கருநாடக அரசு

கணிதம்

Mathematics

Tamil Medium

9

ஒன்பதாம் வகுப்பு

பகுதி - 2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003.

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, HOD, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, Professor (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, PGT, Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, TGT, S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, TGT, Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, TGT, JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, Assistant Master, Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, TGT, K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, TGT, K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, TGT, Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, TGT, JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, TGT,

CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, TGT, D.M. School, RIE, Bhopal;

V. Madhavi, TGT, Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, TGT, JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, TGT, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, Professor and Head (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Computer Incharge, Deepak Kapoor; D.T.P. Operator, Naresh Kumar; Copy Editor, Pragati Bhardwaj; and Proof Reader, Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

பொருள் அடக்கம்

பகுதி - 2

F8S1W7

7. முக்கோணங்கள் **1 – 27**

7.1 முன்னுரை 1

7.2 முக்கோணங்களின் சர்வசமத்துவம் 1

7.3 முக்கோணங்களின் சர்வ சமத்திற்கான நிபந்தனைகள் 5

7.4 முக்கோணத்தின் சில பண்புகள் 15

7.5 முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கான இன்னும் சில நிபந்தனைகள் 20

7.6 தொகுப்பு 26

8. நாற்கரங்களின் வகைகள் **28 – 41**

8.1 இணைகரத்தின் பண்புகள் 28

8.2 மையப்புள்ளி தேற்றம் 36

8.3 தொகுப்பு : 40

9. வட்டங்கள் **42 – 60**

9.1 ஒரு புள்ளியில் ஒரு நாண் தாங்கும் கோணம். 42

9.2 வட்டமையத்திலிருந்து ஒரு நாணுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு 45

9.3 சம நாண்கள் மற்றும் மையப்புள்ளிகளிலிருந்து அவைகளின் தூரங்கள். 46

9.4 ஒரு வட்டத்தில் ஒரு வில் தாங்கும் கோணம் 50

9.5 வட்ட நாற்கரங்கள் 54

9.6 தொகுப்பு 59

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.	**ஹெரானுடைய சூத்திரம்**	**61 67**
10.1	ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ஹெரானுடைய சூத்திரத்தின்படி	61
10.2	தொகுப்பு	67
11.	**புரப்பளவுகள் மற்றும் கன அளவுகள்**	68 – 86
11.1	ஒரு நேர் வட்ட கூம்பின் புறப்பரப்பளவு	68
11.2	ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு	73
11.3	ஓர் நேர் வட்ட கூம்பின் கனம்	79
11.4	ஒரு கோளத்தின் கன அளவு.	82
11.5	தொகுப்பு	86
12.	**புள்ளியியல்**	87 – 105
12.1	விவரங்களை வரைப்படங்களில் பிரதியிதியிடுதல்.	87
12.2	தொகுப்பு	105
	பிற்ச்சேர்க்கை : 2	106–129
A2.1	முன்னுரை	106
A2.2	வழிகணக்குகளை மறுமார்வை இடுதல்	107
A2.3	சில கணித மாதிரிகள்	114
A2.4	கணிதமாதிரிகளின் வழிகள், அதன் பயன்கள் மற்றும் குறைபாடுகள்.	120
A2.5	தொகுப்பு	121
	விடைகள் /குறிப்புகள்	130 – 140

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Z8Q7K3

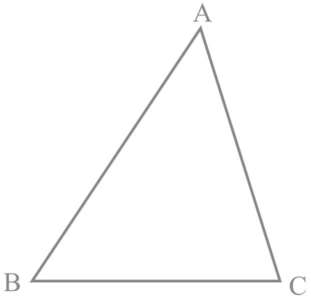
பாடம் 7

முக்கோணங்கள் (Triangles)

7.1 முன்னுரை

முக்கோணங்கள் மற்றும் அதன் வெவ்வேறு பண்புகளைப் பற்றி முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். மூன்று வெட்டுக்கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் மூடிய உருவத்திற்கு ஒரு முக்கோணம் என்று அழைக்கப்படுவதை நீங்கள் அறிந்துள்ளீர்கள். [Tri என்பதன் பொருள் மூன்று (Three)]. ஒரு முக்கோணமானது மூன்று பக்கங்கள், மூன்று கோணங்கள் மற்றும் மூன்று உச்சிகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, முக்கோணம் ABC ஐ ΔABC என குறிக்கப்படுகறது. (படம் 7.1 ஐ பார்) AB, BC, CA என்பன மூன்று பக்கங்கள், $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ என்பன மூன்று கோணங்கள் மற்றும் A, B, C என்பன உச்சிகள் மூன்று.

8 ஆம் வகுப்பில் முக்கோணங்களின் பண்புகள் சில வற்றை நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். இப்பாடத்தில் முக்கோணங்களின் சர்வசமம், சர்வசமவிதிகள், முக்கோணங்களின் மேலும் சில பண்புகள் மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் சமமற்றவை (சமமில்லாதவை) ஆகியவற்றைப் பற்றி படிக்க உள்ளீர்கள்.இப்பண்புகள் பெரும் பாலானவற்றை முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் சரிப்பார்த்திருக்கின்றீர்கள். அவற்றில் சிலவற்றின் நிருபணங்கள் இப்பொழுது பார்ப்போம்.



படம் 7.1

7.2 முக்கோணங்களின் சர்வசமத்துவம் (Congruence of Triangles)

ஒரே அளவுடைய உங்கள் புகைப்படங்கள் 'சர்வசமமான வடிவொத்தவை' Identical ஆக இருப்பதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள். இதேபோல், சம அளவுடைய (ஒரே அளவுடைய) இரண்டு கை வளையல்கள், ஒரே

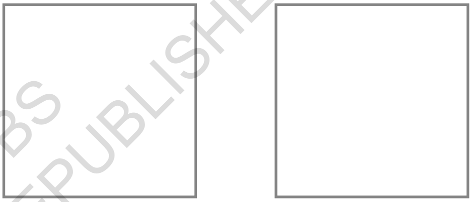
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அளவுடைய வங்கியால் வழங்கப்பட்ட இரண்டு ATM அட்டைகள் வடிவொத்தவையாகும். ஓர் ஒரு ரூபாய் நாணயத்தின் மீது அதே ஆண்டு தயாரிக்கப்பட்ட மற்றொரு நாணயத்தை வைக்கும் போது ஒன்றோடு ஒன்று முழுவதுமாக பொருந்துவதை நீனைவுப்படுத்துக.

அதுபோன்ற உருவங்களை என்ன வென்று அழைப்பாய் என நினைவு வருக்கின்னவா? அவை **சர்வசம உருவங்கள்** என அழைக்கப்படுகின்றன (சர்வசமம் என்றால் எல்லா வைகயிலும் சமம் அல்லது படங்களின் உருவ அமைப்புகள் மற்றும் அளவுகள் ஆகிய இரண்டும் சமம்).

இப்பொழுது, ஒரே அளவான ஆரமுடைய இரண்டு வட்டங்களை வரைந்து, அவற்றை ஒன்றின் மீது ஒன்றை இடு, நீங்கள் கவனிப்பது என்ன? அவை ஒவ்வொன்றும் முழுவதுமாக மூடுகிறது மற்றும் அவற்றை நாம் சர்வசமவட்டங்கள் எனக் கூறலாம்.

மீண்டும் இந்த செயல்பாட்டை ஒரே அளவுடைய பக்கங்களை கொண்ட ஒரு சதுரத்தை இன்னுமொரு சதுரத்தின் பக்கத்துடன் பொருத்துக படம் 7.2 பார் அல்லது **சமமான** பக்கங்கள் உள்ள இரண்டு சமபக்க முக்கணோங்களை ஒன்றின் மீது ஒன்று இடு.



படம் 7.2

சதுரங்கள் மற்றும் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஒன்றுக் கொன்று சர்வசமமாக இருப்பதைப் பார்?

சர்வசமம் பற்றி நாம் படிப்பதை ஏன் என்று வியப்படைவாய் (ஆச்சிரியப் படுவாய்). உங்கள் இல்லத்தில் உள்ள குளிர்பதனப் பெட்டியில் (refrigerator) பனிகட்டி உருவாக்கும் அமைப்புகள் அனைத்தும் சர்வசமமாக இருப்பதை கவனி. வார்க்கப்பட்ட பனிக்கட்டி தட்டும் சர்வசமமான அமைப்பு கொண்டிருக்கும்.

எல்லாம், செவ்வகமாகவோ அல்லது சதுரமாகவோ அல்லது வட்டமாகவோ அல்லது முக்கோணமாகவோ இருக்கும். ஒத்த வடிவமுள்ள பொருள்களை உருவாக்கும் பொழுதெல்லாம். அல்லது அச்சு வார்த்தெடுக்கும் பொழுதெல்லாம் சர்வசமத்தின் கொள்கை(கள்) பயன் படுத்தப் படுகிறது.

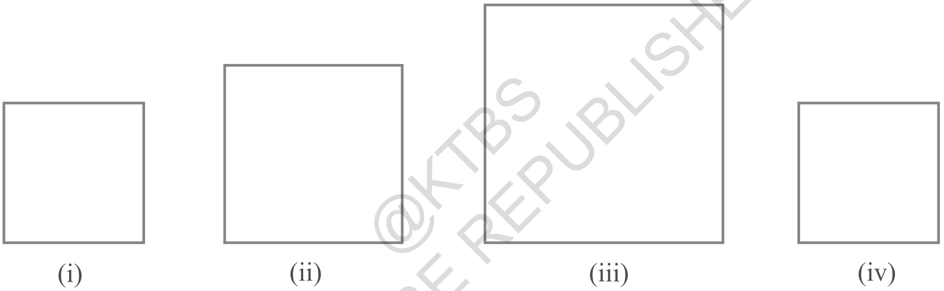
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

சில நேரங்களில், உங்களுடைய பேனாவில் உள்ள மறுமை நிரப்பியை (refill), புதிய ஒன்றால், நிரப்ப முடியாமல் கடினப்படுவத்தைப் பார்த் திருக்கலாம் காரணம் இது எதைமாற்ற நினைக்கின்றோமோ அதனுடைய அளவை கொண்டிருப்பதில்லை. மாறாக, இரண்டு மறுமைநிபரப்பிகளும் ஒத்த வடிவமுடனோ அல்லது சர்வசமமாகவோ இருக்கிறதெனில் அதில் புதியதொன்றை பொருத்த முடியும் (பொருந்தும்).

அன்றாட வாழ்க்கையின் சூழலில் பொருள்களின் சர்வசமம் பயன்படுத்தப் படுவதை பல எடுத்துக்காட்டுகளால் காணமுடியும்.

சர்வசம உருவங்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுக்களுடன் சிந்தித்து (நினைத்து) பார்க்க கூடுமா?

இப்பொழுது, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களில் படம் 7.3(i) இல் உள்ள சதுரத்திற்கு சர்வசமமாகாத படங்கள் எவை?



படம் 7.3

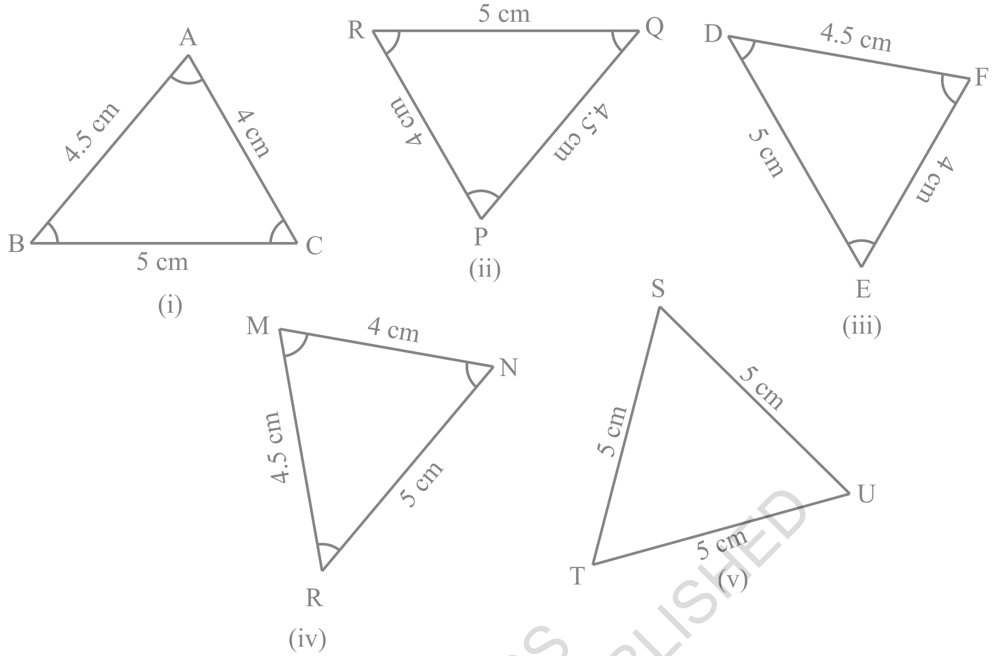
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தெளிவாக படம் 7.3 (i) இல் உள்ள படத்திற்கு படம் 7.3 (ii) மற்றும் (iii) இல் உள்ள பெரிய சதுரங்கள் சர்வசமமாக இல்லை. ஆனால் படம் 7.3 (iv) இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் சர்வசமமாக இருக்கிறது.

இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசமத்தைப் பற்றி இப்பொழுது விவாதிப்போம். (வாதம் செய்வோம்)

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்தபக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்கும் சமமாக இருக்கிறதெனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் என்பது ஏற்கனவே உங்களுக்கு தெரியும்.

இப்பொழுது கீழேகொடுக்கப் பட்டுள்ள படம் 7.4(i) இல் உள்ள முக்கோணம் ΔABC க்கு சர்வ சமமான முக்கோணங்கள் எவை யெவை?



படம் 7.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் *7.4* (ii) முதல் (v) வரை உள்ள இந்த முக்கோணங்களை வெட்டியெடுத்து ΔABC இன் மீது பொருத்த முயற்சி செய்க. படம் *7.4* (ii), (iii) மற்றும் (iv) இல் உள்ள முக்கோணங்களை கவனி. அவை ΔABC க்கு சர்வசமமாகும் ஆனால் படம் 7.4 (v) இல் உள்ள ΔTSU என்பது ΔABC க்கு சர்வசமமில்லை.

ΔPQR என்பது ΔABC க்கு சர்வசமம் என்பதை

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ என எழுதலாம்.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ஆக இருக்கையில் ΔPQR இன் பக்கங்கள் ΔABC இன் ஒத்த சமமான பக்கங்களின் மீது பொருந்துகிறது. மற்றும் கோணங்களின் செயல்களுக்கும் இது போன்றே நிகழ்கிறது. அதாவது, PQ,AB யையும் QR யையும், RP, CA யையும் $\angle P$, $\angle A$ யையும், $\angle Q$, $\angle B$, யையும், $\angle R$, $\angle C$ யையும் பொருந்துகிறது. மேலும் உச்சிகளுக்கு இடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு இருப்பதை காணலாம், அதாவது P என்பது A வுக்கும் Q என்பது B க்கும் R என்பது C க்கும் ஒத்திருக்கிறது. மேலும் $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ என எழுதலாம்.

இந்த தொடர்பில் $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ க்கு ஒத்திருப்பதைக் கவனி ஆனால் இது $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ க்கு தவறான வை. என்பதை சரிபடுத்த முடியும்.

இதே போல் படம் 7.4(i) இல்

FD $\leftrightarrow$ AB, DE $\leftrightarrow$ BC மற்றும் EF $\leftrightarrow$ CA

மற்றும் F $\leftrightarrow$ A, D $\leftrightarrow$ B, மற்றும் E $\leftrightarrow$ C

ஆகையால் $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ ஆகும். ஆனால் $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ என எழுதுவது சரியில்லை. படம் 7.4(iv) மற்றும் ΔABC இல் உள்ள முக்கோணங்களுக்கு இடையேயுள்ள ஒத்தவைகளை கொடுக்கும். ஆகையால் முக்கோணங்களின் சர்வசமத்தில் குறியீட்டில் குறிப்பிடுகையில் சரியான உச்சிகளை எழுதுவது அவசியம்.

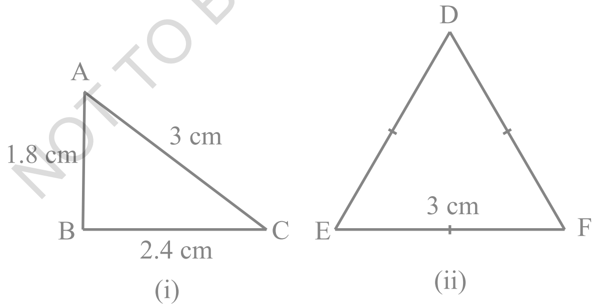
சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் சமமாக இருப்பதை கவனி மற்றும் சுருக்கமாக "சமுஒப (CPCT)" சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் என எழுதலாம்.

7.3 முக்கோணங்களின் சர்வ சமத்திற்கான நிபந்தனைகள்

(Criteria for congruence of Triangles)

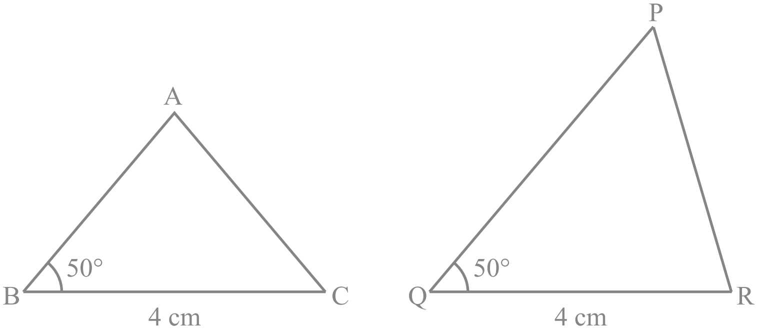
முந்தைய வகுப்புகளில் முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கான நான்கு வகைப்பாடுகள் (four) பற்றி கற்றுள்ளீர்கள். அவற்றை நினைவு படுத்தி கொள்வோம். இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு பக்கம் மட்டும் 3 செ.மீ இருக்குமாறு அந்த முக்கோணங்களை வரைக. இம்முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவையா? அவை சர்வசமமாக இல்லை என்பதை கவனி. (படம் 7.5 ஐப் பார்).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 7.5

இப்பொழுது ஒரு பக்கம் 4 செ.மீ மற்றும் ஒரு கோணம் 50° உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களை வரைக.



படம் 7.6

அவை சர்வ சமமா?

இவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாக இல்லை என்பதை பார். இச்செயல்களை மேலும் சில முக்கோண ஜோடிகளுக்கு செய்து பார்.

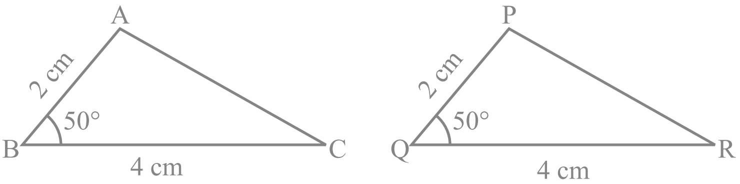
ஒரு ஜோடி பக்கங்கள் அல்லது ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமம் என்பது மட்டும் சர்வசம முக்கோணங்களைக் கொடுக்கும் என்பது போதுமானதாக இல்லை. சம கோணங்களின் மற்ற ஜோடி பக்கங்கள் சமம் ஆக இருப்பின் நிகழ்வதென்ன?

படம் 7.7 இல் $BC=QR$, $\angle B=\angle Q$ மற்றும் $AB = PQ$, ΔABC மற்றும் ΔPQR இன் சர்வசமத்தைப் பற்றி நீங்கள் கூறுவது என்ன?

இச்செயல்பாகடுகளை மற்ற முக்கோண சோடிகளை வைத்து திரும்பசெய்யவும். முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கு இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்கள் சமம் என்பது மட்டும் போது மானதா என்பதை கவனி? ஆம், போதும்.

இது சர்வசம முக்கோணங்களின் முதல் வகைப்பாடாகும்.

எடுக்கோள் 7.1 (ப.கோ.ப) சர்வசம விதி:

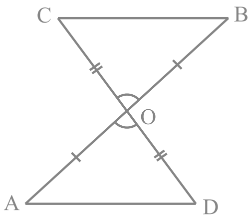


படம் 7.7

‘‘ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணத்திற்கு சமமெனில்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்'' ஆகும் இந்த முடிவு மேற்கூறிய, தெரிந்த முடிவுகள் உதவியுடன் நிருபிக்க முடியாது. இது நிபந்தனை (axiom) என ஒத்துக் கொள்ளப் பட்ட முடிவாகும். (பிற்ச்சேர்க்கை 1 - ஐப்பார்) இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 7.8

எடுத்துக்காட்டு 1: படம் *7.8* இல், OA = OB மற்றும் OD = OC.

(1) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ மற்றும் *(2)* $AD \| BC$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு: ΔAOD மற்றும் ΔBOC இல்

$\left.\begin{array}{c} OA = OB \\ \hline OD = OC \end{array}\right\}$ கொடுக்கப்பட்டவை.

மேலும், $\angle AOD$ மற்றும் $\angle BOC$

என்பன ஒரு சோடி குத்தெதிர்க் கோணங்கள்

ஆதலால். $\angle AOD = \angle BOC$

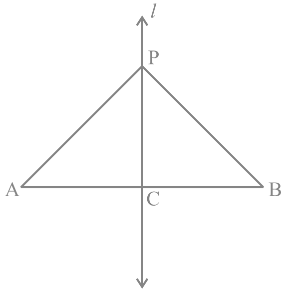
$\Delta AOD = \Delta BOC$ (ப.கோ.ப SAS சர்வச சமவிதியின் படி)

(2) ΔAOD மற்றும் ΔBOC என்ற சர்வசம முக்கோணங்களில் மற்ற ஒத்த பக்கங்களும் சமமாகும்.

$\angle OAD = \angle OBC$ மற்றும் இது AD மற்றும் BC என்ற கோட்டுத் துண்டிற்கு ஒரு ஜோடி ஒன்றை விட்ட கோணங்கள் உருவாக்கும்.

ஆகையால், $\therefore AD \| BC$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



படம் 7.9

எடுத்துக்காட்டு 2: AB என்பது ஒரு கோட்டுத்துண்டு மற்றும் *l* என்பது மையக்குத்துக் கோடு ஒரு புள்ளி P என்பது *l* இன் மீதுள்ளதெனில் P என்பது A மற்றும் B இதிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கிறது எனக் காட்டுக.

தீர்வு: கோடு $l \perp AB$ மற்றும் AB இன் மையப்புள்ளி C வழியாக ஊடுருவி செல்கிறது (படம் *7.9* பார்)

நீங்கள் PA=PB எனக்காட்டு வதற்கு ΔPCA மற்றும் ΔPCB ஐ எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.

AC=BC (C என்பது AB இன் மையப் புள்ளி)

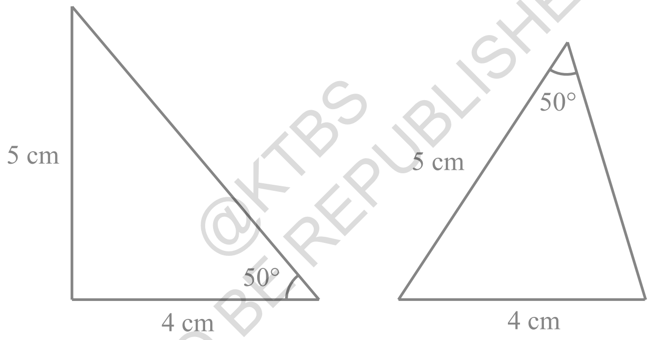
∠PCA=∠PCB=90^o (கொடுக்கப்பட்டவை)

PC= PC (பொதுவானது)

ΔPCA ≅ ΔPCB (SAS விதி)

மற்றும் PA= PB, என்பது சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள்.

இப்பொழுது, 4 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம் 50° உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களை வரைக. இந்த கோணம் சமபக்கங்களுக்கு இடையில் இல்லாத கோணம் (படம் 7.10 பார்) இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமமா?



