त्यातील उंची किंवा अंतर काढू शकतो? त्यामुळे गणिताच्या याच शाखेला **'त्रिकोणमिती'** असे म्हणतात. त्रिकोणमिती हा शब्द 'Trignometry' या ग्रीक शब्दापासून घेतला आहे येथे 'Tri' म्हणजे तीन, 'gno' म्हणजे बाजू आणि 'metry' म्हणजे मापन होय. म्हणजेच, त्रिकोणातील कोन आणि तीन बाजू या संबंधीचा अभ्यास म्हणजेच त्रिकोणमिती होय. त्रिकोणमितीवरील यापूर्वी माहीत असलेल्या कामाची नोंद इजिप्त आणि बॅबिलॉनमध्ये होती. प्राचीन काळातील ग्रीक खगोलशास्त्रज्ञ त्रिकोणमितीचा उपयोग चंद्राचे पृथ्वीपासूनचे अंतर काढण्यास करीत असत. आजच्या काळात या सर्व तंत्राचा उपयोग अभियांत्रिकी आणि भौतशास्त्रामध्ये केला जात आहे.

या प्रकरणामध्ये आपण एका काटकोन त्रिकोणातील लघुकोनातील गुणोत्तरांचा अभ्यास करूया. यांना **त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे** म्हणतात. यासाठी आपण फक्त लघुकोनाविषयीच चर्चा करू. ही गुणोत्तरे इतर कोनांनाही लागू पडतात. ही त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे आपण 0^0 ते 90^0 पर्यंतच्या कोनावरून घेऊ शकतो. आपण काही कोनावरून त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे काढू शकतो यासाठी त्याची समानता सुद्धा आधारीत असते. यालाच **त्रिकोणमितीय समानता** म्हणतात.

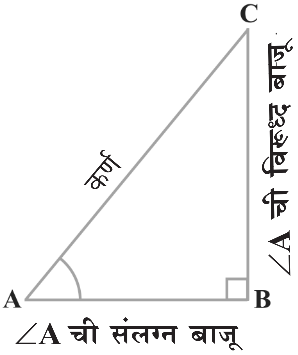
८.२ त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे (Trignometric Ratios):

काही वेगवेगळ्या स्थितीत आपण ८.१ विभागात काटकोन त्रिकोणाविषयी पाहिला आहात. आकृती ८.४ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे काटकोन त्रिकोण ABC घ्या.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे $\angle CAB$ किंवा थोडक्यात A हा लघुकोन आहे. $\angle A$ च्या संदर्भात BC बाजुचे स्थान समजून घ्या. यालाच $\angle A$ ची विरुद्ध बाजू म्हणतात. AC हा काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आहे आणि AB ही बाजू $\angle A$ चा भाग आहे. म्हणून AB ला $\angle A$ ची *संलग्न बाजू* म्हणू.

जर आपण $\angle A$ च्या स्थानी $\angle C$ चा विचार केला तर बाजूंची स्थिती बदलते याची नोंद घ्या (आकृती ८.५ पहा)



आकृती ८.४

मागील इयत्तेत आपण गुणोत्तराविषयी अभ्यास केला आहात. आता काही काटकोन त्रिकोणावरील गुणोत्तरांचा अभ्यास करू. त्यांना आपण त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे म्हणणार आहोत.

काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $\angle A$ ची त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे खालील प्रमाणे आहेत (आकृती ८.४)

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ ची विरुद्ध बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

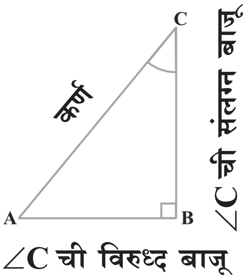
$$\cos A = \frac{\angle A \text{ ची संलग्न बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ ची विरुद्ध बाजू}}{\angle A \text{ ची संलग्न बाजू}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ ची विरुद्ध बाजू}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ ची संलग्न बाजू}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\angle A \text{ ची संलग्न बाजू}}{\angle A \text{ ची विरुद्ध बाजू}} = \frac{AB}{BC}$$



आकृती ८.५

$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$ आणि $\cot A$ या गुणोत्तरांची व्याख्या आपण वरील प्रमाणे करू शकतो. $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ यांची अनुक्रमे व्यस्त गुणोतरे **cosec A , secA , cot A** आहेत याची नोंद घ्या.

तसेच निरीक्षण करा की, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आणि $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

म्हणून, **त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे** काटकोन त्रिकोणातील लघुकोन आणि त्यासंबंधीत असणारे कोन व बाजूंची लांबी यावर आधारीत आहेत.

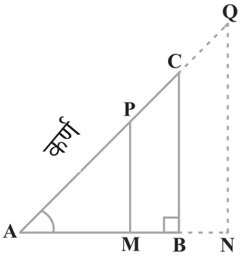
काटकोन त्रिकोणामधील $\angle C$ च्या आधारावर त्रिकोणमीतीची गुणोत्तरे तुम्ही तयार करू शकता का? (आकृती 8.5 पहा)

ही माहिती करून घ्या : साईन (sine) या कल्पनेचा उपयोग प्रथम आर्यभट्ट (500 AD) यांच्या 'कार्य आर्यभटीयम्' या मध्ये दिसून आला. परंतु आर्यभट्टयांनी अर्ध-जीवेसाठी **अर्ध ज्या (ardya-jya)** या शब्दाचा उपयोग केला. अभ्यास क्रमात संक्षिप्तरूपात ती **ज्या** किंवा **जीवा** असे लिहितात. आर्यभट यांनी आर्यभट्टीयमचा अरेबिक भाषेमध्ये रूपांतर करताना जीवा हा शब्द तसाचा तसाच ठेवला. पुढे त्याचे **'सायनस'** मध्ये रूपांतर झाले. याचा लॅटिनमध्ये वक्र असा अर्थ होतो. **एडमंड गंटर** (1581 – 1626) या खगोलशास्त्राच्या प्राध्यापकाने सायनस शब्द 'साईन' (sine) असा संक्षिप्त रूपात करून प्रथम वापरला. 'कोसाईन' आणि **'टॅनजेंट'** शब्दांचा उगम खूप उशीरा झाला. कोटीकोनाचा साईन मोजण्याची गरज भासल्यावर कोसाईनचे कार्य सुरू झाले. आर्यभट्ट यांनी याला कोटीज्या (Kotijya) असे म्हटले. एडमंड गंटर या नावाशी कोसाईनसचा संबंध आहे. 1674 मध्ये, सर जोनास मूर या दुसऱ्या इंग्लिश गणितज्ञाने 'कॉस' (cos) या संक्षिप्त चिन्हाचा प्रथम उपयोग केला

आर्यभट्ट
A.D. 476 - 550

टिप : लक्षात ठेवा की, प्रत्येक sin A हा प्रयोग कोन A च्या sin शी संक्षिप्त रूपात केला जातो. येथे sin A हे sin आणि A चा गुणाकर होत नाही. A शिवाय sin चा कोणताच अर्थ लागत नाही. याचप्रकारे cos A हे cos आणि A चा गुणाकार होत नाही याचप्रकारच्या व्याख्या इतर त्रिकोणमीतीच्या गुणोत्तराची सुद्धा केली जाते.

आता समकोन त्रिकोण ABC च्या AC कर्णावर एक बिंदू P घ्या. AC बाजू Q पर्यंत वाढवा AB वर PM लंब टाका आणि AB बाजू वाढवून त्यावर QN लंब टाका (आकृती 8.6 पहा). तर ΔPAM मधील $\angle A$ ची त्रिकोणमिती गुणोत्तर आणि ΔQAN मधील $\angle A$ ची त्रिकोणमिती गुणोत्तरामधील अंतर कोणते असेल?



आकृती 8.6

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या प्रश्नाचे उत्तर काढण्याच्या अगोदर आपण या त्रिकोणाचे निरीक्षण करू. ΔPAM व ΔCAB हे समरूप आहेत का? आपणास माहीत आहे की प्रकरण 2 मध्ये आपण को. को (कोन कोन) चा समरूप गृहीतकाचा अभ्यास केला आहे. या गृहीतकाचा उपयोग करून ΔPAM व ΔCAB समरूप दर्शवू शकतो. म्हणूनच समरूप त्रिकोणाच्या गुणधर्मावरून त्रिकोणाच्या बाजू प्रमाणात आहेत.

म्हणून, $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$

यावरून, $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ हे मिळते.

याचप्रकारे, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$

यावरून आपणास असे समजते की, ΔPAM मधील कोन A ची त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे आणि ΔCAB मधील कोन A ची त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे यामध्ये कोणतेच अंतर नाही.

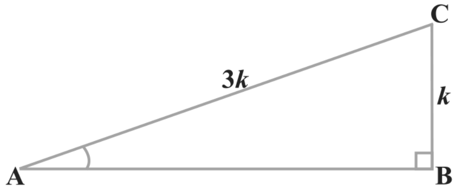
याचप्रकारे आपण सिद्ध करू शकतो की, ΔQAN मध्ये sin A चे मापन (तसेच इतर त्रिकोणमिती गुणोत्तरांचे मापन) समान असू शकते.

या सिद्धतेवरून असे स्पष्ट होते की, **जर कोन समान असेल तर एका कोनावरून त्रिकोणमितीच्या गुणोत्तरांचे मापन हे त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी बदलू शकत नाही.**

टिप: उपयोगाकरीता आपण (sine A)^2, (cos A)^2 च्या स्थानी $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ घेऊ शकतो. परंतू cosec A = $(\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (इथे साइन इनवर्स A असे वाचतात) $\sin^{-1} A$ चा अर्थ वेगळाच होतो. याची चर्चा पुढील उच्च अभ्यासक्रमात कराल. याचप्रकारचे विधान इतर त्रिकोणमितीच्या गुणोत्तरांसाठी लागू पडते. कधी कधी ग्रीक अक्षर θ (थिटा) चा उपयोग कोनासाठी सुद्धा होतो.

येथे आपण एका कोनाची सहा त्रिकोणमिती गुणोत्तरे तयार करू शकतो. जर आपणास कोणतेही एक गुणोत्तर माहीत असेल तर इतर सर्व गुणोत्तरे आपण तयार करू शकतो. तर आता आपण यावर विचार करू.

जर एका समकोन ΔABC मध्ये $\sin A = \frac{1}{3}$. तर याचा अर्थ $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ म्हणजेच ΔABC च्या BC व AC बाजूची लांबी 1:3 च्या गुणोत्तरात आहे (आकृती 8.7 पहा) म्हणजेच, BC ही k शी समान असेल तर AC ही 3k शी समान होईल जेथे k ही धन संख्या आहे. कोन A ची इतर त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे काढावयाची असेल तर त्रिकोणाची तिसरी



आकृती 8.7

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

बाजू काढणे आवश्यक आहे. आपणास पायथॅगोरसचा प्रमेय आठवतो का? आता आपण याच पायथॅगोरसच्या प्रमेयावरून AB ची निश्चित लांबी काढू.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - k^2 = 8^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

$\therefore \quad AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

यावरून आपणास $AB = 2\sqrt{2}\,k$ मिळते (AB हा $-2\sqrt{2}$ का नाही?)

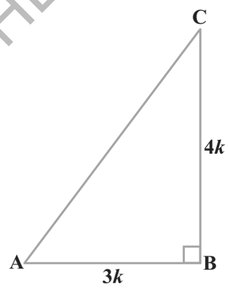
आता $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

याचप्रमाणे तुम्ही इतर त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे काढू शकता.

टीप - जेव्हा काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते, तेव्हा sin A किंवा cos A ची किंमत 1 पेक्षा लहान असते.

उदाहरण 1 : $\tan A = \frac{4}{3}$ दिले असता इतर त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढा.

उकल : प्रथम काटकोन ΔABC घ्या (आकृती 8.8 पहा)



आकृती 8.8

आता, $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{3}$ दिलेले आहे.

म्हणून, जर 'K' ही धन संख्या असेल तर

$BC = 4K$ तसेच $AB = 3K$ होईल.

आता पायथॅगोरस प्रमेयाचा उपयोग करू.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3K)^2 = 25k^2$

$AC = 5K$

आता, यावरून इतर त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढू.

$\text{Sin } A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4K}{5K} = \dfrac{4}{5}$

$\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3K}{5K} = \dfrac{3}{5}$

म्हणून, $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{3}{4}$, $\text{cosec } A = \dfrac{1}{\text{Sin } A} = \dfrac{5}{4}$ आणि $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{5}{3}$

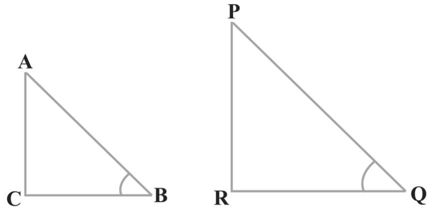
उदाहरण 2 : जर $\angle B$ व $\angle Q$ हे लघुकोन असून $\sin B = \sin Q$ तर $\angle B = \angle Q$ सिद्ध करा.

उकल : ΔABC व ΔPQR हे दोन काटकोन त्रिकोण आहेत तर $\sin B = \sin Q$

त्यामुळे, $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$

आणि $\sin Q = \dfrac{PR}{PQ}$

तर $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$



आकृती 8.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore \qquad \frac{AC}{PR}=\frac{AB}{PQ}=K$ मानू (1)

आता, पायथॅगोरस प्रमेयाचा उपयोग करून

$$BC = \sqrt{AB^2\text{-}AC^2}$$

आणि $Q=\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}$

म्हणून, $\frac{BC}{QR}=\frac{\sqrt{AB^2-AC^2}}{\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}}=\frac{\sqrt{K^2PQ^2-K^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2-PR^2}}=\frac{K\sqrt{PQ^2-PR^2}}{\sqrt{PQ^2-QR^2}} = K$ (2)

(1) व (2) वरून

$$\frac{AC}{PR}=\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$$

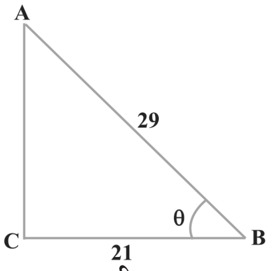
तर प्रमेय 6.4 चा उपयोग करून, $\Delta ACB \cong \Delta PRQ$

म्हणून $\angle B = \angle Q$

उदाहरण 3 : ΔACB मध्ये $\angle C$ हा काटकोन असून $AB = 29$ एकक, $BC = 21$ एकक आणि $\angle ABC = \theta$ (आकृती 8.10 पहा). तर खालील किंमती काढा.

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



आकृती 8.10

उकल : ΔACB मध्ये,

$$AC=\sqrt{AB^2\text{-}BC^2}=\sqrt{(29)^2-(21)^2}$$

$$AC=\sqrt{(29\text{-}21)(29+21)}=\sqrt{8\times50}=\sqrt{400}=200 \text{ एकक}$$

म्हणून, $\sin\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{20}{29}, \quad \cos\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{21}{29}$

आता, $(i)\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{21}{29}\right)^2=\frac{20^2+21^2}{29^2}$

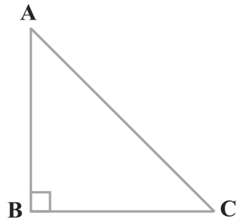
$$=\frac{400+441}{841}=1$$

आणि $(ii)\cos^2\theta\text{ - }\sin^2\theta=\left(\frac{21}{29}\right)^2\text{ - }\left(\frac{20}{29}\right)^2=\frac{(21+20)(21-20)}{29^2}$

$$=\frac{41}{841}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 4 : काटकोन ΔABC मध्ये $\angle B$ हा काटकोन आहे. जर $\tan A = 1$ तर $2 \sin A \cos A = 1$ सिद्ध करा.



आकृती 8.11

उकल : ΔABC मध्ये, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$, $BC = AB$

$AB = BC = K$ मानू, येथे K ही धन संख्या

आता, $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{K^2 + K^2} = K\sqrt{2}$$

म्हणून, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ आणि $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$ सिद्ध झाले.

उदाहरण 5 : ΔOPQ मध्ये, $\angle P$ हा काटकोन आहे. $OP = 7cm$ आणि $OQ - PQ = 1cm$ (आकृती 8.12) तर sinQ आणि cosQ ची किंमत काढा.

उकल : ΔOPQ मध्ये,

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

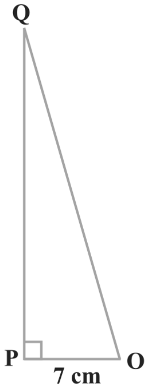
$\therefore$ $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (का ?)

$\therefore$ $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

$1 + 2PQ = 7^2$ (का ?)

$\therefore$ $PQ = 24cm$, आणि $OQ = 1 + PQ = 25cm$

म्हणून $\sin Q = \frac{7}{25}$ आणि $\cos Q = \frac{24}{25}$



आकृती 8.12

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 8.1

1. ΔABC मध्ये, $\angle B$ हा काटकोन असून $AB = 24cm$, $BC = 7cm$ तर खालील किंमत काढा.

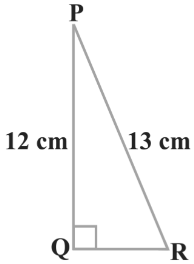
   (i) $\sin A \cos A$

   (ii) $\sin C \cos C$

2. आकृती 8.13 मध्ये, $\tan P - \cot R$ ची किंमत काढा.

3. जर $\sin A = \frac{3}{4}$, तर $\cos A$ व $\tan A$ ची किंमत काढा.

4. $15 \cot A = 8$ दिले असता $\sin A$ आणि $\sec A$ काढा.



आकृती 8.13

5. जर $\sec\theta = \frac{13}{12}$ असेल तर इतर त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढा.

6. जर $\angle A$ व $\angle B$ लघुकोन असून $\cos A = \cos B$ असेल तर $\angle A = \angle B$ सिद्ध करा.

7. जर $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तर (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$, (ii) $\cot^2\theta$ च्या किंमती काढा.

8. जर $3\cot A = 4$. तर $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ हे तपासा.

9. ΔABC मध्ये, $\angle B$ हा काटकोन आहे. जर $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$. तर खालील किंमत काढा.

   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. ΔPQR मध्ये, $\angle Q$ हा काटकोन आहे. जर $PR + QR = 25$ आणि $PQ = 5$ cm तर $\sin P$, $\cos P$ आणि $\tan P$ काढा

11. खालील विधाने चुक की बरोबर ते तपासा.

   (i) $\tan A$ ची किंमत नेहमी 1 पेक्षा कमी असते.

   (ii) $\sec A = \frac{12}{5}$ ही काही कोन A ची किंमत असते.

   (iii) cosecant A साठी $\cos A$ हे संक्षिप्त रूप आहे.

   (iv) $\cot A$ हा cot आणि A चा गुणाकार आहे.

   (v) काही कोन θ साठी $\sin\theta = \frac{4}{3}$.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

8.3 काही विशिष्ट कोनांची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे

भूमितीमध्ये आपणास याअगोदर 30^0, 45^0, 60^0 आणि 90^0 कोनांच्या रचना शिकला आहात. तर या भागात आपणास या कोनावरून त्रिकोणमिती गुणोत्तरे तयार करावयाची आहेत. अर्थातच, 0^0 साठी सुद्धा.

45^0 कोनाची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे

ΔABC मध्ये, B हा काटकोन आहे. जर एक कोन 45^0 असेल तर दुसरा कोन सुद्धा 45^0 असतो.

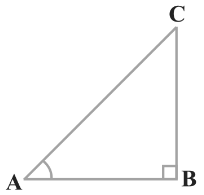
$\therefore$ $\angle A = \angle C = 45^0$(आकृती 8.14 पहा)

म्हणून, $BC = AB$ (का ?)

आता, $BC = AB = a$ मानू

पायथ्थॅगोरसच्या प्रमेयावरून, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ आणि

म्हणून, $AC = a\sqrt{2}$



आकृती 8.14

त्रिकोणमिती गुणोत्तरांच्या व्याख्याचा उपयोग करून

$$\sin 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोनाची विरुद्ध बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोनाची संलग्न बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोनाची विरुद्ध बाजू}}{45^0 \text{ कोनाची संलग्न बाजू}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

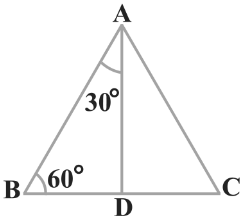
तसेच $\operatorname{cosec} 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$, $\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$, $\cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$

30^0 आणि 60^0 कोनांची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे

आता 30^0 आणि 60^0 या कोनांची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढू. ΔABC हा एक समभुज त्रिकोण रचला की त्यामध्ये सर्व कोन 60^0 असतील. म्हणून $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

A या शिंरोबिंदूतून BC वर AD हा लंब काढा (आकृती 8.15 पहा).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 8.15

आता $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (का?)

$BD = DC$

आणि $\angle BAD = \angle CAD$ (एकरुप त्रिकोणाचे गुणधर्म)

आता निरीक्षण करा की,

ΔABD हा काटकोन त्रिकोण आहे, तर $\angle D$ हा काटकोन आहे. तसेच $\angle BAD = 30^0$ आणि $\angle ABD = 60^0$ आहे (आकृती 8.15 पहा)

आपणास माहीत आहे की, त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे काढावयाची असेल, तर त्रिकोणाच्या बाजुंच्या लांबींची किंमत माहीत असणे आवश्यक आहे. त्यासाठी $AB = 2a$ मानू.

तर, $BD = \frac{1}{2} BC = a$

आणि $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

म्हणून, $AD = a\sqrt{3}$

$\therefore$ $\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 30^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

तसेच
$$\cos ec30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2, \sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$$

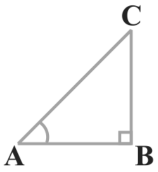
त्याचप्रमाणे, $\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\tan 60^0 = \sqrt{3}, \text{cosec } 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^0 = 2, \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

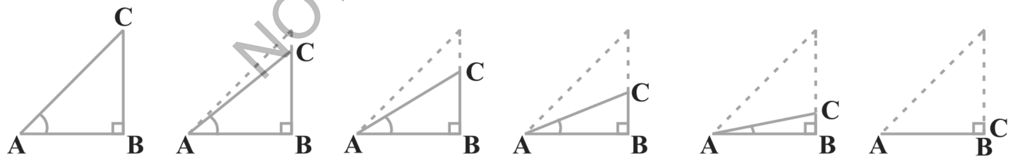
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

0^0 आणि 90^0 कोनांची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे.

कोन A वरून त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काय असतील हे पाहू. ABC हा लहानात लहान काटकोन त्रिकोण आहे. जर $\angle A$ हा लहानात लहान कोन असेल तर BC बाजुची लांबी कमी होत जाते. बिंदू B हा C बिंदूशी जवळ आहे आणि जेव्हा $\angle A$ हा 0^0 शी अती जवळ असतो तेव्हा AB हा AC शी समान होतो. (आकृती 8.17 पहा)



आकृती 8.16



आकृती 8.17

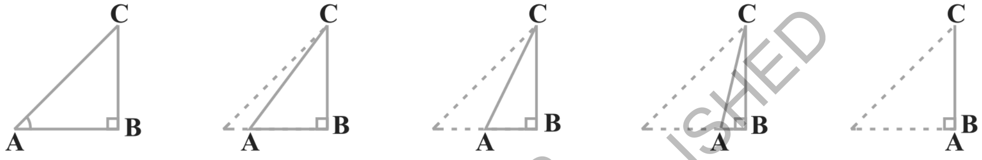
जेव्हा 0^0 हा $\angle A$ च्या जवळ आहे, तेव्हा O हा BC च्या जवळ असेल तेव्हा $\text{Sin } A = \frac{BC}{AC}$ ही किंमत शून्यच्या जवळ असते. AB ही AC च्या जवळ असेल तर $\text{Cos } A = \frac{AB}{AC}$ ही किंमत 1 च्या अतिजवळ आहे.

वरील विधानांचा उपयोग करून आपण Sin A व Cos A ची किंमत काढू शकतो की, **Sin 0^0=0 Cos 0^0=1** यांचा उपयोग करून.

$\tan 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\text{Cos } 0^0} = 0$, $\text{Cot } 0^0 = \dfrac{1}{\tan 0^0} = \infty$ व्याख्या नाही (का?)

$\text{Sec } 0^0 = \dfrac{1}{\text{Cos } 0^0} = 1$, $\text{Cosec } 0^0 = \dfrac{1}{\text{Sin } 0^0} = \infty$ व्याख्या नाही (का?)

आता, आपण पाहू की जेव्हा ΔABC मधील $\angle A$ हा 90^0 पेक्षा मोठा असेल तेव्हा त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काय होतील? त्यामुळे $\angle A$ हा मोठ्यात मोठा आणि $\angle C$ हा लहानात लहान आहे. म्हणून वरील निष्कर्षावरून AB ची लांबी कमीतकमी होत जाते. बिंदू B हा A च्या जवळ आहे. म्हणून शेवटी $\angle A$ हा 90^0 शी जवळ, $\angle C$ हा 0^0 शी जवळ आहे आणि BC हा AC शी सुद्धा संगत आहे. (आकृती 8.18 पहा)



आकृती 8.18

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जर $\angle C$ हा 0^0 ला, $\angle A$ हा 90^0 जवळीक असेल तर BC हा AC शी समान आहे आणि म्हणून Sin A हा 1 शी जवळ आहे. तसेच $\angle A$ हा 90^0 ला, $\angle C$ हा 0^0 असेल तर AB ही 0 शी जवळीक आहे. म्हणून cosA हा 0 आहे.

$\therefore$ **Sin 90^0 = 1 आणि Cos 90^0 = 0**

आता, इतर त्रिकोणमिती गुणोत्तरे 90^0 ची शोधण्याची आवश्यकता नाही. का?

आता 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 आणि 90^0 या त्रिकोणमिती गुणोत्तरांच्या किंमती पुढील तक्तात दिल्या आहेत.

तक्ता 8.1

$\angle$A	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	व्याख्या नसलेले (N D)
cosec A	व्याख्या नसलेले (N D)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	व्याख्या नसलेले (N D)
cot A	व्याख्या नसलेले (N D)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

टीप: वरील तक्ताचे निरीक्षण केले असता $\angle A$ हा 0^0 ते 90^0 पर्यंत वाढत जातो. SinA हा 0 ते 1 पर्यंत वाढत जातो आणि Cos A हा 1 ते 0 पर्यंत कमी होतो.

उदाहरण 6 : ΔABC मध्ये $\angle B$ हा काटकोन असून AB=5 cm आणि $\angle ACB=30^0$ (आकृती 8.19 पहा) असेल तर BC व AC च्या लांबी काढा.

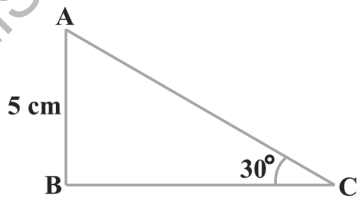
उकल : बाजू BC ची लांबी शोधू, आपण त्रिकोणमिती गुणोत्तराच्या आधारावरून BC आणि दिलेली बाजू AB यांची निवड करू. म्हणून $\angle C$ ला AB ही विरूद्ध बाजू आणि $\angle C$ ला BC ही संलग्न बाजू आहे.

$\therefore$

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

$$\frac{5}{BC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$BC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$



आकृती 8.19

आता AC बाजूची लांबी शोधू

$$\text{Sin } 30^0 = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$\therefore AC = 10 \text{ cm}$$

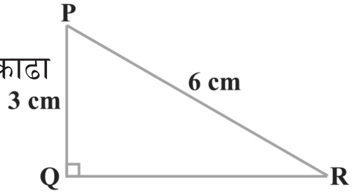
वरील उदाहरणासाठी आपण पायथॅगोरस प्रमेयाचा उपयोग करून तिसरी बाजू शोधू.

$$\therefore \quad AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=10cm$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 7 : ΔPQR मध्ये $\angle Q$ हा काटकोन असून (आकृती 8.20 पहा) PQ=3cm, आणि PR=6cm तर $\angle QPR$ व $\angle PRQ$ काढा

उकल - येथे PQ = 3cm व PR = 6cm दिलेले आहेत



आकृती 8.20

$$\frac{PQ}{PR} = \text{SinR}$$

$\therefore$

किंवा $\text{SinR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

म्हणून $\angle PRQ = 30^0$

आणि $\angle QPR = 60^0$ .... (का?)

यावरून निरीक्षण केले असता, काटकोन त्रिकोणाची कोणतीही एक बाजू आणि कोणताही भाग (कोणताही एक लघुकोन किंवा बाजू) आपणास माहीत असेल तर आपण इतर बाजू व कोन काढू शकतो.

उदाहरण 8 : जर, $\text{Sin}(A\text{-}B) = 1/2, \text{Cos}(A+B) = 1/2, 0^0 < A+B \le 90^0, A>B$ तर A आणि B काढा.

उकल : $\text{Sin}(A\text{-}B) = 1/2$ म्हणून $A-B = 30^0$ ....(1)

तसेच $\text{Cos}(A+B) = 1/2$ तर $A + B = 60^0$ ....(2)

(1) व (2) वरुन, $A = 45^0$ आणि $B = 15^0$

स्वाध्याय 8.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. सोडवा:

(i) $\sin 60^0 \cos 3^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$ (ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

(iii) $\dfrac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec} 30^0}$ (iv) $\dfrac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \text{cosec } 60^0}{\sin 30^0 + \cos 45^0 - \cot 45^0}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. खालील पर्यायी उत्तरापैकी एक योग्य उत्तर लिहा.

(i) $\dfrac{2\tan 30^0}{1+\tan^2 30^0}$

(a) $\sin 60^0$ (b) $\cos 60^0$ (c) $\tan 60^0$ (d) $\sin 30^0$

(ii) $\dfrac{1 - \tan^2 45^0}{1+\tan^2 45^0}$

(a) $\tan 90^0$ (b) 1 (c) $\sin 45^0$ (d) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ हे सत्य आहे जेव्हा $A =$

(a) 0^0 (b) 30^0 (c) 45^0 (d) 60^0

(iv) $\dfrac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0}$

(a) $\cos 60^0$ (b) $\sin 60^0$ (c) $\tan 60^0$ (d) $\sin 30^0$

3. जर $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ आणि $\tan(A-B)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0^0 < A+B \le 90^0$; $A > B$ तर A व B शोधा.

4. खालील विधाने बरोबर की चूक ते लिहा. तुमचे उत्तर पडताळून पहा.

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$

(ii) θ ची किंमत वाढल्यास $\sin\theta$ ची किंमत वाढते.

(iii) θ ची किंमत वाढल्यास $\cos\theta$ ची किंमत वाढते.

(iv) $\sin\theta = \cos\theta$, θ च्या सर्व किंमती करिता.

(v) $\cot A$ ची व्याख्या $A = 0^0$ असेल तर काढता येत नाही.

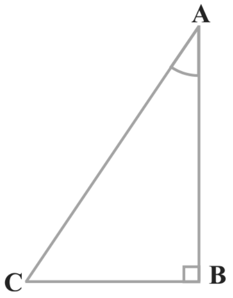
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

8.4 त्रिकोणमितीची समानता (Trignometrical Identities)

आपणास माहीत आहे की, एखाद्या समीकरणाची समानता ही त्यामधील असलेल्या चलपदाच्या किंमती वरून सत्य ठरविली जाते. ज्या समीकरणामध्ये कोनाच्या त्रिकोणमितीच्या गुणोत्तरांचा समावेश असतो त्यांना त्रिकोणमितीची समानता म्हणतात. येथे संबंधित कोनांच्या सर्व किंमती सत्य असतील.

या भागात, आपण एक त्रिकोणमितीची समानता सिद्ध करू आणि तिचा उपयोग करुन आणि त्याचप्रकारच्या इतर समानता सिद्ध करता येतील.

Δ ABC मध्ये, $\angle B$ हा काटकोन आहे (आकृती 8.21)



आकृती 8.21

$\therefore$ $\mathbf{AB^2 + BC^2 = AC^2}$ ....

समीकरण (1) मध्ये प्रत्येक घटकाला AC^2 ने भागू

$$\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=1$$

$\therefore$ $(\cos A)2 + (\sin A)^2 = 1$

$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$ ....

A च्या बाबतीत हे सत्य आहे जेव्हा $0 \le A \le 90^0$, ही त्रिकोणमितीची समानता आहे.

आता, समीकरण (1) ला AB^2 ने भागू

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\therefore \qquad 1+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ ....

या समीकरणाला $A = 0^0$ सत्य आहे का? आहे, तर $A = 90^0$ आहे का? जर $A = 90^0$ हे tan A आणि sec A ला सिद्ध ठरत नाही (3) वरून $O^0 \le A < 90^0$ हे A ला सिद्ध होते.

आता (1) ला BC^2 ने भागू.

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \left(\frac{AB^2}{BC}\right)+1=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$\cot^2 A+1 = \operatorname{cosec}^2 A$....

लक्षात ठेवा की, $A = 0^0$ हे cosecA व cotA ला सिद्ध होत नाही म्हणून समीकरण (4) हे $0^0 < A \le 90^0$ मधील A ला सर्व सिद्ध आहे.

हीच समानता इतर त्रिकोणमितीच्या गुणोत्तराला सुद्धा उपयोग करू शकतो. म्हणजेच जर एका गुणोत्तराची किंमत माहीत असेल तर इतर गुणोत्तरांच्या किंमती काढू शकतो.

आता आपण पाहूया की, गुणोत्तरे कशी तयार करु शकतो.

जर $\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}$ तर $\cot A = \sqrt{3}$

म्हणजेच, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ आणि $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

तसेच, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ म्हणून $\operatorname{cosec} A = 2$

उदाहरण 9 : sinA वरून cosA, tanA आणि secA ची गुणोत्तरे काढा.

उकल : जर $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, तर

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore \cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A}$

$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A}$ (का?)

म्हणजेच $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ आणि $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

उदाहरण 10 : सिद्ध करा, $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A) = 1$

उकल : LHS = $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A), \left[\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

उदाहरण 11 : सिद्ध करा, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

उकल :

$$\text{LHS} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

उदाहरण 12 : सिद्ध करा. $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

यासाठी $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ चा उपयोग करा.

उकल : याकरीता आपण $\sec\theta$ आणि $\tan\theta$ ची समानता घेऊ, प्रथम LHS मध्ये $\sec\theta$ आणि $\tan\theta$ येण्यासाठी अंशाला व छेदाला $\cos\theta$ ने भागू.

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{[(\tan\theta + \sec\theta) - 1](\tan\theta - \sec\theta)}{[(\tan\theta - \sec\theta) + 1](\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta + \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\ (\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\ (\tan\theta - \sec\theta)} = \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

RHS मधील दिलेला घटक आपण सिद्ध केला.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 8.3

1. cot A वरून sin A, sec A आणि tan A ची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढा.

2. sec A वरून इतर सर्व ∠A घेऊन त्रिकोणमिती गुणोत्तरे काढा.

3. चार पर्यायापैकी योग्य उत्तर निवडा व उत्तरे पडताळा.

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) −1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) −1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

4. खालील समानता सिद्ध करा की, त्यामध्ये असलेले कोन हे लघुकोन आहेत.

(i) $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\tan A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\ \text{cosec}\theta$

(टीप - $\sin\theta$ आणि $\cos\theta$ चा उपयोग करून सोडवा)

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} + \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ (टीप - LHS आणि RHS वेगवेगळे घेऊन सोडवा)

(v) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}A + \cot A$ यासाठी $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ समानता वापरा

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan\theta$

(vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(**टीप:** सरळ रुप देताना उजवी बाजू अणि डावी बाजू वेगवेगळी घ्या.)

(x) $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right) = \tan^2 A$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.5 सारांश (Summary)

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये, $\angle B$ हा काटकोन आहे.

$$\text{SinA} = \frac{\text{कोन A ची विरुद्ध बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{CosA} = \frac{\text{कोन A ची संलग्न बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{tanA} = \frac{\text{कोन A ची विरुद्ध बाजू}}{\text{कोन A ची संलग्न बाजू}}$$

2. $\text{cose A} = \frac{1}{\text{sinA}}$; $\text{sec A} = \frac{1}{\text{cosA}}$; $\text{tan A} = \frac{1}{\text{cotA}}$, $\text{tan A} = \frac{\text{sinA}}{\text{cosA}}$.

3. जर एका लघुकोनाच्या त्रिकोणमिती गुणोत्तराची किंमत माहीत असेल तर इतर त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे सहज काढता येतात.