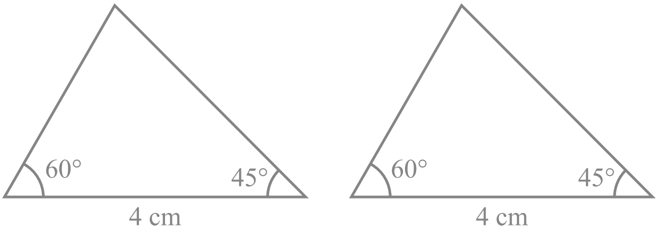
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 7.10

இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் இல்லை என்பதை கவனி. இந்த செயல்பாட்டை மேலும் பலசோடி முக்கோணங்களுடன் மீண்டும் செய்து பார்க்கவும் ஒரு சோடி சமமான பக்கங்களுக்கு இடையே சம கோணங்கள் இருக்கும் போது முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்களாக இருப்பதை நீங்கள் கவனி.

ஆகையால் பகோப (SAS) சர்வசம விதி பொருந்தும் ஆனால் கோ.ப.ப (ASS) அல்லது ப.ப.கோ (SSA) விதி பொருந்தாது.

அடுத்தது, இரண்டு கோணங்கள் 60° மற்றும் 45° மற்றும் இவ்விரண்டு கோணங்களுக்கு இடையே 4 செ.மீ நீளம் உள்ள பக்கம் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களை வரைய முயற்சி செய்க. (படம் 7.11 பார்).



படம் 7.11

இவ்விரண்டு முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்து ஒன்றின் மீது ஒன்றாக பொருத்துக நீங்கள் கவனிப்பது என்ன? ஒரு முக்கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தை முழுவதுமாக பொருந்துவதைப் பார். அதாவது, இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும். மேலும் சில முக்கோணங்களின் ஜோடிகளுடன் இச்செயல் பாட்டினை திரும்பச்செய்க. முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கு இரண்டு கோணங்கள் அவற்றிற்கு இடையுயள்ள பக்கம் ஆகியவற்றின் மேற்பண்புகள் போதுமானதாகும். என்பதை நீங்கள் கவனிக்கலாம். இம்முடிவு சர்வசமத்தின் கோணம் - பக்கம் - கோணம் (ASA)என்ற வகைப்பாடாகும் மற்றும் கோ.ப.கோ ASA வகைப்பாடு என சுருக்கமாக எழுதப்படுகிறது. இவ்வகைப் செயல் பாட்டை முந்திய வகுப்புகளில் நீங்கள் சரிப்பார்த்தை அறிவீர்கள். இம்முடிவை எழுதி நிருபிப்போம்.

இம்முடிவு நிருபிக்கப் பட்டால் அது தேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது இதை நிருபிப்பதற்கு சர்வசமத்தின் பகோப (SAS) நிபந்தனையை நாம் பயன்படுத்துவோம்.

தேற்றம் 7.1 *(கோ.ப.கோ சர்வசம விதி)*

"ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு கோணங்களும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பக்கமும் சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்"

நிரூபணம்: கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள் Δ ABC மற்றும் Δ DEF இல்

$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

மற்றும் $BC = EF$

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமத்தை நிருபிப்பதற்கு மூன்று செயல்கள் தேவைப்படுவதைப் பார்.

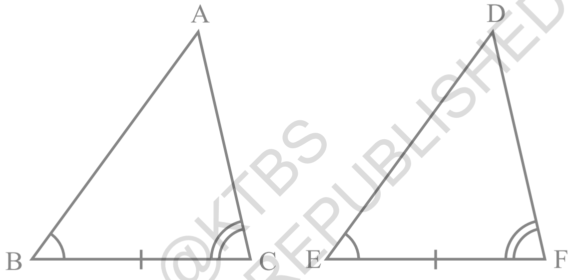
செயல் : (1) AB = DE *என்க (படம் 7.12 பார்)*

இப்பொழுது, நீங்கள் கவனிப்பது என்ன?

AB = DE	*(எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது)*
∠ B =∠ E	*(கொடுக்கப் பட்டுள்ளது)*
BC = EF	*(கொடுக்கப் பட்டுள்ளது)*

ஆகையால் Δ ABC ≅ Δ DEF *(பகோப விதிப்படி உள்ளன)*

(ப கோ ப விதிப்படி)

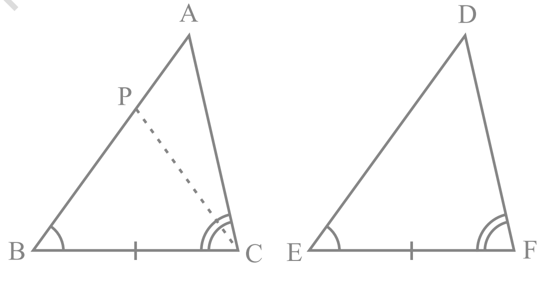


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 7.12

செயல் (2): AB > DF ஆக இருக்கிறது என்க ஆகையால் AB இன் மீது ஒரு புள்ளி P என்பது, PB = DE என இருக்குமாறு ஒரு புள்ளியைக் குறி.

இப்பொழுது Δ PBC மற்றும் Δ DEF என எடுத்துக்கொள் *(படம் 7.13 பார்)*



படம் 7.13

Δ PBC மற்றும் Δ DEF இல்

PB =DE	*(அமைப்பு)*

∠ B=∠ E *(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)*

BC = EF *(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)*

ஆகையால் Δ PBC ≅ Δ DEF *(பகோப நிபந்தனைப் படி)*

என்ற முடிவுக்கு வர முடியும்.

முக்கோணம் சர்வசமமானால் அதனுடைய ஒத்தப் பக்கங்களும் சர்வசமமாகும்.

ஆகையால் ∠PCB = ∠DFE

ஆனால் ∠ACB =∠DFE எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

∠ACB = ∠PCB

இது சாத்தியமா?

P ஆனது A இன் மீது சரியாக பொருந்துகிறது என்றால் மட்டும் இது சாத்தியமாகும்.

(அல்லது) BA = ED

ஆகையால் Δ ABC ≅ Δ DEF *(பகோப நிபந்தனைப் படி)*

செயல் 3: (Case) (iii) AB < DF எனில் DE மீது M என்ற ஒரு புள்ளியை ME = AB என இருக்குமாறு தேர்ந்தெடுத்து செயல் *(3)* இல் கொடுக்கப் பட்டுள்ள செயல் பாடுகளை திரும்ப செய்க. AB = DE என்ற முடிவுக்கு நம்மால் வரமுடியும் மற்றும் Δ ABC ≅ ΔDEF.

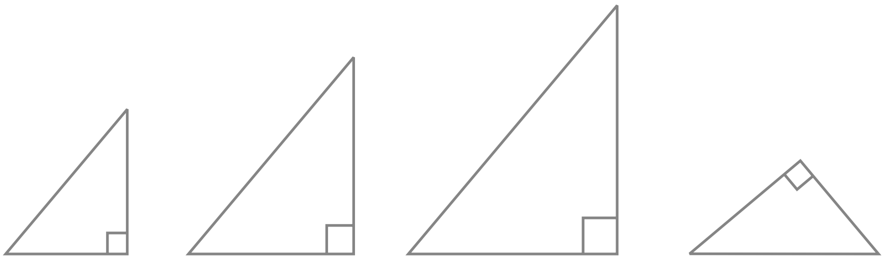
இப்பொழுது, இரண்டு முக்கோணங்களில் இரண்டு சோடி கோணங்கள் மற்றும் ஒரு சோடி ஒத்தப் பக்கங்கள் சமம் ஆனால் பக்கம், ஒத்த சம சோடி கோணங்களுக்கு இடையில் இல்லை. இப்போது முக்கோணங்கள் சர்வசமமா? அவை சர்வசமம் என்பதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள். ஏன் என்று காரணம் கூறமுடியுமா?

ஒரு முக்கோணத்தில் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். இரண்டு சோடி கோணங்கள் சமமானால் மூன்றாவது சோடி (180° கோணங்களின் கூடுதல் என்பதால்) சமமாகும்.

ஆகையால், ''**இரண்டு முக்கோணங்களில் இரண்டு சோடி கோணங்களும் ஒரு சோடி ஒத்தப் பக்கங்களும் சமமெனில் அவை சர்வசமமாகும்**'' இதை நாம் கோ.கோ.ப (AAS) சர்வசமவிதி என அழைக்கலாம் இப்பொழுது, பின் வரும் செயல்பாட்டைச் செய்து பார்ப்போம், 40°, 50° மற்றும் 60° கோண அளவுகள் உள்ள முக்கோணங்கள் வரைக. இதுபோன்ற

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முக்கோணங்கள் எத்தனை வரையலாம்? உண்மையில் நீங்கள் விரும்பிய, வெவ்வேறு பக்கங்களில் பல முக்கோணங்கள், உங்களால் வரைய முடியும் *(படம் 7.14 பார்).*



படம் 7.14

முக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமமாகவோ அல்லது சர்வசம அல்லாமம்லோ இருப்பதை கவனி ஆகையால், முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கு சமமான மூன்று கோணங்கள் மட்டும் போதாது, முக்கோணங்கள் சர்வ சமத்திற்கு மூன்று சமபாகங்களுடன் ஒரு பக்கம் அவசியம் தேவை.

இப்பொழுது, மேலும் பல எடுத்துக் காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். (காண்போம்)

எடுத்துக்காட்டு 3: கோட்டுத்துண்டு AB ஆனது மற்றொரு கோட்டுத்துண்டு CD க்கு இணை "O" என்பது. AD இன் மையப்புள்ளி *(படம் 7.15 பார்).*

(1) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ *(2)* O என்பது BC க்கும் மையப்புள்ளி எனக்காட்டுக.

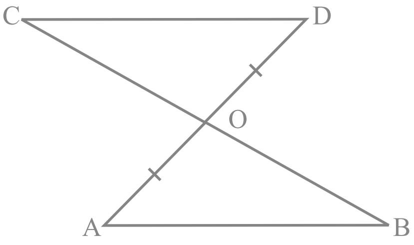
தீர்வு :

(1) Δ AOB மற்றும் Δ DOC ஐ எடுத்துகொள்க.

$\angle ABO = \angle DCO$ (AB || CD) ஆதலால் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்

ஆல் ஒன்றைவிட்ட கோணங்கள் மற்றும் BC என்பது குறுக்கு கோடு)

$\angle AOB = \angle DOC$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)



படம் 7.15

OA = OD (கொடுக்கப்பட்டவை)

அப்படியானால், $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (கோ. கோ.ப. விதி)

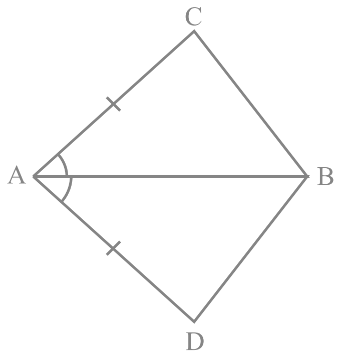
(2) OB = OC (CPCT)

ஆகையால் 'O' என்பது BC இன் மையப்புள்ளி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 7.1

1) நாற்கரம் ABCD இல், AC=AD மற்றும் AB என்பது ∠A இன் இருசமவெட்டி (படம் 7.16 பார்) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ எனக் காட்டுக. BC மற்றும் BD ஐப் பற்றி என்ன கூறுவாய்?



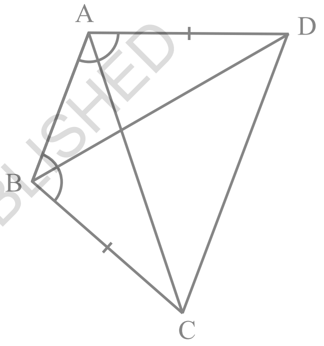
படம் 7.16

2) ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம் இதில் AD = BC மற்றும் ∠DAB=∠CBA (படம் 7.17 பார்)

(1) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

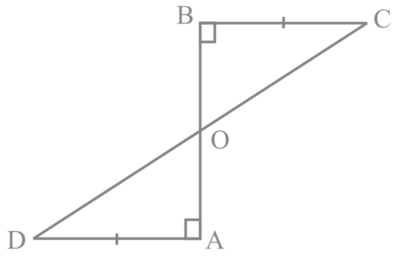
(2) BD=AC

(3) ∠ABD=∠BAC என நிருபி.