4. कोन 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 आणि 90^0 वरून त्रिकोणमिती गुणोत्तराची किंमत काढता येते.

5. जर secA किंवा cosecA ची किंमत 1 पेक्षा मोठी किंवा 1 शी समान असेल, तर sinA किंव secA ची किंमत 1 पेक्षा मोठी नसते.

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ जेथे $0^0 \leq A < 90^0$

   $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ जेथे $0^0 < A \leq 90^0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

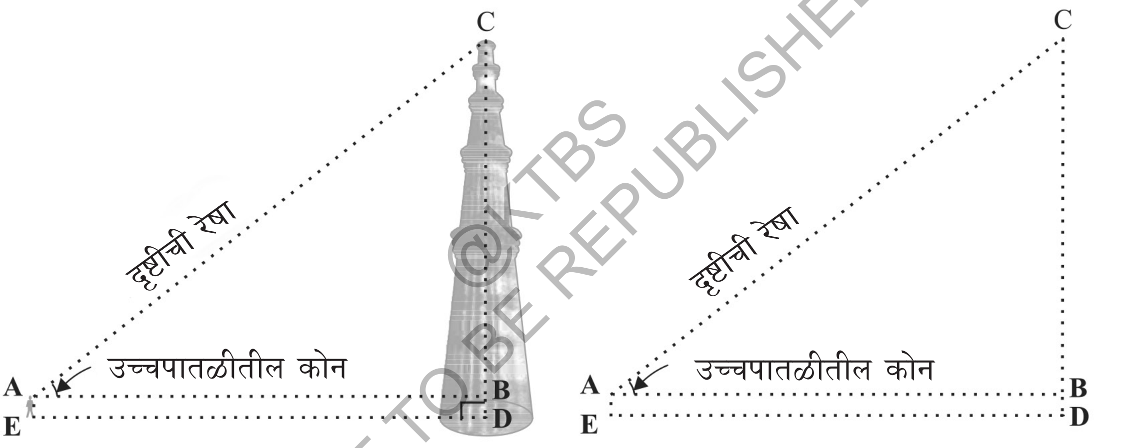
* * *

त्रिकोणमितीचे काही उपयोग
Applications of Trigonometry

9

9.1 उंची आणि अंतर (Height and Distance)

आता आकृती 9.1 (प्रकरण 9) चा पुन्हा विचार करू आणि ती आकृती 9.1 मध्ये प्रमाणे पुन्हा कढू..

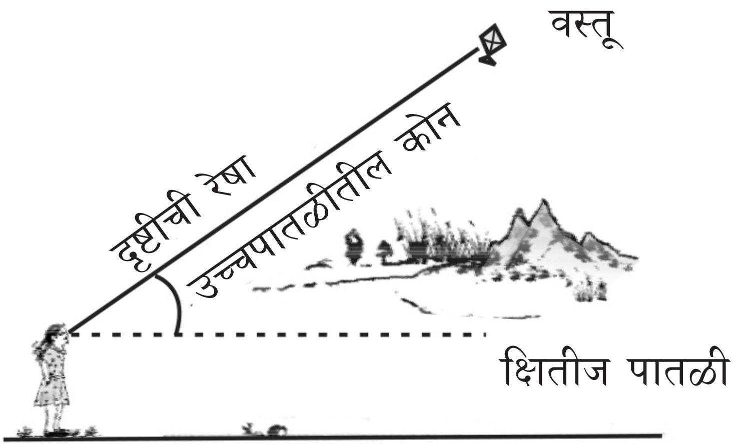


आकृती 9.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृतीवरून मनोऱ्याच्या टोकापासून विद्यार्थ्याच्या डोळ्यापर्यंतचे अंतर AC रेषा काढली. त्याला **दृष्टीची रेषा** (Line of Sight) म्हणतात. तो विद्यार्थी मनोऱ्याच्या टोकाकडे पाहत आहे. तसेच विद्यार्थ्याचा डोळा आणि समांतर असणाऱ्या दृष्टीय रेषीशी BAC हा कोन अंतरित आहे या कोनाला **उच्च पातळीतील कोन** (उन्नत कोन) (Angle of Elevation) म्हणतात.

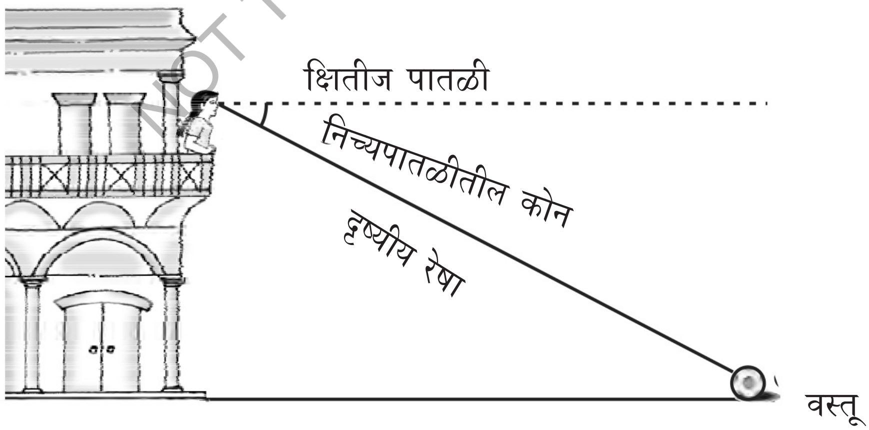
निरीक्षकाच्या डोळ्यापासून ते मनोऱ्याच्या बिंदूपर्यत दृष्टी रेषा रचली आहे. बिंदूचे निरीक्षण करता येणारा उच्च पातळीतील कोन हा दृष्टीरेषेने क्षितीज समांतर रेषेच्या वर असणाऱ्या बिंदूचे निरीक्षण करण्यासाठी केलेला कोन आहे. उच्चपातळीतील कोन क्षितीजापासून वरच्या बाजूस मोजतात.



आकृती 9.2

आता आपण आकृती 9.2 मध्ये दाखविलेल्या दृष्याचा विचार करू. बाल्कनीमध्ये बसलेली एक मुलगी मंदिराच्या पायरीवरील ठेवलेल्या फुलाच्या कुंडाकडे पहात आहे. या स्थितीत दृष्टी रेषा क्षितीजाच्या खाली आहे. तर दृष्टी रेषा आणि क्षितीज रेषेशी अंतरीत असलेल्या कोनाला **निच्च पातळीतील कोन** (अवनत कोन) (angle of Depression) म्हणतात.

ती मुलगी पाहत असलेल्या स्थिर बिंदूवर निच्च पातळीतील कोन हा दृष्यीय रेषा व क्षितीज रेषानी तयार होतो. बिंदू क्षितीज रेषेच्या खाली असतो. म्हणजेच त्या स्थिर बिंदूला पाहण्यासाठी आपले डोळे खाली करावे लागते. (आकृती 9.3 पहा)



आकृती 9.3

आता आपण आकृती 9.3 पाहू की यामध्ये आपणास दृष्यीय रेषा आणि त्यापासून तयार झालेले कोन ओळखू शकतो, ते उच्चपातळीतील आहेत की निच्चपातळीतील आहेत?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण आकृती 9.1 चा पुन्हा विचार करू. जर आपण योग्य रितीने मापने न घेता मनोऱ्याची उंची CD काढावयाची असेल तर कोणत्या गोष्टीची आवश्यकता आहे? यासाठी काही गोष्टीचे (विधानाचे) ज्ञान असने आवश्यक आहे.

(i) मनोऱ्याच्या पायथ्याशी असलेल्या बिंदूपासून विद्यार्थी उभारलेल्या बिंदूपर्यतंचे अंतर DE आहे.

(ii) मनोऱ्याचा उच्च पातळीतील (उन्नत) कोन $\angle BAC$ आहे.

(iii) विद्यार्थाची उंची AE आहे.

जर वरील सर्व गोष्टीचे ज्ञान आपणास असेल तर आपण कोणत्या प्रकारे मनोऱ्याची उंची काढू शकतो?

आकृतीमध्ये $CD = CB + BD$ येथे $BD = AE$ ही विद्यार्थ्याची उंची आहे $\angle BAC$ किंवा $\angle A$ घेऊन त्रिकोणमीतीच्या गुणोत्तराचा उपयोग करून BC काढू शकतो.

ΔABC मध्ये $\angle A$ च्या विरूध्द असणारी BC ही बाजू आहे. आता कोणत्या त्रिकोणमीती गुणोत्तराचा वापर करू? यापैकी कोणत्या दोन किंमती आपणास माहीत आहेत आणि आपण त्या दोन किंमती काढू शकतो का? AB व BC हे गुणोत्तर असणारे $\tan A$ किंवा $\cot A$ जवळपास यांचा शोध आपण घेऊ शकतो.

म्हणून, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ किंवा $\cot A = \frac{AB}{BC}$ याचे उकल काढण्यास आपणास BC ची किंमत मिळते.

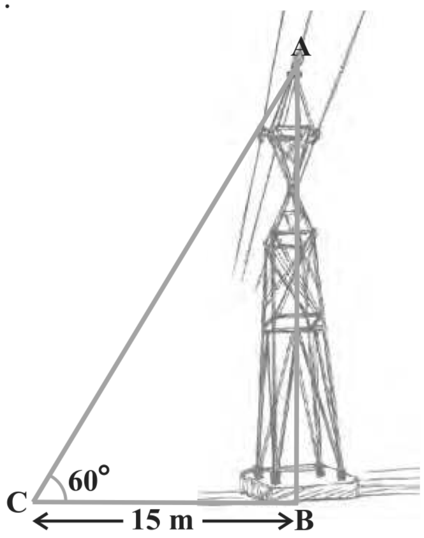
आता, AE व BC मिळविल्याने आपणास मनोऱ्याची उंची मिळते.

आता, काही सोडविलेल्या उदाहरणाचा विस्तार करत त्याचा विचार करू.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 1 : जमिनीवर एक मनोरा (Tower) लंबरूपात उभा आहे.मनोऱ्याच्या पायापासून 15 मी. लांब असलेल्या जमिनीवरील एका बिंदूपासून मनोऱ्याच्या पायापासून असणार उच्च पातळीतील कोन 60^0 असेल तर मनोऱ्याची उंची काढा.

उकल : प्रथम दिलेल्या माहितीवरुन आपण आकृती काढू (आकृती 9.4 पहा). येथे मनोरा AB दर्शवितो, मनोऱ्याच्या पायथ्याशी असणारा बिंदू CB दर्शवितो आणि उच्चपातळीतील कोन $\angle ACB$ आहे. आपणास मनोऱ्याची उंची AB काढावयाची आहे. तसेच ACB हा त्रिकोण असून $\angle B$ हा काटकोन आहे.



आकृती 9.4

उदाहरण सोडविण्यासाठी येथे AB व BC ची किंमत घेऊन आपण त्रिकोणमिती गुणोत्तर tan 60^0 (किंवा cot 60^0) चा वापर करू.

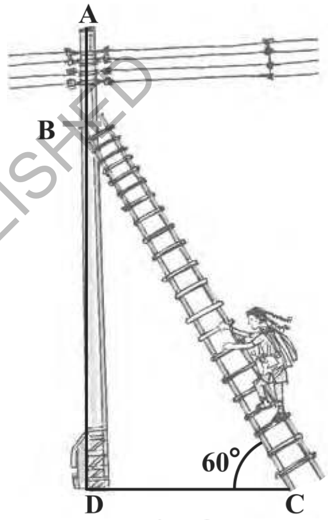
आता $$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$AB = 15\sqrt{3}$$

म्हणून, मनोऱ्याची उंची $15\sqrt{3}$ m. आहे.

उदाहरण 2 : एक कर्मचारी 5m. उंची असलेल्या विद्युत खांबावर विद्युत दुरुस्ती करण्यासाठी चढला. खांबाच्या वरील टोकापासून खाली 1.3 m. अंतरावरील बिंदूपर्यंत येऊन पोहचला. (आकृती 9.5 पहा) या बिंदूपर्यंत येण्यासाठी त्याने शिडी जमिनीशी 60^0 होण्यासाठी शिडीची लांबी किती असेल? आणि शिडीच्या पायथ्याच्या टोकापासून ते खांबापर्यंतचे अंतर किती असेल? (येथे $\sqrt{3}$=1.73 घेऊ शकता)



आकृती 9.5

उकल : आकृती 9.5 वरून, विद्युत कर्मचारी खांब AD वरील B बिंदू पर्यंत पोहचतो.

म्हणून BD = AD - AB = (5 - 1.3) m = 3.7 m येथे, BC ही शिडी असून याची लांबी काढावयाची आहे.

∴ काटकोन ΔBDC मध्ये BC हा कर्ण आहे.

आता, तुम्ही विचार करू शकता का? की, कोणत्या त्रिकोणमिती गुणोत्तराचा वापर आपण येथे करू शकतो?

म्हणून, $$\frac{BD}{BC} = \sin 60^0 \text{ किंवा } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{2}} = 4.28m \quad \text{(अंदाजे)}$$

म्हणून, शिडीची उंची 4.28m आहे.

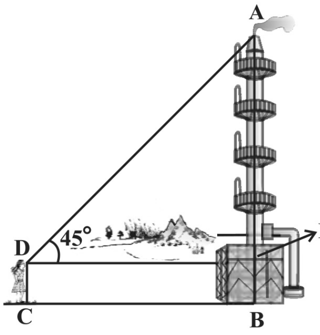
आता, $$\frac{DC}{BD} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14m \quad \text{(अंदाजे)}$$

म्हणून, तो कर्मचारी विद्युत खाबांपासून 2.14m अंतरावर जमिनीवर शिडी ठेवतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : 1.5m उंचीचा एक मनुष्य एका कारखान्याच्या चिमणी (धुरांडी) पासून 28.5m अंतरावर आहे. त्या मनुष्याच्या डोळ्यापासून त्या चिमणी पर्यंतचा उच्चपातळीतील कोन 45^0 आहे. तर त्या चिमणीची उंची किती?



आकृती 9.6

उकल : येथे AB ही चिमणी आहे CD हा मनुष्य आणि $\angle ADE$ हा उच्च पातळीतील कोन आहे. (आकृती 9.6 पहा) आकृतीत ADE हा काटकोन त्रिकोण असून $\angle E$ हा काटकोन आहे.

आकृतीवरून, $AB = AE + BE = AE + 1.5$

आणि $DE = CB = 28.5$ m

आणि DE हे दोन्ही घटक असणारे त्रिकोणमिती गुणोत्तर घेऊन AE शोधू आणि आपण त्यासाठी उच्च पातळीतील कोन घेऊ.

आता, $\tan 45^0 = \frac{AE}{DE}$

$1 = \frac{AE}{28.5}$

$\therefore \quad AE = 28.5$

म्हणून, त्या चिमणीची उंची (AB) = 28.5 + 1.5 = 30 m.

उदाहरण 4 : जमिनीवरील 'P' या बिंदूपासून 10m उंचीच्या इमारतीवरील उच्चपातळीतील कोन 30^0 आहे. जर त्या इमारतीवर ध्वज फडकवला असेल आणि ध्वजाच्या वरील टोकापासून उच्च पातळीतील कोन 45^0 असेल तर ध्वजस्तभांची उंची आणि बिंदू 'P' पासून इमारतीपर्यंतचे अंतर काढा. (येथे $\sqrt{3} = 1.732$ घ्या)

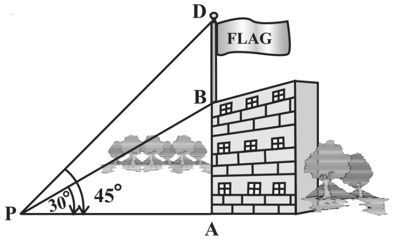
उकल : आकृती 9.7 मध्ये, इमारतीची उंची AB मानू, ध्वजस्तंभ BD आणि 'P' दिलेला बिंदू आहे. येथे PAB व PAD हे दोन काटकोन त्रिकोण आहेत. तर आपणास ध्वजस्तंभाची लांबी BD व P बिंदूपासून इमारतीपर्यंतचे अंतर PA ओळखायचे आहे.

येथे, प्रथम ΔPAB काटकोन त्रिकोण घेऊ.

$\tan 30^0 = \frac{AB}{AP}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

$AP = 10\sqrt{3}$



आकृती 9.7

म्हणून, 'P' बिंदूपासून इमारतीपर्यंतचे अंतर = $10\sqrt{3}$ m. = 17.32m.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

नंतर, DB = x m मानू, तर AD = $(10+x)$ m.

आता काटकोन ΔPAD मध्ये $\tan 45^0 = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

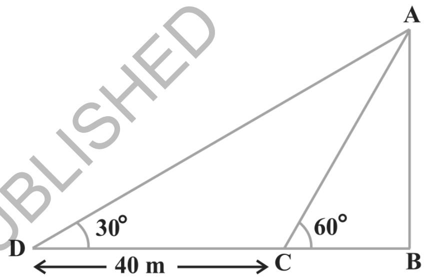
$$1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x = 10(\sqrt{3} - 1) = 7.32$$

म्हणून, ध्वजस्तंभाची उंची 7.32m. आहे.

उदाहरण 5 : जेव्हा सूर्य एका मनोऱ्यावर येतो तेव्हा तो उच्चपातळीपासून 60^0 ते 30^0 कडे जात असताना त्याच्या सावलीची लांबी 40 m ने वाढत जाते. तर त्या मनोऱ्याची उंची किती?

उकल : आकृती 9.8 मध्ये मनोऱ्याची उंची AB आणि सावलीची लांबी BC. जेव्हा सूर्याशी अंतरीत कोन 60^0 आहे. म्हणजेच, सावलीची अंतरीत असलेला उच्च पातळीतीळ कोन 60^0 आणि जेव्हा उच्चपातळीतील कोन 30^0 असतो तेव्हा सावलीची लांबी DB आहे.



आकृती 9.8

आता, BC=x m. आणि AB = h m. मानू दिलेल्या माहितीवरून BC हा DB पेक्षा 40m ने लांब आहे.

म्हणून $$DB = (40 + x)\text{m}$$

आता, ABC व ABD हे दोन काटकोन त्रिकोण असून,

Δ ABC मध्ये $$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad (1)$$

Δ ABD, मध्ये $$\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \qquad (2)$$

(1) वरून h = $x\sqrt{3}$

ही किंमत (2) मध्ये मांडू, $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40 \therefore 3x = x + 40$

$$x = 20$$

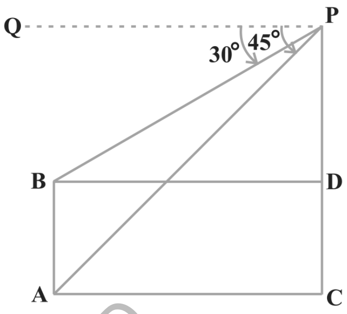
म्हणून $$h = 20\sqrt{3}$$

म्हणून, त्या मनोऱ्याची उंची $20\sqrt{3}$ m. अहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 : एक 8m. उंची असणारी इमारत आणि त्यासमोर असणारी बहुमजली इमारत यामधील निच्च पातळीतील कोन अनुक्रमे 30^0 आणि 45^0 आहे. तर त्या बहुमजली इमारतीची उंची आणि दोन्ही इमारतीमधील अंतर काढा.

उकल : आकृती 9.9 मध्ये, AB = 8m. ही इमारतीची उंची आणि PC ही बहुमजली इमारतीची उंची आहे. आपण बहुमजली इमारतीची उंची PC आणि दोन्ही इमारतीमधील अंतर AC काढू.



आकृती 9.9

आकृतीचे निरीक्षण केले असता PQ || BD ला PB ही छेदीका आहे. तर $\angle QPB$ आणि $\angle PBD$ हे व्युत्क्रम कोन असून ते समान आहेत. म्हणून $\angle PBD=30^0$ तर $\angle PAC = 45^0$

ΔPBD मध्ये $\frac{PC}{AC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ किंवा $\angle BD = PD\sqrt{3}$

तसेच ΔPAC मध्ये,

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^0 = 1$$

PC = PD + DC, म्हणून PD + DC = AC

म्हणून, AC = BD अणि DC = AB = 8m. तसेच $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$

यावरून, $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)m.$

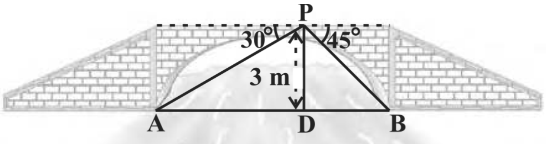
म्हणून, बहुमजली इमारतीची उंची = $[4(\sqrt{3}+1) + 8]$ m = $4(3+\sqrt{3})$ m.

आणि दोन्ही इमारतीमधील अंतर $4(3+\sqrt{3})$ m आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 7 : एका नदीवर असणाऱ्या पुलाच्या एका बिंदूपासून नदीच्या समोरासमोरील नदीकाठाशी निच्च पातळीतील कोन अनुक्रमे 30^0 आणि 45^0 आहे. जर नदीकाठावरील असलेल्या पुलाची उंची 3m. असेल तर नदीच्या पात्राची रुंदी काढा.

उकल : नदीच्या नदीकाठी विरुद्ध बाजूला असणारे दोन बिंदू A व B (आकृती 9.10) मध्ये आहेत. म्हणून, नदीच्या पात्राची लांबी AB आहे. DP = 3m. उंची असणाऱ्या पुलावरील बिंदू 'P' आहे. ΔAPB मध्ये AB = AD + DB



आकृती 9.10

आता, काटकोन ΔAPD मध्ये $\angle A=30^0$

म्हणून $\tan 30^0 = \frac{PD}{AD}$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ किंवा $AD = 3\sqrt{3}$ m.

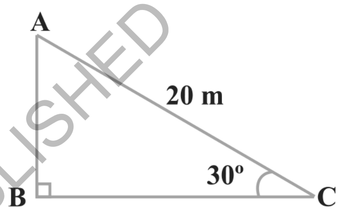
तसेच काटकोन ΔPBD मध्ये, $\angle B=45^0$,

म्हणून, $BD = PD = 3m$ आता, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1+\sqrt{3})$ m.

म्हणून, नदीची रुंदी $= 3(\sqrt{3}+1)$ आहे.

स्वाध्याय 9.1

1. सर्कसमधील एक कलाकार 20m. लांबीच्या दोरीला धरून चढत आहे. दोरीसमोर असणाऱ्या एका खांबाच्या वरील टोकाला बांधली आहे. जर जमिनीशी अंतरीत केलेला कोन 30^0 असेल तर त्या खांबाची उंची काढा (आकृती 9.11 वरून).



आकृती 9.11

2. एक झाड वाऱ्याने मोडते आणि मोडलेल्या भाग जमिनीला काटकोन त्रिकोण करतो. जर मोडलेल्या भाग जमिनीशी 30^0 कोन करतो आणि झाडाचा जमिनीला टेकलेला माथा आता त्याच्या पायापासून 8 m. अंतरावर असेल तर झाडाची उंची किती होईल?

3. एक अभियंता एका बागेच्यामध्ये मुलाना खेळण्यासाठी दोन घसरगुंडी (Slides) बांधत आहे. 5 वर्षाच्या मुलासाठी अशी घसरगुंडी बांधत आहे की, तिचे वरील टोक 1.5m. उंच असून जमिनीला ती 30^0 चाकोन करेल. तसेच त्यापेक्षा मोठ्या मुलांसाठी घसरगुंडी बांधताना तिची उंची 3m. असून जमिनीला ती 60^0 कोन करत असेल तर त्या प्रत्येक स्थितीत घसरगुंडीची उंची किती असेल?

4. एक मनोरा जमिनीच्या एका बिंदूपासून 30m. अंतरावर आहे. जर मनोऱ्याच्या उच्च पातळीतील कोन 30^0 असेल तर मनोऱ्यांची उंची काढा.

5. एक पतंग जमिनीपासून 60m. उंचीवर उडत आहे. जमिनीवरील एका बिंदूवर पतंगाची दोरी अस्थिर अशी बांधण्यात आली आहे. जर जमिनीशी पतंगाच्या दोरीमध्ये अंतरीत कोन 60^0 असेल आणि दोरी कमीजास्त न करता त्या दोरीची उंची किती?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

6. एका 30m उंच इमारतीसमोर 1.5 m. उंचीचा एक मुलगा उभा आहे. जर तो मुलगा इमारतीच्या वरील टोकाकडे पहात पुढे सरकत असून त्यामधील उच्च पातळीतील कोन 30^0 ते 60^0 होत असेल तर तो मुलगा त्या इमारतीपासून किती अंतरावर उभा आहे?

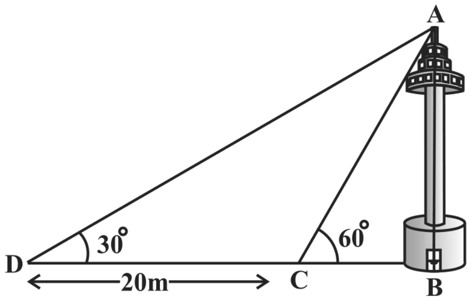
7. 20m. उंच इमारतीवर एक टेलिफोन मनो-या मधील (Telephone Tower) जमिनीवरील आणि वरील टोकामधील उच्च पातळीतील कोन अनुक्रमे 45^0 आणि 60^0 आहे. तर त्या मनोऱ्याची उंची काढा?

8. एका स्तंभावर 1.6 m. उंचीची एक मुर्ती उभी आहे. जमिनीच्या एका बिंदूपासून त्या मूर्तीच्या वरील टोकातील उच्च पातळीतील कोन 60^0 आणि त्याच बिंदूपासून स्तंभावरील टोकातील उच्च पातळीतील कोन 45^0 असेल तर त्या स्तंभाची उंची किती?

9. एका मनोऱ्याच्या पायाच्या बिंदूपासून समोरील इमारतीच्या वरील टोकातील उच्चपातळीतील कोन 30^0 आणि इमारतीच्या पायाच्या बिंदूपासून समोरील मनोऱ्याच्या वरील टोकातील उंच्चपातळीतील कोन 60^0 आहे. जर मनोऱ्याची उंची 50m. असेल, तर इमारतीची उंची किती?

10. एका 80m. रूंद रस्त्याच्या दोन बाजूला समोरासमोर दोन समान उंचीचे खांब उभे केले आहेत. जर त्या दोन्ही खाबांच्यामध्ये रस्त्यावर एक बिंदू घेऊन त्या खाबांच्या वरील टोकातील उच्च पातळीतील कोन अनुक्रमे 60^0 आणि 30^0 असेल, तर दोन्ही खांबांची उंची आणि खांबांपासून त्या रस्त्यावरील बिंदूपर्यंतचे अंतर काढा?

11. एका बँकेच्या आवारात एक टी.व्ही मनोरा उभा आहे. मनोऱ्याच्या समोर त्याच आवारात दुसऱ्या बिंदूपासून वरील टोकापर्यंत उच्च पातळीतील कोन 60^0 आहे. याच आवारात या बिंदूपासून 20m. अंतरावर इमारतीच्या जवळ दुसऱ्या बिंदूला जोडणाऱ्या रेषेच्या वरील टोकापर्यंत उच्चपातळीतील कोन 30^0 असेल (आकृती 9.12 पहा) तर त्या मनोऱ्याची उंची आणि आवाराची रुंदी काढा.

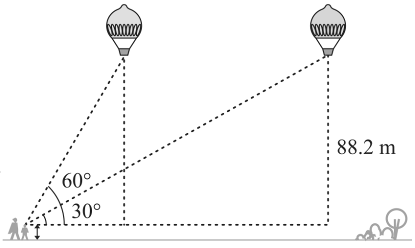


आकृती 9.12

12. 7m. उंच इमारतीच्या माथ्यावर एक केबल मनोरा आहे. जर माथ्यापासून उच्चपातळीतील कोन 60^0 आणि पायालगतचा निच्चपातळीतील कोन 45^0 असेल तर त्या मनोऱ्याची उंची किती?

13. समुद्र सपाटी पासून 75m. उंचीवर एक दिपगृह (Light House) आहे. त्या दिपगृहावरुन पाहता दोन जहाजाच्या निच्चपातळीतील कोन अनुक्रमे 30^0 आणि 45^0 आहे. जर त्या दिप गृहाच्या एकाच बाजूस दोन जहाजे एका मागे एक असतील (एका रेषेत) तर त्या दोन्ही जहाजामधील अंतर किती असेल?

14. 1.2m. उंचीची एक मुलगी जमिनीपासून 88.2m. उंचीवर असणाऱ्या क्षितीजाशी समांतर असणाऱ्या फुग्याला पाहत आहे. कोणत्याही एका क्षणी मुलीच्या डोळ्यापासून उच्चपातळीतील कोन 60^0 आणि काही वेळानंतर उच्चपातळीतील कोन 30^0 आहे (आकृती 9.13 पहा) तर त्या वेळी दोन फुग्यामधील अंतर काढा.



आकृती 9.13

15. एक सरळ राज्यमार्ग एका मनोऱ्याकडे जातो. मनोऱ्यावर उभा असणारा एक मनुष्य रस्त्यावरून जाणाऱ्या एका कारला निच्चपातळीतील 30^0 कोनाने पाहतो. ती कार मनोऱ्याकडे एक समान वेगाने जात आहे. 6 सेकंदानंतर कारचा निच्चपातळीतील कोन 60^0 होतो. तर या बिंदूपासून मिनाऱ्याजवळ पोहचण्यासाठी कारला किती वेळ लागेल?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.2 सारांश (Summary)

या प्रकरणात आपण खालील मुद्दांचा अभ्यास केला आहे.

1. (i) दृष्टीची रेषा - निरीक्षकाच्या डोळ्यापासून वस्तूवरील बिंदूपर्यंत काढलेली रेषा म्हणजेच दृष्टीची रेषा होय.

(ii) बिंदूचे निरीक्षण करता येणारा **उच्च पातळीतील कोन** (उन्नतकोन) हा दृष्टीरेषेने क्षितीज रेषेच्यावर असणाऱ्या बिंदूचे निरीक्षण करण्यासाठी केलेला कोन आहे. उच्चपातळीतील कोन क्षितीजापासून वरच्या बाजूस मोजतात.

(iii) बिंदूचे निरीक्षण करता येणारा **निच्च पातळीतील कोन** (अवनतकोन) हा दृष्टीरेषेने क्षितीज समांतर रेषेच्या खाली असणाऱ्या बिंदूचे निरीक्षण करण्यासाठी केलेला कोन आहे. आपल्या डोळ्यातील कोन क्षितीजरेषेपासून खालील बाजूस मोजतात.

2. त्रिकोणमितीच्या गुणोत्तरांचा उपयोग वस्तुची उंची किंवा लांबी किंवा दोन वस्तुमधील अंतर काढण्यासाठी होतो.

* * *

वर्तुळे

CIRCLES

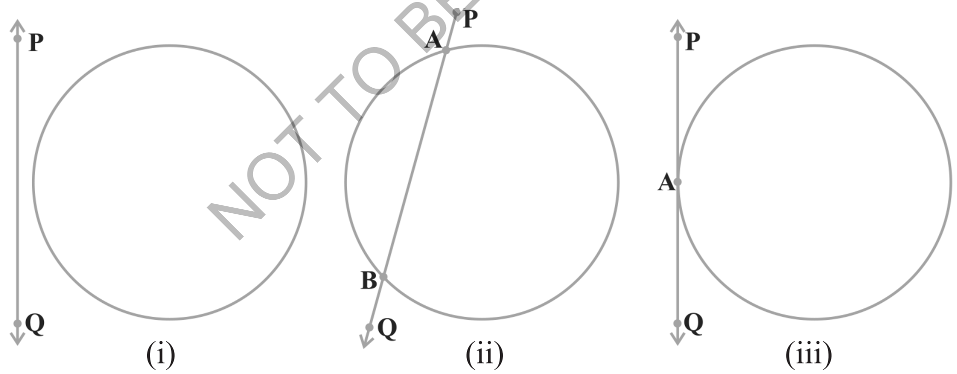
10

10.1 परिचय :

आपण इयत्ता 9 वी मध्ये शिकला आहात की, एका स्थिर बिंदूपासून समान अंतरावर (त्रिज्या) असणाऱ्या एका प्रतलातील सर्व बिंदू म्हणजेच वर्तुळ होय. याचप्रमाणे काही वर्तुळासंबंधीत घटक म्हणजेच, वर्तुळखंड (Segment), ज्या किंवा जीवा (chord), छेदिका (Sector), चाप किंवा कंस (arc) इ. चा अभ्यास तुम्ही केला आहात. आता आपण एकाच प्रतलाच्या वर्तुळात असणाऱ्या रेषेच्या वेगवेगळ्या स्थानांचे निरीक्षण करू.

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

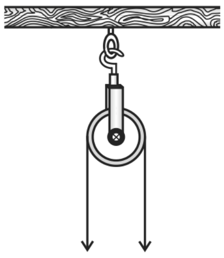
आकृती 10.1 मध्ये वर्तुळ आणि रेषा PQ चे भिन्न-भिन्न स्थान दर्शविलेले आहे.



आकृती 10.1

आकृती 10.1 (i) मध्ये, वर्तुळ आणि रेषा PQ याच्यांत एक सुद्धा समाईक बिंदू नाही. म्हणून वर्तुळाशी ती रेषा संबंधीत नाही. त्यामुळे PQ रेषेला न छेदणारी रेषा (Non-intersecting) म्हणतात. आकृती 10.1 (ii) मध्ये, वर्तुळ आणि PQ रेषेचे A व B हे सामाईक बिंदू आहेत त्यामुळे PQ या रेषेला छेदिका (Sector) असे म्हणतात. आकृती 10.1 (iii) मध्ये, वर्तुळ आणि PQ रेषेला सामाईक A हा एकच बिंदू आहे त्यामुळे तिला स्पर्शिका (Tangent) म्हणतात.

आपणाला माहीत आहे की. विहीरीतील पाणी बाहेर काढण्यासाठी कप्पी (Pulley) वापरली जाते. आकृती 10.2 चे निरीक्षण करा की, त्या कप्पीला दोन्ही बाजूनी दोरी सोडलेली आहे आणि ही दोरी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका दर्शविते.



आकृती 10.2

वरील दिलेल्या स्थितीमध्ये वर्तुळाची आणखीण कोणती सापेक्ष रेषा असणारी स्थिती होऊ शकते का? तर त्या वर्तुळाला त्या रेषेशिवाय कोणतीही अधिक सापेक्ष स्थिती होऊ शकत नाही. तर या प्रकरणात आपण स्पर्शिकेच्या अस्तित्वाचे स्थान आणि गुणधर्म पाहूया.

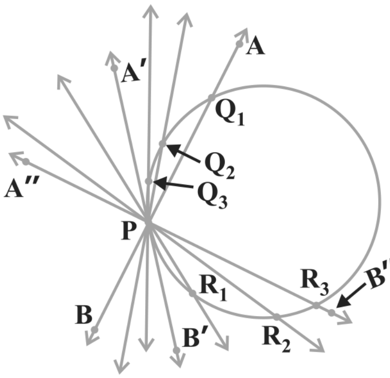
10.2 वर्तुळाच्या स्पर्शिका

मागील प्रकरणात आपण स्पर्शिका पाहिला आहात की, **वर्तुळाच्या स्पर्शिका वर्तुळाच्या परिघावरील कोणत्याही एका बिंदूत स्पर्श करतात.**

वर्तुळावरील एका बिंदूत स्पर्श करणाऱ्या स्पर्शिकेबद्दल समजून घेण्यासाठी काही खालील कृती करूया.

कृती 1 : एक वर्तुळाकार तार आणि एक सरळ तार AB, P बिंदूला अशी जोडा की, 'P' या बिंदूतून एका प्रतलाच्या दिशेने भ्रमण करेल. अशी क्रिया सतत करा की, तार AB ची P बिंदू स्थिर ठेवून सावकाशपणे वेगवेगळी स्थिती प्राप्त होईल अशी फिरवा. (आकृती 10.3 (i) पहा)

वेगवेगळ्या स्थितीत वर्तुळाकार तार, सरळ तार बिंदू P तसेच बिंदू Q_1 , Q_2 व Q_3 मध्ये छेदून जाते. दुसऱ्या स्थितीत आपण पाहू शकतो की, वर्तुळाच्या P या बिंदूत रेषा छेदतात. (AB च्या स्थितीवरून A'B' पहा) हे सर्व आपणाला असे दर्शविते की, वर्तुळाच्या एका बिंदूवरच स्पर्शिकेचे अस्तित्व आहे. बिंदूतून पुन्हा फिरविल्यानंतर AB च्या सर्व स्थितीतून P या बिंदूतून R_1, R_2 व R_3 या बिंदूत रेषा छेदतात. यावरून आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की, **वर्तुळाच्या परिघाच्या एका बिंदूतून एक आणि एकच स्पर्शिका काढता येते.**



आकृती 10.3 (i)

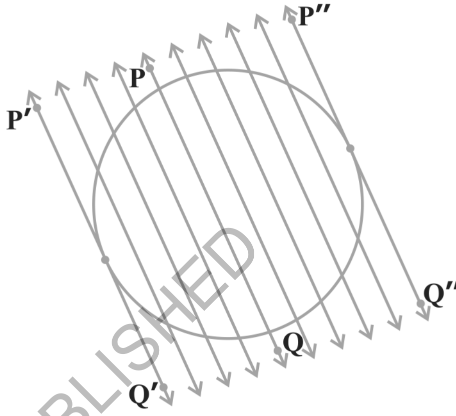
उर्वरीत क्रियांचे निरीक्षण केले असता, जसजशी AB च्या स्थितीपासून A'B' स्थितीकडे वाढत जाते तसतशी रेषा AB वर्तुळालाच्या Q_1 बिंदूकडे आणि P बिंदूकडे जवळ येते. AB ची स्थिती

* 1583 मध्ये थॉमस फिनेक या इंग्लिश गणितज्ञाने या स्पर्शिकेची संकल्पना मांडली की, 'स्पर्शिका' (Tangent) हा शब्द लॅटीन भाषेतील स्पर्शके (Tangere) या शब्दापासून आला.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

A'B' ही 'P' बिंदूतून जाणारी संपाती होऊ शकते. पुन्हा 'P' या बिंदूतून A" B" ही दक्षिणदिशेला फिरविली तर काय होईल? त्यामुळे बिंदू R_3 हा सावकाशपणे बिंदू P कडे येतो. P ला संपाती होईल असे आपण निरीक्षण करू शकतो. **जेव्हा वर्तुळाची ज्या ही वर्तुळाच्या दोन बिंदूना संपाती असते तेव्हा वर्तुळाची स्पर्शिका छेदीकेच्या भिन्न असते.**

कृती 2 : एका कागदावर एक वर्तुळ रचून वर्तुळात PQ ही छेदीका काढा. त्याचप्रमाणे PQ च्या दोन्ही बाजूला समांतर असणाऱ्या इतर छेदिका काढा. आपण पाहू शकतो की, ज्याची लांबी कमी होत जाते तेव्हा त्या ज्या वर्तुळातून कापल्या जातात. म्हणजेच जसजसे त्या रेषा वर्तुळामध्या जवळ येतात तसतसे त्या रेषा दोन बिंदूत छेदते. (आकृती 10.3 (ii) पहा) एका स्थितीत छेदिका रेषेची लांबी दर्शविते आणि दुसऱ्या बाजूला ती शून्य होत जाते. P' Q' आणि P" Q" छेदिकेची स्थिती आकृती 10.3 (ii) मध्ये पहा. ही PQ छेदिका वर्तुळाच्या स्पर्शिकेला समांतर आहे. यावरून आपणास असे समजून येते की, छेदिकेला समांतर असणाऱ्या स्पर्शिका दोनपेक्षा अधिक असू शकत नाहीत.

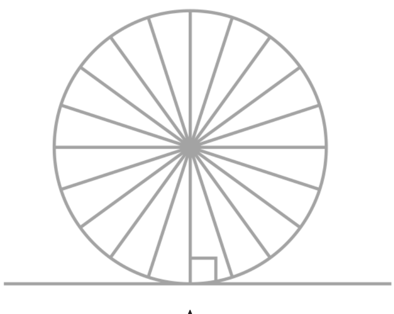


आकृती 10.3 (ii)

या कृतीवरून असे समजते की **जर वर्तुळातील जीवा संपाती असतील तर स्पर्शिका आणि छेदिकेचे एक विशेष स्थान वर्तुळामध्ये असते.**

वर्तुळावरील एक सामाईक बिंदूला त्या स्पर्शिकेचा स्पर्श बिंदू म्हणतात. (आकृती 10.1 (iii) मध्ये A हा स्पर्शाबिंदू आहे) आणि वर्तुळाच्या एकाच सामाईक बिंदूला स्पर्शिका स्पर्श करते.

आता आपण आजूबाजूचे निरीक्षण करू. आपण सायकलीचे किंवा बैलगाडीचे चाक पाहिला आहात का? त्या चाकाच्या तारा म्हणजेच त्यांच्या त्रिज्या होय. आता चाक फिरतानाचे निरीक्षण करा की. आपणास कोणत्या ठिकाणी स्पर्शिका दिसतात, का? (आकृती 10.4 पहा). तसेच जर चाक एका रेषेवर फिरत असेल तर त्या वर्तुळाला स्पर्शिका निर्माण होतील का? म्हणून, प्रत्येक स्थितीचे जर निरीक्षण केला तर. **"प्रत्येक त्रिज्या स्पर्शिकेला काटकोनात दुभागते"** (आकृती 10.4 पहा). आता या स्पर्शिकेचा गुणधर्म आपण सिद्ध करू.



A

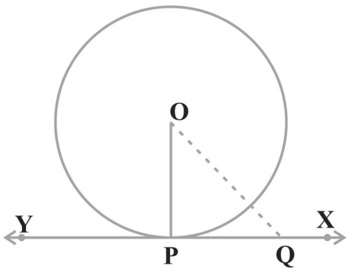
आकृती 10.4

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 10.1 : ''कोणत्याही वर्तुळाला स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या स्पर्शिकेला लंब असते.''

सिद्धता : '0' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळात XY ही स्पर्शिका 'P' बिंदूत स्पर्श करते. तर OP ही XY ला लंब असते, असे आपणास सिद्ध करावयाचे आहे.

XY वर Q एक बिंदू घेऊन OQ सांधा (आकृती 10.5 पहा).



आकृती 10.5

Q बिंदू हा वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदू आहे. (का?) कारण, जर Q हा बिंदू वर्तुळाच्या आत असता तर XY ही छेदिका झाली असती आणि ती स्पर्शिका झाली नसती.) म्हणून, OQ ही OP पेक्षा मोठी आहे.

$\therefore$ OQ > OP

हे विधान XY वरील P बिंदूला वगळता दुसऱ्या बिंदूशी सिद्ध होते. तसेच XY रेषेवरील 'O' बिंदूतून काढलेली OP ही रेषा सर्वात लहान होईल. (प्रमेय A 1.7 मध्ये दर्शविले आहे)

टिप : (1) वरील प्रमेयावरून, आपण सांगू शकतो की, वर्तुळाच्या कोणत्याही एक आणि एकाच बिंदूतून स्पर्शिका काढता येते.

(2) वर्तुळाच्या वर्तुळमध्यापासून स्पर्शबिंदूपर्यंत काढलेल्या त्रिज्येला सामान्य रेषा असे सुद्धा म्हणतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 10.1

1. एका वर्तुळाला एकूण किती स्पर्शिका काढता येतात?

2. खालील मोकळ्या जागा भरा.

(i) वर्तुळावरील एका बिंदूत काढता येणाऱ्या स्पर्शिकांची संख्या ______

(ii) वर्तुळाच्या दोन बिदूनां छेदून जाणाऱ्या रेषेस ______ म्हणतात.

(iii) एका व्यासाच्या अंत्यबिंदूतून वर्तुळाला ______ समांतर स्पर्शिका होऊ शकतात.

(iv) वर्तुळ आणि त्याच्या स्पर्शिकेचा समाईक बिंदुला ______ म्हणतात.

3. 5cm. त्रिज्येच्या वर्तुळात P बिंदूतून काढलेली स्पर्शिका PQ असून 'O' वर्तुळमध्यातून Q बिंदूपर्यंत सांधली असता OQ = 12cm. असेल तर PQ ची लांबी-

(A) 12 cm. (B) 13 cm. (C) 8.5 cm. (D) $\sqrt{119}$ cm.

4. एक वर्तुळ रचून त्या वर्तुळात एक स्पर्शिका आणि दुसरी छेदीका अशी रचा की दोन्ही ही एकमेकांना समांतर असतील.

10.3 वर्तुळाच्या एकाच बिंदूतून काढण्यात येणाऱ्या स्पर्शिकेंची संख्या.

एका वर्तुळाच्या एकाच बिंदूतून काढण्यात येणाऱ्या स्पर्शिकेची संख्या तयार करण्यास पुढील कृती करू.

कृती 3 : एक वर्तुळ रचून त्यांच्या आतमध्ये 'P' बिंदूची रचना करा. या बिंदूपासून आपण वर्तुळाला स्पर्शिका काढू शकता का? यावरून तुम्ही पाहू शकता की. या 'P' बिंदूतून वर्तुळात काढलेल्या रेषा वर्तुळाला दोन बिंदूतून छेदून जातात. म्हणून, जर वर्तुळाच्या आत एखादा बिंदू असेल तर आपण वर्तुळाला त्या बिंदूतून स्पर्शिका काढू शकत नाही. (आकृती 10.6 (i) पहा)

त्यानंतर 'P' हा बिंदू वर्तुळावरच्या परिघावर घेऊन स्पर्शिका रचा. आपण याआगोदरच निरीक्षण केला आहात की, वर्तुळाच्या एका बिंदूतूनच वर्तुळाला एकच स्पर्शिका काढता येते. (आकृती 10.6 (ii) पहा)

शेवटी 'P' हा बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर घेऊन वर्तुळाला स्पर्शिका रचा. यावरून काय निरीक्षण कराल? यावरून आपण पाहू शकतो की, बाहेरील बिंदूने वर्तुलाला दोन स्पर्शिका रचता येतात. (आकृती 10.6 (iii) पहा)

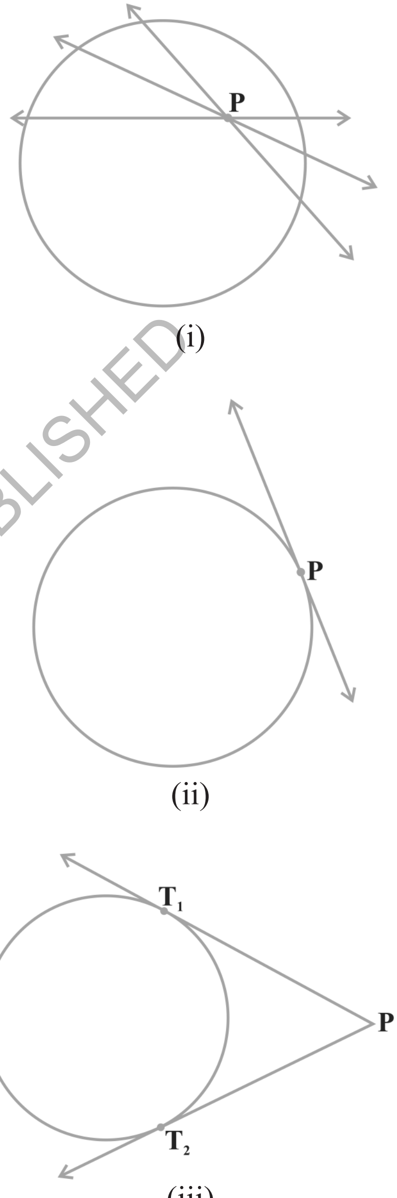
यावरुन आपण खालील निष्कर्ष काढू शकतो.

निष्कर्ष 1 : वर्तुळाच्या आत जर बिंदू असेल तर वर्तुळाला कोणतीही स्पर्शिका काढता येत नाही.

निष्कर्ष 2 : वर्तुळाच्या परिघावर एका बिंदूतून एक आणि एकच स्पर्शिका काढता येते.

निष्कर्ष 3 : वर्तुळाच्या बाह्याबिंदूतून वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतात.

आकृती 10.6 (iii) मध्ये PT_1 आणि PT_2 या स्पर्शिका अनुक्रमे T_1 व T_2 बिंदूत स्पर्श करतात.



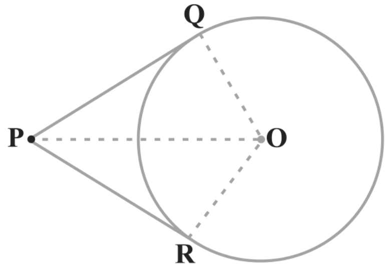
आकृती 10.6

वर्तुळाच्या 'P' या बाह्यबिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या रेषाखंडाच्या लांबीला स्पर्शिकेची लांबी असे म्हणतात.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 10.6 (iii) मध्ये 'P' या बाह्यबिंदूतून वर्तुळाच्या PT_1 आणि PT_2 स्पर्शिकेची लांबी आहे. या स्पर्शिकेची लांबी काढू शकाल का? तर PT_1 आणि PT_2 यांची लांबी समान असू शकेल का? हे विधान सिद्ध करण्यासाठी आपण खालील प्रमेय सोडवू.

प्रमेय 10.2 : वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिका समान असतात.



आकृती 10.7

सिद्धता : '0' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळात P या बाहयबिंदूतून PQ व PR या दोन स्पर्शिका काढल्या आहेत. (आकृती 10.7 पहा) तर आपणास PQ = PR हे सिद्ध करावयाचे आहे.

आता OP, OQ व OR सांधले. त्यानंतर $\angle OQP$ व $\angle ORP$ हे काटकोन आहेत. कारण स्पर्शिका आणि त्रिज्या यांच्या गुणधर्मावरून आणि प्रमेय 10.1 वरून ते दोन काटकोन त्रिकोण आहेत. आता, काटकोन त्रिकोण OQP व ORP मध्ये

$OQ = OR$ (वर्तुळाच्या समान त्रिज्या)

$OP = OR$ (सामाईक)

$\therefore \Delta OQP \cong \Delta ORP$ (कर्णभुजा गृहीतक)

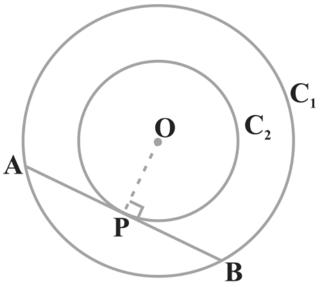
$\therefore PQ = PR$ (एकरूप त्रिकोणाचे गुणधर्म)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप : 1. पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार हा प्रमेय सुद्धा सिद्ध करू शकतो म्हणजेच, $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (कारण $OQ = OR$)

2. तसेच, $\angle OPQ = \angle OPR$ म्हणजेच $\angle QPR$ चा कोनदुभाजक OP आहे म्हणून. दोन स्पर्शिकेचा मध्य हा कोन दुभाजक आहे. आता काही उदाहरणे सोडवू.

उदाहरण 1 : ''दोन समकेंद्रीय वर्तुळामध्ये मोठ्या वर्तुळाची जीवा ही लहान वर्तुळाची स्पर्शिका असून त्रिज्या ही त्या जीवेला दुभागते''. हे सिद्ध करा.



आकृती 10.8

उकल : C_1 आणि C_2 या दोन समकेंद्रीय वर्तुळाचा वतुळमध्य 'O' असून AB ही मोठ्या वर्तुळाची C_1 जीवा आणि C_2 ही लहान वर्तुळाची स्पर्शिका 'P' बिंदूत स्पर्श करते. (आकृती 10.8 पहा) आपणास AP = BP सिद्ध करायवचे आहे.

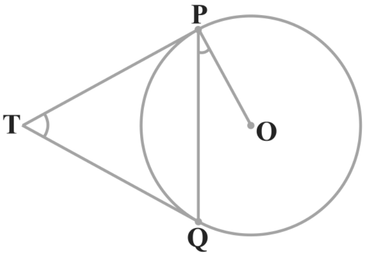
आता OP साधू, तर OP ही त्रिज्या असून AB ही C_2 ची स्पर्शिका P बिंदूत स्पर्श करत आहे. म्हणून प्रमेय 10.1 वरून.

$$OP \perp AB$$

आता, C_1 या वर्तुळाची AB जीवा असून OP ⊥ AB आहे. म्हणून वर्तुळमध्याचा दुभाजक जीवेवर लंब असून OP हा AB जीवाचा दुभाजक आहे. ∴ OP ⊥ AB

∴ AP = BP

उदाहरण 2 : 'O' वर्तुमध्य असणाऱ्या वर्तुळाला 'T' या बिंदूतून वर्तुळाला TP व TQ या दोन स्पर्शिका आहेत तर, सिद्ध करा $\angle PTQ = 2\angle OPQ$



आकृती 10.9

उकल : 'O' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळात 'T' हा बाह्यबिंदू असून TP व TQ या स्पर्शिका P व Q या बिंदूत स्पर्श करतात. (आकृती 10.9 पहा) तर, आपणास $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ सिद्ध करायचे आहे.

येथे $\angle PTQ = \theta$ मानू

आता, प्रमेय 4.2 वरून TP = TQ म्हणून TQP हा समद्विभूज त्रिकोण आहे.

$$\therefore \quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^0 - \theta) = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$$

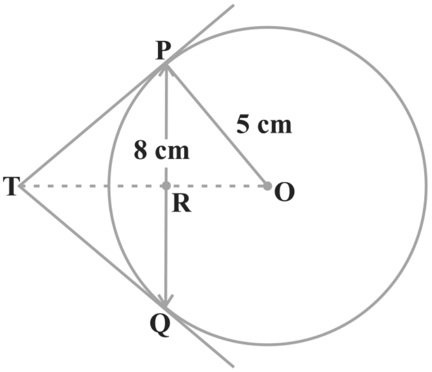
तसेच, प्रमेय 4.1 वरून, $\angle OPT = 90^0$

$$\therefore \quad \angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^0 - \left[90^0 - \frac{1}{2}\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

$$\therefore \quad \angle PTQ = 2\angle OPQ$$

उदाहरण 3 : 5cm. त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळामध्ये PQ जीवेची लांबी 8cm. आहे. जर T या बिंदूपासून P व Q या स्पर्शिका असतील तर TP ची लांबी काढा.



आकृती 10.10

उकल : OT सांधा 'R' हा PQ चा मध्य आहे. ΔTPQ हा समद्विभूज असून $\angle PTQ$ चा कोन दुभाजक TO आहे. म्हणून OT ⊥ PQ तसेच OT हा PQ चा दुभाजक असून PR = RQ = 4cm होईल.

तसेच $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$

आता, $\angle TPR + \angle RPO = 90^0 = \angle TPR + \angle PTR$ ----------- (का?)

म्हणून, $\angle RPO = \angle PTR$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

म्हणजेच को.को. वरून TRP हा काटकोन त्रिकोण PRO या काटकोन त्रिकोणाशी समान आहे.

$\therefore \quad \frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO} \qquad \therefore \quad \frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ किंवा $TP = \frac{20}{3} cm$

टीप : पायथागोरसाच्या प्रमेयावरून आपण TP सुद्धा काढू शकतो,

तर. $TP = x$ आणि $TP = y$ मानू

$x^2 = y^2 + 16$ (काटकोन ΔPRT वरून) - (1)

$\therefore$ $x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (काटकोन ΔOPT वरून) - (2)

(1) व (2) वजा करू.

$25 = 6y - 7$ किंवा $y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

म्हणून $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16 \times 25}{9}$ ((1) वरून)

किंवा $x = \frac{20}{3}$

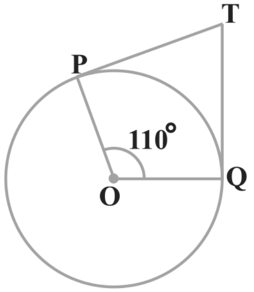
स्वाध्याय 10.2

प्रश्न 1 ते 3 मध्ये योग्य उत्तरे शोधून कारणे द्या.

1. वर्तुळमध्यापासून Q बिंदूपर्यंतचे अंतर 25cm. आणि Q बिंदूपासून स्पर्शिकेची लांबी 24cm असेल तर वर्तुळाची त्रिज्या -

   (A) 7cm. (B) 12 cm.

   (C) 15 cm. (D) 24.5 cm.



आकृती 10.11

2. आकृती 10.11 मध्ये जर 'O' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळाच्या TP व TQ स्पर्शिका असतील आणि $\angle POQ = 110^0$ असेल तर $\angle PTQ =$ _____

   (A) 60^0 (B) 70^0 (C) 80^0 (D) 90^0

3. जर 'O' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळात PA व PB स्पर्शिका 'P' बिंदूत एकत्र मिळतात व तेथे स्पर्शिकांनी अंतरीत केलाला कोन 80^0 असेल तर $\angle POA =$ _____

   (A) 50^0 (B) 60^0 (C) 70^0 (D) 80^0

4. सिद्ध करा की, वर्तुळाच्या व्यासाच्या दोन्ही टोकातून काढलेल्या स्पर्शिका परस्परांना समांतर असतात.

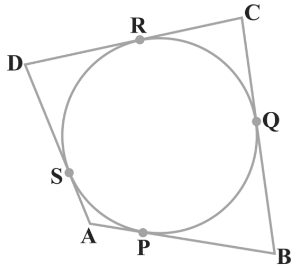
5. सिद्ध करा, स्पर्शिकेच्या स्पर्श बिंदूतून काढलेला लंब वर्तूळमध्यातून जातो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

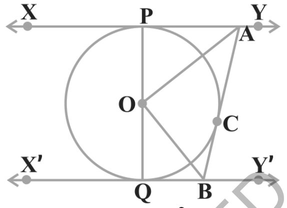
6. जर वर्तुळमध्यापासून 5cm. अंतरावरील बिंदूतून 4cm. लांबीची स्पर्शिका वर्तुळाला काढलेली असेल तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

7. जर समकेंद्रीय वर्तुळांची त्रिज्या अनुक्रमे 5cm. आणि 3cm. असेल तर मोठ्या वर्तुळाची जीवा आणि लहान वर्तुळाच्या स्पर्शिकेची लांबी काढा.

8. ABCD हा चक्रिय चौकोन रचा (आकृती 10.12 पहा) व AB + CD = AD + BC असे सिद्ध करा.



आकृती 10.12

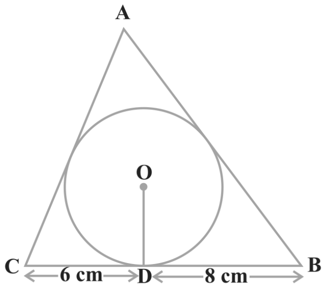


आकृती 10.13

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. आकृती 10.13 मध्ये 'O' वर्तुळमध्य असणाऱ्या वर्तुळाला XY व X^1Y^1 या समांतर स्पर्शिका आहेत आणि वर्तुळाला 'C' बिंदूत स्पर्श करणारी AB स्पर्शिकेमधील A हा XY ला आणि B हा X^1Y^1 ला छेदतो. तर $\angle AOB = 90^0$ असे सिद्ध करा.

10. सिद्ध करा की, वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकेतील कोन आणि वर्तुळमध्याशी अंतरीत केलेला कोन एकमेकांचे पूरक असतात.



आकृती 10.14

12. 4cm. त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळाला ABC हा परिवर्तुळ त्रिकोण आहे. वर्तुळमध्यातून BC वर काढलेला लंब OD हा BC चे दोन भाग करतो आणि D बिंदूपासून BD व DC अनुक्रमे 8cm. आणि 6cm. आहेत. (आकृती 10.14 पहा) तर AB व AC काढा.

13. सिद्ध करा, 'चक्रिय चौकोनाचे सम्मुख कोन पूरक असतात'.

10.4 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा अर्थ
2. वर्तुळामध्ये स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या स्पर्शिकेला लंब असते.
3. वर्तुळाला बाह्यबिंदूतून काढलेल्या दोन स्पर्शिकांची लांबी समान असते.

***

वर्तुळाशी संबंधीत क्षेत्रफळे

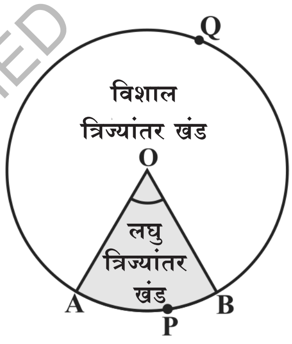
AREAS RELATED TO CIRCLES

B3Q9N5

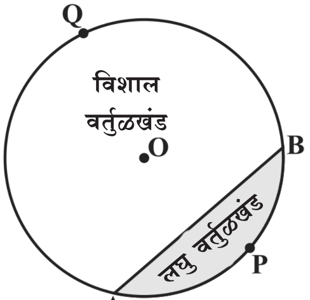
11

11.1 त्रिज्यांतरखंड आणि वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ.

तुम्ही मागील इयत्तांमध्ये **त्रिज्यांतर** खंड (Sector) आणि **वर्तुळखंड** (Segment of Circle) यांच्याशी परिचित आहात. तुम्हाला आठवत असेल की वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि वर्तुळ परिघाचा एक भाग यांच्यात परिबद्ध असलेल्या वर्तुळाच्या भागाला त्रिज्यांतर खंड म्हणतात. आकृती 11.1 मध्ये छायांकीत केलेला भाग OAPB हा O वर्तुळाचा एक त्रिज्यांतर खंड आहे. ∠AOB हा त्रिज्यांतर खंडाचा कोन म्हणून ओळखला जातो. याच आकृतीत छायांकीत नसलेला OAQB हा भाग देखील वर्तुळाचा त्रिज्यांतर खंड आहे. स्पष्ट कारणानुसार OAPB ला **लघुत्रिज्यांतर खंड (Minor Sector)** आणि OAQB ला **विशाल त्रिज्यांतर खंड (Major sector)** म्हणतात. यात आपण पाहू शकता की विशाल त्रिज्यांतर खंडाचा कोन 360^0-∠AOB अहे. आता आकृती 11.2 पहा ज्यात O वर्तुळ केंद्र असलेल्या वर्तुळात AB एक ज्या आहे. त्यात APB हा छायंकीत भाग वर्तुळ खंड आहे. अछायांकीत असळेला AQB भाग AB ज्यामुळे तयार आणखी एक वर्तुळ खंड आहे स्पष्ट कारणानुसार APB का लघुवर्तुळखंड आणि AQB का विशाल वर्तुळ खंड म्हणतात.



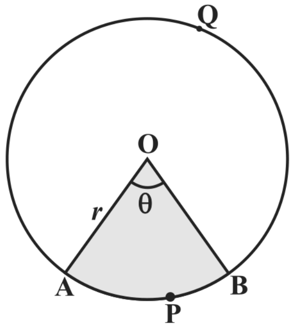
आकृती 11.1



आकृती 11.2

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

टीप : वेगळी सुचना केली नसेल तर वर्तुळखंड आणि त्रिज्यांतर खंड अर्थ क्रमशः लघुवर्तुळखंड आणि लघुत्रिज्यांतरखंड असा घ्यावा. वरील मुद्यांच्या आधारे त्यांच्यातील संबंध (अथवा सुत्र) यांच्या सहाय्याने क्षेत्रफळ कसे काढावे हे जाणून घेऊ.



आकृती 11.3

समजा O वर्तुळमध्य आणि r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात OAPB हा एक त्रिज्यांतर खंड आहे. [(आकृती 11.3 पहा). ∠AOB चे अंशीय (degree)] मापन θ आहे असे माना.

तुम्ही जाणता की एका वर्तुळाचे (खरोखर एक वर्तुळाकार क्षेत्र अथवा चकती (disc) क्षेत्रफळ πr^2 असते.

ह्या पद्धतीत या वर्तुळाकृती भागाला O वर्तुळमध्यावर 360^0 चा कोन बनविणारा (अंशीय मापन 360^0) एक त्रिज्यांतर खंड मानला आहे. त्यानंतर एकक पध्दतीचा (unitary method) वापर करून, आपण त्रिज्यांतर खंड OAPB चे क्षेत्रफळ खाली दर्शविलेल्या पद्धतीने काढू शकतो.

जेव्हां मध्यावर असलेल्या कोनाचे अंशीय मापन 360^0 आहे तर त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफल = πr^2

त्यामुळे, जेव्हां मध्यावर बनलेल्या कोनाचे अंशीय मापन 1 असेल तर त्या त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ = $\frac{\pi r^2}{360}$

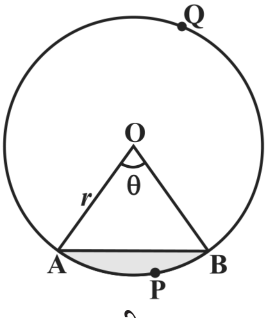
म्हणून जर मध्यावर असलेल्या कोनाचे अंशीय मापन θ असेल तर त्या

त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ $= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ह्या प्रमाणे वर्तुळाच्या त्रिज्यांतर खंडाच्या क्षेत्रफळासाठी खाली दिलेला संबंध (अथवा सूत्र) स्पष्ट करू शकतो.

कोन θ असलेल्या त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ = $\mathbf{\frac{\theta}{360} \times \pi r^2}$

यात r ही वर्तुळाची त्रिज्या आणि θ हे त्रिज्यांतर खंडाचा अंशात्मक कोन आहे.



आकृती 11.4

आता आपल्या मनांत एक स्वाभाविक प्रश्न निर्माण होतो की त्रिज्यांतर खंडाचा एक संगत कंस APB ची लांबी किती ते काढू शकतो का? होय, आपण काढू शकतो. एकक पद्धत आणि संपूर्ण वर्तुळाची (360^0 कोन असलेल्या) लांबी $2\pi r$ घेऊन आपण चाप

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अथवा कंस APB ची असलेली लांबी $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$ ने मिळवू शकतो.

म्हणून, त्रिज्यांतर खंडाच्या संगत कंसाची लांबी = $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$

आता आपण 0 वर्तुळमध्य आणि O त्रिज्या असलेल्या. वर्तुळखंड r च्या क्षेत्रफळाचा विचार करू. (आकृती 5.7 पहा) तुम्ही पाहू शकता की वर्तुळखंड APB चे क्षेत्रफळ

= त्रिज्यांतर खंड - O APB चे क्षेत्रफळ - ΔOAB ने क्षेत्रफळ

$=\frac{\theta}{360}\times \pi r^2 - \Delta OAB$ चे क्षेत्रफळ

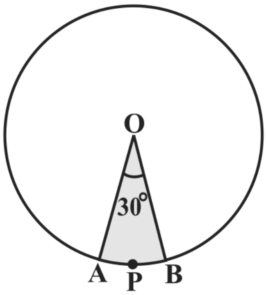
टीप : आकृती 11.5 आणि 11.6 चे निरीक्षण केले असता तुम्हाला समजेल की

विशाल त्रिज्यांतरखंड OAQB चे क्षेत्रफळ = πr^2 – लघु त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ

आणि विशाल वर्तुळ खंड AQB चे क्षेत्रफळ = πr^2 – लघु वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ.

आता अपण या संकल्पना (किंवा परिणाम) जाणून घेण्यासाठी काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 1 : 4 cm. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात 30^0 चा कोन असलेल्या त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ काढा. त्याच प्रमाणे त्याला संगत असलेल्या विशाल त्रिज्यांतरखंडाचे देखील क्षेत्रफळ काढा. (π=3.14 किंमत घ्या)



आकृती 11.5

उकल : त्रिज्यांतरखंड OAPB दिला आहे. (पहा आकृती 11.5)

त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ $=\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$

$=\frac{30}{360}\times 3.14\times 4\times 4\ cm^2$

$=\frac{12.56}{3}cm^2 = 4.19cm^2$

(अंदाजे)

संगत विशाल त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ

= πr^2 - OAPB त्रिज्यांतरखंडाचे क्षेत्रफळ

= $(3.14 \times 16 - 4.19)\ cm^2$

= $46.05\ cm^2 = 46.1 cm^2$ (अंदाजे)

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

पर्यायी पद्धतीनुसार

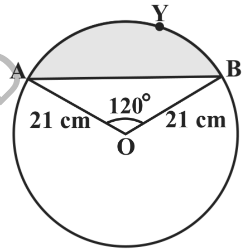
विशाल त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ $= \frac{360-\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{360-30}{360} \times 3.14 \times 16 cm^2$

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 cm^2 = 46.05 cm^2$

$= 46.1 cm^2$ (अंदाजे)

उदाहरणे 2 : आकृती 11.6 मध्ये दर्शविलेल्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा, ज्यात वर्तुळाची त्रिज्या 21cm. आणि $\angle AOB = 120^0$ अहे. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या)



आकृती 11.6

उकल : वर्तुळखंड AYB चे क्षेत्रफळ

= त्रिज्यांतर खंड OAYB चे क्षेत्रफळ - ΔOAB चे क्षेत्रफळ
(1)

आता, त्रिज्यांतरखंड OAYB चे क्षेत्रफळ $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2 = 462 cm^2$ (2)

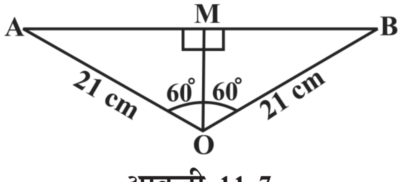
ΔOAB चे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी, आकृती 12.10 मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे $OM \perp AB$ काढा.

ध्यानांत घ्या $OA = OB$ आहे RHS च्या समरूपतेनुसार $\Delta AMO = \Delta BMO$

म्हणून M हा AB ज्याचा मध्यबिंदू आहे आणि $\angle ROM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

$OM = x$ मानू

म्हणून ΔOMA वरुन $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$



आकृती 11.7

अथवा $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \left(\cos 60^0 = \frac{1}{2} \right)$

अथवा $x = \frac{21}{2}$

म्हणून $OM = \frac{21}{2} cm$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सुद्धां $\frac{AM}{OA} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

म्हणून $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

त्याकारणाने $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ cm $= 21\sqrt{3}$cm

म्हणून ΔOAB चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ cm^2

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$cm^2 (3)

यावरून वर्तुळखंड AYB चे क्षेत्रफळ $= \left[462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right]$cm^2 [(1), (2) आणि (3) वरून]

$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})cm^2$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.1

(वेगळी सूचना नसेल तेथे $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्यावी)

1. 6 cm. त्रिज्या असलेल्या एक वर्तुळात 60^0 कोन असलेल्या एका त्रिज्यांतरखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

2. एका वर्तुळाचा परीघ 22 cm. आहे. त्या वर्तुळाच्या चतुर्थांश (quadrant) भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

3. एका घड्याळातील मिनिट काट्याची लांबी 14 cm. आहे. 5 मिनिटाच्या कालवधीत या काटयाने मार्गक्रमण केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ किती ते काढा.

4. 10 cm त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळात एक ज्या वर्तुळमध्यावर एक काटकोन अंतरीत करते. खालील संबंधीत घटकांचे क्षेत्रफळ काढा

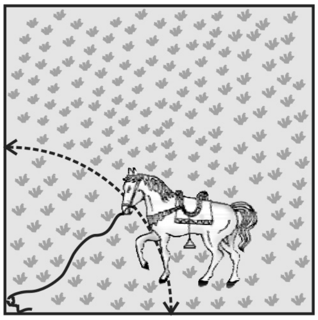
   (i) लघुवर्तुळ खंड (ii) विशाल त्रिज्यांत्तरखंड ($\pi = 3.14$ ही किंमत घ्या)

5. 21 cm. त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळात एक कंस वर्तुळमध्यावर 60^0 चा कोन अंतरीत करतो तर

   (i) कंसांची लांबी, (ii) त्या कंसाद्वारे बनलेल्या त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ, (iii) त्यातील 'ज्या' पासून बनलेल्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

6. 15 cm. त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळात एका ज्यामुळे वर्तुळ मध्यावर 60^0 चा कोन अंतरीत होतो. तर त्यातील लघु वर्तुळखंड आणि विशाल वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π= 3.14 आणि $\sqrt{3}$=1.73 ह्या किंमती घ्या)

7. त्रिज्या 12 cm. असलेल्या एका वर्तुळात एक ज्या वर्तुळकेंद्रात 120^0 चा कोन अंतरीत करते. तर संगत वर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळ काढा (π= 3.14 आणि $\sqrt{3}$=1.73 ह्या किंमती घ्या)



आकृती 11.8

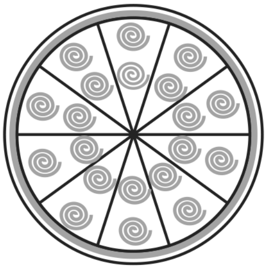
8. 15 m. बाजूंची लांबी असलेल्या एक चौरसाकृती मैदानातील एका कोपऱ्यात बसविलेल्या खुंटीला एक घोडा 5 m. लांबीच्या दोराने बांधले आहे. (आकृती 11.8 पहा) तर

(i) घोडा चरू शकेल इतक्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा आणि (ii) 5 m. लांबीच्या दोरा ऐवजी 10 m. लांबीचा दोर बांधला तर घोड्याच्या चरावयाच्या क्षेत्रात झालेली वाढ किती ते काढा. (π= 3.14 ही किंमत घ्या?)