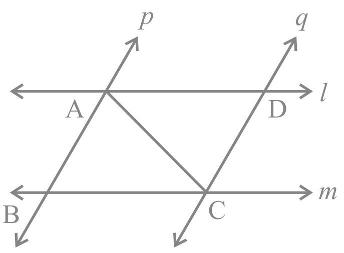
படம் 7.17

3) AD மற்றும் BC என்பன, கோட்டுத்துண்டு AB க்கு சமமானவைகள் மற்றும் செங்குத்தானவை (படம் 7.18 பார்). CD ஆனது AB ஐ இரு சமக் கூறிடும் எனக்காட்டுக.



படம் 7.18

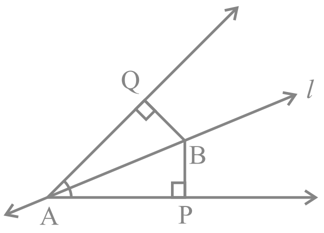
4) l மற்றும் m என்பன இரண்டு இணைக்கோடுகளை p மற்றும் q என்ற மற்றொரு இணைக் கோடுகளின். ஜோடிகளால் வெட்டப் படுகின்றன (படம் 7.19 பார்) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ எனக் காட்டுக.



படம் 7.19

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

5) கோடு l என்பது $\angle A$ இன் இருசம வெட்டியாகும் மற்றும் B என்பது l இன் மீது உள்ள ஏதாவது ஒருபுள்ளி கோணம். $\angle A$ இன் பக்கங்களுக்கு BP மற்றும் BQ என்பது B இருந்து வரையப் பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள். (படம் 7.20 பார்) எனில்.

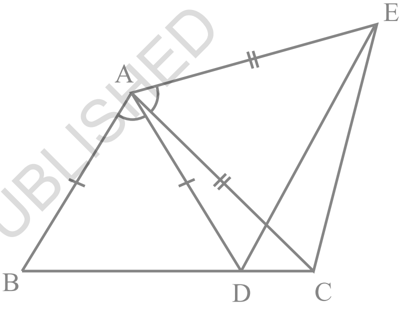


படம் 7.20

(1) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(2) BP = BQ அல்லது B என்பது $\angle A$ இன் பக்கங்களிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கிறது என காட்டுக.

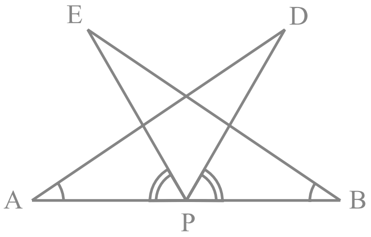
6) படம் 7.21 இல், AC = AE, AB = AD மற்றும் $\angle BAD = \angle EAC$ எனில் BC=DE எனக்காட்டுக.



படம் 7.21

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

7) AB என்பது ஒரு கோட்டுத்துண்டு P என்பது அதன் மையப்புள்ளி. D மற்றும் E என்பன AB யின் ஒரே பக்கத்தில், AB இன் மீது $\angle BAD = \angle ABE$ மற்றும் $\angle EPA = \angle DPB$ (படம் 7.22 பார்) என்றமைந்த வகையில் உள்ளது எனில்

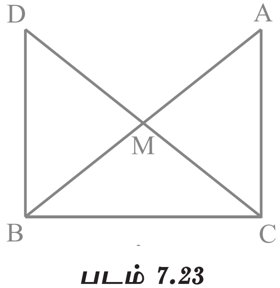


படம் 7.22

(1) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(2) AD=BE எனக் காட்டுக.

8) செங்கோண முக்கோணம் ABC இல், $\angle C$ இல் செங்கோணம், கர்ணம் AB இன் மையப்புள்ளி M மற்றும் C ஐ M க்கு இணைக்கவும். மேலும் DM=CM ஐ போல இருக்குமாறு M யை புள்ளி D வரை நீட்டுக. புள்ளி D ஐ



படம் 7.23

புள்ளி B க்கு இணைக்கவும் (படம் 7.23 பார்)

(1) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(2) $\angle DBC$ ஒரு செங்கோணம்

(3) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(4) $CM=\frac{1}{2}AB$ எனக் காட்டுக.

7.4 முக்கோணத்தின் சில பண்புகள் (Some properties of a Triangle)

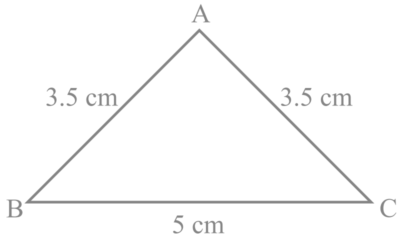
மேற்கண்ட பகுதியில் முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கான இரண்டு வகைப் பாட்டினைப் பற்றி நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். இப்பொது இம்முடிவுகளை ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் சமமானவற்றிற்கு தொடர்ப்புடைய சில பண்புகளைப் பற்றி படிப்போம்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்பாடுகளை செய்க.

இரண்டு பக்கங்கள் சமமாக உள்ள ஒரு முக்கோணத்தை வரைக ஒவ்வொரு பக்கமும் 3.5 செ.மீ க்கு சமமாக உள்ள இரண்டு பக்கங்களும் மற்றும் மூன்றாவது பக்கம் 5 செ.மீ க்கு சமமாகவும் இருக்கவும். (படம் 7.24 பார்).

இதுபோன்ற படங்களை முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் வரைந்துள்ளீர்கள். இவ்வகையான முக்கோணங்கள் எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது என்பது நினைவுக்கு வருகிறதா?

இரண்டு பக்கங்கள் சமமாக உள்ள முக்கோணம் இருசமப்பக்க முக்கோணம் (Isoseceles Triangle angle) என்று அழைக்கப்படுகிறது படம் 7.24 பார், இதில் உள்ள ΔABC என்பது AB=AC ஆக உள்ள ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.



படம் 7.24

இப்பொழுது, $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ ஐ அள. நீங்கள் கவனிப்பது என்ன?

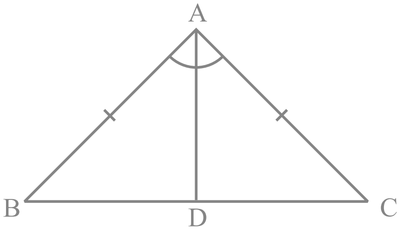
இச்செயல்பாட்டை வெவ்வேறு பக்கங்களுடன் உள்ள மற்ற இருசமபக்க முக்கோணங்களுக்கு மீண்டும் செய்க.

இதுபோன்றே, ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமம் என்பதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள். இது ஒரு முக்கியமான முடிவு மற்றும் எல்லா இருசம பக்க முக்கோணங்களுக்கும் இது பொருந்தும் இது கீழே காட்டியுள்ளவாறு நிருபிக்க முடியும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 7.2: 'ஓர் இரு சம்பக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமம்''

நிருபணம்: ABC இரு சம்பக்க முக்கோணத்தில், AB=AC என்பது. கொடு க்கப் பட்டுள்ளது. ∠B=∠C என நிருபிக்க வேண்டும்.



படம் 7.25

∠A இன் இருசமவெட்டி மற்றும் BC இன் வெட்டும் புள்ளி D ஆகியவற்றை (படம் 7.25 பார்) வரைக.

ΔBAD மற்றும் ΔCAD இல்,

AB = AC (கொடுக்கப் பட்டவை)

∠BAD = ∠CAD (அமைப்பு)

AD = AD (பொது)

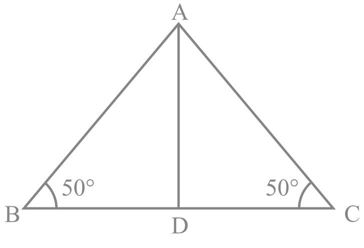
ஆகையால் ΔBAD ≅ ΔCAD (ப.கோ.ப விதியின் படி)

எனவே அவை சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் ∠ABD = ∠ACD, என்பதால்

∠B = ∠C ஆகும்.

இதனுடைய மறுதலையும் கூட உண்மையாக இருக்கிறதா? அதாவது, ஏதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் சமமெனில் அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமம் என்ற முடிவுக்கு நம்மால் வரமுடியுமா? பின்வரும் செயல்பாட்டினை செய்க.

BC ஏதாவது ஒரு அளவும் மற்றும் ∠B = ∠C= 50° ஆகியவற்றைக் கொண்டு ஒரு முக்கோணம் ABC ஐ வரைக. மேலும் ∠A க்கு இருசமவெட்டியை வரையவும் அது BC ஐ D இல் வெட்டட்டும் (படம் 7.26 பார்). தாளிலிருந்து முக்கோணத்தை வெட்டி எடு.



படம் 7.26

அதன் உச்சி C ஆனது உச்சி B இன் மீது விழும்படி AD இல் மடிக்கவும் பக்கங்கள் AC மற்றும் AB ஐப் பற்றி நீங்கள் கூறுவது என்ன? AC ஆனது AB ஐ முழுவதுமாக மூடுவதைக் கவனி.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ஆகையால், AC = AB

இச்செயல்பாட்டை மேலும் சில முக்கோணங்களுக்கு திரும்பவும் செய்து பார் ஒவ்வொரு முறையும் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருப்பதை கவனி. ஆகையால் நாம் பின்வருபவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

தேற்றம் 7.3: "**ஒரு முக்கோணத்தின் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமம்**"

இது **தேற்றம்** 7.2 இன் "**மறுதலை**" ஆகும். இந்த தேற்றத்தை கோபகோ (ASA) சர்வசம விதியால் நிருபிக்க முடியும் மேலும் சில எடுத்துக்காட்டு களை எடுத்துக்கொண்டு அதற்கு இம் முடிவுகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: ΔABC இல் $\angle A$ இன் கோண இருசமவெட்டி AD ஆனது பக்கம் BC க்கு செங்குத்து. (படம் 7.27 பார்)

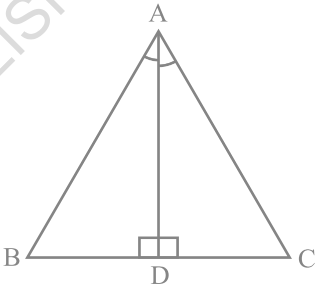
AB=AC மற்றும் ΔABC என்பது ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் என காட்டுக.

தீர்வு: ΔABD மற்றும் ΔACD இல்

$\angle BAD = \angle CAD$ (கொடுக்கப்பட்டவை)

AD = AD (பொதுவானவை)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^o$ (கொடுக்கப்பட்டவை)



படம் 7.27

ஆகையால் $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (கோ.ப.கோ ASA விதிப்படி)

ஆகையால் AB = AC (CPCT படி)

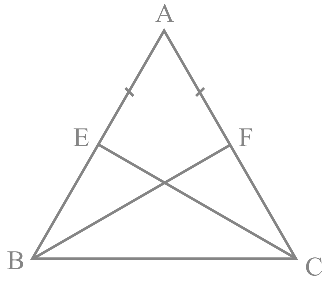
அல்லது, ΔABC ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: ΔABC யின் சம்பக்கங்களான AB மற்றும் AC இதன் மையப்புள்ளிகள் முறையே E மற்றும் F ஆகும் (படம் 7.28 பார்) என்றால் BF=CE எனக் காட்டுக.

தீர்வு: ΔABF மற்றும் ΔACE இல்

AB = AC (கொடுக்கப்பட்டவை)

$\angle A = \angle A$ (பொதுவானது)



படம் 7.28

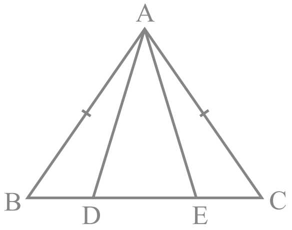
AF = AE (சமபக்கங்களில் பாதி)

ஆகையால் $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (ப.கோ.ப விதிப்படி)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அப்பபடியானல் BF = CE (ச.மூ.ஒ.ப. சமம்)

எடுத்துக்காட்டு 6: ΔABC என்ற இருசம்பக்க முக்கோணத்தில் AB=AC உள்ளது. D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் BC இன் மீது, BE=CD இருப்பதுபோல் அமைந்துள்ளது (படம் 7.29 பார்) எனில். AD=AEஎனக் காட்டுக.