9. एक वर्तुळाकार ब्रुच (brooch) (साडीपीनला) चांदीच्या तारेपासून बनविली आहे जिचा व्यास 35 mm. आहे. तारेपासून वर्तुळात 5 व्यास बनविले आहेत. ज्यामुळे त्यात 10 त्रिज्यांतर खंड बनतील जे समान आकारमानाचे असतील. आकृती 11.9 पहा. तर-

(i) आवश्यक असलेल्या चांदीच्या तारेची लांबी आणि

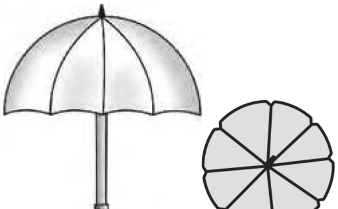
(ii) ब्रुचच्या प्रत्येक त्रिज्यांतरखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 11.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10. एका छत्रीला समान अंतरावर 8 काड्या बसविल्या आहेत. (आकृती 11.10 पहा) छत्रीला 45 cm. त्रिज्या असलेले एक वर्तुळ माना आणि दोन काडयामधील भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

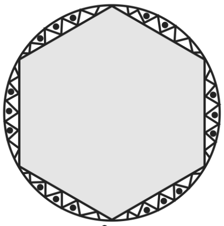


आकृती 11.10

11. एका कारला दोन वायपर (wiper) आहेत जे कधीही एकमेकाला स्पर्श करत नाहीत. वायपरच्या प्रत्येक पात्याची लांबी 25 cm. आहे आणि ते 115^0 चा कोन करून काचेची स्वच्छता करतात. पात्यांच्या एका आवाक्यात किती भागाची स्वच्छता होते त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

12. समुद्राच्या पाण्यात असलेल्या खडकाची सूचना देण्यासाठी एक दीपगृह (light house) 80^0 च्या कोनातून त्रिज्यांतर खंडाच्या आकारात 16.5 km. अंतरापर्यंत लाल रंगाचा प्रकाश पसरवितो, तर जहाजांना धोक्याचा इशारा पोहोचविणाऱ्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

13. आकृती 11.11 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे टेबलवर घातल्या जाणाऱ्या गोल आवरणावर सहा समान डिझाईन बनविले आहेत. त्या गोल आवरणाची त्रिज्या 28 cm. आहे. तर प्रत्येक चौरस सेंटीमीटरला ₹ 0.35 प्रमाणे ते डिझाईन बनविण्यास किती खर्च येईल ते काढा.



आकृती 11.11

14. खालीलपैकी योग्य उत्तर निवडा.

त्रिज्या R असलेल्या त्रिज्यांतरखंडाचे क्षेत्रफळ ज्याचा कोन P^0 आहे.

(A) $\frac{P}{180}\times 2\pi R$ (B) $\frac{P}{180}\times \pi R^2$ (C) $\frac{P}{360}\times 2\pi R$ (D) $\frac{P}{720}\times 2\pi R^2$

11.2 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. त्रिज्या r असलेल्या वर्तुळाचा परीघ = $2\pi r$.

2. वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2.

3. त्रिज्या r असलेल्या एक त्रिज्यांतर खंड आणि ज्याचा कोन θ आहे तर त्याच्या चापाची/कंसाची लांबी $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$ असते.

4. त्रिज्या r असलेल्या एक त्रिज्यांतर खंड ज्याचा कोन अंशामध्ये θ आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ $\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$ असते.

5. वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = संगत त्रिज्यांतर खंडाचे क्षेत्रफळ - संगत त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ.

***

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पृष्ठफळ आणि घनफळ

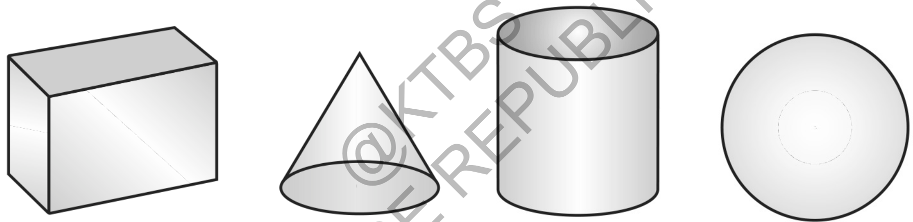
SURFACE AREA AND VOLUMES

E5R7D8

12

12.1 परिचय :

इयत्ता IX पासून तुम्ही काही घन आकृत्या जशा की घनायत, शंकू, दंडगोल, गोल (आकृती 12.1 पहा) यांच्याशी परिचित झाला आहात. त्यांचे पृष्ठफळ आणि घनफळ कसे काढावे हे देखील शिकला आहात.

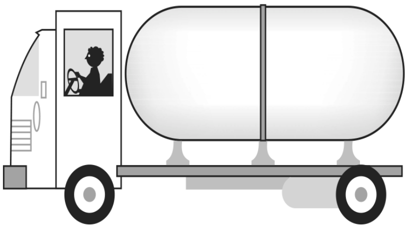


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 12.1

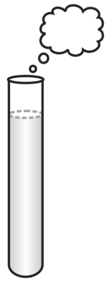
आपल्या दैनंदिन जीवनात आपण अशा काही घनवस्तू पहातो ज्या दोन अथवा त्यापेक्षा जास्त घनवस्तूंच्या संयोगाने बनलेल्या असतात.

तुम्ही ट्रकच्या मागे बसविलेला कंटेनर (Container) नक्कीच पाहिला असाल (आकृती 12.2 पहा). ज्याच्यातून तेल अथवा पाणी एका ठिकाणाहून दुसऱ्या ठिकाणी नेले जाते. त्याच्या आकार वर उल्लेख केलेल्या कोणत्याही घनाशी मिळता आहे का? तुम्ही ओळखला असाल की त्याची रचना एका दंडगोलाच्या दोन्ही बाजूला एक एक अर्धगोल बसविल्याने झालेली असते.



आकृती 12.2

त्याचप्रमाणे आकृती 12.3 मध्ये दर्शविलेली वस्तू तुम्ही पाहिला असाल. तुम्ही त्याचे नाव सांगू शकाल कां? ती एक परिक्षानळी (Test tube) आहे, बरोबर! त्याचा वापर तुम्ही तुमच्या विज्ञान प्रयोगशाळेत केला असाल. ही परीक्षानळी देखील एक दंडगोल (वृत्ताचिती) आणि एक अर्धगोल यांच्या एकत्रीकरणाने बनली आहे. त्याच प्रमाणे तुम्ही प्रवास करताना विविध घनाकृतींच्या संयोगाने बनलेल्या मोठ्या आणि सुंदर इमारती अथवा स्मारके पाहिला असाल.



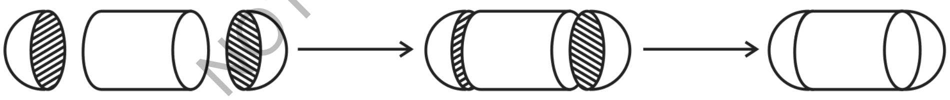
आकृती 12.3

काही कारणाने तुम्हाला अशा वस्तुंचे पृष्ठफळ किंवा घनफळ किंवा घनता काढावयाची झाल्यास, तुम्ही कशी काढाल? तुम्ही या आधी शिकलेल्या कोणत्याही घनाकृतीशी वर्गीकरण करु शकणार नाही.

या प्रकरणामध्ये तुम्ही अशा वस्तूंचे पृष्ठफळ आणि घनफळ कसे काढावे ते शिकाल.

12.2 घनांच्या एकत्रिकरणाने बनलेल्या वस्तूंचे पृष्ठफळ.

चला आता आपण आकृती 12.2 मध्ये दर्शविलेल्या कंटेनरचा विचार करू. अशा प्रकारच्या घनाकृतींचे पृष्ठफळ कसे काढावे? आता अशा प्रकारची एक नवीन समस्या समोर आल्यानंतर आम्ही प्रथम या समस्येचे लहान भाग करता येतील का, ज्यांची उकल आम्ही या आधी शिकला आहोत या रचनेत आपण पहातो की एका वृत्तचितीला दोन्ही बाजूला दोन अर्धगोल बसविले आहेत. सर्व भाग एकत्रीत केल्यानंतर आकृती 12.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक घनाकृती बनेल.



आकृती 12.4

जर आपण नविन बनलेल्या वस्तुला पाहिले तर, आम्हाला दोन अर्धगोल आणि एक वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठ दिसून येते.

यावरून, नविन घनाचे **संपूर्ण** पृष्ठफळ हे प्रत्येक भागाच्या वक्रपृष्ठाच्या बेरजेशी समान आहे.

नविन घनाचे संपूर्ण पृष्ठफळ = एका अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ + वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ + दुसऱ्या अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ.

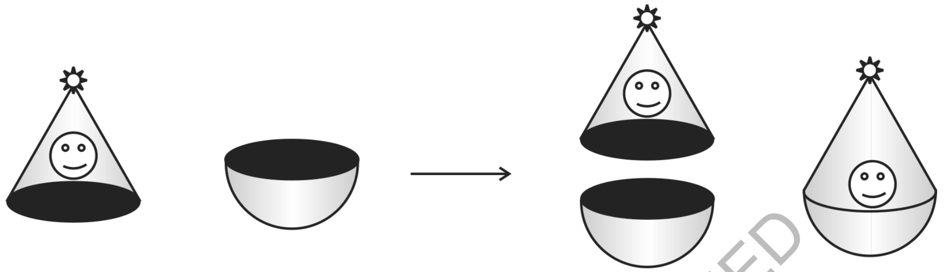
घनाचे संपूर्ण पृष्ठफळ = Total Surface Area = TSA

घनाचे वक्र पृष्ठफळ = Curved Surface Area = CSA

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण आणखी एका स्थितीचा विचार करू. कल्पना करा की आम्ही एक अर्धगोल आणि एक शंकू याना जोडून एक खेळणे बनवीत आहोत. त्यावेळी घेतल्या जाणाऱ्या टप्प्यांचा पाहू.

प्रथम आपण एक शंकू आणि एक अर्धगोल घेऊ आणि त्याच्या सपाट भागांना एकत्र जोडण्याचा प्रयत्न करू. त्यासाठी आम्ही शंकूची आणि अर्धगोलाची त्रिज्या समान राहील हे पाहू. हे खेळणे बनाविण्याच्या पायऱ्या आकृती 12.5 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे असतील.



आकृती 12.5

आपल्या प्रयत्नाला अनुरूप गोलबुडाचे एक खेळणे तयार झाले. आता ह्या खेळण्याचा पृष्ठभाग रंगविण्यासाठी किती रंग लागेल हे आपण काढले पाहिजे. त्यासाठी आम्हाला काणेती माहिती पाहिजे? आपल्याला त्या खेळण्याचे संपूर्ण पृष्ठफळ जाणणे आवश्यक आहे, ज्यात अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ आणि शंकूचे वकृपृष्ठफळ समाविष्ट आहे.

यावरून आपण असे म्हणू शकतो की,

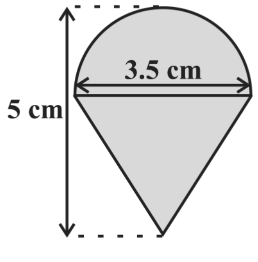
खेळण्याचे एकूण पृष्ठफळ = अर्धगोलाचा CSA + शंकूचा CSA.

आता आपण काही उदाहरणांचा अभ्यास करू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 1 : रशीदला वाढदिवसाची भेट म्हणून एक भोवरा मिळाला. त्याच्या पृष्ठभाग रंगाविलेला नव्हता. रशीद त्याला मेणाच्या रंगाने (Croyons) रंगवू इच्छितो. भोवऱ्याचा आकार शंकूवर अर्धगोल जोडल्यासारखा आहे (आकृती 12.6 पहा). भोवऱ्याची एकूण उंची 5cm असून त्याचा व्यास 3.5cm आहे. तर रंगवायच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा

($\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या)



आकृती 12.6

उकल : भोवऱ्याचा आकार आकृती 12.5 मध्ये चर्चा केलेल्या वस्तू सारखाच आहे. त्यातील निष्कर्ष आपण येथे वापरू शकतो.

भोवऱ्याचा TSA = अर्धगोलाचा CSA + शंकूचा CSA

आता, अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ $=\frac{1}{2}(4\pi r^2)=2\pi r^2$

$$=\left(2\text{x}\frac{22}{7}\text{x}\frac{3.5}{2}\text{x}\frac{3.5}{2}\right)cm^2$$

शंकूची उंची = भोवऱ्याची उंची - अर्धगोलाकृती भागाची उंची (त्रिज्या) $=\left(5-\frac{3.5}{2}\right)cm=3.25cm$

शंकूची तिरकस उंची $(l)=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2+(3.25)^2}=3.7cm$ (अंदाजे)

त्यामुळे शंकूचे वक्रपृष्ठफळ = $=\pi rl=\left[\frac{22}{7}\text{x}\frac{3.5}{2}\text{x}3.7\right]cm^2$

यावरून भोवऱ्याचे पृष्ठफळ असे मिळते,

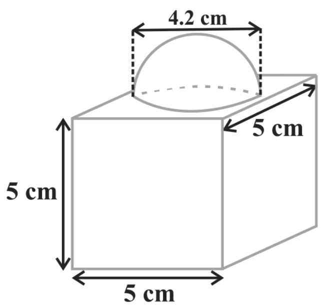
$$=\left(2\text{x}\frac{22}{7}\text{x}\frac{3.5}{2}\text{x}\frac{3.5}{2}\right)cm^2+\left(\frac{22}{7}\text{x}\frac{3.5}{2}\text{x}3.7\right)cm^2$$

$$=\frac{22}{7}\text{x}\frac{3.5}{2}(3.5+3.7)cm^2=\frac{11}{2}\text{x}(3.5+3.7)cm^2=39.6cm \text{ (अंदाजे)}$$

येथे तुम्ही ध्यानात घ्या की भोवऱ्याचे संपूर्ण पृष्ठफळ म्हणजे अर्धगोल आणि शंकूच्या संपूर्ण पृष्ठफळांची बेरीज नाही.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 2 : आकृती 12.7 मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे दोन घनाकृतीपासून एक शोभेची वस्तू बनविली आहे ज्यात एक घन आहे आणि दुसरा अर्धगोल. वस्तूच्या आधारासाठी 5cm बांजूंची लांबी असलेला एक घन असून त्यावर 4.2 cm व्यास असलेला एक अर्धगोल आहे तर त्या वस्तूचे एकूण वकृपृष्ठफळ काढा ($\pi=\frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या)



आकृती 12.7

उकल : घनाचे संपूर्ण पृष्ठफळ = 6x (बाजू)^2 = 6x5x5 cm^2=150cm^2

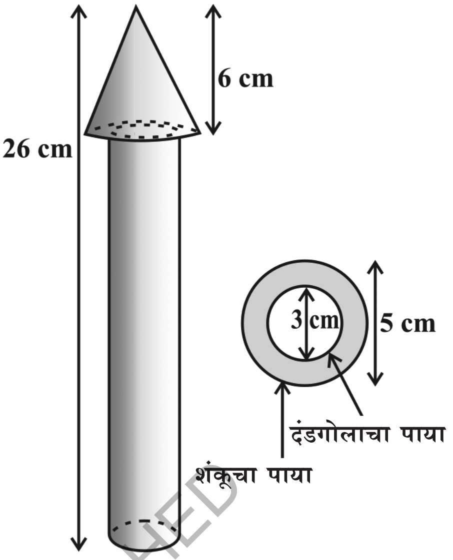
म्हणून वस्तूचे एकूण पृष्ठफळ = घनाचा TSA - अर्धगोलाच्या तळाचे क्षेत्रफळ + अर्धगोलाचा CSA

$$=150-\pi r^2+2\pi r^2=(150+\pi r^2)cm^2$$

$$=150+\left[\frac{22}{7}\text{x}\frac{4.2}{2}\text{x}\frac{4.2}{2}\right]cm^2$$

$$=150+13.86=163.86\,cm^2$$

उदाहरण 3 : आकृती 12.8 मध्ये दर्शविलेले एक खेळण्यातील लाकडी रॉकेट (Rocket) आहे ज्यात एक शंकू वृत्ताचितीवर बसविला आहे. पूर्ण रॉकेटची उंची 26cm आहे. आणि शंकूची उंची 6cm आहे. शंक्वाकृती भागाच्या पायाचा व्यास 5cm आणि वृत्तचितीच्या पायाचा व्यास 3cm आहे. जर शंक्वाकृती भागाला नारंगी रंग आणि वृत्तचितीच्या भागाला पिवळा रंग द्यावयाचा आहे तर प्रत्येक रंगाने रंगविल्या जाणाऱ्या रॉकेटच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा ($\pi = 3.14$ ही किंमत घ्या)



आकृती 12.8

उकल : शंक्वाकृती त्रिज्या r ने, शंकूची तिरकस उंची l ने आणि शंकुची उंची h ने, वृत्ताचितीची त्रिज्या r' आणि वृत्ताचितीची उंची h' ने दर्शवू. तर r=2.5cm, h=6cm, r'=1.5cm, h' = 26-6 = 20cm

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5cm$$

यात शंक्वाकृती भागाचा गोलाकार पाया हा वृत्तचीतीच्या पायावर आधारीत आहे. परंतू शंकूचा पाया हा वृत्ताचितीच्या पाया पेक्षा मोठा आहे. त्यामुळे शंकूच्या पायाच्या एका भागाला (वलय = रींग) देखील रंगविले पाहिजे.

तेव्हां नारंगी रंगाने रंगवायच्या भागाचे क्षेत्रफळ शंकूचा CSA + शंकूच्या पायाचे क्षेत्रफळ - वृत्तचितीच्या पायाचे क्षेत्रफळ

$= \pi rl+\pi r^2-(\pi r,)^2$

$= \pi r(2.5x6.5)+(2.5)^2-(1.5)2cm^2$

$= \pi r(20.25)cm^2 = 3.14x20.25cm^2$

$= 63.585\ cm^2$

आता पिवळ्या रंगाने रंगवायच्या भागाचे क्षेत्रफळ = वृत्ताचितीचा CSA + वृत्ताचितीच्या एका भागाचे क्षेत्रफळ

$= 2\pi r'h'+(\pi(r')^2$

$= \pi r'(2h' +r')$

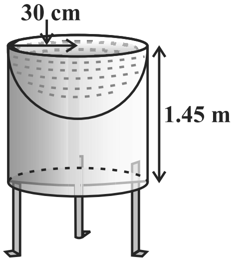
$= (3.14x1.5)\ (\ 2x20x1.5)\ cm^2$

$= 4.71\ x\ 41.5\ cm^2$

$= 195.465\ cm^2$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 4 : मयंकने आपल्या बागेत येणाऱ्या पक्ष्यांसाठी स्नानपात्र बनविले. त्यासाठी त्यांने वृत्तचितीच्या आकाराच्या भागात एक अर्धगोल बसविला (आकृती 12.9 पहा). वृत्तचितीची उंची 1.45m आणि त्याची त्रिज्या 30cm आहे. तर ता स्नानपात्राचे एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या)



आकृती 12.9

उकल : वृत्ताचितीची उंची h मानू आणि r ही अर्धगोल व वृत्तचितीची त्रिज्या तेव्हा पक्ष्यांसाठीच्या स्नानपात्राचे एकूण पृष्ठफळ

= वृत्तचितीचे CSA + अर्धगोलाचे CSA

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h+r)$

$= 2x\frac{22}{7}x30\ (145+30)cm^2$

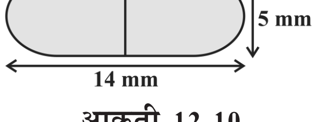
$= 33000\ cm^2 = 3.3m^2$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

स्वाध्याय 12.1

(वेगळी सूचना नसेल तेथे $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्यावी.)

1. दोन घन ज्यांचे घनफळ प्रत्येकी $64cm^3$ आहे ते एकमेकाला जोडून एक घनायत बनविला तर त्या घनायताचे एकूण पृष्ठफळ काढा.
2. एका अर्धगोलाकृती खोलगट भांडयावर आतून पोकळ असलेली एक वृत्ताचिती बसविलेले एक भांडे तयार केले आहे अर्धगोलाचा व्यास 14cm आणि भांडयांची एकूण उंची 13cm आहे तर त्या भांड्याच्या आतील भागाचे पृष्ठफळ काढा.
3. त्रिज्या 3.5cm असलेला एक शंकू तितक्याच त्रिज्येच्या अर्धगोलावर बसवून खेळणे बनविले आहे. त्या खेळण्याची एकूण उंची 15.5cm आहे तर त्या खेळण्याचे संपूर्ण पृष्ठफळ काढा.
4. 7cm बाजूची लांबी असलेल्या एका घनाच्या एका भागावर एक अर्धगोल बसविला आहे. तर त्या अर्धगोलाचा जास्तीत जास्त व्यास किती असेल? अशा रितीने बनलेल्या घनाकृतीचे पृष्ठफळ काढा.
5. एक घनाकार लाकडी ठोकळयाची एक बाजू कमी करत त्यात एक अर्धगोल तयार केला ज्याचा व्यास l आहे जो ठोकळ्याच्या एक बाजूच्या लांबीशी समान आहे तर ठोकळ्याच्या राहिलेल्या भागाचे पृष्ठफळ किती असेल ते निश्चित करा.
6. एका वृत्तचितीच्या दोन्ही बाजूला अर्धगोल बसविलेल्या आकाराची एक औषधाची कॅप्सूल (capsule) आहे (आकृती 12.10 पहा) संपूर्ण कॅप्सूलची लांबी 14mm आणि त्याचा व्यास 5mm आहे तर तिचे पृष्ठफळ काढा.

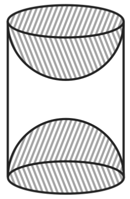


आकृती 12.10

7. वृत्तचितीवर शंकू बसविल्यानंतर होणाऱ्या आकाराचा एक तंबू आहे. वृत्तचितीच्या आकाराच्या भागाची उंची आणि व्यास अनुक्रमे 2.1m आणि 4m असून वरील शंक्वाकृती भागाची तिरकस उंची 2.8m आहे तर तो तंबू बनविण्यासाठी लागलेल्या कॅनव्हासचे (convas) चे क्षेत्रफळ काढा. त्याच प्रमाणे ₹500 दर m^2 दराने तंबूसाठी लागलेल्या कॅनव्हासची किंमत काढा. (ध्यानात घ्या की, तंबूच्या पायाकडील भागावर कॅनव्हास आच्छादले नाही.)

8. उंची 2.4cm आणि व्यास 1.4cm असलेल्या एका भरीव वृत्तचितीला तितक्याच उंचीचा आणि तितक्याच व्यासाचा एक शंकूच्या आकारचा भाग त्यातून पोखरून काढला तर शिल्लक राहिलेल्या वृत्ताचितीचे संपूर्ण पृष्ठफळ cm^2 च्या मापनात असवि.

9. एका भरीव लाकडी वृत्ताचितीला दोन्ही बाजूने अर्धगोलाकार भाग पोखरून एक वस्तू बनविली जी आकृती 12.11 मध्ये दर्शविली आहे. जर वृत्तचितीची उंची 10cm आणि पायाची त्रिज्या 3.5cm असेल तर त्या वस्तूचे संपूर्ण पृष्ठफळ किती असेल ते काढा.



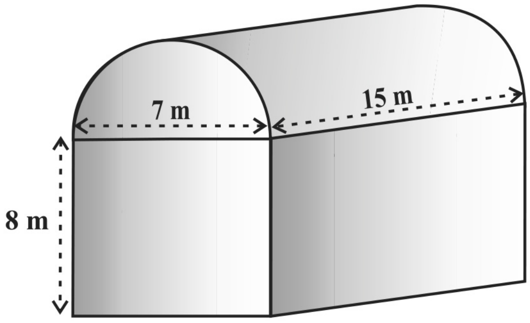
आकृती 12.11

12.3 घनांच्या एकत्रीकरणाने बनलेल्या वस्तूंचे घनफळ

दोन घनवस्तूंच्या एकत्रीकरणाने बनणाऱ्या वस्तूंचे पृष्ठफळ कसे काढावे हे आपण मागील भागात शिकलात ; आता आपण अशा वस्तूंचे घनफळ कसे काढावे हे शिकू. तुमच्या लक्षात आल असेल की पृष्ठफळ काढतांना दोन घटकांच्या पृष्ठाफळाची आपण बेरीज केली नाही कारण घटकांचा पृष्ठभाग जोडल्याने त्यांच्या पृष्ठभागात बदल होऊन थोडा पृष्ठभाग नाहीसा होतो. परंतू घनफळाच्या बाबतीत असे घडत नाही. दोन घनवस्तू एकत्र करून बनविलेल्या वस्तूचे घनफळ हे त्या दोन मुळ घनवस्तूंच्या घनफळाच्या बेरजेशी समान असते. त्यासाठी खालील उदाहरण पहा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5 : शांता एका शेड (shed) मध्ये एक कारखाना चालविते. शेडचा आकार घनायताकृती असून त्यावर अर्धवृत्तचितीचा आकार आहे. (आकृती 12.12 पहा) शेडचा पाया 7mx15m असून घनायताची उंची 8m आहे, तर त्या शेडमध्ये किती हवा मावते त्याचे घनफळ काढा. त्या शेडमधील यंत्रे एकूण जागेपैकी $300m^3$ जागा व्यापतात आणि कारखान्यात 20 कामगार असून ते प्रत्येकी $0.08m^3$ सरासरी जागा व्यापतात तर त्या शेडमध्ये किती हवा असेल? ($\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत ध्या)



आकृती 12.12

उकल : शेडमधील हवेचे घनफळ (ज्यात कोणी व्यक्ती आणि यंत्रे नाहीत) हे घनायताकृती भागातील हवा आणि अर्धवृत्ताचितीच्या भागातील हवा यांचे घनफळ एकत्र करून मिळेल.

आता घनायताची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 15m, 7m आणि 8m आहे. तसेच अर्धवृत्तचितीचा व्यास 7m आणि उंची 15m आहे.

म्हणून अपेक्षित घनफळ = घनायताचे घनफळ + $\frac{1}{2}$ वृत्तचितीचे घनफळ

$$= l \times b \times h + \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

$$= \left[15 \text{x} 7 \text{x} 8 + \frac{1}{2} \text{x} \frac{22}{7} \text{x} \frac{7}{2} \text{x} \frac{7}{2} \text{x} 15\right] = 1128.75 m^3$$

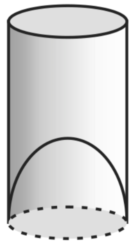
यंत्रांनी व्यापलेली जागा = $300m^3$

20 कामगारांनी व्यापलेली जागा $20 \text{x} 0.08m^3 = 1.6m^3$

म्हणून यंत्र आणि कामगार असताना शेडमधील हवेचे घनफळ

$$=1128.75-(300.00+1.60) = 827.15m^3$$

उदाहरण 6 : एक विक्रेता आपल्या ग्राहकांना आकृती 12.13 मध्ये दर्शविलेल्या आकाराच्या गलासमधून फळांचा रस देतो. वृत्तचितीच्या आकाराच्या या ग्लासचा आतील व्यास 5cm आहे आणि ग्लासच्या तळभागात आतील बाजूने अर्धगोलाकृती फुगीर भाग आहे ज्याच्यामुळे ग्लासची धारण क्षमता कमी होते. जर ग्लासची उंची 10cm असेल तर ग्लासाची आभासी धारणक्षमता आणि खरी धारणक्षमता किती ते काढा. ($\pi = 3.14$ ही किंमत वापरा)



आकृती 12.13

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उकल : ग्लासचा आतील व्यास = 5cm अणि उंची = 10cm आहे.

ग्लासची आभासी धारण क्षमता = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \text{x} 2.5 \text{x} 2.5 \text{x} 10 m^3 = 196.25 cm^3$$

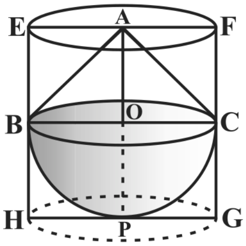
परंतू ग्लासची खरी धारण क्षमता त्याच्या तळाशी असलेल्या अर्धगोलाने कमी होते म्हणून अर्धगोलाचे घनफळ.

कमी होणारी क्षमता $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \text{x} 3.14 \text{x} 2.5 \text{x} 2.5 \text{x} 2.5 = 32.71 cm^3$

ग्लासची खरी धारण क्षमता = आभासी धारणक्षामता - अर्धगोलाचे घनफळ

$$= (196.25-32.71) cm^3$$

$$= 163.54 cm^3$$



आकृती 12.14

उदाहरण 7 : एका अर्धगोलावर लंबरुपात एक शंकू बसविलेले एक भरीव खेळणे आहे. शंकूची उंची 2cm आणि त्याच्या पायाचा व्यास 4cm आहे. तर त्या खेळण्याचे घनफळ निश्चित करा. जर त्या खेळण्याच्या उंचीचे लंब वर्तुळाकार वृत्ताचितीचे त्यावर आवरण ठेवले तर ते खेळणे आणि वृत्ताचिती यांच्या घनफळातील फरक काढा. (π=3.14 ही किंमत घ्या)

उकल : BPC हा अर्धगोल आणि ABC हा त्या अर्धगोलावर असलेला शंकू मानू (आकृती 12.14 पहा) BO ही अर्धगोलाची (तसेच शंकूची) त्रिज्या = $\frac{1}{2}$ x 4cm = 2cm

खेळण्याचे घनफळ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} x 3.14 x (2)^3 + \frac{1}{3} x 3.14 x (2)^2 x 2\right] cm^3 = 25.12 cm^3$$

आता EFGH लंबवर्तुळाकार वृत्तचितीचे आवरण त्या भरीव खेळण्याला आहे. वृत्ताचितीची त्रिज्या = HP = BO = 2cm आणि त्याची उंची EH=AO+OP=(2+2)cm=4cm

अपेक्षित घनफळ = लंबवर्तुळाकार वृत्तचितीचे घनफळ - खेळण्याचे घनफळ

$= (3.14 x 2^2 x 4 - 25.12)\ cm^3$

$= 25.12 cm^3$

दोन घनफळातील फरक = $25.12 cm^3$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

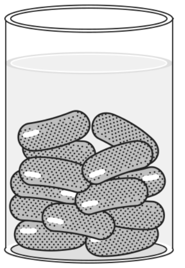
स्वाध्याय 12.2

(वेगळी सूचना नसेल तेथे $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्यावी)

1. एका भरीव अर्धगोलावर शंकू आहे ज्यांची त्रिज्या 1cm आहे आणि शंकूची उंची त्याच्या त्रिज्येशी समान आहे. तर त्या घनाकृतीचे घनफळ π च्या स्वरूपात काढा.

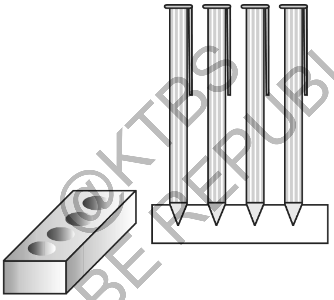
2. इंजिनिअरींगचा विद्यार्थी असलेल्या रॅचेलला अल्युमिनीयमच्या पातळ पत्र्यापासून एक प्रतिकृती (model) करण्यास सांगितले ज्यात एका वृत्ताचितीच्या दोनही बाजूला शंकू असतील. त्या प्रतिकृतीचा व्यास 3cm आणि लांबी 12cm असेल. प्रत्येक शंकूची उंची 2cm असेल तर रॅचेलने तयार केलेल्या प्रतिकृतीत सामावणाऱ्या हवेचे घनफळ काढा. (प्रतिकृतीचे आतील व बाहेरील आकारमान समान आहे असे माना)

3. गुलाबजामूचा आकार वृत्तचितीच्या दोन्ही बाजूंना अर्धगोल असविन्याप्रमाणे असून त्याची लांबी 5 से.मी आणि व्यास 2.8cm आहे. जर गुलाबजामून या घनफळाच्या 30% भाग साखरेचा पाक असतो 45 गुलाब जामून मध्ये साधारण किती पाक असेल?



आकृती 12.15

4. एक घनायताकार लाकडापासून पेन स्टँड बनविले आहे ज्यात शंकूच्या आकाराचे चार खोलगट भाग आहेत. घनायताचे मोजमाप 15cmx10cmcx3.5cm आहे. शंक्वाकृती खोलगट भागाची त्रिज्या 0.5cm आणि 1.4cm खोल आहे. तर त्या संपूर्ण पेनस्टँडचे घनफळ काढा (आकृती 12.16 पहा)



आकृती 12.16

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. एक भांडे शंकूच्या उलट आकाराचे आहे. त्याची उंची 8cm आणि वरील बाजू जी उघडी आहे. त्याची त्रिज्या 5cm आहे. ते भांडे पाण्याने काठोकाठ भरले. त्यात 0.5cm त्रिज्या असलेले शिश्याचे काही गोल घातले त्यावेळी त्या भांडयातील पाण्याचा एक चतुर्थांश भाग पाणी वाहून गेले तर त्या भांडयात शिशाचे किती गोल घातले, त्यांची संख्या काढा.

6. उंची 220cm आणि पायाचा व्यास 24cm असलेला वृताचितीच्या आकाराचा एक भरीव खांब असून त्यावर उंची 60cm आणि त्रिज्या 8cm असलेला आणखी एक लोखंडी खांब बसविला आहे. तर त्या स्तंभाचे वस्तुमान किती ते काढा. $1cm^3$ लोखंडाचे वस्तुमान सुमारे 8g असते (π=3.14 ही किंमत घ्या).

7. एक अर्धगोल ज्याची त्रिज्या 60cm आहे त्यावर 120cm उंची व त्रिज्या 60cm असलेला एक भरीव शंकू बसविलेला आहे. ही घनाकूती पाण्याने भरलेल्या वृत्तचितीत अशी सोडली की ती त्या वृत्तचितीच्या तळाला स्पर्श करेल. तर त्या वृत्तचितीत राहिलेल्या पाण्याचे घनफळ काढा ; जर त्या वृत्तचितीची त्रिज्या 60cm आणि उंची 180cm आहे.

8. एका गोलाकार काचेच्या भांड्याला 8cm लांब आणि व्यास 2cm असलेल्या वृत्तचितीच्या आकाराचा गळा आहे. गोलाकार भागाचा व्यास 8.5cm आहे. त्यात मावणाऱ्या पाण्याचे प्रमाण मोजून एका मुलाने त्या भांडयाचे घनफळ 345cm^3 आहे असे काढले. त्या मुलाचे उत्तर बरोबर आहे का याचा पडताळा पहा. हे करताना वरील मापने ही भांडयाच्या आतील भागाची आहेत व π=3.14 हे प्रमाण ध्यानात घ्या.

12.4 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. घन, घनायत, वृत्तचिती, शंकू, गोल आणि अर्धगोल या भरीव वस्तूंच्यापैकी दोन वस्तू एकत्र केल्यानंतर बनणाऱ्या वस्तूंचे पृष्ठफळ निश्चित करणे.

2. भरीव घन, घनायत, वृत्तचिती, शंकू, गोल आणि अर्धगोल यातील दोन वस्तूंच्या संयोगाने बनलेल्या वस्तूंचे घनफळ काढणे.

***

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सांख्यिकी
STATISTICS

T7I3D1

13

13.1 परिचय :

इयत्ता IX मध्ये तुम्ही वर्गीकृत आणि अवर्गीकृत संग्रहीत माहितीच्या संख्या वारंवारता गटात व्यवस्थित घेण्यास शिकला आहात. संग्रहित माहीतीच्या संख्या चित्ररूपाद्वारे विविध आलेख, जसे की स्तंभालेख, हिस्टोग्रम (विविध रूंदीच्या स्वरूपात) वारंवारता बहुभुजाकृतीत मांडून त्याचे विश्लेषण करावयास शिकलो. त्याचप्रमाणे अवर्गीकृत आकडयांचे काही संख्यात्मक प्रतिनिधी (numerical representative) जाणून घेऊन एक पाऊल पुढे टाकलात. ह्या संख्यात्मक प्रतिनिधींनां आपण **केंद्रीय कल मापक** (measures of central tendancy) म्हणतो. ही तीन मापके म्हणजेच मध्य (mean), मध्यांक (median) आणि बहुलक (mode) यांचा अभ्यास केला आहे. या प्रकरणात या तीनही मापकांना म्हणजेच **मध्य, मध्यांक आणि बहुलक** यांना अवर्गीकृत संख्यापासून वर्गीकृत आकडंयाकडे नेऊ. त्याशिवाय आम्ही संचयी वारंवारता, (cumulative frequency) संचयी वारंवारतेचे वितरण आणि त्यापासून संचयी वारंवारता रेषा (ogive) कशी काढली जाते याबद्दल चर्चा करू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.2 वर्गीकृत सामाग्रीचा मध्य (Mean of Grouped Data) :

आपण आधीपासून जाणतो की निरीक्षणांचा मध्य (सरासरी) म्हणजे निरीक्षणातील सर्व संख्यांची बेरीज आणि त्याला निरीक्षण संख्यानी भागून येणारे उत्तर. इयत्ता IX मधील घटकांना आठवा, $x_1, x_2 \ldots. x_n$ ही निरीक्षण आणि त्यांची वारंवारता $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ असेल तर त्याचा अर्थ असा होतो की x_1 हे निरीक्षण f_1 वेळा, x_2 निरीक्षण f_2 वेळा इत्यादी.

सर्व निरीक्षण संख्याची बेरीज $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n$ आणि निरीक्षण संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots\ldots f_n$.

म्हणून त्यांचा मध्य $\overline{x}$ खाली दर्शविल्या प्रमाणे मिळतो.

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ...+ f_nx_n}{f_1 + f_2 + ...+ f_n}$$

आठवा की वरील सुत्र आपण संक्षिप्त स्वरूपात ग्रीक अक्षर $\sum$ [मोठा सिग्मा (capital sigma] ने दर्शवितो. ज्याचा अर्थ बेरीज असा होतो.

ते म्हणजे $\overline{x} = \frac{\sum_{i=i}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=i}^{n} f_i}$

जे संक्षिप्तरूपात $\overline{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$ असे लिहिले जाते ज्यात i ची किंमत1 ते n असते.

आता आपण वरील सूत्राचा वापर करून खाली दिलेल्या उदाहरणाचा मध्य काढू.

उदाहरण 1 : खालील तक्त्यामध्ये, एका शाळेतील दहावीच्या 30 विद्यार्थ्यांनी गणिताच्या परीक्षेत 100 पैकी खालीलप्रमाणे गुण मिळविले. तर विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांचे मध्य काढा.

मिळविलेले गुण (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	72	72	80	88	92	95
विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

उकल : आठवा की आपणाला गुणांचा मध्य काढण्यासाठी प्रत्येक x_i चा त्याच्या समोरील f_i शी गुणाकार करणे गरजेचे आहे. आपण हे 13.1 तक्त्यात दर्शविल्या प्रमाणे करू.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 13.1

मिळविलेले (x_i) गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
एकूण	$\sum f_i = 30$	$\sum f_ix_i = 1779$

आता, $\overline{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

म्हणून मिळविलेल्या गुणांच्या मध्य 59.3 आहे.

आपल्या दैनंदिन जीवनात जास्तीतजास्त प्रसंगात दिलेल्या संख्या इतक्या जास्त असतात की त्यांचा अर्थपूर्ण अभ्यास करण्यासाठी त्यांची गटात विभागणी (वर्गीकृत) करतो आणि संक्षिप्त रूप देतो. त्याकारणाने आम्हाला अवर्गीकृत सामग्री वर्गीकृत सामग्रीत बदलावी लागते आणि मध्य काढण्याच्या योग्य पद्धतीचा विचार करावा लागतो.

आता आपण उदाहरण 1 मधील अवर्गीकृत सामग्री वर्गीकृत सामग्रीत बदल करू. त्यासाठी 15 ची व्याप्ती असलेली संभाग श्रेणीची रचना करू. वारंवातेची विभागणी संभागश्रेणीत करताना ज्या विद्यार्थ्यांची संख्या संभागश्रेणीच्या उच्चत्तम मर्यादित येत असेल, तर ती संख्या पुढील गटात घ्यावी. उदाहरणार्थ: 40 गुण घेतलेले 4 विद्यार्थी आहेत तर वारंवारता तक्त्यात दर्शवितांना त्याना 25-40 च्या संभाग श्रेणीच्या गटात न दर्शविता 40-55 च्या गटात दर्शवावे. ही परंपरा लक्षात घेऊन आपण एक वर्गीकृत वारंवारता तक्ता बनवू (तक्ता 13.2 पहा)

तक्ता 13.2

संभागश्रेणी	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	3	7	6	6	6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता प्रत्येक संभागश्रेणीला असे काही प्रमाण पाहिजे जे त्या संभागश्रेणीच्या व्याप्तीचे प्रतिनिधित्व करेल. असे मानले जाते की **संभाग श्रेणीची वारंवारता ही संभागश्रेणीच्या मध्यावर केंद्रीत असते. म्हणून वर्गमध्य** (mid point or class mark) **हा संभागश्रेणीच्या त्या गटाचे प्रतिनिधीत्व करतो.** आठवा की, वर्गमध्य आपण त्या संभागश्रेणीच्या गटातील उच्चतम् मर्यादा आणि निच्चतम् मर्यादा यांच्या सरासरीतून काढतो.

$$\textbf{वर्गमध्य} = \frac{\textbf{गटातील उच्चतम मर्यादा + गटातील निचत्तम् मर्यादा}}{2}$$

तक्ता 13.2 ला अनुसरून 10-25 चा वर्गमध्य $\frac{25+10}{2}$ म्हणजेच 17.5 आहे. याच पद्धतीने सर्व गटांचा वर्गमध्य आपण काढू शकतो. वर्गमध्य x_i ने दर्शविला जातो. संभाग श्रेणी i साठी वारंवारता f_i आणि वर्गमध्य x_i असेल उदाहरण 1 मध्ये दर्शाविल्याप्रमाणे आपण आता मध्य काढू.

तक्ता 13.3

संभाग श्रेणी	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्गमध्य (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
एकूण	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

शेवटच्या स्तंभात दिलेल्या अंकांची बेरीज आपणाला $\sum f_i x_i$ ची किंमत दर्शविते, म्हणून दिलेल्या संख्यांचा मध्य $\overline{x}$ हा खाली दर्शविल्या प्रमाणे मिळतो.

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

या मध्य काढण्याच्या नवीन पद्धतीला **सरळ (प्रत्यक्ष) पद्धती** म्हणतात.

आम्ही निरीक्षण केले असता तक्ता 13.1 आणि 13.3 मध्ये एकच संग्रहीत माहिती आणि समान सुत्र वापरून मध्य काढला. परंतू मिळालेले उत्तर वेगवेगळे आहे. असे का घडले याचा विचार करू शकाल का? आणि यातील कोणते उत्तर अचूक आहे? दोन्ही उतरात फरक आहे. कारण 13.3 मध्ये आपण वर्गमध्याचा वापर केला. 59.3 हे उत्तर अचूक असून 62 मध्य हा अंदाजे मध्य आहे.

काहीवेळा x_i आणि f_i च्या संख्या मोठ्या असतात त्यावेळी x_i आणि f_i चा गुणाकार करणे किचकट आणि जास्त वेळ घेणारे आहे. अशा परिस्थितीत आपण साध्या आणि सोप्या पद्धतीने कशी गणना करता येईल याचा विचार करू.

आपण f_i च्या किंमतीत बदल करू शकत नाही. परंतू आपण x_i ची किंमत लहान किंमतीत बदल करून हिशोब करणे सोपे होते. आपण हे असे कसे करू शकतो? एक निश्चित संख्या x_i मधून वजा केल्यास काय होईल? आपण या पद्धतीचा प्रयत्न करू.

यासाठी आपण प्रथम x_i मधील एक किंमत/संख्या काल्पनिक मध्य म्हणून निवडून ती *'a'* या अक्षराने दर्शवू. *'a'* चे किंमत x_i मध्ये अशी घेऊ शकतो की, ती $x_1, x_2, ... x_n$ यापैकी असेल. *'a'* ची किंमत a = 47.5 अथवा a = 62.5 घेऊ शकतो. आपण a = 47.5 ही घेऊ.

पुढच्या पायरीत आपण फरक d_i काढू जो a आणि x_i च्या वजाबाकीने मिळतो म्हणजेच a पासून x_i पर्यंतचे विचलन हे म्हणजे

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

तिसऱ्या पायरीत d_i आणि त्याला संबंधीत f_i चा गुणाकार करावा आणि $f_i d_i$ ची बेरीज करावी. तक्ता 13.4 मध्ये पूर्ण क्रिया दर्शविली आहे.

तक्ता 13.4

संभाग श्रेणी	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्गमध्य (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-60
25 - 40	3	32.5	-15	-45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	182
85 - 100	6	92.5	45	270
एकूण	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

यावरून तक्ता 13.4 चे मध्य विचलन $\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

आता आपण $\overline{d}$ आणि $\overline{x}$ चा संबंध पाहू. आपल्याला d_i ची किंमत x_i मधून a वजा केल्याने मिळते म्हणून मध्य $\overline{x}$ जाणून घेण्यासाठी आपण d मध्ये a मिळवितो. खाली दर्शविलेल्या पायऱ्यानुसार याचे गाणिती स्वरूप स्पष्ट होते.

विचलनाचा मध्य, $\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

म्हणून $\overline{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a$$

$$\overline{x} = a + d'$$

$$\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

तक्ता 13.4 मधून मिळालेल्या $a_i \sum fidi$ आणि $\sum fi$ च्या किंमती लिहून आम्हाला आढळते की, $\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

म्हणून विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांच्या मध्य 62 आहे.

मध्य काढावयाच्या या पद्धतीला **काल्पनिक मध्य पद्धत** म्हणतात.

कृती 1 : तक्ता 13.3 मधून प्रत्येक x_i (17.5, 32.5 इत्यादी) ला a मानून मध्य काढा. तुम्हाला काय आढळते? प्रत्येक घटनेमध्ये मध्याची किंमत ही समान असते. ती म्हणजे 62. (कारण काय?) यावरून आपण असे म्हणून शकतो की मध्याची किंमत ही `a' च्या किंमतीच्या निवडीवर निर्धारित असत नाही.

तक्ता 13.3 चे निरीक्षण करा, स्तंभ 4 मधील किंमती या 15 च्या पटीतील हव्यात. म्हणून चौथ्या स्तंभातील सर्व किंमतीना 15 ने भागा. आपणाला लहान संख्या मिळतील, ज्यांना f_i ने गुणावे (येथे संभाग श्रेणीत पदांची व्याप्ती 15 आहे)

म्हणून $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ज्यात `a' हा काल्पनिक मध्य आहे आणि h) ही त्यावर्गाची व्याप्ती आहे.

यावरून $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ यात `a' हा काल्पनिक मध्य आणि h ही वर्गव्याप्ती आहे.

आता u_i ची किंमत काढू आणि पहिल्याच प्रमाण प्रक्रिया पुढे चालू ठेवू (ती म्हणजे f_iu_i आणि नंतर $\sum f_iu_i$ ची किंमती काढत) त्यासाठी h=15 घेऊ आणि 13.5 चा तक्ता तयार करू.

तक्ता 13.5

संभाग श्रेणी	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-2	-4
25 - 40	3	32.5	-15	-1	-3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
एकूण	$\sum f_i = 30$				$\sum f_iu_i = 29$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

समजा $$\bar{u} = \frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}$$

इथे पुन्हा आपण $\bar{u}$ आणि $\bar{x}$ यातील संबंध पाहू.

माना $$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

म्हणून $$u_i = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i - a\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

म्हणून, $= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i}\right]$

$= \frac{1}{h}[\overline{x} - a]$

म्हणून, $h\overline{u} = \overline{x} - a$

म्हणजेच, $\overline{x} = a + h\overline{u}$

म्हणून, $\overline{x} = a + h\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$

तक्ता 13.5 मध्ये आलेल्या $a, h, \sum f_i u_i$ आणि $\sum f_i$ च्या किंमती लिहून

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

म्हणून विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांचा मध्य (Mean Marks) 62 आहे.

वर चर्चा केलेल्या पद्धतीला **पायरी-विचलन पद्धत** (step-deviation method) म्हणतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लक्षात घ्या:

- पायरी विचलन पद्धत ही सर्व d_i मध्ये समाईक अवयव असेल तरच योग्य होते.
- तिन्ही प्रकारे मिळविलेला मध्य सारखाच असतो.
- मध्याच्या पद्धतीची काल्पनिक मध्य पद्धत आणि पायरी विचलन पद्धत ही सुलभ रूपे आहेत.
- सुत्र $\overline{x} = a + h\overline{u}$ चा वापर तेव्हांच करू शकतो जेव्हा a आणि h हे वर दिल्याप्रमाणे असू नयेत परंतू त्या शुन्यसोडून कोणतीही वास्तव संख्या असावी जसे $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ या पद्धतींचा वापर आणखी एका उदाहरणासाठी करू.

उदाहरण 2 : खाली दिलेल्या तक्त्यात भारतातील सर्व राज्ये आणि केंद्रशासित प्रदेशातील ग्रामीण भागातील प्राथमिक शाळामध्ये कार्यरत असलेल्या शिक्षिकांची संख्या शेकडा प्रमाणात दर्शविते. या चर्चा केलेल्या तीनही पद्धतींचा वापर करून कार्यरत शिक्षिकांच्या संख्येचा शेकडा मध्य काढा.

शिक्षिकांचे प्रमाण	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
राज्ये/केंद्र शासित प्रदेशांची संख्या	6	11	7	4	4	2	1

स्त्रोत : एन.सी.इ.आर.टी. द्वारे केलेल्या सातव्या अखिल भारतीय शाळांची शैक्षणिक गणती.

उकल : प्रत्येक संभागश्रेणीतील x_i ची किंमत काढून त्याला एका स्तंभात मांडू (तक्ता 13.6 पहा)

तक्ता 13.6

शिक्षिकांचे शेकडा प्रमाण	राज्य/केंद्रशासित प्रदेशांची संख्या (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

यात आपण $a = 50$, $h = 10$ घेऊ तेव्हा $d_i = x_i - 50$ आणि $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

आता d_i आणि u_i ची किंमत काढून त्यांना तक्ता 13.7 मध्ये लिहू.

तक्ता 13.7

शिक्षिकांचे शेकडा प्रमाण	राज्य / केंद्रशासित प्रदेशांची संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 - 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 - 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
एकूण	$\sum f_i = 35$				1390	-360	-36

वरील तक्त्यावरून आम्हाला $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390$

$\sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$ या किंमती मिळतात.

प्रत्यक्ष पद्धती नुसार $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

काल्पनिक मध्य पद्धतीनुसार $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \left(\frac{-360}{35}\right) = 39.71$

पायरी विचलन पद्धत $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$

म्हणून ग्रामीण भागातील प्राथमीक शाळामध्ये कार्य करणाऱ्या शिक्षिकांच्या संख्येचा शेकडा मध्य 39.71.

टीप : तीनही पद्धतीतून मिळालेले उत्तर समान आहे. तरीही मध्य काढण्यासाठी कोणती पद्धत निश्चित करावी हे काही घटकावर अवलंबून आहेत, ते म्हणजे x_i आणि f_iच्या किंमती. जर x_i आणि f_iच्या किंमती लहान असतील तर त्यासाठी प्रत्यक्ष पद्धत उपयुक्त ठरते. जर x_i आणि f_i ची किंमत संख्यात्मक स्वरूपात मोठी असेल तर आम्ही काल्पनिक मध्य अथवा पायरी विचलन पद्धतीचा वापर करू शकतो. जर वर्गव्याप्ती असमान आहे आणि x_i संख्यात्मक स्वरूपात मोठे आहेत त्यावेळी आपण पायरी विचलन पद्धतीचा वापर करू शकतो त्यावेळी सर्व d_i ना योग्य प्रमाणातील h ने भागावे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : खालील तक्ता एक दिवशीय क्रिकेट सामन्यात गोलंदाजांनी किती खेळाडूना बाद केले त्याची संख्या दर्शवितो. योग्य पद्धतीचा वापर करून बाद झालेल्या खेळाडूंच्या संख्येच्या मध्य काढा. मध्य काय सूचित करतो ?

बाद झालेल्या खेळाडूंची संख्या	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
गोलंदाजांची संख्या	7	5	16	12	2	3

उकल : येथे संभागश्रेणींची व्याप्ती समान नाही आणि x_i संख्यात्मक स्वरूप मोठे आहे तरीही आपण पायरी विचलन पद्धतीचा वापर करू ज्यात $a = 200$ आणि $h = 20$. त्यामुळे तक्ता 13.8 मध्ये दर्शविलेली माहिती उपलब्ध होते.

तक्ता 13.8

बाद झालेल्या खेळाडूंची संख्या	गोलंदाजांची संख्या	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	-160	-8	-56
60 - 100	5	80	-120	-6	-30
100 - 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
एकूण	$\sum f_i = 45$				$\sum f_i u_i = -106$

म्हणून $\overline{u} = \frac{-106}{45}$ त्यामुळे $\overline{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

यातून समजते की 45 गोलंदाजांनी एक दिवशीय क्रिकेट मध्ये सरासरी 152.89 खेळाडूंना बाद केले.

चला आपण या घटकामध्ये शिकलेल्या मुद्यांचा अन्वय कशाप्रकारे होतो ते पाहू.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कृती 2:

तुमच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांचे तीन गट बनवा आणि प्रत्येक गटाला खालीलपैकी एक कृती करण्यास सांगा.

1. तुमच्या शाळेत अलीकडेच आयोजित केलेल्या गणित विषयाची परीक्षा घेतल्यानंतर प्रत्येक विद्यार्थ्याने मिळविलेले गुण संग्रहित करा. त्या माहितीच्या आधारे वर्गीकृत वारंवारतेचा एक तक्ता तयार करा.
2. तुमच्या शहराचे मागील 30 दिवसाचे उच्चतम तापमान किती होते ते संग्रहीत करा. ती संग्रहित माहिती वर्गीकृत तक्त्यात नोंदवा.
3. तुमच्या वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांची उंची (cm मध्ये) मोजून घेऊन त्या माहितीच्या आधारे वर्गीकृत वारंवारता तक्ता तयार करा.

सर्व गटांनी माहिती संग्रहित करून त्या आधारे वर्गीकृत वारंवारता तक्ता तयार करून झाल्यानंतर त्या गटाला योग्य वाटेल अशा पद्धतीच्या वापर करून मध्य काढावा.

स्वध्याय 13.1

1. विद्यार्थ्यांच्या एका गटाने पर्यावरण जागृती अभियानाअंतर्गत एक सर्वेक्षण केले. त्यात त्यांनी परिसरातील 20 घरातील रहिवाश्याकडून लावल्या गेलेल्या झाडांची माहिती संग्रहित केली. तर प्रत्येक घराजवळील झाडांच्या संख्येंचा मध्य काढा.

झाडांची संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरांची संख्या	1	2	1	5	6	2	3

मध्य काढण्यासाठी तुम्ही कोणत्या पद्धतीचा वापर कराल आणि का?

2. एका कारखान्यातील 50 कामगारांच्या मजूरीचा वारंवारता तक्ता दिला आहे.

दैनंदिन मजूरी (₹ मध्ये)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
कामगारांची संख्या	12	14	8	6	10

3. एका परिसरातील मुलांना दिली जाणारी दैनंदिन खर्चाची रक्कम दर्शविणारा वारंवारता तक्ता खाली दिला आहे. दैनंदिन खर्च्याच्या रक्कमेचा मध्य ₹ 18 आहे तर तक्त्यात न दर्शविलेल्या वारंवारतेची किंमत काढा.

दैनंदिन खर्च (₹ मध्ये)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
मुलांची संख्या	7	6	9	13	f	5	4

4. एका इस्पितळातील डॉक्टरने परिक्षण करून तीस महिलांच्या दर मिनिटाये हृदयाचे ठोके संक्षिप्त रूपात खालील प्रमाणे नोंदविले आहेत. तर या महिलांच्या दर मिनिटाला पडणाऱ्या हृदयाच्या ठोक्यांचा मध्य काढा. त्यासाठी योग्य पद्धत निवडा.

दर मिनिट हृदयाच्या ठोक्यांची संख्या	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलांची संख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. एका बाजारात एक फळ विक्रेता बंद पेटीतून आणलेले आंबे विकत आहे. प्रत्येक पेटीतील आंब्यांची संख्या वेगवेगळी आहे. खालील तक्त्यात पेट्यांमध्ये आंब्याची संख्या दर्शविली आहे.

आंब्यांची संख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पेट्यांची संख्या	15	110	135	115	25

तर प्रत्येक पेटीमध्ये असलेल्या आंब्यांच्या संख्येंचा मध्य काढा. मध्य काढण्यासाठी कोणत्या पद्धतीचा वापर केला?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. एका गल्लीतील 25 कुटुंबांचा रोजच्या आहारासाठी होणारा दैनंदिन खर्च दर्शविणारा तक्ता खाली दिला आहे.

दैनंदिन खर्च (₹ मध्ये)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
कुटुंबांची संख्या	4	5	12	2	2

योग्य पद्धतीच्या वापर करून खर्चाच्या रकमेचा मध्य काढा.

7. एका शहरातील 30 विभागामध्ये हवेत असलेल्या सल्फर डायऑक्साईड (SO_2) ची घनता (दर मिलीयन भागामध्ये) किती आहे हे खालील तक्त्यात दिले आहे.

SO_2 ची सांद्रता	वारंवारता
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

तर हवेतील SO_2 च्या घनतेचा मध्य काढा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. एका वर्गशिक्षिकेने एका सत्रात गैरहजर राहिलेल्या 40 विद्यार्थ्यांची नोंद खालील प्रमाणे केली आहे तर विद्यार्थ्यांच्या गैरहजर राहिलेल्या दिवसांचा मध्य काढा.

गैरहजर दिवसांची संख्या	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
विद्यार्थ्यांची संख्या	11	10	7	4	4	3	1

9. खाली दिलेल्या तक्त्यात 35 शहरांचा साक्षरता दर (शेकडा प्रमाणात) दिला आहे. तर साक्षरता दराचा मध्य काढा.

साक्षरता दर (% मध्ये)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
शहरांची संख्या	3	10	11	8	3

13.3 वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक (Mode of Grouped Data)

इयत्ता IX मधील घटकाला आठवा ज्यात तुम्ही बहुलक (mode) म्हणजे निरिक्षीत संख्यामध्ये जी संख्या वारंवार आली आहे, अर्थात जास्तीत जास्त वारंवारता असलेली संख्या. त्यानंतर आपण अवर्गीकृत संख्यांचा बहुलक कसा काढावा याची चर्चा केली. येथे आता आपण वर्गीकृत संख्याचा बहुलक कसा काढावा हे जाणून घेऊ. एकापेक्षा अधिक किमतींची एकच जास्तीतजास्त वारंवारता येण्याची शक्यता असू शकते. अशा स्थितीतील संख्यांना **बहू-बहुलकीय** (multimodal) संख्या असे म्हटले जाते. जरी वर्गीकृत संख्या देखील बहु-बहुलकीय असू शकल्या तरी ही आपण आपली चर्चा एकच बहुलक असलेल्या समस्या पर्यंत मर्यादीत ठेवू.

आता आपण एका उदाहरणाच्या सहाय्याने आठवू की अवर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक आपण कसा काढला होता.

उदाहरण 4 : एका गोलंदाजाने 10 क्रिकेट सामन्यात किती खेळाडूनां बाद केले ते खाली दिले आहे.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

या माहितीचा बहुलक काढा.

उकल :

बाद केलेल्या खेळाडूंची संख्या	0	1	2	3	4	5	6
क्रिकेट सामन्यांची संख्या	1	1	3	2	1	1	1

यात स्पष्टपणे समजते की गोलंदाजाने जास्तीत जास्त 3 सामन्यात दोन गडी बाद केले आहेत. म्हणून या संख्याचा बहुलक 2 आहे.

वर्गीकृत वारंवारता तक्त्यात वारंवारता पाहून बहुलक निश्चित करणे शक्य नाही. येथे आम्ही सामग्रीचा फक्त वर्ग (class) निश्चित करू शकतो; ज्याची वारंवारता जास्तीत जास्त आहे. या वर्गाला **बहुलक वर्ग** (**modal class**) म्हणतात. सामुग्रीवा बहुलक हा या बहुलक वर्गात सामावलेला असतो आणि तो खाली दिलेल्या सूत्रातून जाणून घेऊ शकतो.

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

जिथे l = बहुलक वर्गाची निम्न (लहान) मर्यादा

h = वर्गव्याप्ती

f_1 = बहुलक वर्गाची वारंवारता.

f_0 = बहुलक वर्गाच्या मागील वर्गाची वारंवारता.

f_2 = बहुलक वर्गाच्या पुढील वर्गाची वारंवारता.

खालील उदाहरणाच्या सहाय्याने हे सूत्र जाणून घेऊ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5 : विद्यार्थ्यांच्या एका गटाने 20 परिवारांचे सर्वेक्षण केले. खाली दर्शविलेल्या वारंवारता तक्त्यामध्ये कुटुंबांची आणि त्यातील सदस्यांची संख्या दर्शविली आहे.

परिवारातील सदस्य	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारांची संख्या	7	8	2	2	1

या महितीचा बहुलक काढा.

उकल : यात सर्वात मोठी वारंवारता 8 असून ती 3-5 च्या गटात आहे त्यामुळे बहुलकाचा वर्ग 3-5 आहे. आता बहुलक वर्ग = 3-5 बहुलक वर्गाची लहान मर्यादा l =3 वर्ग व्याप्ती *(h)* =2 बहुलक वर्गाची वारंवारता (f_1) = 8

बहुलक वर्गाची वारंवारता (f_1) = 8

बहुलक वर्गाची मागील वर्गाची वारंवारता (f_0) =7

बहुलक वर्गाच्या पुढील वर्गाची वारंवारता (f_2) = 2

आता आपण वरील किंमती सुत्रात मांडू

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 3 + \left[\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right] \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7}$$

$$= 3.286$$

या वरुन वरील संख्यांच्या बहुलक 3.286 आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 : गाणिताच्या एका परिक्षेत 30 विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण उदाहरण 1 मधील 13.3 मध्ये दिले आहे. त्यांचा बहुलक काढा. तसेच बहुलक आणि मध्य यांची तुलना करून मत मांडा.

उकल : उदाहरण 1 मधील तक्ता 13.3 पाहिल्यानंतर वांरवारता तक्त्यात जास्तीत जास्त विद्यार्थी (ते म्हणजे 7) हे 40-55 च्या गटात आहेत.

बहुलक वर्ग 40-55 म्हणून

बहुलक वर्गाच्यी कमी किंमत / निम्न मर्यादा (l) = 40

वर्ग व्याप्ती (h) = 45

बहुलक वर्गाची वारंवारता (f_1) = 7
बहुलक वर्गाच्या मागील वर्गाची वारंवारता (f_0) = 3
बहुलक वर्गाच्या पुढील वर्गाची वारंवारता (f_2) = 8
या किंमती सुत्रात वापरून

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 40 + \left[\frac{7 - 3}{14 - 6 - 3}\right] \times 15 = 52$$

म्हणून गुणांचा बहुलक = 52
उदाहरण 1 मधील उदाहरणावरून मध्य = 62
या वरून जास्तीत जास्त मुलांनी घेतलेले गुण = 52
आणि मुलांनी मिळविलेले सरासरी गुण = 62

टीप :

1. उदारहण 6 मध्ये बहुलक हा मध्यापेक्षा लहान आहे. परंतू काही वेळा बहुलक हा मध्याशी समान असतो अथवा त्यापेक्षा मोठा असू शकतो.
2. हे स्थितीवर अवलंबून आहे. आपल्याला रुची विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या सरासरी गुणांची आहे की जास्तीत विद्यार्थ्यांनी किती गुण मिळविले याच्याशी आहे. पहिल्यासाठी मध्याची गरज आहे आणि दुसऱ्या स्थितीसाठी बहुलकाची आवश्यकता आहे.

कृती 3 : कृती 2 मध्ये असलेल्या विद्यार्थ्यांच्या गटाला ही कृती पुढे चालू ठेवण्यास सांगावे. प्रत्येक गटाला संग्रहित माहितीचा बहुलक काढण्यास सांगावे. त्याची तुलना मध्याशी करून दोन्हींचा अर्थ विवरण करण्यास सांगावे.

टीप : वर्गीकृत माहितीचा परंतू असमान व्याप्ती असलेल्या माहितीचा बहुलक काढणे शक्य आहे, परंतू त्याबाबत इथे चर्चा करणार नाही.

स्वाध्याय 13.2

1. खालील तक्ता एका इस्पितळात एका वर्षात दाखल झालेल्या रोग्यांचे वय व संख्या दर्शवितो.

वय (वर्षामध्ये)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोग्यांची संख्या	6	11	21	23	14	5

वरील संख्यांचा बहुलक आणि मध्य काढा. दोन्ही केंद्रीय कलांची तुलना करून त्याचे विवरण करा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. खालील संख्या 225 विद्युत उपकरणांची निश्चित कालमर्यादा (तासमध्ये) सुचविते.

कालमर्यादा (तास मध्ये)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
वारंवारता	10	35	52	61	38	29

या उपकरणांची कालमर्यादा काढा.

3. खालील तक्ता, एका गावातील 200 कुटुंबाची मासिक घरगुती खर्चाची मर्यादा दर्शवितो. त्या कुटुंबाच्या खर्चाचा बहुलक काढा तसेच मासिक खर्चाचा मध्य काढा.

खर्च (₹ मध्ये)	**कुटुंबांची संख्या**
1000-1500	24
1500-2000	40
2000-2500	33
2500-3000	28
3000-3500	30
3500-4000	22
4000-4500	16
4500-5000	7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. खालील तक्ता भारतातील उच्च माध्यमिक शाळातील शिक्षक-विद्यार्थी प्रमाण राज्यानुसार दर्शवित आहे. त्यातील संख्यांचा बहुलक आणि मध्य काढा आणि विवरण द्या.

प्रत्येक शिक्षकाच्या प्रमाणात विद्यार्थी संख्या	**राज्य/केंद्रशासित प्रदेशांची संख्या**
15-20	3
20-25	8
25-30	9
30-35	10
35-40	3
40-45	0
45-50	0
50-55	2

5. खालील वारंवारता तक्ता जगातील काही श्रेष्ठ फलंदाजानी एक दिवसीय आंतरराष्ट्रीय क्रिकेट सामान्यात काढलेल्या धावा दर्शवितो

काढलेल्या धावा	फलंदाजांची संख्या
3000-4000	4
4000-5000	18
5000-6000	9
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10,000	1
10,000-11,000	1

या माहितीचा बहुलक काढा.

6. एका विद्यार्थ्याने एका मार्गावरील एका विशीष्ट स्थानावरून प्रत्येकी 3 मिनिटांच्या 100 अवधीत किती कारगाडया गेल्या याचे त्याने निरीक्षण करून नोंदी केल्या. या नोंदी खालील तक्त्यात दिल्या आहेत. तर त्या संख्याचे बहुलक काढा.

कारची संख्या	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
वारंवारता	7	14	13	12	20	11	15	8

13.4 वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यांक (Median of Grouped Data)

इयत्ता IX मध्ये शिकल्या प्रमाणे मध्यांक (medium) हा केंद्रीय कलाचा असा मापक (प्रमाण) आहे की जो संग्रहीत माहितीतील संख्यांची सर्वात मध्यावरील किंमत दर्शवितो. अवर्गीकृत संख्यांचा मध्यांक कसा काढला जातो ते आठवा. प्रथम निरिक्षणातील संख्या चढत्या क्रमात लिहितो. जर 'n' ची किंमत विषम असेल तर मध्यांक हा $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे निरिक्षण असेल. जर `n' ची किंमत सम असेल तर मध्यांक $\frac{n}{2}$ व $(\frac{n}{2}+1)$ व्या निरिक्षणाच्या मध्याचे स्थान असेल.

समजा आम्हाला खाली दिलेल्या संख्यांचा मध्याक काढावयांचा आहे ज्यात 100 विद्यार्थ्यांचे 50 पैकीचे गुण दिले आहेत.

मिळविलेले गुण	20	29	28	33	42	38	43	25
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

प्रथम आपण गुण चढत्या क्रमात मांडू आणि वारंवारता तक्ता तयार करू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 13.9

मिळविलेले गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (वारंवारता)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
एकूण	**100**

येथे `n' =100 जी सम संख्या आहे. मध्यांक हा $(\frac{n}{2})$ व $(\frac{n}{2}+1)$ या निरिक्षणाचा मध्य म हणजेच 50 वे आणि 51 वे पद यांच्या निरिक्षणाची सरासरी. ही सरासरी अथवा मध्य काढण्यासाठी पुढील प्रमाणे जाऊ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 13.10

मिळविलेले गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
20	6
25 पर्यंत	6+20=26
28 पर्यंत	26+24=50
29 पर्यंत	50+28=78
33 पर्यंत	78+15=93
38 पर्यंत	93+4=97
42 पर्यंत	97+2=99
43 पर्यंत	99+1=100

वरील तक्त्याच्या सहाय्याने आता आणखी एक स्तंभ तयार करू जो वारंवारतेवर आधारीत आहे. त्या स्तंभाला *संचित वारंवारता स्तंभ म्हणू.*

तक्ता 13.11

मिळविलेले गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या	संचित वारंवारता
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

वरील तक्त्यानुसार आम्हाला दिसून येते की

50 वे निरिक्षण 28 आहे. (का?)

51 वे निरिक्षण 29 आहे.

म्हणून मध्यांक $= \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप : तक्ता 13.11 मध्ये दर्शविलेले स्तंभ 1 आणि 3 हे संचित वारंवारता तक्ता म्हणून ओळखले जातात. मध्यांक 28.5 हा दर्शवितो की 50% विद्यार्थ्यांची 28.5 पेक्षा कमी गुण मिळविले आणि 50% विद्यार्थ्यांनी 28.5 पेक्षा जास्त गुण मिळविले.

आता आपण खाली दिलेल्या सामुहिक माहितीचा मध्यांक कसा काढतात हे जाणून घेऊ.

खालील वारंवारता तक्त्यात 53 विद्यार्थ्यांनी 100 पैकी मिळविलेले गुण दिले आहेत. त्याचा विचार करा.

तक्ता 13.12

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

वरील तक्त्याच्या सहाय्याने खाली दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे देण्यांस प्रयत्न करा.

किती विद्यार्थ्यानी 10 पेक्षा कमी गुण घेतले? स्पष्टपणे त्याचे उत्तर 5 हे आहे.

किती विद्यार्थ्यांनी 20 पेक्षा कमी गुण मिळविले? लक्षात घ्या की 20 पेक्षा कमी गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यामध्ये 0-10 गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या सामावलेली आहे, त्याच प्रमाणे 10-20 गुण मिळविणारे देखील त्यात सामावलेले आहेत. त्यामुळे 20 पेक्षा कमी गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या 5+3=8. यावरून 10-20 ची संचित वारंवारता (cumulative frequency) 8 आहे.

याच पद्धतीने आपण इतर वारंवारतेच्या संचित वारंवारता काढू ; म्हणजे 30 पेक्षा कमी गुण असलेले, 40 पेक्षा कमी गुण असलेले, 100 पेक्षा कमी गुण असलेले. हे आपण 13.13 मधील तक्त्यानुसार दर्शवू शकतो.