படம் 7.29

தீர்வு: ΔABD மற்றும் ΔACE இல்

AB = AC (கொடுக்கப்பட்டவை) .....(1)

$\angle B$ = ($\angle C$ .....(2)

(சம்பக்கங்களுக்கு எதிரில் உள்ள கோணங்கள்)

இத்துடன் BE = CD

ஆகையால் BE-DE = (CD-DE)

அதாவது BD = CE .....(3)

ஆகையால் $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) பயன் படுத்தி மற்றும் ப.கோ.ப SAS விதிப்படி)

இவைகிடைக்கிறது AD = AE (ச.மு.ஒ.ப. சமம்)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

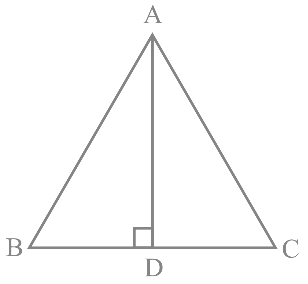
பயிற்சி 7.2

1) ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் ABC இல் AB=AC மற்றும் $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ இன் இருசமவெட்டிகள் ஒன்றையொன்று O' இல் வெட்டிக்கொள்கிறது. A வை O யுடன் இணை

(1) OB = OC

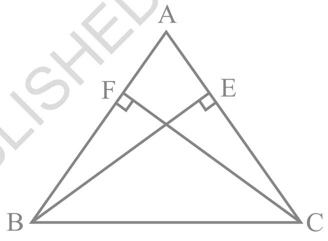
(2) $\angle A$ வை AO இருசமக்கூறிடும் எனக்காட்டுக

2) ΔABC இல், BC இன் செங்குத்தான இருசமவெட்டி AD ஆகும் (படம் 7.30 பார்). ΔABC ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் அதில் AB=AC ஆகவும் உள்ளது எனக்காட்டுக.



படம் 7.30

3) ABC என்பது ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் மற்றும் AC மற்றும் AB என்ற சமபக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட குத்துயரங்கன் முறையே BE மற்றும் CF ஆகும். (படம் 7.31 பார்) என்றால் குத்துயரங்கள் சமம் எனக் காட்டுக.

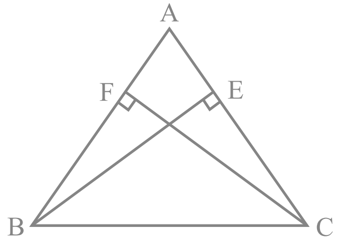


படம் 7.31

4) ABC என்ற முக்கோணத்தில் AC மற்றும் AB ஆகிய பக்கங்களுக்கான BE மற்றும் CF குத்துயரங்கள் (Altitudes) ஆகியன சமம் எனில் (படம் 7.32 பார்)

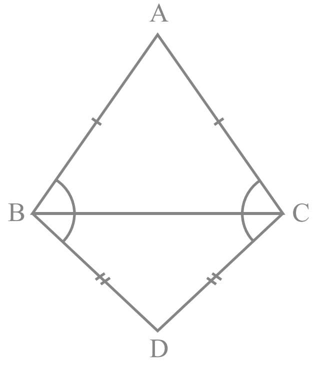
(1) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(2) AB=AC அதாவது ΔABC ஓர் இருசம்பக்க முக்கோணம் எனக் காட்டுக.



படம் 7.32

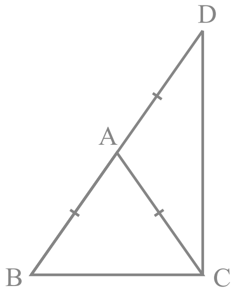
5) BC என்ற ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீது ABC மற்றும் DBC இரண்டு இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் (படம் 7.33 பார்) என்றால் $\angle ABD = \angle ACD$ எனக் காட்டுக.



படம் 7.33

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6) ΔABC என்னும் இருசம்பக்க முக்கோணத்தில் BA மற்றும் D சமபக்கங்கள் (AB=AC) மற்றும் BA வை D வரை நீட்டு அதாவது AD=AB (படம் 7.34 பார்). ∠BCD என்பது ஒரு செங்கோணம் எனக் காட்டுக.



படம் 7.34

7) ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ∠A= 90^o மற்றும் AB=AC, ∠B மற்றும் ∠C ஐ கண்டு பிடி.

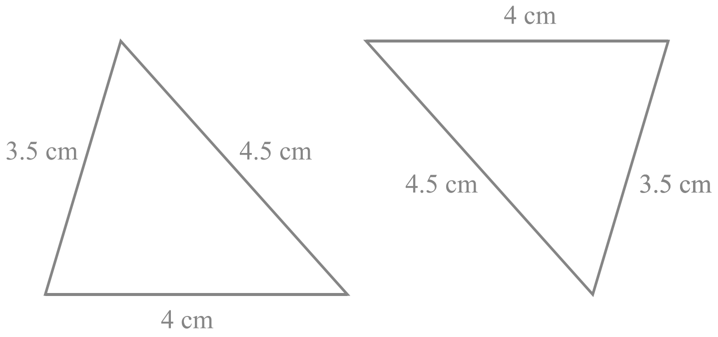
8) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கோணமும் 60^o எனக் காட்டுக.

7.5 முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கான இன்னும் சில நிபந்தனைகள்

ஒரு முக்கோணத்தில் மூன்று கோணங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தில் உள்ள மூன்று கோணங்களுக்கு சமம் என்பது இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என காட்டுவதற்கு போதுமானதாக இல்லை என்பதை இந்த பாடத்தின் முன்பகுதியில் நீங்கள் பார்த்திருக்கின்றீர்கள். ஆனால் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமம் இருந்தால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் இவ்வாறு சர்வசமமாக இருக்க மூன்று அளவுகளும் போதும் என்பதை பார்த்து நீங்கள் வியப்படைவீர்கள். நீங்கள் இதை முந்திய வகுப்புகளில் சர்பார்த்து உள்ளீர்கள் இது உண்மையும் கூட ஆகும்.

இதை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ள, 4 செ.மீ, 3.5 செ.மீ மற்றும் 4.5 செ.மீ பக்கங்கள் கொண்ட இரண்டு முக்கோணங்களை வரைக (படம் 7.35 பார்) பிறகு அவைகளை வெட்டி எடுத்து ஒன்று மற்றொன்றுடன் பொருந்து மாறு அமை அல்லது முடு நீங்கள் கவனிப்பது என்ன? ஒன்று மற்றொன்றை சரியாக பொருந்தி சமமான பக்கங்களை முடியுள்ளது ஆகையால் இந்த முக்கோணங்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS



படம் 7.35

இந்த செயல்பாட்டினை மேலும் சில முக்கோணங்களுடன் திரும்பவும் செய்க. சர்வசத்திற்கான மற்றொரு விதிக்கு நாம் வரலாம்.

தேற்றம் 7.4: (பபப SSS சர்வசம விதி): ''ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமமானால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்'' ஆகும்.

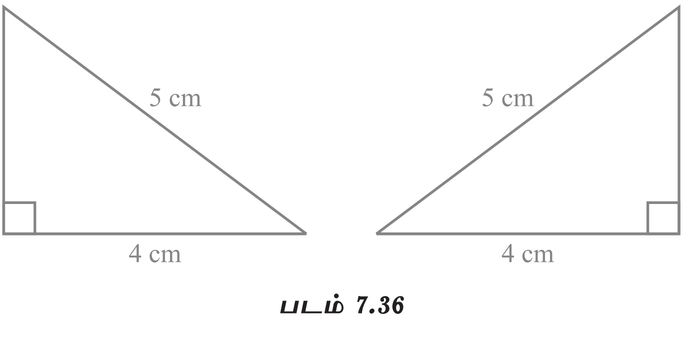
இந்த தேற்றத்தை, பொருத்தமான அமைப்பைப் பயன் படுத்தி நிருபிக்க முடியும்.

நீங்கள் ஏற்கனவே ப.கோ.ப SAS சர்வசம விதியை பார்த்திருக்கிறீர்கள்.

ஒரு சோடி சமகோணங்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் ஒரு ஜோடி சம பக்கங்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணத்திற்கு சமமாக இருந்தால் அவை சர்வசமம். இந்த விதியை நீங்கள் ஏற்கனவே படித்துள்ளீர்கள். மற்றும் அவ்வாறு அப்படி இல்லையென்றால். இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் இருக்காது என்க.

இந்த செயல்பாட்டை செய்க.

கர்ணப் பக்கம் 5 செ.மீ மற்றும் ஒரு பக்கம் 4செ.மீ ஒவ்வொன்றும் இருக்குமாறு இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களை வரைக (படம் 7.36 பார்)



படம் 7.36

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

அவைகளை வெட்டி எடு மற்றும் இரண்டு முக்கோணங்கள் சமபக்கங்கள் பொருந்துமாறு ஒன்றை மற்றொன்றால் மூடு தேவைப்பாட்டால் முக்கோணங்களை நகர்த்திக்கொள்.

அவைகள் ஒன்று மற்றொன்றை முழுவதுமாக மறைக்கிறது சமமான பக்கங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்துகிறது. ஆகையால் அந்த முக்கோணங்கள் சர்வசமமாகும் என்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள். இதை முந்திய வகுப்புகளில் சரிபார்த்திருக்கிறீர்கள். இத்தொடர்ப்பு செங்கோணம், இடைப்பட்ட கோணம் இல்லை என்பதை கவனி. ஆகையால், பின் வரும் சர்வசமவிதிக்கு நாம் வருவோம்.

தேற்றம் 7.5 (செ.க. ப RHS சர்வசம விதி): ''இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் கர்ணப் பக்கம் மற்றும் மற்றொருபக்கம்ஆனது, மற்றொரு முக்கோணத்தின் கர்ணப்பக்கம் மற்றும் மற்றொரு பக்கத்திற்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம்'' ஆகும்.

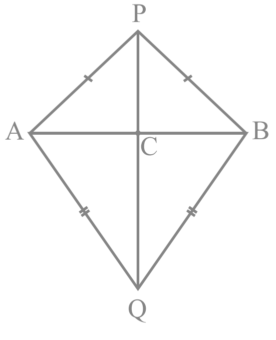
குறிப்பு: செ.க.ப RHS என்பது செங்கோணம் (right angle) கர்ணம் Hyptoenuse பக்கம் Side ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இப்பொழுது மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : AB என்பது ஒரு கோட்டுத்துண்டு, AB இன் எதிர்ரெதிர் பக்கங்களில் P மற்றும் Q என்ற இரண்டு புள்ளிகள், A மற்றும் B என்ற புள்ளிகலிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கிறது. (படம் 7.37 பார்) என்றால் AB இன் செங்குத்து இருசமவெட்டு கோடு PQ ஆக உள்ளது எனக் காட்டுக.

தீர்வு: PQ = PB மற்றும் QA = QB நமக்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் PQ⊥AB எனக்காட்டுவதற்கும் மற்றும் AB இருசமவெட்டி PQ இருக்கிறது AB ஐ PQ ஆனது புள்ளி C இல் வெட்டுவதாக எடுத்துக் கொள்க.



படம் 7.37

இந்த படத்தில் இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்கள் இருப்பதை சிந்தித்து பார்க்க உங்களால் முடிகிறதா?

ΔPAQ மற்றும் ΔPBQ ஐ நாம் எடுத்துக்கொள்வோம்,

இந்த முக்கோணங்களில்

AP = BP (கொடுக்கப்பட்டவை)

AQ = BQ (கொடுத்துள்ளவை)

PQ = PQ *(பொதுவானவை)*

ஆகையால், $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ *(பபப SSS விதிப்படி)*

அப்படியானால் $\angle APQ = \angle BPQ$ (*ச.மு.ஒ.ப. சமம்*)

இப்பொழுது, ΔPAC மற்றும் ΔPBC ஐ எடுத்துக்கொளவோம்.

AP = BP *(கொடுக்கப்பட்டவை)*

$\angle APC = \angle BPC$ *(*$\angle APQ = \angle BPQ$ *(மேலே நிருபிக்கப்பட்டவை)*

PC=PC *(பொதுவானது)*

ஆகையால், $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ *(ப.கோ.ப SAS விதிப்படி)*

அப்படியானால் AC = BC (*ச.மு.ஒ.ப. சமம்*) .....*(1)*

மற்றும் $\angle ACP = \angle BCP$ (*ச.மு.ஒ.ப. சமம்*)

அத்துடன் $\angle ACP + \angle BCP = 180^o$

(நேர்க்கோண ஜோடி அல்லது ஜோடிக்கோணம்)

ஆகையால், $2\angle ACP = 180^o$

அல்லது $\angle ACP = 90^o$ .....*(2)*

(1) மற்றும் (2) இருந்து AB *இன் செங்குத்தான இருசமவெட்டி அல்லது மையக்குத்துக்கோடு* PQ *ஆகும் என்பது எளியதாக முடிவு எடுக்க நம்மால் முடிகிறது.*

(குறிப்பு: AP = BP *(கொடுக்கப்பட்டவை)*

PC = PC பொதுவானது

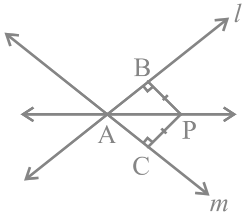
மற்றும் $\angle PAC = \angle PBC$ *(*ΔAPB *இல் சமபக்கங்களுக்கு எதிரில் உள்ள கோணங்கள்)*

இருந்த போதிலும் ΔPAQ மற்றும் ΔPBQ சர்வசமம் என நிருபிக்காமல் $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ என காட்டமுடியாது என்பதை கவனி. ஏன் என்றால் இம் முடிவுகள் ப.ப.கோ) விதியைக் கொடுக்கிறது. இது முக்கோணங்களின் சர்வசமத்திற்கு எப்பொழுதுமே உண்மை என்று பொருந்துவது இல்லை. மேலும் கோணமானது சம ஜோடி பக்கங்களுக்கு இடையில் இல்லை. மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் எடுத்துக்கொள்வோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 8 : P என்பது A என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் இருகோடுகளில் இருந்து சமதூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி (படம் 7.38 பார்). *l* மற்றும் *m* ஆகிய கோடு AP ஆனது அவற்றிற்கு இடையில் உள்ள கோண த்தை இரண்டு சமமாக பிரிக்கும் (வெட்டும்) எனக்காட்டுக.

தீர்வு: *l* மற்றும் *m* என்ற கோடுகள் ஒன்றையொன்று A இல் வெட்டிக் கொள்கிறது என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.38

PB⊥ *l* மற்றும் PC⊥ m என்க,

PB = PC என்பது கொடுக்கப் பட்டது.

∠PAB = ∠PAC எனக் காட்டவேண்டும்.

ΔPAB மற்றும் ΔPAC ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்

இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில்

PB = PC (கொடுக்கப்பட்டவை)

∠PBA = ∠PCA=90° (கொடுக்கப்பட்டவை)

PA = PA (பொதுவானவை)

ஆகையால் ΔPAB ≅ ΔPAC (செ.க.ப விதி)

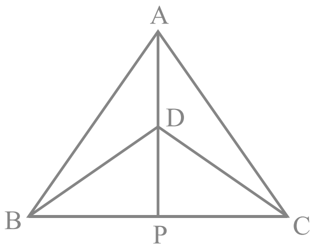
அப்படியானால் ∠PAB = ∠PAC (ச.மு.ஒ.ப. சமம்)

இம்முடிவு பயிற்சி 7.1 இல் உள்ள வினா 5 இல் நிருபிக்கப் பட்டுள்ள முடிவினையின் மறுதலை ஆக இருப்பதை கவனி.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 7.3

1) ΔABC மற்றும் ΔDBC என்பது BC யின் மீது ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது மற்றும் உச்சிக்கள் A மற்றும் D யும் BC யின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளது (படம் 7.39 பார்) AD ஐ BC யின் மீது புள்ளி P இல் வெட்டுமாறு நீட்டுக.



படம் 7.39

   i) ΔABD ≅ ΔACD

   ii) ΔABP ≅ ΔACP

iii) AP ஆனது ∠A மற்றும் ∠D யை இருசம கூறிடும்.

iv) BC இன் மையக்குத்துக்கோடு AP எனக்காட்டுக.

2) AD என்பது ABC என்ற ஒரு இருசம பக்க முக்கணத்தின் ஒரு செங்குத்து இதில் AB=AC.

i) AD என்பது BC ஐ இரு சமமாக வெட்டுகிறது.

ii) AD என்பது ∠A ஐ இரு சமமாகவெட்டுகிறது.

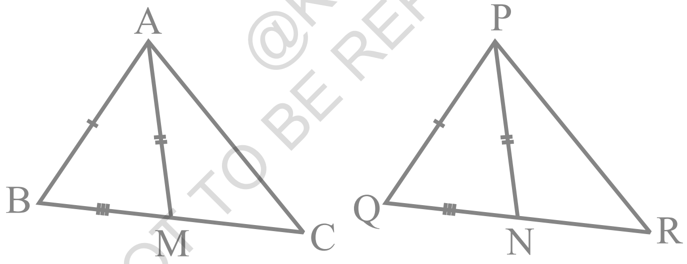
எனக்காட்டு.

3) ΔABC இல் இரண்டு பக்கங்கள் AB மற்றும் BC மற்றும் மையக்கோடு *(நடுக்கோடு)* AM ஆகியவை முறையே ΔPQR இன் இரண்டு பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR மற்றும் நடுக்கோடு PN ஆகியவற்றிற்கு சமம் *(படம் 7.40 பார்)*

i) ΔABM ≅ ΔPQN

ii) ΔABC ≅ ΔPQR எனக் காட்டுக.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 7.40

4) BE மற்றும் CF என்பன ஒரு முக்கோணம் ABC இன் இரு சமக்குத்துக் கோடுகள் செ.க.ப RHS சர்வசம விதியை பயன்படுத்தி முக்கோணம் ABC என்பது இருசம்பக்க முக்கோணம் என நிருபி.

5) ABC என்பது ஓர் இருசம்பக்க முக்கணம் இதில் AB = AC மற்றும் AP⊥BC ஐ வரைந்து ∠B = ∠C எனக் காட்டுக.

7.6 தொகுப்பு (Summary)

இந்தப்பாடத்தில் பின்வரும் முக்கிய கருத்துகளை நீங்கள் படித்திருப்பீர்கள்.

1) இரண்டு படங்கள் அவைகள் ஒரே மாதிரியான வடிவமும் அவை சர்வசமமாகும் ஒரே மாதிரியான அளவும் கொண்டிருக்குமாயின்.

2) ஒரே மாதிரியான ஆரங்களின், இரண்டு வட்டங்கள் சர்வசமம்.

3) ஒரே மாதிரியான பக்கங்கள் கொண்ட இரண்டு சதுரங்கள் சர்வசமம்.

4) ABC மற்றும் PQR என்ற இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் $A\leftrightarrow P$, $B\leftrightarrow Q$ மற்றும் $C\leftrightarrow R$ என இருந்தால் அவை சர்வசமம், $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ என்ற குறீயீடுகளால் குறிப்பிடப் படுகிறது.

5) ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கத்திற்கு சமமானால் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும் (கோ-ப-கோ ASA சர்வசம விதி)

6) ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கிய கோணமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் அவை உள்ளடக்கிய கோணத்திற்கும் சமமெனில் அவ்விரு முக்கணங்களும் சர்வசமமாகும் (ப.கோ.ப SAS சர்வசம விதி)

7) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களும் அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கும் ஒத்த பக்கத்திற்கும் சமமெனில் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும் (கோ-கோ-ப AAS சர்வசம விதி)

8) ஒரு முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரில் உள்ள கோணங்கள் சமமாகும்.

9) ஒரு முக்கோணத்தின் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரெதில் உள்ள பக்கங்கள் சமமாகும்.

10) ஒரு சம்பக்க முக்கோணத்தில் ஒவ்வொரு கோணமும் $60°$ஐ கொண்டிருக்கும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11) ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமமெனில் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும் (ப.ப.ப SSS சர்வசம விதி (நியமம்)

12) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமும் ஏதேனும் ஒரு பக்கமும், மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஒரு பக்கம் ஆகியவற்றிற்கு முறையே சமமாக இருப்பின், அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும் (செ.க.ப RHS சர்வசம விதி)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பாடம் 8

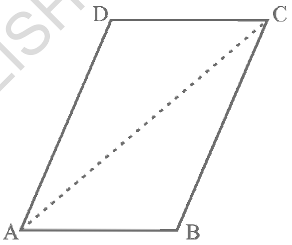
நாற்கரங்கள் (Quadrilaterals)

A2A3D8

8.1 இணைகரத்தின் பண்புகள்

ஒரு செயல் பாட்டினை செய்யலாம்.

ஒரு காகிதத்தில் இணைகரம் ஒன்றை வெட்டி எடுத்து மூலைவிட்டம் வழியாக வெட்டி எடுக்கவும் (படம் 8.1) உனக்கு இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும். இந்த இரண்டு முக்கோணங்களைப் பற்றி நீ என்ன கூறுகின்றாய்? ஒரு முக்கோணத்தின் மீது இன்னொரு முக்கோணத்தை பொருத்திப்பார் நீ என்ன பார்க்கின்றாய்?



படம் 8.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

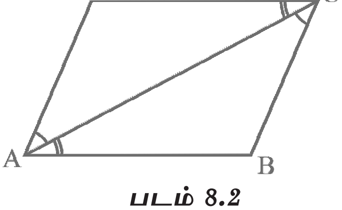
இரண்டு முக்கோணங்கள் ஒன்றை யொன்று சர்வசம முக்கோணங்களாக இருப்பதைக்கவனி.

இன்னும் பல இணைகரங்களை கத்தரித்து செயல் பாடுகளை செய்து பார். ஒவ்வொரு முறையும் மூலைவிட்டம் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிப்பதைக் காணலாம்.

இதை இப்போது நிரூபணம் செய்து காட்டலாம்.

தேற்றம் 8.1 ஒரு இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிக்கின்றன.

நிரூபணம் : இணைகரம் ABCD யில் AC என்பது மூலைவிட்டம். (படம் 8.2) AC இணைகரத்தை இரண்டு முக்கோணங்களாக பிரித்துள்ளது. அதாவது ΔABCமற்றும் ΔCDA இந்த இரண்டு முக்கோணங்களையும் சர்வசமம் முக்கோணங்கள் என்று நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.



படம் 8.2

ΔABC மற்றும் ΔCDA யில் $BC \parallel AD$ மற்றும் AC குறுக்குக்கோடு ஆகும்.

எனவே $\angle BCA = \angle DAC$ *(ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)*

மேலும் $AB \parallel DC$ மற்றும் AC குறுக்குக்கோடு.

எனவே $\angle BAC = \angle DCA$ *(ஒன்று விட்ட கோணங்கள்)*

மற்றும் $AC = CA$ *(பொதுபக்கம்)*

எனவே $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ *(கோ.ப.கோ)*

அல்லது ஒரு இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிகின்றது.

இப்போது இணைகரம் ABCD யின் எதிர் பக்கங்களை அளக்கவும். நீ எதை கவனிக்கின்றாய்?

நீ $AB = DC$ என்பதையும் $AD = BC$ என்பதையும் காணலாம்.

இது இணைகரத்தின் மற்றொருபண்பு ஆகும். இதை கீழ் கண்டவாறு கூறலாம்.

தேற்றம் 8.2 ஒரு இணைகரத்தில் இரண்டு எதிர் பக்கங்கள் சமம்

நீங்கள் ஏற்கனவே ஒரு இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிக்கின்றன என்பதை நிரூபித்துள்ளீர்கள். எனவே ஒத்தபாகங்கள் அதாவது பக்கங்கள் சமம் ஆகும்.

எனவே $AB = DC$ மற்றும் $AD = BC$

இதனுடைய மறுதலை தேற்றம் என்ன? மறுதலை தேற்றத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளவை, நிரூபிக்கப்பட வேண்டியவையாக மாற்றினால் மறுதலை தேற்றமாகமாறும். இவ்விதமாக தேற்றம் 8.2 மறுதலை தேற்றமாக 8.3ல் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

தேற்றம் 8.3 ஒரு நாற்கரத்தில் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமமானால் அது இணைகரமாகும்.

இது ஏன் என்ற காரணத்தை உன்னால் கூற முடியுமா?

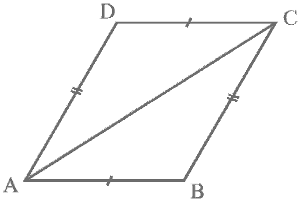
நாற்கரம் ABCD ல் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$ *(படம் 8.3)*, மூலைவிட்டம் AC ஐ வரைக.