तक्ता 13.13

मिळविलेले गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (संचित वारंवारता)
10 पेक्षा कमी	5
20 पेक्षा कमी	5 + 3 = 8
30 पेक्षा कमी	8 + 4 = 12
40 पेक्षा कमी	12 + 3 = 15
50 पेक्षा कमी	15 + 3 = 18
60 पेक्षा कमी	18 + 4 = 22
70 पेक्षा कमी	22 + 7 = 29
80 पेक्षा कमी	29 + 9 = 38
90 पेक्षा कमी	38 + 7 = 45
100 पेक्षा कमी	45 + 8 = 53

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वर दर्शविलेल्या विभागणीला **च्यापेक्षा कमी असलेली संचित वारंवारता पद्धत** म्हणतात. येथे प्रत्येक संभागश्रेणीची उच्चत्तम मर्यादा 10, 20, 30 .... 100 ही आहे.

याच पद्धतीने आपण विद्यार्थ्यांची मिळविल्या गुणांचा वेगळा तक्ता करू शकतो ज्यात 0 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त, 10 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त, 20 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त आणि पुढे. 13.12 तील तक्त्याला अनुसरून आम्ही निरीक्षण करून सांगू शकतो की संपूर्ण 53 विद्यार्थ्यांनी 0 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त गुण घेतले आहेत. 0-10 च्या गटत गुण मिळविणारे 5 विद्यार्थी आहेत. याचा अर्थ 53-5=48 विद्यार्थ्यांनी 10 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळविले आहेत. याच पद्धतीने पुढे गेल्यास 20 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त गुण घेणारे 48-3=45, 30 अथवा त्यापेक्षा जास्त 45-4=41 या पद्धतीने जे तक्ता 13.14 मध्ये दर्शविले आहे.

तक्ता 13.14

मिळविलेले गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (संचित वारंवारता)
0 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	53
10 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	53-5=48
20 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	48-3=45
30 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	45-4=41
40 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	41-3=38
50 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	38-3=35
60 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	35-4=31
70 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	31-7=24
80 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	24-9=15
90 शी समान अथवा त्यापेक्षा जास्त	15-7=8

वर दर्शविलेल्या विभागणीला **जास्त / अधिक प्रकारची संचित वारंवारता विभागणी** म्हणतात. यात 0, 10, 2 ...... 90 हे प्रत्येक कमीत कमी मर्यादा दर्शविते.

आता या वर्गीकृत संख्यांचा मध्यांक काढण्यासाठी वरील दोन्ही पैकी कोणत्याही प्रकारच्या संचीत वारंवारता पद्धतीचा वापर करू शकतो.

आपण 13.12 आणि 13.13 मिळून एक नविन 13.15 चा तक्ता बनवू घेऊ जो खाली दर्शविला आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 13.15

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (f)	संचित वारंवारता (c f)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

आता वर्गीकृत संख्यांचा मध्य हा संचित वारंवारतेच्या मध्य पदाच्या निरीक्षणाने सांगू शकत नाही; कारण मध्याचे स्थान हे 'एखाद्या' संभागश्रेणीच्या वर्गात असते. त्यासाठी आवश्यक आहे की मध्य किंमतीच्या संभागश्रेणीचा वर्ग शोधणे, जो संख्याना दोन भागामध्ये विभागतो. मग तो संभागश्रेणीचा वर्ग कोणता?

तो वर्ग जाणून घेण्यासाठी आपण सर्व वारंवारतेची संचित वारंवारता काढू आणि $\frac{n}{2}$ ची किंमत काढू. आता आपण संचित वारंवारता $\frac{n}{2}$ पेक्षा जास्त आणि त्याच्या जवळचा वर्ग शोधू. या गटाला मध्यांकाचा गट/वर्ग (median class) असे म्हणतात. वरील वारंवारतेत n=53 आहे त्यामुळे $\frac{n}{2}$=26.5 होतात. आता 60-70 या गटाची संचित वारंवारता 29 जी $\frac{n}{2}$ म्हणजेच 26.5 पेक्षा जास्त अथवा त्याच्या जवळची किंमत आहे.

म्हणून 60-70 हा मध्यांकाच्या वर्ग आहे.

मध्यांकाचा वर्ग निश्चित झाल्यानंतर आपण खालील सुत्राचा वापर करून मध्यांक काढू शकतो.

$$\text{मध्यांक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

यात l = मध्यांक वर्गातील निम्न / निचतम मर्यादा.

n = निरीक्षणांची संख्या

cf = मध्यांकाच्या वर्गाच्या आधीच्या वर्गापर्यंतची संचीत वारंवारता

f = मध्यांकाच्या वर्गाची वारंवारता.

h = वर्गव्याप्ती.

आता $\frac{n}{2} = 26.5, l = 60, cf = 22, f = 7, h = 10$

या किंमती सुत्रात मांडल्यानंतर आम्हाला मिळते की

$$\text{मध्यांक} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{7}\right] \times 10$$
$$= 60 + \frac{45}{7}$$
$$= 66.4$$

यावरून जवळपास अर्ध्या विद्यार्थ्यांना 66.4 पेक्षा कमी गुण मिळले आणि बाकीच्या अर्ध्या विद्यार्थ्यांना 66.4 पेक्षा जास्त अथवा समान गुण मिळाले.

उदाहरण 7 : एका शाळेतील इयत्ता 10 वी च्या 51 मुलींच्या उंचीची माहिती संग्रहीत केली ज्यातून खाली दर्शविलेल्या संख्या मिळाल्या :

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उंची (cm मध्ये)	मुलींची संख्या
140 पेक्षा कमी	4
145 पेक्षा कमी	11
150 पेक्षा कमी	29
155 पेक्षा कमी	40
160 पेक्षा कमी	46
165 पेक्षा कमी	51

यावरून उंचीचा मध्यांक काढा.

उकल : उंचीचा मध्यांक काढण्यासाठी आम्हाला संभागश्रेणी आणि त्यांच्या वारंवारतेची आवश्यकता आहे.

दिलेली विभागणी ही च्यापेक्षा कमी पद्धतीतील असून 140, 145, 150, ...165 ह्या प्रत्येक वर्गाच्या उच्चत्तम मर्यादा आहेत म्हणून वर्ग 140 पेक्षा कमी. 140-145, 145-150 ...... 160-165. निरिक्षण केले असता असे दिसून येते की 4 मुलीची उंची 140 पेक्षा कमी आहे. म्हणून 140 पेक्षा कमी वर्गाची वारंवारता 4. आहे 145 पेक्षा कमी उंची असलेल्या मुलींची संख्या 11 आणि त्यात 140 पेक्षा कमी उंची असलेल्या 4 मुली सामावलेल्या आहेत म्हणून 140-145 च्या संभागश्रेणीच्या वर्गात येणाऱ्या मुलींची संख्या 11-4-7 असेल. त्याच प्रमाणे 145-150 च्या वर्गातील वारंवारता 29-11=18 तसेच 150-155 साठी ती असेल 40-29=11 या प्रमाणे. यावरून वारंवारता दर्शविणारा व संचित वारंवारता दर्शविणारा तक्ता हा खालील प्रमाणे असेल.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 13.16

संभाग श्रेणी	वारंवारता	संचित वारंवारता
140 पेक्षा कमी	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

आता n = 51 म्हणून $\therefore \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ हे निरीक्षण 145-150 च्या वर्गात येते. तेव्हा,

l (निम्न मर्यादा) = 145

c f (145-150 च्या वर्गाच्या आधीच्या वर्गापर्यंतची संचीत वारंवारता) = 11

f (145-150 च्या वर्गाची वारंवारता) = 18

h (वर्गव्याप्ती) = 5

सुत्राचा वापर करून

$$\text{मध्यांक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

म्हणून मुलींच्या उंचीचा मध्यांक 149-03

याचा अर्थ 50% मुलींची उंची 149.03 cm पेक्षा कमी अथवा त्याला समान आहे आणि बाकीच्या 50% मुलींची उंची 149.03 cm पेक्षा जास्त आहे.

उदाहरण 8 : खाली दिलेल्या माहितीचा मध्यांक 525 असून एकूण वारंवारता 100 आहे तर x आणि y ची किंमत काढा.

संभाग श्रेणी	वारंवारता
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उकल :

संभाग श्रेणी	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7 + x$
300-400	12	$19 + x$
400-500	17	$36 + x$
500-600	20	$56 + x$
600-700	y	$56 + x + y$
700-800	9	$65 + x + y$
800-900	7	$72 + x + y$
900-1000	4	$76 + x + y$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$n = 100$ ही किंमत दिली आहे.

परंतू $76 + x + y = 100$ म्हणजेच $x + y = 24$ ....(1)

मध्यांक = 525 आहे जो 500-600 च्या वर्गात आहे.

म्हणून $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

सूत्राचा वापर करून

$$\text{मध्यांक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$ आम्हाला मिळते की

$$525 = 500 + \left[\frac{50 - 36 - x}{20}\right] \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

अथवा $25 = 70 - 5x$

अथवा $5x = 70 - 25 = 45$

म्हणून $x = 9$

म्हणून (1) वरून आम्हाला मिळते की $9 + y = 24$

ते म्हणजे $y = 15$

केंद्रीय कल मापन करण्याच्या तीन पद्धती तुम्ही आतापर्यंत शिकलात. विशिष्ट आवश्यकतेनुसार यातील कोणती मापन पद्धत योग्य आणि उत्तम याची चर्चा करू.

केंद्रीय कल काढतांना जास्तीत जास्त वापरली जाणारी पद्धत म्हणजे मध्य होय. कारण त्यामध्ये सर्व निरीक्षणांच्या समावेश होतो. आणि त्याचे स्थान संपूर्ण संग्रहीत माहितीतील संख्यांच्या सर्वात लहान व सर्वात मोठया संख्यांच्या मध्यावर असते. यातून दोन अथवा जास्त निरीक्षणांची तुलना करणे शक्य होते. उदाहरणार्थ, एखाद्या परिक्षेत वेगवेगळया शाळेतील विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांची सरासरी (मध्य) ची तुलना करून निष्कर्ष काढू शकतो की कोणत्या शाळेचे परिणाम चांगले आहेत.

जाणून घ्या की संख्याच्या एकदम सुरुवातीला व एकदम शेवटच्या संख्यांचा परिणाम मध्यावर होतो. साधारणपणे समान वारंवारता असलेल्या वर्गांचा मध्य हा दिलेल्या संख्यांचे एक चांगले प्रतिनिधीत्व दर्शवितो. परंतू समजा एका वर्गाची वारंवारता 2 आहे आणि इतर पाच वर्गांची वारंवारता 20, 25, 20, 21 आणि 18 आहे तर यांचा मध्य योग्य संख्या प्रतिबिंबीत करत नाही. अशा स्थितीत संग्रहीत माहितीचे प्रतिनिधित्व मध्य करू शकत नाही.

अशा समस्या ज्यात व्यक्तीगत निरीक्षण महत्वाचे नाही आणि आपणाला एक 'विशिष्ट' निरीक्षण जाणून घ्यावयाचे आहे तर त्यासाठी मध्यांक योग्य असतो. उदाहरणार्थ, एखाद्या देशाच्या कामगारांचा उत्पादकतेचा दर, देशातील सरासरी मजूरी इत्यादी. या स्थितीत एकदम लहान अथवा एकदम मोठ्या किंमती असू शकतात. तेव्हा अशा स्थितीत केंद्रीय कल जाणून घेताना मध्याच्या ऐवजी मध्यांक घेतो.

ज्यावेळी वारंवार येणाऱ्या किंमतीचे मान अथवा लोकप्रिय वस्तूंचे प्रमाण निश्चित करावयाचे असेल तर त्यासाठी बहुलक ही उत्तम निवड ठरते. उदाहरणार्थ, टी.व्ही वरून प्रक्षेपित होणारा जास्त लोकप्रिय कार्यक्रम, लोकांच्या जास्त मागणीच्या वस्तू, लोकांकडून जास्त प्रमाणात पसंत केला जाणारा वाहनांचा रंग इत्यादी.

टीप : 1. या केंद्रीय कलांच्या मापकांच्या एकमेकाशी असलेला संबंध खालील प्रमाणे आहे.

3 मध्यांक = बहुलक + 2 मध्य

2. असमान संभागश्रेणींच्या वर्गीकृत संख्यांचा मध्यांक काढणे शक्य आहे, परंतू त्याची आम्ही येथे चर्चा करणार नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 13.3

1. खालील वारंवारता सारणी एका लोकवस्तीतील 68 ग्राहकांनी एका महिन्यात वापरलेल्या विजेचे प्रमाण दर्शविते. त्या संख्यांचा मध्यांक, मध्य आणि बहुलक काढून त्यांची तुलना करा.

मासिक वीज वापर (एकका मध्ये)	ग्राहकांची संख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

2. खाली दिलेल्या वर्गीकरणाचा मध्यांक 28.5 आहे, तर x आणि y ची किंमत काढा.

संभाग श्रेणी	ग्राहकांची संख्या
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-65	5
एकूण	60

3. एका जीवविमा एजंटने 100 पॉलीसीधारकांच्या वयाचे वर्गीकरण करून दिलेली माहिती खालील प्रमाणे आहे. जर विम्याची पॉलीसी ज्यांचे वय 18 वर्षापेक्षा जास्त आणि 60 वर्षापेक्षा कमी असेल त्यांना दिली जात असेल तर वयाचा मध्यांक काढा.

वय (वर्षामध्ये)	पॉलिसी धारकांची संख्या
20 पेक्षा कमी	2
25 पेक्षा कमी	6
30 पेक्षा कमी	24
35 पेक्षा कमी	45
40 पेक्षा कमी	78
45 पेक्षा कमी	89
50 पेक्षा कमी	92
55 पेक्षा कमी	98
60 पेक्षा कमी	100

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

4. एका झाडाच्या 40 पानांची लांबी अचूक प्रमाणात मिलीमीटरमध्ये मोजली आहे आणि ती माहिती खालील तक्त्यात दिली आहे. यावरून पानांच्या लांबीचा मध्यांक काढा.

लांबी (mm मध्ये)	पानांची संख्या
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

(**टीप :** मध्यांक काढण्यासाठी संख्याच्या संभागश्रेणीचा वर्ग हा सातत्यपूर्ण असला पाहिजे. तेव्हा ते वर्ग 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, ... 171.5-180.5 या प्रमाणे बदलून घ्यावेत.)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

5. खालील तक्त्यात 400 नियॉन दिव्यांचा जीवन काल (life time) दर्शविला आहे. तर दिव्यांच्या जीवन कालाचा मध्यांक काढा.

जीवन काल (तासामध्ये)	दिव्यांची संख्या
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	4
4000-4500	62
4500-5000	48

6. एका स्थानिक टेलीफोन नामनिर्देशक पुस्तिकेतून (Directory) 100 आडनावे (surnames) निवडली आहेत. त्यात समविष्ट असलेल्या इंग्लीश वर्णमालेतील अक्षरांची संख्या घेऊन वारंवारता दर्शक तक्ता तयार केला आहे.

अक्षरांची संख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-29
आडनावांची संख्या	6	30	40	16	4	4

आडनांवातील अक्षरांचा मध्यांक निश्चित करा. आडनावतील अक्षरांच्या मध्य काढा. त्याचप्रमाणे आडनावांच्या संख्येचा बहुलक काढा.

7. खालील वर्गीकरण तक्त्यात एका वर्गातील 30 विद्यार्थ्यांचे वजन दिले आहे. त्या विद्यार्थ्यांच्या वजनाचा मध्यांक काढा.

वजन (किलोग्राम मध्ये)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	3	8	6	6	3	2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.5 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. वर्गीकृत सामग्रीचा मध्य खालील प्रकारे काढू शकतो.

(i) प्रत्यक्ष पद्धत : $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) काल्पनिक मध्य पद्धत : $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$.

(iii) पायरी विचलन पद्धत : $\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

यात असे मानले जाते की प्रत्येक वर्गाची वारंवारता त्या वर्गाच्या मध्य बिंदूत केंद्रीत असेल त्याला वर्ग मध्य अथवा वर्ग चिन्ह म्हणतात.

2. वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक हा खाली दिलेल्या सुत्राद्वारे काढतात.

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

यातील संकेताना त्यांचा स्वाभाविक अर्थ आहे.

3. दिलेल्या वारंवारतेची संचित वारंवारता ही त्या वर्गातील वारंवारतेच्या आधीच्या वर्गातील वारंवारतेशी बेरीज करून मिळते.

4. वर्गीकृत संख्यांचा मध्यांक काढताना खालील सुत्राच्या वापर केला जातो.

$$\text{मध्यांक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

यातील संकेताना त्यांचा स्वाभाविक अर्थ आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वाचकांना सूचना :

वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक आणि मध्यांक काढताना, सुत्राचा वापर करण्यापूर्वी संभागश्रेणी ही सातत्यपूर्ण आहे की नाही ते पहावे. हाच नियम ओजीव्ह वक्र काढताना लक्षात घ्यावा. ओजीव्ह वक्र काढतांना दोन्ही अक्षावरील प्रमाण (scale) हे समान असते असे नाही.

***

14 संभाव्यता (PROBABILITY)

T9L5R7

संभाव्यत्तेंचा सिद्धांत आणि त्रुटींचा सिद्धांत हे आता गाणिती अति आवडीचा आणि अति व्यावहारिक महत्वाचा विशाल समूह स्थापित करतात.

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

R.S. Woodward

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

14.1 संभाव्यता - एक सैध्दांतिक दृष्टिकोन

आपण खालील स्थितीचा विचार करु.

समजा, एक नाणे यादृच्छिकरित्या वर उडविले जाते.

> जेव्हा आपण एका नाण्याबाबत बोलतो, तेव्हा आपण अशी कल्पना करतो की ते नाणे न्यायसंगत (fair) आहे. म्हणजेच ते सममित (symmetrical) आहे. कारण असे होऊ नये की त्याची कोणतीही एकच बाजू अधिक वेळा वर पडेल. नाण्याच्या या गुणधर्माला त्याचा अपक्षपातीपणा (नि:पक्षपातीपणा) (unbiased) म्हटले जाते. यादृच्छिकरित्या नाणे उडविणे (random toss) आमचा उद्देश असा की नाण्याला कोणताही पक्षपात (bias) किंवा रुकावट नसताना स्वतंत्रापूर्वक पडायला दिले जाते.

आपणाला माहीत आहे की एक नाणे वर उडविले असता नाणे खाली पडल्यानंतर त्याची छापाची बाजू किंवा काटाची बाजू वर असते. (आपण नाणे उभे म्हणजे त्याच्या कडेवर (edge) पडते अशी संभावना गृहित धरत नाही. असे नाणे फक्त वाळूमध्ये पडण्याची शक्यता असते.) यावरून आपण असे म्हणू शकतो की नाण्याची छाप किंवा काटा असलेली बाजू वर येण्याची निष्पत्ती **समसंभाव्य** (equally likely) आहे. समसंभाव्य निष्पतीच्या आणखी एका उदाहरणासाठी, समजा आम्ही एक फासा वर फेकलो, तेव्हा तो फासा नेहमी न्यायसंगत फासा आहे असे समजूनच असतो. फाशाच्या संभाव्य निष्पत्ती काय आहेत ? त्या आहेत 1,2,3,4,5 व 6. येथे प्रत्येक संख्या वर येण्याची समान शक्यता आहे. फासा फेकल्यानंतर मिळणाऱ्या समसंभाव्य निष्पत्ती 1,2,3,4,5 व 6 आहेत.

काय प्रत्येक प्रयोगाच्या निष्पत्ती समसंभाव्य असतात? चला, बघूया.

समजा एका पिशवीत 4 लाल चेंडू आणि 1 निळा चेंडू आहेत. पिशवीत न बघता तुम्ही एक चेंडू बाहेर काढला तर त्याची निष्पत्ती काय असेल? पिशवीत 4 लाल चेंडू व 1 निळा चेंडू आहेत व त्यातील एक चेंडू बाहेर काढला तर तो लाल किंवा निळा असेल यांची शक्यता पडताळून पाहिल्यास तो निळा असण्यापेक्षा लाल असण्याचा संभव जास्त असेल. म्हणून येथे समसंभाव्य निष्पत्ती असणार नाही. मात्र पिशवीतून कोणत्याही रंगाचा चेंडू काढण्याची निष्पत्ती समसंभाव्य आहे.

सर्व प्रयोगांची निष्पत्ती समसंभाव्य असणे आवश्यक नाही. परंतू या प्रकरणात आपण सर्व प्रयोगांची निष्पती समसंभाव्य आहे असे समजून पुढे अभ्यास करूया.

इयत्ता IX मध्ये आपण एक घटना E ची प्रायोगिक किंवा आनुभविक संभाव्यता P(E) ची व्याख्या पुढील प्रमाणे केली होती.

$$P(E) = \frac{\text{एखाद्या घटनेमध्ये घडून येणाऱ्या चाचण्यांची संख्या}}{\text{एकूण चाचण्यांची संख्या}}$$

संभाव्यतेच्या आनुभविक व्याख्येचा अर्थ लावण्यास प्रयोगाच्या प्रत्येक घटनेचा संबंध ती घटना वारंवार अनेक वेळा केलेल्या प्रयोगाशी जोडलेला असतो. कोणताही प्रयोग पुन्हा-पुन्हा करण्याची आवश्यकता याला मर्यादा आहे. कारण अनेक स्थितीमध्ये हे अधिक खर्चिक होऊ शकते किंवा प्रयोग पुन्हा करणे शक्य नसते. निसंदेह नाणे फेकणे किंवा फासा फेकणे या प्रयोगात काही अडचण नसते. परंतू एक उपग्रह (satellite) अवकाशात सोडण्याचा प्रयोग पुन्हा-पुन्हा असफल झाल्यास आनुभविक संभाव्यता काय असेल? तुमचा विचार काय? किंवा एक भूकंप झाल्याने बहुमजली इमात कोसळेल की नाही यांची आनुभविक संभाव्यता ठरविण्यास भूकंपाची घटना दुसऱ्यांदा होण्याबद्दल तुम्ही काय सांगू शकाल?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अशा प्रयोगामध्ये, जेथे आम्ही काही कल्पनांना सत्य मानण्यास तयार असतो, कारण कल्पना सरळ सत्य (सैद्धांतिक) संभाव्यता ठरविण्यास आम्हाला सहाय्य करते. निष्पत्तींची समसभांव्य होण्याची कल्पना (जी अनेक प्रयोगामध्ये मान्य होते, जसे की वरील प्रमाणे नाणे उडविणे आणि फासा फेकण्याच्या दोन्ही उदाहरणात आहे.) आम्हाला कोणत्याही घटनेची संभाव्यता याबद्दल पुढील व्याख्येकडे घेऊन जाते.

कोणत्याही E या घटनेची (सैद्धांतिक) संभाव्यता (theoretical probability)(जिला परंपरागत संभाव्यता(classical probability) सुद्ध म्हटले जाते.) P(E) ची व्याख्या खालील प्रमाणे केली जाते.

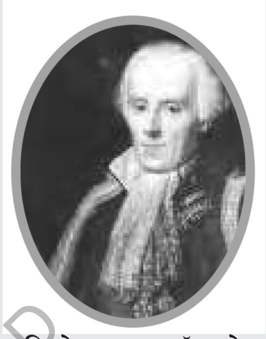
$$P(E) = \frac{\text{E शी अनुकूल निष्पात्तींची संख्या}}{\text{प्रयोगामध्ये शक्य असलेल्या सर्व निष्पत्तींची संख्या}}$$

यथे आपण अशी कल्पना करतो की प्रयोगाच्या निष्पत्ती सम-संभाव्य आहेत.

आपण संक्षिप्त रुपात, सैध्दांतिक संभाव्यतेला फक्त संभाव्यता म्हणूया.

संभाव्यतेची वरील व्याख्या 1795 मध्ये पियरे साइमन लॅप्लासे (Pierre Simon Laplace) यांनी दिली होती.

संभाव्यता सिद्धातांची सुरवात 16व्या शतकात झाली, जेव्हा इटालियन भौतशास्त्रज्ञ आणि गणितज्ञ जे. काईन यांनी या विषयावर पहिले पुस्तक लिहिले, ज्याचे नाव होते The Book on Games of Chance. तेव्हा पासून अनेक महान गणितज्ञांचे लक्ष संभाव्यतेच्या अभ्यासाकडे आकर्षित झाले. जेम्स बर्नूली (1654-1705), ए.डी. मोईवरे (1667-1754) आणि पियरे साइमन लॅप्लासे यांनी या क्षेत्रामध्ये महत्वाचे योगदान दिले. लॅप्लासे यांनी 1812 मध्ये लिहिलेल्या Theorie Analytique Probabilities ला संभाव्यतेच्या सिद्धांतासाठी एका व्यक्तिने केलेले मोठे योगदान मानले जाते. आलिकडे काही वर्षामध्ये संभाव्यता सिद्धांताचा अनेक क्षेत्रात जसे जीवशास्त्र, अर्थशास्त्र, वंशसंबंधीशास्त्र (genetics), भौतिकशास्त्र, समाजशास्त्र इ. मध्ये केला जात आहे.



पियरे साइमन लॅप्लासे (1749-1827)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण प्रयोगाद्वारे काही घटनांची संभाव्यता शोधूया, जेथे सम-संभाव्य होण्याची कल्पना मान्य आहे.

उहाहरण 1 : एक नाणे वर उडविले असता छाप वर येण्याची तसेच काटा वर येण्याची संभाव्यता किती?

उलक : एक नाणे वर उडविले असता शक्य निष्पत्तींची संख्या 2 आहे - छाप (H) आणि काटा (T). समजा की E घटना छाप वर येण्याची आहे. तेव्हा E शी अनुकूल निष्पत्ती 1 आहे.

$$P(E) = \frac{\text{E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या}}{\text{सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या}} = \frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे, जर F घटना काटा वर येण्याची असेल तर,

$$P(F) = P\ (\text{काटा}) = \frac{1}{2}\ (\text{का?})$$

उदाहरण 2 : एका पिशवीत समान आकार असलेले एक लाल, एक निळा आणि एक पिवळा असे तीन चेंडू आहेत. कृतिकाने पिशवीत न पाहता त्यातील एक चेंडू बाहेर काढला. तर काय संभाव्यता असेल की तो चेंडू.

(i) पिवळा असेल ? (ii) लाल असेल ? (iii) निळा असेल ?

समजा 'पिवळा चेंडू बाहेर काढणे' ही घटना Y आहे. 'लाल चेंडू बाहेर काढणे' घटना R आहे आणि 'निळा चेंडू बाहेर काढणे' घटना B आहे.

आता, सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या = 3

(i) Y घटनेशी अनुकूल निष्पत्तीची संख्या = 1

म्हणून $P(Y) = \frac{1}{3}$

अशा प्रकारे, $P(R) = \frac{1}{3}$ आणि $P(B) = \frac{1}{3}$

लक्षात ठेवा :

(1) कोणत्याही प्रयोगाची अशी घटना जिची एकच निष्पत्ती असेल तर तिला **प्रारंभिक घटना किंवा एक घटकी घटना** (elementary event) म्हणतात. उदाहरण 1 मधील E अणि F या प्रारंभिक घटना आहेत. तसेच वरील उदाहरणामधील घटना Y, R आणि B या प्रत्येकी एक प्रारंभिक घटना आहेत.

(2) उदाहरण 1 मध्ये आम्ही पाहतो की $P(E) + P(F) = 1$.

उदाहरण 2 मध्ये आम्ही पाहतो की $P(Y) + P(B) + P(R) = 1$

लक्षात घ्या की **कोणत्याही प्रयोगाच्या सर्व प्रारंभिक घटनांच्या संभाव्यतेंची बेरीज 1 असते.** हे व्यापक रूपात सुद्धा सत्य असते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : समजा एक फासा एक वेळ वर फेकला आहे. (i) फाशावर 4 वर पेक्षा मोठी संख्या वर येण्याची संभाव्यता किती ? (ii) 4 पेक्षा लहान किंवा त्याच्याशी समान संख्या वर मिळण्याची संभाव्यता किती ?

उकल : (i) येथे असे मानू की '4' पेक्षा मोठी संख्या वर येण्याची घटना E आहे. सर्व शक्य निष्पत्ती 6 आहेत. त्याम्हणजे 1,2,3,4,5 आणि 6. घटना E शी अनुकूल निष्पत्ती 5 आणि 6 आहेत म्हणजे E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या 2 आहे. म्हणून,

$$P(E) = P\ (4 \text{ पेक्षा मोठी संख्या}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) असे मानू की '4' पेक्षा लहान किंवा तिच्याशी समान संख्या वर मिळण्याची घटना F आहे. सर्व शक्य निष्पत्ती = 6.

घटना F शी अनुकूल निष्पत्ती 1, 2, 3 आणि 4.

म्हणून F शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या 4 आहे.

म्हणून, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

वरील उदाहरणातील घटना E व F या प्रारंभिक घटना आहेत का? नाहीत. या प्रारंभिक घटना नाहीत, कारण घटना E च्या निष्पती 2 आहेत आणि घटना F च्या निष्पत्ती 4 आहेत.

लक्षात ठेवा :

उदाहरण 1 वरून असे दिसते की

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

येथे घटना E 'एक छाप वर मिळविणे' आहे तसेच घटना E एक काटा वर मिळविणे 'आहे.

उदाहरण 3 वरून असे दिसते की.

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

येथे घटना E '4 पेक्षा मोठी संख्या वर मिळविणे' तसेच घटना F ≤ '4 शी समान किंवा लहान संख्या वर मिळविणे' आहे. लक्षात घ्या की 4 पेक्षा मोठी संख्या वर मिळविणे नाही याचा अर्थ असा की 4 पेक्षा लहान किंवा तिच्याशी समान संख्या वर मिळविणे असा आहे आणि अशा प्रकारे त्याचे विलोम (व्यस्त) सुद्धा प्रकट करते.

वरील (1) आणि (2) मध्ये घटना 'F' ही 'E नाही' (not E) शी समान नाही. आम्ही घटना 'E नाही' हे $\overline{E}$ असे दर्शवितो.

म्हणून $P(E) + P(E \text{ नाही}) = 1$

अर्थात $\mathbf{P(E) + P(\overline{E}) = 1}$, **म्हणजे** $P(E) = 1 - P(\overline{E})$.

सामान्यपणे, कोणतीही घटना E साठी हे सत्य आहे की, $\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$

घटना 'E नाही' ला घटना $\overline{E}$ असे दर्शवितात आणि घटना $\overline{E}$ ला घटना E ची **पूरक** (**complement**) घटना असे म्हणतात. आम्ही असे सुद्धा म्हणतो की E आणि $\overline{E}$ या परस्पर **'पूरक घटना'** (complementory events) आहेत.

आता आपण खालील प्रश्नांची उत्तरे समजून घेऊया.

(i) एक फासा एक वेळ फेकला असता त्याच्या वरील पृष्ठावर 8 संख्या येण्याची संभाव्यता किती?

(ii) एक फासा एक वेळ फेकला असता वरील पृष्ठावर 7 पेक्षा लहान संख्या येण्याची संभाव्यता किती?

आपण (i) चे उत्तर पाहू :

आम्हाला माहीत आहे की फासा एक वेळ फेकला असता फक्त शक्य निष्पत्ती 6 असतात. त्या म्हणजे 1, 2, 3, 4, 5, आणि 6. फाशाच्या कोणत्याही पृष्ठावर 8 संख्या नसते. म्हणून 8 ला

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अनुकूल कोणतीही निष्पत्ती नाही. अर्थात, अशा निष्पत्तींची संख्या शून्य (0) असते. हेच दुसऱ्या शब्दात, फासा एक वेळ फेकला असता 8 संख्या मिळविणे **अशक्य** (impossible) आहे.

म्हणून, P (8 संख्या मिळविणे) $= \frac{0}{6} = 0$

जी घटना घडणे अशक्य आहे, त्याची संभाव्यता 0 असते. अशा घटनेला **अशक्य घटना** असे म्हणतात.

आपण (ii) चे उत्तर पाहू :

फाशाच्या प्रत्येक पृष्ठावर असलेली संख्या नेहमी 7 पेक्षा लहानच असते. म्हणून फासा एक वेळ फेकला असता वरील पृष्ठावर असणारी संख्या 7 पेक्षा लहान असते हे निश्चित असते. म्हणून घटनेशी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या ही सर्व शक्य निष्पत्तींच्या संख्येशी समान असते, जी 6 आहे.

म्हणून, P(E) = P (7 पेक्षा लहान संख्या मिळविणे) $= \frac{6}{6} = 1$

जी घटना घडणे निश्चित (sure) आहे, तिची संभाव्यता 1 असते. अशा घटनेला एक **निश्चित** (sure) **किंवा निर्धारित** (certain) **घटना** असे म्हणतात.

लक्षात ठेवा : संभाव्यता P(E) च्या व्याख्येनुसार, आपण पाहतो की अंश (घटना E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या) ही नेहमी छेद (सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या) पेक्षा लहान असतो किंवा समान असतो म्हणून.

$$\mathbf{O \leq P(E) \leq 1}$$

आता आपण खेळण्याचे पत्ते (playing cards) संबंधी एक उदाहरण पाहू. तुम्ही पत्त्याचा जोड पाहिला आहात का? त्यामध्ये एकूण 52 पत्ते असतात. ते 4 गटात विभागलेले असतात. प्रत्येक गटान 13 पत्ते असतात. या 4 गटात इस्पिक (spade) (♠), बदाम (hearts)(♥), चौकट (diamond) (♦) आणि किलावर (clubs) (♣) असे पत्ते असतात.

इस्पिक आणि किलावर काळ्या रंगाचे आणि बदाम व चौकट हे लाल रंगाचे पत्ते असतात. प्रत्येक गटातील पत्ते : एक्का (ace), राजा (king), राणी (queen), गुलाम किंवा जोकर (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 आणि 2 असतात. राजा, राणी व गुलाम असलेल्या पत्त्यांना फेस कार्डस (face cards) (चित्रयुक्त पत्ते) म्हणतात.

उदाहरणे 4 : उत्तम प्रकारे पिसलेल्या 52 पत्यांच्या जोडातून कोणताही एक पत्ता काढला असता तो पत्ता,

(i) एक एक्का आहे (ii) एक एक्का नाही, यांची संभाव्यता सांगा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : पत्त्याचा जोड उत्तम प्रकारे पिसल्याने निष्पती सम-संभाव्य होण्यास सुनिश्चितता प्राप्त होते.

(i) एका जोडामध्ये 4 एक्के असतात. असे समजा की घटना E 'एक एक्का आहे'.

E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या = 4

सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या = 52 (का?)

म्हणून, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) समजा की घटना F 'एक एक्का नाही'.

F शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या 52-4=48 (का?)

सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या = 52

म्हणून, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

लक्षात ठेवा :

येथे F दुसरे काही नसून $\overline{E}$ आहे. म्हणून P(F) ची किंमत अशी ही काढता येते.

$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

उदाहरण 5 : संगिता आणि रेश्मा टेनिसचा एक सामना खेळतात. संगिताकडून सामना जिंकण्याची संभाव्यता 0.62 आहे. तर रेश्माची सामना जिंकण्याची संभाव्यता किती?

उकल : समजा S आणि R या अनुक्रमे संगिता व रेश्मा यांच्या सामना जिंकण्याच्या घटना आहेत.

संगिता सामना जिंकण्याची संभाव्यता = P(S) = 0.62 (दिलेली आहे).

रेश्मा सामना जिंकण्याची संभाव्यता =P(R) = 1- P(S) कारण घटना R व S या पूरक घटना आहेत.)

$= 1 - 0.62 = 0.38$

उदाहरण 6 : सविता आणि हमीदा दोन मैत्रिणीं आहेत. पुढील गोष्टीची संभाव्यता किती असेल ?

(i) दोघींचे जन्मदिवस वेगवेगळे आहेत.

(ii) दोघींचा जन्मदिवस एक आहे. (लिप वर्ष (Leap year) सोडून)

उकल : सविताचा जन्मदिवस वर्षातील कोणताही एक दिवस असू शकतो. याच प्रकारे हमीदाचा जन्मदिवस सुद्धा वर्षाच्या 365 दिवसापैकी कोणताही एक दिवस असू शकतो.

(i) जर दोघींचे जन्मदिवस भिन्न असतील तर त्यांच्या जन्म दिवसांची अनुकूल निष्पत्तींची संख्या 365 - 1 = 364 होईल.

म्हणून, P (हमीदाचा जन्मदिवस सविताच्या जन्म दिवसाच्या भिन्न आहे) = $\frac{364}{365}$

(ii) P (सविता व हमीदाच जन्मदिवस एकच आहे)

= 1- P (दोघींचा जन्मदिवस भिन्न आहे)

= 1- $\frac{364}{365}$ ($P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ प्रमाणे)

= $\frac{1}{365}$

उदाहरण 7: एका शाळेतील दहावीच्या वर्गात 40 विद्यार्थी असून त्यामध्ये 25 मुली व 15 मुले आहेत. वर्गशिक्षिकेला एक विद्यार्थी वर्गप्रतिनिधी म्हणून निवडायचा आहे. यासाठी त्यांनी वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याचे नाव एकाच प्रकारच्या वेगवेगळ्या कार्डावर लिहिले. सर्व कार्डे एका पेटीत घालून पेटी चांगली हलविली. त्यानंतर पेटीतील एक कार्ड बाहेर काढले. तर खालीत घटनांची संभाव्यता सांगा.

(i) कार्डवर एका मुलीचे नाव आहे? (ii) कार्डवर एका मुलाचे नाव आहे?

उकल : एकूण विद्यार्थी 40 आहेत. म्हणजे नावे लिहिलेली कार्डे 40 आहेत. त्यातील एक कार्ड बाहेर काढले आहे.

(i) सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या = 40

बाहेर काढलेल्या कार्डवर मुलीचे नाव असण्याच्या अनुकूल निष्पत्तींची संख्या = 25 (का?)

आता, P (कार्डवर मुलीचे नाव) = P (मुलगी) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) कार्डवर मुलाचे नाव असण्याच्या अनुकूल निष्पत्तींची संख्या = 15 (का?)

आता, P (कार्ड वर मुलाचे नाव) = P (मुलगा) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

लक्षात ठेवा : आम्ही P (मुलगा) ची किंमत अशी ही काढू शकतो.

P (मुलगा) = 1 - P (मुलगा नाही) = 1 - P (मुलगी) = 1 - $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 8 : एका पेटीत 3 निळ्या, 2 पांढऱ्या आणि 4 लाल रंगाच्या गोट्या (Marbles) आहेत. जर पेटीतील एक गोटी यादृच्छिकरित्या बाहेर काढली तर तिची संभाव्यता किती असेल? जेव्हा ती गोटी.

(i) पांढरी आहे? (ii) निळी आहे? (iii) लाल आहे?

उकल : एक गोटी यादृच्छिकरित्या काढली गेली तर संक्षिप्तपणे हे असे म्हणता येईल की सर्व निष्पत्ती सम-संभाव्य आहेत.

सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या = 3 + 2+ 4= 9 (का?) समजा घटना W 'गोटी पांढरी आहे', घटना 'B गोटी निळी आहे'. आणि घटना R 'गोटी लाल आहे'.

(i) घटना W शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या = 2

म्हणून, $P(W) = \frac{2}{9}$

अशा प्रकारे, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ आणि (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

लक्ष द्या की $P(W) + P(B) + P(R) = 1$

उदाहरण 9 : हरप्रित दोन नाणी एकाच वेळी वर उडविते. (समजा एक नाणे ₹1 चे आहे व दुसरे नाणे ₹2 चे आहे). तर कमितकमी एक छाप वर येण्याची संभाव्यता किती?

उदकल : आपण 'छाप' साठी H आणि 'काटा' साठी T लिहितो. जेव्हा दोन नाणी एकाच वेळी वर उडविली जातात, तेव्हा शक्य निष्पती (H, H), (H, T), (T, H) (T, T) हे सर्व सम-संभाव्य आहेत. येथे (H, H) चा अर्थ पहिल्या नाण्याची (समजा ₹1 चे नाणे) 'छाप' बाजू वर आणि दुसऱ्या नाण्याची (₹2 चे नाणे) 'छाप' बाजू वर येते. अशा प्रकारे (H, T) चा अर्थ एका नाण्याची 'छाप' बाजू व दुसऱ्या नाण्याची 'काटा' बाजू वर येते इत्यादी.

घटना E 'कमितकमी एक छाप वर येणे'शी अनुकूल निष्पत्ती (H, H), (H, T), (T, H) आहेत. (का?)

म्हणून, E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या = 3

म्हणून, $P(E) = \frac{3}{4}$

हरप्रित कडून कमितकमी एक 'छाप' वर मिळविण्याची संभाव्यता = $\frac{3}{4}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

लक्षात ठेवा : तुम्ही P(E) अशा प्रकारे सुद्धा काढू शकता

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) \quad (\text{कारण } P(\overline{E}) = P \text{ (एक पण छाप नाही } = \frac{1}{4})$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

आता पर्यंत पाहिलेल्या सर्व उदाहरणामध्ये प्रत्येक घटनेंची सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या मर्यादित होती का? जर नाही, तर आपण तपासून पाहूया.

अनेक प्रयोग असे असतात, जेथे निष्पती दिलेल्या दोन संख्यांच्या मधील कोणतीही संख्या असू शकते किंवा ज्यामध्ये निष्पत्ती एक वर्तुळ किंवा आयतातील प्रत्येक बिंदू असते. आता तुम्ही सर्व शक्य निष्पत्तीं मोजू शकाल का? जसे आपण जानता की हे शक्य नाही, कारण दोन संख्यांच्या मध्ये अमर्याद संख्या असतात, जसे की एका वर्तुळात अमर्याद बिंदू असतात. म्हणून, तुम्ही अभ्यासलेली (सैध्दांतिक) संभाव्यतेची व्याख्या वर्तमान रूपात प्रयोग करता येत नाही. या प्रश्नाची उकल कोणती? यासाठी, खालील उदाहरणाचा अभ्यास करू.

उदाहरण 10* : एका संगीत खूर्ची (musical chair) खेळात, जी महिला संगीत वाजवते. तिला असे सांगण्यात आले की संगीत सुरु झाल्यानंतर 2 मिनिटाच्या आत केव्हा ही संगीत बंद करा. जर संगीत सुरू झाल्यांतर पहिल्या अर्ध्या मिनिटाच्या आत संगीत बंद केले तर याची संभाव्यता किती?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : येथे शक्य निष्पती 0 आणि 2 च्या मधील सर्व संख्या आहेत. या संख्या संख्यारेषेचा 0 पासून 2 पर्यंतचा भाग आहे. (आकृती 14.1 पहा)

आकृती 14.1

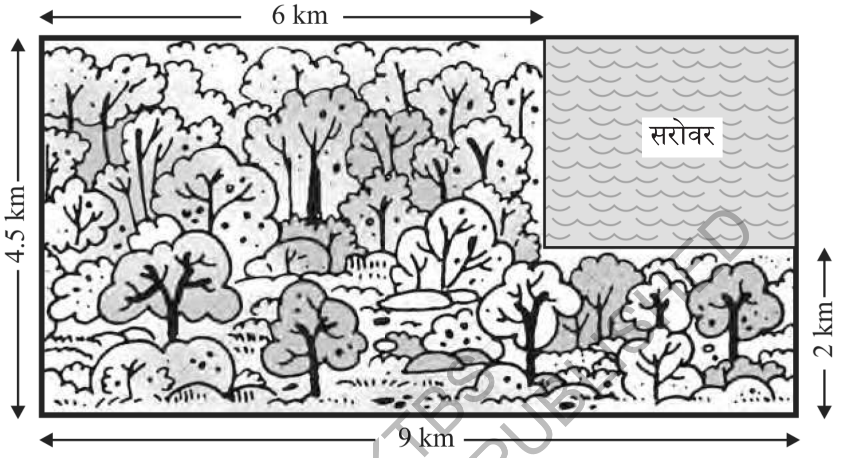
समज घटना E संगीत सुरू झाल्यानंतर पहिल्या अर्धा मिनिटात संगीत बंद होते. E शी शक्य अनुकूल निष्पती संख्या रेषेवर O ते $\frac{1}{2}$ च्या मधील सर्व बिंदू आहेत. म्हणून सर्व निष्पत्ती सम-संभाव्य आहेत. याचा अर्थ आम्ही असा तर्क देऊ शकतो की, एकूण अंतर 2 मधून अंतर $\frac{1}{2}$ घटना E शी अनुकूल आहे.

म्हणून, $$P(E) = \frac{\text{घटना E शी अनुकूल अंतर}}{\text{पूर्ण अंतर ज्यामध्ये निष्पती होऊ शकेल}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

* हे परिक्षेच्या दृष्टिने नाही.

उदाहरण 10 ला अनुसरून कोणत्याही घटनेची संभाव्यता त्याचे अनुकूल क्षेत्रफळ संपूर्ण क्षेत्रफळाशी गुणोत्तर रुपात मांडू शकतो का?

उदाहरण 11*: एका बाट चुकलेल्या हेलिकॉप्टरच्या बाबतीत अशी सूचना मिळते की ते हेलिकॉप्टर आकृती 14.2 मध्ये दर्शविलेल्या आयताकार क्षेत्रात कोसळले आहे. तर ते हेलिकॉप्टर आकृतीत दाखविलेल्या सरोवरात कोसळण्याची संभाव्यता किती?



आकृती 14.2

उकल : हेलिकॉप्टरचे आयताकार क्षेत्रफळात कोठे ही कोसळणे सम-संभाव्य आहे.

होलिकॉप्टर कोसळू शकेल त्या क्षेत्राचे संपूर्ण क्षेत्रफळ

$$= (4.5 \times 9) \text{ km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

सरोवराचे क्षेत्रफळ $= (2.5 \times 3) \text{ km}^2 = 7.5 \text{ km}^2$

म्हणून, P (हेलिकॉप्टर सरोवरात कोसळले) $= \dfrac{7.5}{40.5} = \dfrac{75}{405} = \dfrac{5}{27}$

उदाहरण 12 : एका कपाटामध्ये 100 शर्टस् आहेत. त्यातील 88 शर्टस् चांगले आहेत, 8 शर्टस् थोडसे खराब झालेले आहेत आणि 4 शर्टस् फारच खराब झालेले आहेत. जिम्मी हा व्यापारी फक्त चांगले शर्टस् स्विकारतो, तर सुनित हा व्यापारी चांगले व थोडेसे खराब झालेले शर्टस् सुद्धा स्विकारतो. कपाटातून एक शर्ट यादृच्छिकरित्या काढल्यास खालील गोष्टींची संभाव्यता किती?

(i) जिम्मिने स्विकारलेले शर्टस्?

(ii) सुजितने स्विकारलेले शर्टस्?

* हे परिक्षेच्या दृष्टिने नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : 100 शर्टस्‌मधून एक शर्ट काढला जातो. म्हणून येथे सम-संभाव्य निष्पत्ती 100 आहेत.

(i) जिम्मीशी अनुकूल (स्विकारणे) निष्पतींची संख्या = 88 (का?)

P (जिम्मी शर्ट्स् स्विकारतो) $= \frac{88}{100} = 0.88$

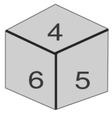
(ii) सुजितशी अनुकूल निष्पतींची संख्या = 88 + 8 = 96 (का?)

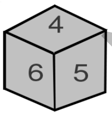
P (सुजित शर्टस् स्विकारतो) $= \frac{96}{100} = 0.96$

उदाहरण 13 : एक निळ्या रंगाचा व एक पिवळ्या रंगाचा असे दोन फासे एकाच वेळी वर उडविले असता घडून येणाऱ्या सर्व शक्य निष्पत्ती लिहा. दोन्ही फाश्यांच्या वरील पृष्ठावर खालील प्रमाणे बेरीज येण्याची संभाव्यता किती?

(i) 8 आहे (ii) 13 आहे (iii) 12 पेक्षी लहान किंवा समान.

उकल : जर निळया फाशाची 1 संख्या असणारी बाजू वर असेल तर पिवळया फाशाची 1, 2, 3, 4, 5, 6 संख्या असणारी कोणतीही एक बाजू वर असेल. अशा प्रमाणे निळया फाशाच्या 2, 3, 4, 5 किंवा 6 या संख्याशी घडते. प्रयोगाच्या सर्व शक्य निष्पत्तींची यादी खालील तक्यात दिलेली आहे. प्रत्येक क्रमित जोडीतील पहिली संख्या निळया फाशावरील व दुसरी संख्या पिवळया फाशावरील आहे.





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

आकृती 14.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लक्षात घ्या की जोडी (1,4) ही जोडी (4,1) पेक्षा वेगळी आहे. (का?)

सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या $= 6 \times 6 = 36$

(i) 'दोन संख्यांची बेरीज 8 आहे', याची अनुकूल निष्पत्ती घटना E ने दर्शवू. शक्य घटना (2,6) (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) (आकृती 14.3 पहा)

म्हणून E शी अनुकूल निष्पतींची संख्या = 5

म्हणून, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) आकृतीवरून तुम्ही पाहू शकाल की घटना F शी अनुकूल निष्पत्ती मिळू शकत नाही. 'दोन संख्याची बेरीज 13'.

म्हणून, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) आकृतीवरून तुम्ही पाहू शकता की घटना G, 'दोन संख्यांची बेरीज ≤ 12'. येथे सर्वच अनुकूल निष्पत्ती येतात.

म्हणून, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

स्वाध्याय 14.1

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. खालील विधाने पूर्ण करा:

(i) घटना E ची संभाव्यता + घटना 'E नाही' ची संभाव्यता = _________

(ii) एक घटना घडू शकत नाही अशा घटनेची संभाव्यता _________ असते. अशा घटनेला _________ म्हणतात.

(iii) जी घटना घडणे निश्चित आहे, त्या घटनेची संभाव्यता _________ असते. अशा घटनेला _________ म्हणतात.

(iv) कोणत्याही प्रयोगाच्या सर्व प्रारंभिक घटनांच्या संभाव्यतेंची बेरीज _________ असते.

(v) कोणत्याही घटनेची संभाव्यता _________ पेक्षा मोठी किंवा तिच्याशी समान असते किंवा _________ पेक्षा लहान किंवा तिच्याशी समान असते.

2. खालील प्रयोगातील कोणकोणत्या प्रयोगांच्या निष्पत्या सम-संभाव्य आहेत ? स्पष्ट करा.

(i) एक ड्रायव्हर कार सुरु करण्याचा प्रयत्न करतो. कार सुरू होते किंवा सुरू होत नाही.

(ii) एक बास्केटबॉल खेळाडू बॉल बास्केटमध्ये घालण्याचा प्रयत्न करतो. तो/ती बॉल बास्केटमध्ये घालतो किंवा घालत नाही.

(iii) एका प्रश्नाचा बरोबर कि चूक निष्कर्ष लावला जातो. उत्तर बरोबर किंवा चूक असेल.

(iv) एका मुलाचा जन्म होतो. ते मुल मुलगा असेल की मुलगी असेल.

3. फुटबॉलचा सामना सुरू करते वेळी कोणता संघ पहिल्यांदा बॉल घेणार याचा निर्णय घेण्यास नाणे उडविणे हे न्यायसंगत का मानले जाते?

4. खाली दिलेल्या संख्या मधील कोणती संख्या घटनेची संभाव्यता होत नाही?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. जर P(E) = 0.05 आहे, तर 'E नाही' ची संभाव्यता किती?

6. एक पिशवीत फक्त लिंबूचा स्वाद असणाऱ्या गोळ्या आहेत. मालिनी पिशवीत न पाहता त्यातील एक गोळी बाहेर काढते. तर यांची काय संभाव्यता असेल की ती बाहेर काढलेली गोळी,

(i) संत्राचा स्वाद असणारी आहे? (ii) लिंबूचा स्वाद असणारी आहे?

7. 3 विद्यार्थ्यांच्या एका गटामधील 2 विद्यार्थ्यांचा जन्मदिवस एकच नाही यांची संभाव्यता 0.992 आहे. तर या दोन विद्यार्थ्यांचा जन्मदिवस एकच आहे यांची संभाव्यता किती?

8. एका पिशवीत 3 लाल आणि 5 काळे चेंडू आहेत. त्यातील एक चेंडू यादृच्छिकरित्या काढला जातो. तर तो चेंडू (i) लाल आहे? (ii) लाल नाही आहे? यांची संभाव्यता किती?

9. एका डब्यात 5 लाल, 8 पांढऱ्या व 4 हिरव्या गोट्या आहेत. यादृच्छितकरित्या त्यातील एक गोटी काढली असता त्याची संभाव्यता किती असेल जेव्हा ती गोटी,

(i) लाल आहे? (ii) पांढरी आहे? (iii) हिरवी नाही?

10. एका पिग्गी बँकेत (piggy bank) 50 पैशाची शंभर नाणी आहेत. ₹ 1 ची पंचवीस नाणी आहेत, ₹ 2 ची वीस नाणी आहेत आणि ₹ 5 ची दहा नाणी आहेत. पिग्गी बँक हलवून उलटी केली असता त्यातून एक नाणे खाली पडण्याची निष्पती सम-संभाव आहे. तर पडलेले नाणे (i) 50 पैशाचे असेल ? (ii) ₹ 5 चे नसेल? असेल याची संभाव्यता किती?

11. गोपी आपल्या मत्सालयासाठी (aquirium) एक मासा खरेदी करते. दुकानदार 5 नर मासे आणि 8 मादी मासे असलेल्या एका पेटीतून एक मासा गोपीला देण्यास काढतो (आकृती 14.4 पहा). तर काढलेला मासा नर मासा असण्याची संभाव्यता किती?

आकृती 14.4

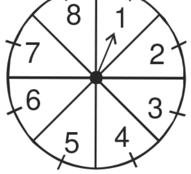
12. संधी (chance) च्या एका खेळात एक बाण फिरविला जातो. तो बाण स्थिर होतांना 1,2,3,4,5,6,7 किंवा 8 पैकी कोणतीही एक संख्या दाखवितो (आकृती 14.5 पहा). जर या सर्व निष्पती सम-संभाव्य असतील तर तो बाण खालील घटनावर स्थिर राहील याची संभाव्यता काढा.

(i) 8 वर राहिल.

(ii) एका विषम संख्येवर राहिल.

(iii) 2 पेक्षा मोठ्या संख्येवर राहिल.

(iv) 9 पेक्षा लहान संख्येवर राहिल.



आकृती 14.5

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13. एक फासा एक वेळ फेकला असता, खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) वर योणाऱ्या पृष्ठावर एक अविभाज्य संख्या.

(ii) वर योणाऱ्या 2 आणि 6 मधील कोणतीही एक संख्या.

(iii) वर योणाऱ्या पृष्ठावर एक विषम संख्या.

14. योग्य रितीने पिसलेल्या 52 पत्यांच्या जोड्यामधून एक पत्ता काढला तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) लाल रंगाचा राजा (ii) एक फेस कार्ड म्हणजे चित्रयुक्त पत्ता

(iii) लाल रंगाचा चित्रयुक्त पत्ता (iv) बदामचा गुलाम

(iv) इस्पिकचा पत्ता (v) चौकटची राणी

15. खेळण्याच्या पत्त्यामधील 5 पत्ते - चौकटचा दहा (दश्या), गुलाम राणी, राजा आणि एक्का यांना उलट करून योग्यरित्या पिसले जाते. त्यातून यादृच्छिकरित्या एक पत्ता काढला तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) एक राणी आहे.

(ii) पत्ता राणीचा आला तर त्याला बाजूला ठेवले जाते आणि आणखी एक पत्ता काढला जातो. तर तो पत्ता (a) एक एक्का आहे. (b) एक राणी आहे.

16. कोणत्यातरी कारणाने 12 खराब असलेली पेन 132 चांगल्या पेनमध्ये मिसळलेली आहेत. फक्त बधून, खराब पेन कोणती व चांगली पेन कोणती हे ओळखता येत नाही. या मिसळलेल्या पेनामधून, एक पेन यादृच्छिकरित्या काढले असता ते पेन चांगले असण्याची संभ्याव्यता काढा.

17. 20 बल्बांच्या एका समुहात 4 बल्ब खराब आहेत. या समुहातून एक बल्ब यादृच्छिकरित्या काढल्यास तो बल्ब खराब असण्याची संभाव्यता किती?

18. एका पेटीत 1 ते 90 पर्यंतच्या संख्या लिहिलेल्या 90 डिस्क (discs) आहेत. या पेटीतून एक डिस्क यादृच्छिकरित्या काढली. तर खालील घटनांची संभाव्याता काढा.

(i) डिस्कवर दोन अंकी संख्या आहे.

(ii) डिस्कवर पूर्णवर्ग संख्या आहे.

(iii) डिस्कवरील संख्येला 5 ने नि:शेष भाग जातो.

19. एका मुलाकडे 6 पृष्ठे असलेला एक फासा आहे. प्रत्येक पृष्ठावर अनुक्रमे खालील अक्षरे लिहिली आहेत.

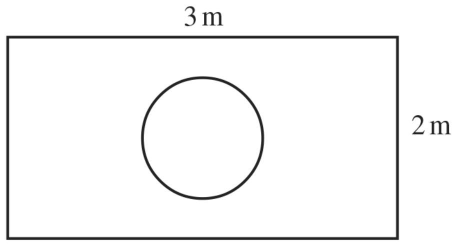
A	B	C	D	E	A

हा फासा एक वेळ फेकला असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) A वर मिळते. (ii) D वर मिळते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

20. *समजा एक फासा आकृती 14.6 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आयताकार क्षेत्रात यादृच्छिकरित्या फेकला तर, तो फासा 1m व्यासाच्या वर्तुळात पडेल याची संभाव्यता किती?



आकृती 14.6

21. 144 बॉलपेन असलेल्या समूहात 20 बॉल पेन खराब आहेत आणि बाकीची चांगली आहेत. तुम्ही चांगले पेन खरेदी करु इच्छिता, खराब पेन खरेदी करू इच्छित नाही. दुकानदार त्यातून एक पेन यादृच्छिकरित्या तुम्हाला देतो तर संभाव्यता काढा.

(i) तुम्ही ते पेन खरेदी करणार?

(ii) तुम्ही ते पेन खरेदी करणार नाही?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

22. उदाहरण 13 पहा. (i) खालील तक्ता पूर्ण करा.

दोन फाशावरील संख्यांची बेरीज	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) एक विद्यार्थी असा तर्क देतो की 'येथे एकूण 11 निष्पत्ती 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 आणि 12 आहेत. प्रत्येकाची संभाव्यता $\frac{1}{11}$ आहे. या तर्काशी तुम्ही सहमत आहात का? सकारण उत्तर द्या.

23. एका खेळामध्ये एक रुपयाचे एक नाणे 3 वेळा वर उडविले जाते आणि प्रत्येक वेळी मिळालेल्या निष्पत्ती (out comes) लिहून घेतल्या जातात. तिन्ही निष्पती समान आल्यास, म्हणजे तीन छाप किंवा तीन काटा मिळाल्यास हनीफ हा खेळ जिंकतो नाहीतर हरतो. या खेळात हनीफ हरतो याची संभाव्यता काढा.

24. एक फास दोन वेळा फेकला असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) 5 संख्या कोणत्याही वेळी वर येत नाही (ii) 5 संख्या कमितकर्मा एक वेळा वर येते.

* हे उदाहरण परिक्षेच्या दृष्टिने नाही.

(**टिप :** एक फासा दोन वेळा फेकणे आणि दोन फासे एकाच वेळी फेकणे एकच प्रयोग माला जातो.)

25. खाली दिलेल्या मधील कोणता तर्क सत्य आहे? व कोणता तर्क असत्य आहे? सकारण उत्तर द्या.

(i) जेव्हा दोन नाणी एकाच वेळी वर उडविली जातात, तेव्हा त्याच्या तीन संभव (शक्य) निष्पत्ती - दोन छाप, दोन काटा किंवा प्रत्येकी एक वेळ वर येतात यातील प्रत्येक निष्पत्तीची संभाव्यता $\frac{1}{3}$ आहे.

(ii) जेव्हा एक फासा फेकला जातो, तेव्हा दोन शक्य निष्पती-एक तर विषम संख्या वर येते किंवा सम संख्या वर येते. म्हणून विषम संख्या वर येण्याची संभ्याव्यता $\frac{1}{2}$ आहे.

14.2 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. प्रायोगिक संभाव्यता आणि सैध्दांतिक संभाव्यता यामधील फरक.

2. घटना E ची सैध्दांतिक (परंपरागत) संभाव्यता P(E) ची व्याख्या खालील प्रमाणे ;

$$P(E) = \frac{\text{E शी अनुकूल निष्पत्तींची संख्या}}{\text{प्रयोगातील सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या}}$$

येथे आम्ही अशी कल्पना करतो की प्रयोगातील सर्व निष्पती सम संभाव्य आहेत.

3. एका निश्चित (किंवा निर्धारित) घटनेची संभाव्यता 1 असते.

4. एका अशक्य घटनेची संभाव्यता शून्य (0) असते.

5. घटना E ची संभाव्यता एक अशी संख्या असते की $0 \le P(E) \le 1$

6. ज्या घटनेची निष्पती संख्या फक्त एक असते, तिला प्रारंभिक घटना म्हणतात. कोणत्याही प्रयोगाच्या सर्व प्रारंभिक घटनेच्या संभाव्यतेंची बेरीज 1 असते.

7. कोणतीही घटना E साठी $P(E) + P(\bar{E}) = 1$. येथे $\bar{E}$ घटना म्हणजे 'E नाही' असे दर्शविते. E व $\bar{E}$ यांना परस्परांच्या पूरक घटना म्हणतात.

प्रकरण विशेष :एका घटनेची संभाव्यता किंवा आनुभविक संभाव्यता हि वास्तविक रूपात घटना घडण्यावर आधारित असते. जेव्हा त्या घटनेच्या सैद्धांतिक संभाव्यतेमध्ये काही कल्पनांच्या आधारावर हे भाकीत गेले जाते की घटना काय घडेल. जस-जसे एका प्रयोगीतील अभिप्रयोगांची संख्या वाढत जाते, तस-तसे संभाव्यता आणि सैद्धांतिक संभाव्यता जवळ-जवळ समान होण्याचा प्रत्यय येऊ शकतो.

***

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

गणिती नमुना
MATHEMATICAL MODELLING

A2

A2.1 परिचय:

- एका पौढ माणसाच्या शरीरात सुमारे 1,50,000 कि.मी. लांबीच्या रक्तवाहिन्या असतात.
- मानवी हृदय शरीरातील 5 ते 6 लिटर रक्त प्रत्येक 60 सेकंदाल पंप करते.
- सूर्याच्या पृष्ठभागावरील तापमान सुमारे 6000^{0}C आहे.

अशी ही माहिती आपल्या शास्त्रज्ञ आणि गणितज्ञांनी कशी मिळविली याचे तुम्हाला आश्चर्य वाटते का? काय त्यांनी काही वयस्कर, मृत झालेल्या मानवाच्या शरीरातील लहान मोठ्या रक्त वाहिन्या शरीराबाहेर काढून त्यांची लांबी मोजली आहे? हृदयाद्वारे प्रत्येक सेकंदाला पंप केलेल्या रक्ताचे प्रमाण मोजण्यास शरीरातून रक्त बाहेर काढले होते का? सूर्याच्या पृष्ठभागावरील तापमान मोजण्यास आपल्या बरोबर थर्मामीटर घेऊन ते सूर्यावर गेले होते का? निश्चितचा असे करणे किंवा घडणे शक्य नाही. मग असा प्रश्न निर्माण होतो की अशी माहिती त्यांनी कशी प्राप्त केली?

निश्चितच याचे उत्तर **गणिती नमुन्यात** मिळते. इयत्ता नववीमध्ये आपल्याला यासंबंधी परिचय झाला आहे. आपल्याला हे लक्षात असेल की गणिती नमुना वास्तविक जीवनाशी जोडलेल्या कोणत्या तरी स्थितीचे गाणिती स्पष्टीकरण असते आणि हे ही लक्षात असेल की कोणत्या तरी समस्येचा गणिती नमुना मिळविण्याची एक क्रिया आहे.

गणिती नमुन्यात आपण वास्तविक जीवनाशी निगडीत कोणती तरी समस्या घेतो आणि तिला एका गणिती समस्यामध्ये रूपांतरीत करतो. तेव्हा आपण गणिती समस्या सोडवितो आणि तेव्हा हे पाहणे आवश्यक आहे की समस्या सोडविल्याचे उत्तर अर्थपूर्ण आहे का? गणिती नमुना अत्यंत महत्वपूर्ण आहे. याची काही उदाहरणे पुढील प्रमाणे आहेत.

(i) एका अशा ठिकाणी की जेथे नदिची खोली आणि रुंदी समजून घेण्यास पोहचू शकणार नाही.

(ii) पृथ्वी आणि इतर ग्रह यांचे वस्तूमान समजून घेणे.

(iii) पृथ्वी आणि इतर कोणत्याही ग्रहामधीत अंतर समजून घेणे.

(iv) देशातील मान्सूनच्या आगमनाचे भाकीत करणे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(v) स्टॉक मार्केटच्या कलाची (Trend) भाकीते करणे.

(vi) एका व्यक्तिच्या शरीरातील रक्ताचे घनफळ समजून घेणे.

(vii) 10 वर्षानंतर एखाद्या शहराचे लोकसंख्येबद्दल भाकीत करणे.

(viii) एका आडाच्या वातावरणात असणाऱ्या वेगवेगळ्या प्रदूषकांचे PPM बद्दल अंदाज करणे.

(ix) एका शहराच्या वातावरणात असणाऱ्या वेगवेगळ्या प्रदूषकांचे बद्दल अंदाज करणे.

(x) पर्यावरणावर होणाऱ्या प्रदूषकांच्या प्रभावाबद्दल अंदाज करणे.

(xi) सूर्याच्या पृष्ठभागावरील तापमानाचा अंदाज करणे.

या प्रकरणात आम्ही गणिती पुराव्याच्या प्रक्रियेचा पुन्हा विचार करुया आणि हे स्पष्ट करण्यासाठी आपण आपल्या आसपास आढळण्याऱ्या काही उदाहरणांचा उपयोग करूया. विभाग A2.2 मध्ये आम्ही नमुने तयारय करण्याच्या सर्व पायऱ्यांची ओळख व आपल्या आसपास आढळणाऱ्या काही उदाहरणांचा उपयोग करू. विभाग A 2.3 मध्ये आम्ही भिन्न - भिन्न प्रकारच्या उदाहरणावर चर्चा करुया. विभाग A 2.4 मध्ये आम्ही गणिती नमुन्यांचे महत्व व या संबंधी कारणांचा विचार करु.

येथे लक्षात घ्या की आमचे लक्ष त्या महत्वपूर्ण गोष्टी कडे जागरुक करणेचे आहे, ज्यामध्ये गणिते वास्तविक जगाशी जोडलेले प्रश्न सोडविण्यास सहाय्य होतात. तरी पण गणिती नमुने यांचे महत्व वास्तवमध्ये समजण्यास आपल्याला गणिताचे आणखी ज्ञान आवश्यक आहे. पुढील इयत्तेमध्ये या संबंधी काही उदाहरणे तुम्हास पहायला मिळतील.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A 2.2 गणिती नमुन्यांच्या पायऱ्या

इयत्ता 9 वी मध्ये आपण नमुनांच्या उपयोगासंबंधी काही उदाहरणावर विचार केला होता. या उदाहरणावरून आपणास क्रिया आणि त्या संबंधी पायऱ्यांची काही जाणीव मिळाली होती का? चला आपण गणितीय नमुन्या संबंधी मुख्य पायऱ्यावर पुनःविचार करू.

पायरी 1 : (समस्या समजावून घेणे) खऱ्या (वास्तव) समस्येची व्याख्या करा आणि जर आपण एका समूहामध्ये काम करत असाल, तर त्या समस्यावर विचार करा ज्या आपण समजावून घेऊ इच्छितो. काही कल्पना करून आणि काही घटकाकडे दुर्लक्ष करून समस्या आटोपशीर केल्या जाव्यात.

उदाहरणार्थ, समजा आमची समस्या एका सरोवरातील माशांची संख्या जाणून घ्यायची आहे. येथे असे शक्य नाही की सरोवरातील प्रत्येक मासा पकडून बाहेर काढून त्यांचे मोजमाप करणे. अशा स्थितीमध्ये एक नमुना (Sample) बनवून आणि त्याच्या सहाय्याने सरोवरात असणाऱ्या माशांची एकूण संख्या जाणून घेण्याचा प्रयत्न करू शकतो.

पायरी 2 : (गणिती विवरण आणि सुत्रीकरण) समस्यांचे वेगवेगळ्या पैलूंचे वर्णन गणिती शब्दात करा. समस्यांचे गणिती रुपात वर्णन करण्याचे काही मार्ग आहेत ते म्हणजे,

- चलांची व्याख्या करा.
- समीकरण किंवा असमानता लिहा.
- आकडे एकत्रित करा अणि सारणीरुपात संग्रह करा.
- ग्राफ तयार करा.
- संभाव्यता काढा.

उदाहरणार्थ : एक नमुना (Sample) घेऊन पायरी 1 मध्ये सांगितल्याप्रमाणे आम्ही माशांची एकूण संख्या समजून घेण्यास काय करतो? आम्ही नमुना रूपाने घेतलेल्या माशांना चिन्हांकित करतो आणि त्यांना बाकीच्या माशांच्या बरोबर राहण्यास सरोवरात पुन्हा सोडून देतो. त्यानंतर पुन्हा सरोवरातून माशांचा दुसरा नमुना घेतो आणि पाहतो की या नविन नमुन्यात पहिले चिन्हांकित केलेले किती मासे आहेत. तेव्हा गुणोत्तर आणि प्रमाणचा उपयोग करून आम्ही माशांची एकूण संख्या समजून घेऊ शकतो. उदाहरणासाठी आपण सरोवरातून 20 माशांचा एक नमुना घेऊ आणि त्यांना चिन्हांकित करून त्या सरोवरात सोडू म्हणजे सरोवरातील बाकीच्या माशांच्या बरोबर मिसळतील. माशांच्या या मिश्र गटातून आपण आणखी एक नमुना (समजा 50 माशांचा एक नमुना) घेऊ आणि पाहू की या नव्या नमुन्यात चिन्हांकित माशांची संख्या किती आहे. शेवटी आपण आपले आकडे एकत्रित करतो आणि त्यांचे विश्लेषण करतो.

येथे आपण असे मानतो की चिन्हांकित मासे इतर माशांच्या बरोबर समान रुपात मिळतात आणि आपण जो नमुना घेतो तो माशांच्या एकूण संख्येचा एक चांगला प्रतिनिधी आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

पायरी 3 : (गणिती समस्या सोडविणे) विविध गणिती तंत्रे वापरून पायरी 2 मध्ये विकसीत केलेली सरळरूप दिलेली गणिती समस्या सोडविली जाते.

उदाहरणार्थ : समजा पायरी 2 च्या उदाहरणामध्ये दुसऱ्या नमुन्यात 5 मासे चिन्हांकित आहेत. म्हणून माशांची एकूण संख्या $\frac{5}{50}$ म्हणजे, $\frac{1}{10}$ चिन्हांकित आहेत. जर हे एकूण संख्येचे ठराविक रूप असेल तर एकूण संख्या $\frac{1}{10} = 20$

म्हणून एकूण संख्या $= 20 \times 10 = 200$

पायरी 4 : (उकलचा अर्थ) : मागील पायरी मध्ये मिळालेल्या सोडविण्याच्या भागाला आता आपण वास्तविक जीवनात अशा स्थितीचा संदर्भ घेतो. जसे पायरी 1 ची सुरूवात होती.