தெளிவாக $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ *(ஏன்?)*

எனவே $\angle BAC = \angle DCA$

மற்றும் $\angle BCA = \angle DAC$ *(ஏன்)*

உன்னால் ABCD இணைகரம் என்று கூறமுடியுமா? *(ஏன்?)*



படம் 8.3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இணைகரத்தில் இரண்டு எதிர் பக்கங்கள் சமமாக உள்ளது என்றும் மறுதலையில், நாற்கரத்தில் இரண்டு எதிர் பக்கங்கள் சமமானால் அது இணைகரம் என்றும் படித்தோம். இதனுடைய முடிவை ஒரு ஜோடி எதிர் கோணங்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு இணைகரத்தை வரைந்து அதனுடைய கோணங்களை அளந்து எழுதவும். நீ எதை கவனிக்கின்றாய்?

ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர் கோணங்களும் சமம்.

மேலும் சில இணைகரங்களை வரைந்து சரிபார். நாம் மேலும் ஒரு புதிய கீழ் கண்ட முடிவுக்கு வரலாம்.

தேற்றம் 8.4 : ஒரு இணைகரத்தில் எதிர் கோணங்கள் சமம்.

இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகுமா? உண்மைதான். நாற்கரத்தின் கோணத்தின் கூடுதல் மற்றும் இணைகோடுகளை வெட்டும் குறுக்குக் கோடுகளின் குணத்தை பயன் படுத்தி மறுதலையும் உண்மை என்று நிரூபிக்கலாம், எனவே கீழ் கண்ட தேற்றத்தை நாம் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 8.5 : ஒரு நாற்கரத்தில் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்கோணங்கள் சமம் எனில் அது இணைகரம் ஆகும்.

இணைகரத்தின் மற்றும் ஒரு குணத்தைப் பார்க்கலாம். ABCD என்ற இணைகரத்தை வரைக. இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று 'o' என்றபுள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்படியாக வரைக. (படம் 8.4)

OA, OB, OC மற்றும் OD ஐ அளக்கவும் நீ எதை கவனிக்கின்றாய்?

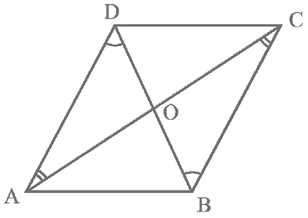
OA = OC மற்றும் OB = OD என்பதை கவனி. அல்லது 'O' என்பது இரண்டு மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளி என்பதைக்கவனி.

இந்த குணத்தை வேறுசில இணைகரங்களுக்கும் செய்முறை செய்து பார்க்கவும். ஒவ்வொரு செய்முறையிலும் 'O' என்பது இரண்டு மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளியாக இருப்பதை கவனி.

எனவே கீழ்கண்ட தேற்றம் நமக்கு கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 8.6: ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

ஒரு நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று சமமாக வெட்டிக் கொண்டால் என்ன நடக்கும்? இது இணைகரமாக இருக்குமா? கண்டிப்பாக இணைகரம்தான்.



படம் 8.4

இதனுடைய முடிவு 8.6 தேற்றத்தின் மறுதலை ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 8.7: ஒரு நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமமாக வெட்டிக் கொண்டால் அது இணைகரமாக இருக்கும்.

கீழ்கண்ட காரணங்களால் இதை நிரூபிக்க முடியும்.

படம் 8.5 ல் OA=OC மற்றும் OB=OD என்று கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றது.

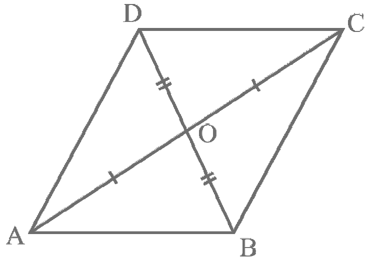
எனவே $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ஏன்)

ஆகையால் $\angle ABO = \angle CDO$ ஏன்)

இதிலிருந்து AB || CD என நமக்கு கிடைக்கின்றது.

இதைப் போலவே BC || AD

எனவே ABCD என்பது இணைகரமாகும்.



படம் 8.5

இப்போது ஒருசில உதாரணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

எ.கா 1: செவ்வகத்தின் ஒவ்வொருகோணமும் செங்கோணம் என்று நிரூபி.

தீர்வு : செவ்வகம் என்றால் என்ன என்று படித்ததை நினைவுகூறுவோம். செவ்வகம் என்பது இணைகரமாகும் ஆனால் ஒரு கோணம் செங்கோணமாகும்.

ABCD என்பதை செவ்வகமாக எடுத்துக் கொள்வோம் அதில் $\angle A = 90^0$ என எடுத்துக் கொள்வோம். நாம் காண்பிக்க வேண்டியது $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

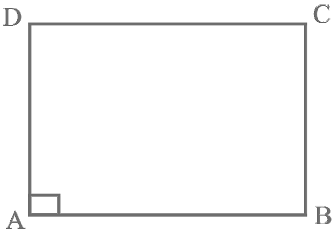
நமக்கு தெரியும் AD || BC மற்றும் AB என்பது குறுக்குகோடு (படம் 8.6)

எனவே $\angle A + \angle B = 180^0$ (குறுக்குக்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோணங்கள்).

ஆனால் $\angle A = 90^0$

எனவே $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

இப்போது $\angle C = \angle A$ மற்றும் $\angle D = \angle B$ இணைகரத்தின் எதிர்கோணங்கள்



படம் 8.6

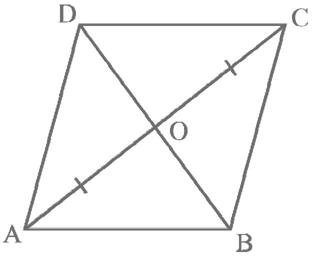
ஆகையால் $\angle C = 90^0$ மற்றும் $\angle D = 90^0$

எனவே செவ்கத்தின் ஒவ்வொரு கோணங்களும் செங்கோணமாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 2: *சாய்வு சதுரத்தில் இரண்டு மூலைவிட்டமும் ஒன்றை யொன்று செங்குத்துக்கோடுகளாக வெட்டிக்கொள்கின்றன.*

தீர்வு : சாய்வு சதுரம் ABCD ஐ எடுத்துக் கொள்வோம் *(படம் 8.7)*



படம் 8.7

உனக்கு தெரியும் AB = BC = CD = DA என்று. *(ஏன்)*

இப்போது Δ AOD மற்றும் Δ COD களில்

OA = OC *(இணைகரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் சமமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன)*

OD = OD *(பொது பக்கங்கள்)*

$\therefore$ AD = CD

எனவே $\Delta AOD \cong \Delta COD$ *(ப.ப.ப. விதி)*

ஆகையால் $\angle AOD = \angle COD$

ஆனால் $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ *(ஒரு கோட்டின் ஜோடிக்கோணங்கள்)*

எனவே $2\angle AOD = 180^0$

அல்லது $\angle AOD = 90^0$

எனவே சாய்வு சதுரத்தில் இரண்டு மூலைவிட்டமும் ஒன்றை யொன்று செங்குத்துக் கோடுகளாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 3: ABC என்பது இரு சமபக்க முக்கோணம். இதில் AB = AC ஆகும். AD என்பது வெளிக்கோணம் $\angle$ PAC யின் கோண இருசமவெட்டி மற்றும் CD || AB *(படம் 8.8)*

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ மற்றும்

(ii) ABCD என்பது இணைகரம் என்றும் காண்பி.

தீர்வு : Δ ABC என்பது இருசமபக்க முக்கோணம் இதில் AB = AC *(கொடுக்கப்பட்டவை)*

எனவே $\angle ABC = \angle ACB$ *(இருசம்பக்கங்களுக்கு எதிர் கோணங்கள்)*

மேலும் $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ *(முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம்).*

அல்லது ∠ PAC = 2 ∠ ACB (1)

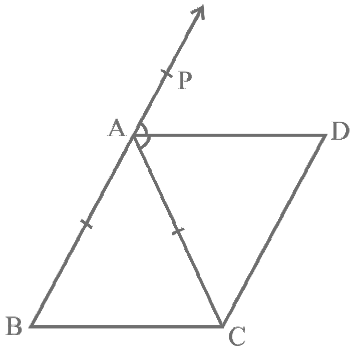
இப்போது AD ∠ PAC ஐ சமக்கூறிடுகிறது.

எனவே ∠ PAC = 2 ∠ DAC *(2)*

ஆதலால் 2 ∠ DAC= 2 ∠ ACB [*(1)* மற்றும் *(2)* லிருந்து]

அல்லது ∠ DAC =∠ ACB

இப்பொழுது இவை இரண்டும் ஒன்று விட்ட கோணங்களாகின்றன.



படம் 8.8

காரணம் BC மற்றும் AD கோட்டுத்துண்டுகளை AC என்ற குறுக்குக் கோடு வெட்டுகிறது என அறிகிறோம்.

இப்படியாக BC || AD ஆகிறது.

மேலும் BA || CD (கொடுக்கப்பட்டவை)

இதிலிருந்து நாற்கரம் ABCD யின் இரண்டு ஜோடி எதிர் பக்கங்களும் சமம் ஆகிறது.

எனவே ABCD என்பது இணைகரம் ஆகும்.

எ.கா 4: *l* மற்றும *m* இரண்டு இணைக்கோடுகளை *p* என்ற குறுக்குக் கோடு வெட்டுகிறது. (படம் 8.9). உட்கோணங்களின் சம வெட்டிகளால் அமையும் ஒரு நாற்கரம், செவ்கமாகும் என காண்பி.

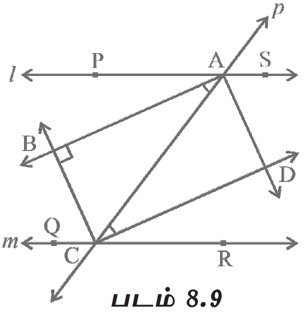
தீர்வு : PS || QR மற்றும் *p* குறுக்குக்கோடு என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. A மற்றும் B வெட்டும் புள்ளிகள் ∠PAC மற்றும் ∠ACQ இவைகளின் சமகோணவெட்டிகள் B யிலும் ∠ACR மற்றும் ∠SAC களின் சமகோண வெட்டிகள் D யிலும் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

நாம் நாற்கரம் ABCD ஒரு செவ்வகம் என காண்பிக்க வேண்டும்.

இப்போது ∠PAC = ∠ACR (*l* || *m* மற்றும் *p* குறுக்குக்கோடு, எனவே ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

ஆகையால் $\frac{1}{2}\angle$ PAC = $\frac{1}{2}\angle$ ACR

அதாவது ∠ BAC = ∠ ACD



படம் 8.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு ஜோடி ஒன்றுவிட்ட கோணங்களாக அமைவதால்

AB மற்றும் DC இணைகோடுகளாகவும், AC குறுக்குக்கோடாகவும் அமைகிறது.

எனவே AB || DC ஆகிறது.

இதைப்போலவே BC || AD ஆகிறது. (∠ ACBமற்றும் ∠ CAD களை எடுத்துக் கொள்)

ஆதலால் நாற்கரம் ABCD இணைகரம் ஆகும்.

மேலும் $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (நேர்க்கோட்டின் ஜோடிகள்)

எனவே $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$

அல்லது $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

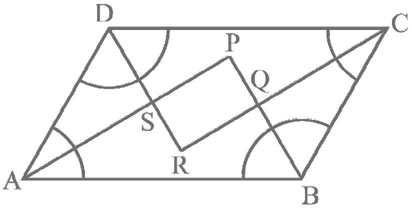
அல்லது $\angle BAD = 90^0$

எனவே ABCD ஒரு இணைகரம் ஆகும்.

(ஒருகோணம் 90^0 என்பதால்) ABCD என்பது ஒரு செவ்வகமாகிறது.

எ.கா 5: ஒரு இணைகரத்தின் கோண இருசமக் கூரிடும் கோடுகள் ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்கிறது எனக்காட்டு.

தீர்வு: இணைகரம் ABCD ல் ∠A மற்றும் ∠ B , ∠ B மற்றும் ∠ C, ∠ C மற்றும் ∠ D, ∠ D மற்றும் ∠ A இவைகளின் சமக்கோண வெட்டிள் முறையே P, Q, R, மற்றும் S ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என எடுத்துக் கொள். (படம் 8.10)



படம் 8.10

Δ ASD ல் நீ எதை கவனிக்கின்றாய்?

∠D ஐ DS சமக்கோணம் மற்றும் ∠ A ஐ AS சமக்கோணகூரிடுவதாலும்

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ குறுக்கோக்கோட்டின் ஒரேபக்கமுள்ள கோணங்கள்

$= \frac{1}{2}\times 180^0$ (∠ A + ∠ D உட்கோணங்கள்)

$= 90^0$

மேலும் ∠ DAS + ∠ ADS + ∠ DSA $=180^0$ *(முக்கோணத்தின் கோண கூடுதல் விதி)*

அல்லது $90^0 + \angle DSA = 180^0$

அல்லது $\angle DSA = 90^0$

எனவே $\angle PSR = 90^0$ *(∠ DSA வின் குத்தெதிர் கோணங்கள்)*

இதைப்போலவே $\angle APB = 90^0$ அல்லது $\angle SPQ = 90^0$ *(∠ DSA வை இணைத்தது போலவே)*

$\angle PQR = 90^0$ மற்றும் $\angle SRQ = 90^0$ என காண்பிக்கலாம்

எனவே PQRS என்பது நாற்கரம் ஆனால் எல்லா கோணங்களும் செங்கோணமாகும்.

எனவே அதை நாம் செவ்வகம் எனக் கூறலாமா?

நாம் $\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ மற்றும் $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ எனவே இரண்டு எதிர்கோணங்களின் ஜோடிகள் சமமாக உள்ளன.

ஆதலால் PQRS என்ற இணைகரம் 90^0 ல் இருப்பதால் செவ்வகமாகிறது.

பயிற்சி 8.1

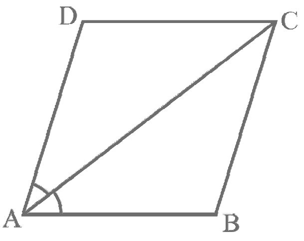
1. ஒரு இணைகரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் சமம் எனில், அது செவ்வகம் என காண்பி.

2. ஒரு நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக் கொன்று செங்கோணத்தில் இரு சமமாக வெட்டிக் கொண்டால் அது சாய்வுசதுரம் என காண்பி.

3. ABCD இணைகரத்தில் AC மூலைவிட்டம் ∠ A வை சமக்கூறிட்டால் *(படம் 8.11)*

 (i) அது ∠ C ஐ சமக்கூரிடும்

 (ii) ABCD ஒரு சாய்வு சதுரம் என காண்பி.



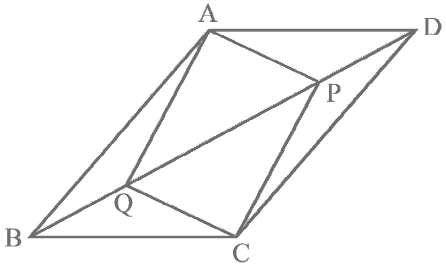
படம் 8.11

4. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகம். மூலைவிட்டம் AC,∠ A மற்றும் ∠C ஐ சமக்கோணங்களாக பிரிக்கின்றன. பின் வருவனவற்றை காண்பி ஒரு சதுரம் (i) ABCD மூலைவிட்டம் (ii) மற்றும் BD ∠ B மற்றும் ∠ D ஐ சமக்கூறிடுகின்றன எனக்காண்பி.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. இணைகரம் ABCD யில் P மற்றும் Q என்ற இரண்டுபுள்ளிகள் DP = BQ என்றவாறு எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன (படம் 8.12) கீழ்கண்டவைகளை காண்பி.

(i) Δ APD $\cong \Delta$ CQB

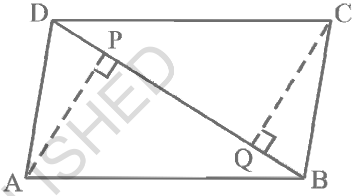


படம் 8.12

(ii) AP = CQ (iii) Δ AQB $\cong \Delta$ CPD

(iv) AQ = CP (v) APCQ ஒரு இணைகரம்.

6. ABCD ஒரு இணைகரம். AP மற்றும் CQ, BD மூலைவிட்டத்தின் மீது உச்சிகள் A மற்றும் C யிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு கள். (படம் 8.13)



படம் 8.13

கீழ் கண்டவைகளை காண்பி.

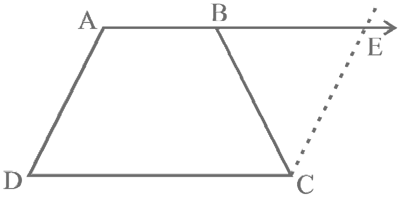
(i) Δ APB $\cong \Delta$ CQD

(ii) AP = CQ

7. ABCD ஒரு சரிவகம். அதில் AB||CD மற்றும் AD = BC (படம் 8.14) கீழ்வருவனவற்றை காண்பி.

(i) $\angle$ A = $\angle$ B

(ii) $\angle$ C = $\angle$ D



படம் 8.14

(iii) Δ ABC $\cong \Delta$ BAD

(iv) மூலைவிட்டம் AC = மூலைவிட்டம் BD

(குறிப்பு: AB ஐ நீட்டவும். CE||DA வை E யில் சந்திக்கும்படி வரையவும்)

8.2 மையப்புள்ளி தேற்றம்

முக்கோணம மற்றும் நாற்கரம் இவைகளின் அநேக பண்புகளைப் பற்றி நீ படித்துள்ளாய். இப்போது ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டைப் பற்றி படிப்போம். கீழ் வரும் செயல்பாடுகளை செய்துபார்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இரண்டு மையப்புள்ளிகள் E மற்றும் F ஐ சேர்த்து வரைக. (படம் 8.15)

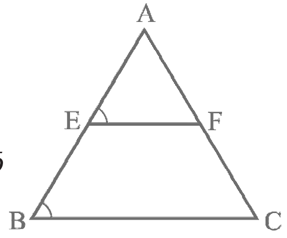
E F மற்றும் BC ஐ அளக்கவும். ∠ AEF மற்றும் ∠ ABC யை அளக்கவும். நீ எதைக் காணுகின்றாய்? நீ இதைப் பார்க்கலாம்.

$EF = \frac{1}{2} BC$ மற்றும் $\angle AEF = \angle ABC$

எனவே $EF \parallel BC$

இந்தசெயல்பாட்டைஇன்னும்சிலமுக்கோணங்களுக்கு செய்துபார்.

எனவே கீழ்க்கண்ட தேற்றத்திற்கு நீ வந்து சேரலாம்.



படம் 8.15

தேற்றம் 8.8: (மையப்புள்ளி தேற்றம்) ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இருபக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடானது முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

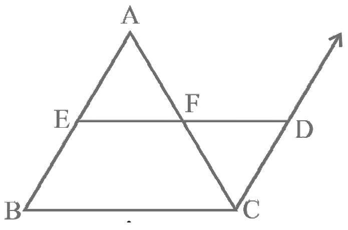
இந்த தேற்றத்தை கீழ் கண்ட குறிப்புக்ளைக் கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

படம் 8.16 ஐ கவனி. AB மற்றும் AC யின், மையப்புள்ளிகள் முறையே E மற்றும் F ஆகும். $CD \parallel BA$.

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (கோ.ப.கோ விதி)

ஆதலால் $EF = DF$ மற்றும் $BE = AE = DC$ (ஏன்?)

எனவே $EF = DF$ மற்றும் $BE = AE = DC$ (ஏன்?)



படம் 8.16

ஆதலால் BCDE ஒரு இணைகரம் (ஏன்?)

இதனால் $EF \parallel BC$ ஆகும்

இதில் $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$. என்பதையும் கவனி.

தேற்றம் 8.8 ன் மறுதலைத்தேற்றத்தை கூறமுடியமா? மறுதலைத் தேற்றம் உண்மையாகும்.

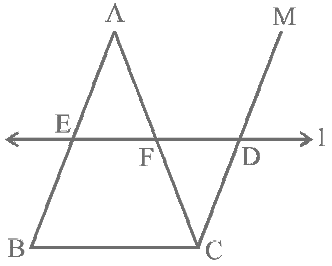
மறுதலைத்தேற்றம் உண்மையாகுவதை நீ அறியலாம். இதைக்கீழ் கண்டபடி கூறலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தேற்றம் 8.9 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளியில் இருந்து இன்னொரு பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்தால் அது மூன்றாம் பக்கத்தை சமக்கூரிடும்.

படம் 8.17 ல், AB யின் மையப்புள்ளி E புள்ளி E வழியாக செல்லும் நேர் கோடு l BC க்கு இணையாகவும் CM || BA ஆக உள்ளதை கவனி.

ΔAEF மற்றும் ΔCDF சர்வசம முக்கோணங்கள் எனகாண்பித்து AF = CF என நிரூபி.

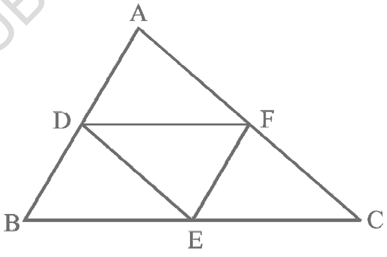


படம் 8.17

எ.கா 6: முக்கோணம் ΔABC ல் D, E மற்றும் F என்பவைகள் AB, BC மற்றும் CA இவைகளின் மையப்புள்ளிகள். *(படம் 8.18)*, D, E மற்றும் F இவைகளை சேர்த்து ஏற்படும் நான்கு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் என நிருபி.

தீர்வு : தேற்றம் 8.9ன் படி முக்கோணம் ABC யில் AB மற்றும் BC இவைகளின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E எனில் DE || AC ஆகும்.

இதைப் போலவே DF || BC மற்றும் EF || AB ஆகையால் ADEF, BDFE மற்றும் DFCE ஆகியவை இணைகரங்கள் ஆகும்.



படம் 8.18

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது BDFE இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் DE ஆகும்.

ஆகையால் Δ BDE $\cong$ Δ FED

இதைப்போலவே Δ DAF $\cong$ Δ FED

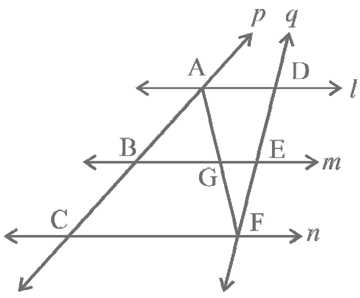
மேலும் Δ EFC $\cong$ Δ FED ஆகும்.

எனவே நான்கு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

எ.கா 7: l, m மற்றும் n என்பவைகள் மூன்று இணைகோடுகள் p மற்றும் q குறுக்கோடுகள் p இன் மீது AB மற்றும் BC துண்டு கோடுகளையும் சமமாக வெட்டி எடுக்கின்றன (படம் 8.19). l, m மற்றும் n இவைகள் q ன் மீது DE மற்றும் EF துண்டுகோடுகளை சமமாக வெட்டி எடுக்கின்றன என நிரூபி.

தீர்வு: நமக்கு AB = BC என கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது. DE = EF என நிரூபிக்கப்பட வேண்டும்.

A மற்றும் F ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு *m* ஐ G யில் வெட்டட்டும்



படம் 8.19

சரிவகம் ACFD இரண்டு முக்கோணங்களாக பிரிக்கப்பட்டு உள்ளது. அதாவது Δ ACF மற்றும் Δ AFD சமம் ஆகும்.

Δ ACF ல் AC யின் மையப்புள்ளி B ஆக உள்ளது. (AB = BC)

மற்றும் BG || CF (ஏனெனில் m || n)

எனவே AF ன் மையப்புள்ளி G ஆகும் (தேற்றம் 8.9 படி)

இப்போது Δ AFD ல் நாம் ஏற்கனவே அறிந்தபடி AF ன் மையப்புள்ளி G என்பதை உபயோகிக்கலாம். GE||AD மற்றும் தேற்றம் 8.9 படி DF ன் மையப்புள்ளி E ஆகிறது.

DE = EF

மற்ற வார்த்தைகளில் கூறினால் *l*, *m* மற்றும் *n* கோடுகளில் *q* கோடு சமமான கோடுகளாக வெட்டுகின்றன.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி 8.2