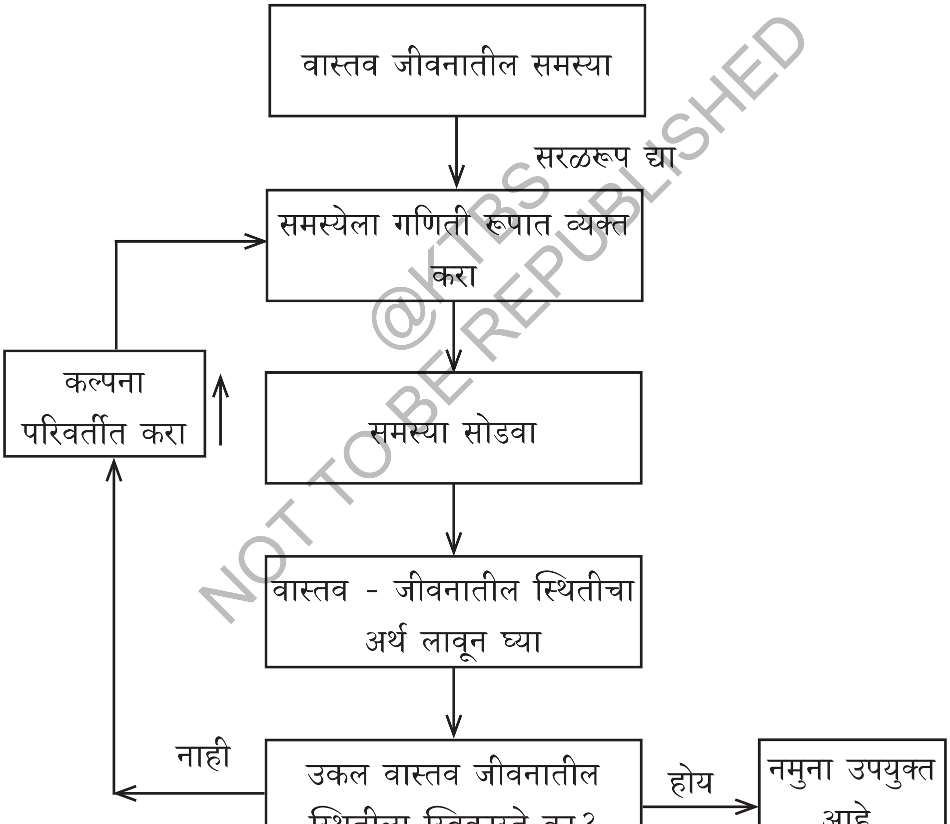
उदाहणार्थ : पायरी 3 ची समस्या सोडविल्याने आम्हाला माशांची एकूण संख्या 200 मिळाली होती.

पायरी 5 : (नमुन्याची वैधता) आता आपण आपल्या मूळ स्थितीला जाऊया आणि पाहुया की गणिती पद्धतीने मिळविलेले परिणाम सार्थक आहेत की नाहीत. जर सार्थक असतील तर आपण नमुन्यांचा प्रयोग नवी सूचना उपलब्ध होईपर्यंत किंवा कल्पना परावर्तीत होईपर्यंत करतो.

कधी-कधी सरलीकरणाच्या संबंधामध्ये केलेल्या कल्पनांच्या कारणामुळे गणिती विवरण देते वेळी, वास्तव समस्यां आवश्यक पैलूपासून वंचित राहतात. अशा वेळी उकल बहुधा वास्तविकतेपासून दूर राहते आणि त्यात काही अर्थ नसतो. जर असे होत असेल तर आपण पायरी 1 मध्ये केलेल्या कल्पनांवर पुन्हा विचार करतो आणि दुसरी काही कारणे घेऊन त्यांना वास्तविक बनवितो.

उदाहणार्थ, पायरी 3 मध्ये आपण सरोवरातील माशांची एकूण संख्या ज्ञात करून घेतली होती, परंतू ती संख्या सरोवरातील माशांची खरी संख्या होऊ शकत नाही. आता आपण पाहुया की पायरी 2 आणि 3 मध्ये काही वेळा प्राप्त झालेले परिणाम लक्षात घेऊन आम्हाल एकूण संख्येचे उत्तम ज्ञान मिळते की नाही. यामुळे माशांची संख्या उत्तमरित्या प्राप्त होईल.

गणिती पुरावे प्रक्रिया बघण्याची आणखी एक पद्धत, आकृती A2.1 मध्ये दाखविली आहे.



आकृती A2.1

उकल सोपी बनण्यासाठी नमुने सरलीकरण आणि परिशुध्दता यामध्ये समतोल राखू पाहतात. ते आशा करतात की अंदाजे सत्यतेच्या इतक्या जवळ असते, की काही प्रगती होऊ शकेल. सर्वात उत्तम परिणाम असा असतो ज्यामुळे असे भाकीत केले जाईल की पुढे काय होईल किंवा ज्यामुळे

सामान्य परिशुद्धते बरोबर परिणामाचे आकलन केले जाऊ शकेल. लक्षात असू द्या की समस्या सोडविण्यासाठी आमच्याकडून वेगवेगळ्या कल्पनामुळे वेगवेगळे नमुने प्राप्त होऊ शकतात. म्हणून कोणतेही नमुने परिपूर्ण नसतात. काही नमुने उत्तम आणि काही त्यापेक्षा ही अति उत्तम असू शकतात.

स्वाध्याय A2.1

1. खालील परिस्थितीवर विचार करा.

तेराव्या शतकाच्या प्रारंभी लिओनाई फिबोनशी यांनी एक प्रश्न केला होता की अशा स्थितीमध्ये किती सशांच्या जोड्या असतील जेव्हा आपण फक्त दोन ससे घेऊन सुरवात केली आणि येथे असे माना की सशांची एक जोडी प्रत्येक महिन्याला पिलांच्या एका जोडीला जन्म देते आणि सशांची प्रत्येक जोडी आपला शिशु दोन महिन्याच्या वयानंतर जन्म देते. महिना-प्रति-महिना सशांच्या जोड्यांची संख्या शून्य आणि पहिला महिना सोडून मागील दोन महिन्यामध्ये सशांची बेरीज होते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

महिना	सशांच्या जोड्या
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 महिन्यानंतर आपल्या जवळ सुमारे 1600 सशांच्या जोड्या असतील.

या स्थितीमध्ये समस्या आणि गणिती नमुन्याच्या विविध पायऱ्या स्पष्ट करा.

A2.3 काही स्पष्टीकरणे

आता आपण काही गणिती नमुन्याची उदाहरणे घेऊ.

उदाहरण 1 : (फाशाची एक जोडी फेकणे) समजा तुमच्या शिक्षकानी तुम्हाला खालील खेळाचा अंदाज करण्याचे आव्हान दिले. या खेळात ते एक फाशाची जोडी फेकतात. त्या अगोदर तुम्हाला याचा अंदाज करावा लागेल की फाशांच्या वरील पृष्ठावर येणाऱ्या संख्यांची बेरीज काय असेल. बरोबर उत्तर आल्यास प्रत्येकी दोन गुण मिळतील आणि उत्तर चुकीचे झाल्यास तुमचे दोन गुण कमी होतील. तर कोणत्या संख्या सर्वोत्तम अंदाज देतील?

उकल :

पायरी 1 (समस्या समजून घेणे) : फाशावर येणाऱ्या अशा संख्याची माहिती तुम्हाला करून घ्यावी लागेल की त्या फाशावर जास्तीत जास्त वेळा वर येतात.

पायरी 2 (गणिती विवरण) : गणिती स्वरूपात ही समस्या फाशावर येणाऱ्या विविध बेरजेच्या शक्यतेंची संभाव्यता परिवर्तीत होते. खालील 36 संख्याच्या जोड्यातून एक यादृच्छिकरित्या निवड करून आपण सरळरूपात स्थितीचा नमुना करू शकतो.

(1, 1)	(1, 2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

वरील संख्यांच्या जोडीतील पहिली संख्या पहिल्या फाशावरील संख्या असते आणि दुसरी संख्या दुसऱ्या फाशावरील संख्या असते.

पायरी 3 (गणिती समस्या सोडविणे) : वरील संख्यांच्या जोडीतील दोन संख्यांची बेरीज केली असता आपणास 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 आणि 12 अशा बेरजा मिळतात. या सर्व 36 जोडया समसंभाव्य (equally likely) आहेत असे मानून प्रत्येकांची संभाव्यता आपण काढली पाहिजे.

हे आपण खालील प्रमाणे सारणी रुपात मांडतो.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बेरीज	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{1}{36}$

येथे निरीक्षणाने आपणास असे दिसते की बेरीज 7 येण्याची संभाव्यता $\frac{1}{6}$ आहे. ही सर्वात अधिक आहे.

पायरी 4 (उकलचा अर्थ लावणे) : बेरीज 7 येण्याची संभाव्यता अधिक असल्याने, तुम्ही 7 संख्येचा अंदाज पुन्हा पुन्हा लावला पाहिजे.

पायरी 5 (नमुना वैधता) : फाशाचा एक जोड अनेक वेळा फेका आणि संबंधीत वारंवारता सारणी तयार करा. या वारंवरतांची तुलना संगत संभाव्यतेंच्या बरोबर करा. जर हे एक दुसऱ्याच्या जवळपास असतील तर अशावेळी फासा असमतोल (biased) असणाचा संभव आहे. तेव्हा, त्या संख्यांची किंमत काढण्यास आम्ही आकडे मिळवू शकतो ज्यावर असमतोल आहे.

दुसरे उदाहरण घेण्यापूर्वी आपल्याला त्याच्या पार्श्वभूमीचे ज्ञान जाणून घेणे आवश्यक आहे.

अनेक लोकांचा एक सामान्य अनुभव असतो की, त्यांना जेव्हा पैशांची आवश्यकता असते, तेव्हा त्यांच्याकडे आवश्यक पैसे नसतात. नित्याच्या जीवनात आवश्यक वस्तूंची खरेदी करण्यास किंवा काही सुखसोईच्या वस्तू विकत घेण्यास नेहमी पैशांची आवश्यकता असते. स्कूटर, शितपेटी, दूरदर्शनसंच (T.V), कार इत्यादी. काही वस्तूंची खरेदी करण्यास मर्यादित पैसे असणाऱ्या ग्राहकांच्यासाठी व्यापाऱ्यांनी 'हप्ता योजना' नावाची एक योजना चालवलेली आहे.

काही वेळा विक्रेते (व्यापारी) ग्राहकांना अनेक आमिषे दाखवून हप्ता योजना जाहिर करतात. हप्त्याने खरेदी करण्यामध्ये वस्तू खरेदी करतांना वस्तूची पूर्ण रक्कम भरण्याची गरज नसते तर, खरेदीवेळी पूर्ण किंमतीचा काही भाग रक्कम भरून वस्तू खरेदी करता येते व राहिलेली रक्कम ठराविक हप्त्याने जसे की मासिक, तिमाही, सहामाही किंवा वार्षिक हप्त्याने देता येते. मात्र या योजनेत खरेदीदाराला वस्तू थोडी महाग पडते. कारण वस्तू खरेदीवेळी दिलेल्या रक्कमेनंतर राहिलेल्या रक्कमेवर वस्तू विक्रेता व्याज आकारतो.

हप्ता योजना उत्तमरित्या समजून घेण्यास काही उदाहरणे घेण्यापूर्वी या संकल्पने संबंधी वारंवार येणारे काही शब्द समजावून घेऊ.

एका वस्तूची रोख किंमत म्हणजे ग्राहकाने वस्तू खरेदी करताना द्यावयाची पूर्ण रक्कम होय.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टिप : हप्ता योजनेमध्ये वस्तूंच्या खरेदीवेळी दिलेली रक्कम वजा करून राहिलेली रक्कम एक वर्षाच्या आत दिल्यास त्या रक्कमेवर सरळव्याज आकारले जाते.

> पूर्वीच्या काळी कर्ज रुपात घेतलेल्या रक्कमेवर व्याज लावणे किंवा व्याज घेणे वाईट समजले जात होते. व्याज देणे घेणेच्या संबंधीत कायद्यापासून वाचण्यासाठी एक मार्ग असा होता की, एक चलनामध्ये कर्ज घेतले जात होते आणि दुसऱ्या वेगळ्या चलनाने कर्ज फेडले जात होते. त्यामुळे व्याज विनिमय दर लपला जात होता.

आता आपण गणिती नमुने संबंधी उदाहरणे पाहू.

उदाहरणे 2 : जूही एक सायकल खरेदी करू इच्छिते. तिच्याकडे रोख ₹600 आहेत. ती बाजारात जाऊन तिच्या आवडीची एक सायकल पसंद करते. परंतू त्या सायकलची रोख किंमत ₹1800 आहे. जूहीने आपल्याकडे ₹600 आहेत सांगितल्या नंतर दुकानदार तिला सांगतो की तू आता ₹600 दे व रहिलेली रक्कम ₹610 प्रमाणे दोन मासिक हप्त्याने देऊ शकतेस. आता जूहीकडे दोन योजना आहेत. एकतर ती दुकानदाराची हप्ता योजना स्विकारणे किंवा बँकेतून 10% दराने सरळव्याजाने कर्ज घेऊन रोख रक्कम देऊन सायकल खरेदी करणे. तर आर्थिक दृष्ट्या यातील कोणती योजना जूहीला फायदेशीर ठरेल?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल :

पायरी 1 (समस्या समजावून घेणे) : जूहीला हे ठरविले पाहिजे की दुकानदाराने मांडलेली योजना स्विकारावी की नाही. यासाठी तिला दुकानदार व बँक यांचे व्याज दर समजून घ्यावे लागतील जे हप्ता योजनेमध्ये लावले जाणारे आणि दुसरे बँकेचा व्याज दर (अर्थात 10%).

पायरी 2 (गणिती विवरण) : हप्ता योजना स्विकारणे किंवा न स्विकारणे यासाठी तिला बँकेतून घेतलेल्या रक्कमेचा व्याजाचा दर याची तुलना दुकानदाराने लावलेल्या व्याज दराशी करावी लागेल. लक्षात असू द्या की राहिलेली पूर्ण रक्कम एक वर्षाच्या आत भरावी लागणार आहे. रक्कमेवर सरळव्याज दिले पाहिजे.

आपणाला माहीत आहे की सायकलची रोख किंमत = ₹1800

हप्ता योजनेमध्ये रोख द्यावयाची रक्कम = ₹600

हप्ता योजनेमध्ये दुकानदाराला देणे रक्कम = ₹(1800 - 600) = ₹1200

असे मानू की दुकानदाराने लावलेला व्याजाचा दर r % आहे.

प्रत्येक महिन्याला द्यावयाची हप्त्याची रक्कम = ₹610

दोन हप्त्यात द्यावयाची एकूण रक्कम = ₹610 + ₹610 = ₹1220

हप्ता योजनेमध्ये होणारे एकूण व्याज ₹1220 – ₹1200 = ₹ 20 (1)

जूहीकडे दुकानदाराचे ₹1200 एक महिन्यासाठी राहिले

म्हणून, पहिल्या महिन्याचे मुद्दल = ₹1200

दुसऱ्या महिन्याचे मुद्दल = ₹(1200 - 610) = ₹590

दुसऱ्या महिन्याची शिल्लक देणे रक्कम ₹590 + लावलेले व्याज

₹200 = मासिक हप्ता ₹610 = दुसरा हाता.

म्हणून एका महिन्याचे एकूण मुद्दल ₹1200 + ₹590 = ₹1790

आता, व्याज = ₹ $\frac{1790\times r\times 1}{100\times 12}$ (2)

पायरी 3 (समस्या सोडविणे) : (1) व (2) वरून

$$\frac{1790\times r\times 1}{100\times 12}=20$$

किंवा $$r=\frac{20\times 1200}{1790}=13.14 \text{ (अंदाजे)}$$

पायरी 4 (उकलचा अर्थ) : हप्ता योजनेमध्ये लावलेला व्याजाचा दर ₹13.14%

बँकेचा व्याज दर 10 %

म्हणून, सायकल खरेदी करण्यास बँकेकडून कर्ज घेणे पसंद केले पाहिजे, कारण आर्थिक दृष्टाने ते फायदेशीर ठरते.

पायरी 5 (नमुन्याची वैधता) : अशा स्थितीमध्ये या पायरीला विशेष महत्व नाही. कारण संख्या निश्चित आहेत. तरी पण बँकेतून कर्ज घेणे या संदर्भात स्टँप पेपरची वैगेरे पूर्णता करण्यास होणारा प्रभावी खर्च, हा हप्ता योजनेच्या व्याजापेक्षा जास्त होतो म्हणून ती आपला पर्याय बदलू सुद्धा शकते.

टीप : आता सुद्धा व्याजदराचा नमुना आपल्या प्रारंभिक अवस्थेत आहे आणि आता वैधता आर्थिक बाजारची एक समस्या आहे. जर हप्ता निश्चित करण्यामध्ये वेगवेगळे व्याज ठरविले गेले तर वैधता एक महत्वाची समस्या होते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A2.2

खाली दिलेली उदाहरणे सोडवितांना प्रत्येक उदाहरणामध्ये गणिती नमुन्यांच्या विविध पायऱ्यांचा उपयोग करा.

1. एक पक्षिविद्यातज्ञ (Ornithologist) एका मोठ्या क्षेत्रातील पोपटांची संख्या जाणून घेऊ इच्छितो. पोपट पकडण्यास त्याने जाळे लावले आणि 32 पोपट पकडले. त्यांना प्रत्येकी एक कडे (ring) घालून सोडून दिले. दुसऱ्या आठवडयात 40 पोपट पकडण्याचे जाळे पसरविले त्यामध्ये 8 पोपट कडे घातलेले होते.

(i) त्यांच्या दुसऱ्या पकडण्याचा कितवा भाग कडे असलेला होतो.

(ii) त्या क्षेत्रातील पोपटांची एकूण संख्या शोधा.

2. एका टी. व्ही. ची रोख खरेदी किंमत ₹ 24000 आहे. तो टी. व्ही रोख ₹ 8000 देऊन मासिक हप्त्याने राहिलेली रक्कम भरून सुद्धा खरीदता येतो. अली तो टी.व्ही. खरेदी करण्यास दुकानात जातो. त्याच्या जवळ ₹ 8000 रोख आहेत. यावेळी अली जवळ दोन योजना आहेत, एक म्हणजे हप्ता योजनेतून टी.व्ही खरेदी करणे आणि दुसरी योजना कोणत्यातरी पतसंस्थेतून कर्ज घेऊन टी.व्ही. खरेदी करणे. पतसंस्थेचा वार्षिक सरळ व्याजदर 18% आहे. तर अलीला या दोन योजनापैकी कोणती योजना अधिक फायदेशीर ठरेल?

A2.4 गणिती नमुना महत्वाचा का आहे?

आपण उदाहरणामध्ये पाहिले आहे की, गाणिती नमुना हा एक अंतर्गत शिस्तीचा विषय आहे. यामध्ये गणितज्ञ आणि इतर विषय क्षेत्रातील विशेषतज्ञ वर्तमान उत्पादनांमध्ये सुधारणा आणणे, उत्तम उत्पादनाचा विकास करणे किंवा काही उत्पादनांच्या व्यवहारावर अंदाज करणे यासाठी आपले ज्ञान व विशेषतज्ञता यांचा सहभाग देतात.

म्हणून तर नमुना महत्वपूर्ण होण्यासाठी अनेक विशेष कारणे आहेत, परंतू कोणत्या तरी रूपामध्ये अधिकाधिक कारणांचा संबंध खालील कारणाने होतो.

- ***समजूतता वाढविणे :*** जर एक असा गणिती नमुना असेल जो वास्तव जगाशी जोडलेल्या तंत्रांशी आवश्यक व्यवहार प्रदर्शित करत असेल, अशा नमुन्याचे विश्लेषण करून आपण

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तंत्राला चांगल्या प्रकारे समजावून घेऊ शकतो आणि नमुना तयार करतांना आपण समजून घेतो की तंत्रामध्ये कोणकोणते घटक अधिक महत्वाचे आहेत आणि तंत्राचे वेगवेगळे पैलू एकमेकाला कशा प्रकारे संबंधीत आहेत.

- ***भाकीत किंवा पूर्वानुमान किंवा अनुकरण करणे :*** अनेकदा आपण हे जाणून घेऊ इच्छितो की वास्तव जगाशी जोडलेल्या तंत्राचे (पद्धतीचे) भविष्यात काय महत्व आहे. परंतू तंत्रा बरोबर प्रत्यक्ष प्रयोग करणे खर्चीक, अव्यवहारिक किंवा अशक्य होते. उदाहरणार्थ, हवामानाचा अंदाज,मानवामध्ये औषधांच्या दक्षतांचा अभ्यास, एका अणुभट्टीचा योग्य आराखडा समजून घेणे इत्यादी इत्यादी.

अनेक प्रकारच्या संघटनामध्ये पुर्वानुमान लावणे अधिक महत्वाचे असते. कारण भावी घटनांचा अंदाज घेण्यास किंवा निर्णय घेण्याच्या क्रियेत मदत होते.

- विपणन विभागात (Marketing department) मागणीचा विश्वसनीय पुर्वानुमान विक्री संबंधी धोरण बनविण्यास सहाय्यक होतो.

- स्कूलबोर्डला वेगवेगळ्या जिल्ह्यामध्ये शाळेला जाणाऱ्या मुलांच्या संख्येत वाढ होण्याचा पुर्वानुमान लावणे आवश्यक असते, ज्यामुळे कोठे व केव्हा नवीन शाळा सुरु करावीत याचा निर्णय घेता येतो.

- कित्येकदा भविष्याचा अंदाज करण्यासाठी पुर्नानुमान लावणारे मागील आकड्यांचा (माहितीचा) उपयोग करतात. प्रथमता नुमना माहिती क्रमात घेऊन त्यातील आकडयांचे विश्लेषण करतात, ज्यामुळे त्याचे वर्णन करता येईल. तेव्हा पुर्वानुमान लावण्यास ते आकडे आणि नमुना यांचा उपयोग भविष्यात करतात. या आधारभूत रणनितीचा उपयोग आधिकांश पूर्वानुमान तंत्रात केला जातो आणि या कल्पनेवर आधारित असतो की तो नमुना जो ओळखला गेला आहे, तो भविष्यात सुद्धा लागू राहिल.

- ***अंदाज करणे :*** अनेकदा आम्हाला मोठ्या किंमतीचा अंदाज करावा लागतो. या संबंधी जंगलातील झाडे, सरोवरातील मासे अशी काही उदाहरणे अभ्यासली आहात. दुसऱ्या उदाहरणामध्ये निवडणूकीच्या वेळी निवडणूक लढविणारा कोणताही पक्ष आपला पक्ष निवडणूक जिंकणाच्या संभाव्यतेचा अंदाज तपासून पाहतो. विशेषतः त्यांच्या मतदार क्षेत्रात आपल्या पक्षाला किती लोक मतदान करतात याचा अंदाज करू पाहतात. त्या अंदाजानुसार निवडणूक लढविण्याची रणनिती ठरविली जाते. निवडणूकीत कोणत्या पक्षाला किती जागा (विजयी झालेल्या) मिळतील याचा अंदाज वर्तविण्यासाठी निर्गम मतानुमान (exist poll) चा व्यापक प्रयोग केला जातो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A2.3

1. तुमच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांनी इयत्ता दहावीच्या बोर्डाच्या वार्षिक परिक्षेत गाणित विषयात मिळविलेल्या गेल्या पाच वर्षांच्या गुणांच्या (मार्कस्) सरासरी टक्केवारीचे पूर्वानुमान करा.

A2.5 सारांश (Summary) :

या परिशिष्टमध्ये तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. एक गणिती नमुना वास्तविक जीवनाशी जोडलेल्या स्थितीचे गणिती विवरण असतो. गणिती नमुना वास्तविक जीवनाशी संबंधीत समस्या सोडविणे आणि त्याचा उपयोग करण्यासाठी गणिती नमुना तयार करणाची क्रिया आहे.

2. नमुन्यामध्ये अनेक पायऱ्यांचा समावेश असतो. त्या म्हणजे समस्या समजावून घेणे, गणिती नमुन्याचे सुत्रीकरण, समस्या सोडविणे, वास्तव जीवन स्थितीशी अर्थ लावणे आणि शेवटी नमुन्याची वैधता.

3. काही गणिती नमुने विकसीत करणे.

4. गणिती नमुन्यांचे महत्व.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

***

उत्तरे

(ANSWERS)

त्रिकोणमितीचा परिचय : स्वाध्याय 8.1

1. i) $\sin A=\frac{7}{25}, \cos A=\frac{24}{25}$ ii) $\sin C=\frac{24}{25}, \cos C=\frac{7}{25}$ **2.** 0

3. $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A=\frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A=\frac{15}{17}, \sec A=\frac{17}{8}$

5. $\sin\theta=\frac{5}{13}, \cos\theta=\frac{12}{13}, \tan\theta=\frac{5}{12}, \cot\theta=\frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{5}$

7. i) $\frac{49}{64}$ ii) $\frac{49}{64}$ **8.** होय.

9. i) 1 ii) 0 **10.** $\sin P=\frac{12}{13}, \cos P=\frac{5}{13}, \tan P=\frac{12}{5}$

11. i) असत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) असत्य v) असत्य

स्वाध्याय 8.2

1. i) 1 ii) 2 iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ v) $\frac{67}{12}$

2. i) A ii) D iii) A iv) C

3. $\angle A = 45^0, \angle B = 15^0$

4. i) असत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) असत्य v) सत्य

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 8.3

1. $\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A=\frac{1}{\cot A}$, $\sec A=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A=\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sqrt{\sec A}}$, $\cos A=\frac{1}{\sec A}$, $\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$

$\cot A=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$, $\text{cosec } A=\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

3. i) 1 ii) 1

4. i) B ii) C iii) D iv) D

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

त्रिकोणमितीचे काही उपयोग : स्वाध्याय 9.1

1. 10m **2.** $8\sqrt{3}$m **3.** 3m, $2\sqrt{3}$m

4. $10\sqrt{3}$m **5.** $40\sqrt{3}$m **6.** $19\sqrt{3}$m

7. $20(\sqrt{3}-1)$m **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$m **9.** $16\frac{2}{3}$m

10. $20\sqrt{3}$m, 20m, 60m **11.** $10\sqrt{3}$m, 10m **12.** $7(\sqrt{3}+1)$m

13. $75(\sqrt{3}-1)$m **14.** $58\sqrt{3}$m **15.** 3 सेकंद

वर्तुळे : स्वाध्याय 10.1

1. अपरिमित रूपात अनेक.

2. i) एक ii) छेदनरेषा iii) दोन iv) स्पर्श बिंदू **3.** D

स्वाध्याय 10.2

1. A **2.** B **3.** A

6. 3 cm **7.** 8 cm **12.** AB = 15 cm, AC = 13 cm

स्वाध्याय 11.1

1. $\frac{132}{7}$ cm² **2.** $\frac{77}{8}$ cm² **3.** $\frac{154}{3}$ cm²

4. (i) 28.5 cm² (ii) 235.5 cm²

5. (i) 22 cm (ii) 231 cm² (iii) $\left[231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right]$ cm²

6. 20.4375 cm² ; 686.0625 cm² **7.** 88.44 cm²

8. (i) 19.625 m² (ii) 58.875 cm² **9.** (i) 285 mm (ii) $\frac{385}{4}$ mm²

10. $\frac{22275}{28}$ cm² **11.** $\frac{158125}{126}$ cm² **12.** 189.97 km²

13. ₹ 162.68 **14.** D

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पृष्ठफळ आणि घनफळ : स्वाध्याय 12.1

1. 160 cm² **2.** 572 cm² **3.** 214.5 cm²

4. सर्वात मोठा व्यास = 7cm; पृष्ठीय क्षेत्रफळ = 332.5 cm²

5. $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ **6.** 220m² 7. 44m², ₹22000.

8. 18cm² **9.** 374cm²

स्वाध्याय 12.2

1. π cm³

2. 66 cm³ नमुन्याच्या आतील हवेचे घनफळ = आतिल हवेचे घनफळ (शंकू + वृत्तचिती + शंकू)

$=\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h,+\pi r^2 h_2+\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]$, येथे r ही शंकू आणि वृत्तचितीची त्रिज्या, h ही शंकूची उंची आणि h_2 ही वृत्तचितीची उंची (लांबी).

इच्छित घनफळ $=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+3h_2+h_1)$

3. 338 cm^2 **4.** 523.53 cm^3 **5.** 100 **6.** 892.26 kg

7. 1.131 m^3 (अंदाजे) **8.** बरोबर नाही. बरोबर उत्तर 346.51 c

सांख्यिकी : स्वाध्याय 13.1

1. 8.1 झाडे. आम्ही प्रत्यक्ष पध्दत वापरली कारण x_i, व f_i च्या किंमती लहान आहेत.

2. ₹145.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9

5. 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 *ppm*

8. 12.38 दिवस **9.** 69.43%

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 13.2

1. बहुलक = 36.8 वर्षे, मध्य = 35.37 वर्षे. हॉस्पिटलमध्ये दाखत झालेले अधिकाधिक रूग्ण 36.8 वर्षे (अंदाजे) वयाचे आहेत. जेव्हा हॉस्पिटलमध्ये दाखल केलेल्या रुग्णांचे सरासरी वय 35.37 वर्षे.

2. 65.625 तास

3. बहुलकिय मासिक खर्च = ₹ 1847.83, मध्यीय (सरासरी) मासिक खर्च = ₹ 2662.5

4. बहुलक = 30.6, मध्य = 29.2 अधिकत्तर राज्ये / केंद्र शासित प्रदेश (U.T.) मधील विद्यार्थी - शिक्षक यांचे गुणोत्तर 30.6 आणि सरासरी हे गुणोत्तर 29.2 आहे.

5. बहुलक = 4608.7 धावा

6. बहुलक = 44.7 कार

स्वाध्याय 13.3

1. मध्यांक = 137 एकक, मध्य = 137.05 एक्क, बहुलक = 135.76 एकक या स्थितीत ही तिन्ही मापे जवळ जवळ समान आहेत.

2. $x = 8, y = 7$

3. मध्यांक वय = 35.76 वर्षे

4. मध्यांक लंबी = 146.75mm

5. मध्यांक जीवन = 3406.98 तास

6. मध्यांक = 8.05, मध्य = 8.32, बहुलक = 7.88

7. मध्यांक वजन = 56.67kg

संभाव्यता : स्वाध्याय 14.1

1. i) 1 ii) 0, अशक्य घटना iii) 1, अवश्य किंवा निश्चित घटना

iv) 1 v) 0, 1

2. प्रयोग (iii) आणि (iv) हे सम-संभाव्य निष्पत्ती देतात.

3. जेव्हा आपण एक नाणे वर उडवितो तेव्हा छाप आणि काटा वर येण्याची निष्पत्ती समसंभाव्य असते, म्हणून कोणत्याही नाण्याच्या वर उडविण्याच्या निष्पत्तींचा पूर्णपणे अंदाज करता येत नाही.

4. B

5. 0.95

6. i) 0 ii) 1

7. 0.008

8. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{5}{8}$

9. i) $\frac{5}{17}$ ii) $\frac{8}{17}$ iii) $\frac{13}{17}$

10. i) $\frac{5}{9}$ ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$

12. i) $\frac{1}{8}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{3}{4}$ iv) 1

13. i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{2}$

14. i) $\frac{1}{26}$ ii) $\frac{3}{13}$ iii) $\frac{3}{26}$ iv) $\frac{1}{52}$ v) $\frac{1}{4}$ vi) $\frac{1}{52}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. i) $\frac{1}{5}$ ii) a) $\frac{1}{4}$ b) 0

16. $\frac{11}{12}$

17. i) $\frac{1}{5}$ ii) $\frac{15}{19}$

18. i) $\frac{9}{10}$ ii) $\frac{1}{10}$ iii) $\frac{1}{5}$

19. i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{1}{6}$

20. $\frac{\pi}{24}$

21. i) $\frac{31}{36}$ ii) $\frac{5}{36}$

22. i)

दोन फाशावरीत संख्यांची बेरीज	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ii) नाही. 11 बेरजा समसंभाव्य नाहीत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

23. $\frac{3}{4}$; संभाव्य निष्पत्ती HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. येथे THH याचा अर्थ पहिल्या वेळी काटा, दुसऱ्या वेळी छाप आणि तिसऱ्या वेळी सुध्दा छाप.

24. i) $\frac{25}{36}$ ii) $\frac{11}{36}$

25. i) सत्य नाही. आम्ही या प्रकारे निष्पत्तींना वर्गीकृत करू शकतो परंतू ते सम संभाव्य नाहीत, कारण दोन्ही नाणी उडविल्याने असे होऊ शकते की पहिल्या नाण्याचा छाप आणि दुसऱ्यावर काटा किंवा पहिल्यावर काटा अणि दुसऱ्यावर छाप वर येतो. म्हणून एकावर काटा किंवा दुसऱ्यावर छाप वर येण्याची शक्यता ही दोन्ही नाण्यावर छाप (किंवा दोन्हीवर काटा) वर येण्याच्या शक्यतेच्या दुप्पट आहे.

ii) सत्य आहे. प्रश्नामध्ये विचारलेल्या दोन्दी निष्पत्ती सम संभाव्य आहेत.

A1 गणितातील उपपत्ती : स्वाध्याय A1.1

1. i) संदिग्ध ii) सत्य iii) सत्य iv) संदिग्ध v) संदिग्ध
2. i) सत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) सत्य v) सत्य
3. केवळ (ii) ही सत्य आहे.
4. i) जर $a > 0$ आणि $a^2 > b^2$ तर $a > b$ ii) जर $xy \geq 0$ आणि $x^2 = y^2$, तर, $x = y$

   iii) जर $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ आणि $y \neq 0$, तर $x = 0$

   iv) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात.

स्वाध्याय A1.2

1. A नश्वर आहे
2. ab परिमेय संख्या आहे.
3. $\sqrt{17}$ चा दशांश विस्तार अपुनरावर्ती आणि अनावर्ती आहे.
4. $y = 7$
5. $\angle A = 100^0, \angle C = 100^0, \angle D = 180^0$
6. PQRS एक आयत आहे.
7. होय परिकल्पनेच्या आधारावर नाही; कारण $\sqrt{3761} = 61$ आहे जे अपरिमेय नाही. परिकल्पना चुकीची होती म्हणून निष्कर्ष असत्य आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय A 1.3

1. काही पूर्णांक साठी क्रमवार दोन विषम संख्या $2n + 1$ अणि $2n + 3$ घ्या.

स्वाध्याय A 1.4

1. i) मनुष्य नश्वर नाही.

   ii) l रेषा m रेषाला समांतर नाही.

   iii) प्रकरणात स्वाध्याय नाहीत.

   iv) सर्व पूर्णांक परिमेय संख्या नाहीत.

v) सर्व अविभाज्य संख्या विषम संख्या नाहीत.

vi) काही विद्यार्थी आळशी आहेत.

vii) सर्व मांजरे काळी आहेत.

viii) कमीत कमी एक वास्तव संख्या x अशी आहे की $\sqrt{x} = -1$

ix) धन पूर्णांक a ल 2 ने भाग देऊ शकत नाही.

x) पूर्णांक a आणि b हे सहअविभाज्य आहेत.

2. i) होय ii) नाही iii) नाही iv) नाही v) होय.

स्वाध्याय A 1.5

1. i) जर शरनला घाम येत असेल, तर टोकीओमध्ये उष्णता आहे.

ii) जर शालिनीच्या पोटात कलकलत असेल, तर ती भुकेलेली आहे.

iii) जर जसवंत पदवी मिळवत असेल, तर, त्याला शिष्यवृती मिळते.

iv) जर वनस्पती जीवंत असेल तर तिल फुले असतात.

v) जर प्राण्याला शेपूट असेल तर ते मांजर आहे.

2. i) जर त्रिकोणचे पायालगतचे कोन समान असतील, तो समद्विभुज त्रिकोण आहे. सत्य

ii) जरा एका पूर्णांकाचा वर्ग विषम संख्या असेल, तर तो पूर्णांक सुध्दा विषम संख्या असते. हे सत्य.

iii) जर $x = 1$ तर $x^2 = 1$. सत्य

iv) जर AC व BD एकमेकास दुभागत असतील, तर ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. सत्य.

v) $a + (b + c) = (a + b) + c$, तर $a, b,$ व c या पूर्ण संख्या आहेत. असत्य.

vi) जर $x + y$ ही एक सम संख्या आहे, तर x व y या विषम संख्या असतात. असत्य.

vii) जर एक समांतरभुज चौकोन हा एक आयत असेल, तर त्याचे सर्व शिरोबिंदू वर्तुळ परिघावर स्थित असतात. सत्य.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 1.6

1. $b \leq d$ चे वेगळे मान घ्या.
3. प्रकरण 5 चे 10 वे उदाहरण पहा.
6. इयत्ता IX च्या गणित पुस्तकातील प्रमेय 5.1 पहा.

A2 गणिती नमुना : स्वाध्याय A 2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
2. $1cm^2$ क्षेत्रफळ घेऊन त्यातील बिंदूची संख्या मोजा. एकूण झाडांची संख्या, ही संख्या आणि क्षेत्रफळ (cm^2 मध्ये) यांचा गुणाकार इतकी होईल.
6. हप्ता योजने मधील व्याजाचा दर 17.74%, हा 18% पेक्षा कमी आहे.

स्वाध्याय A2.3

1. विद्यार्थ्यांनी स्वतः आपले उत्तर काढावे.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

***

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED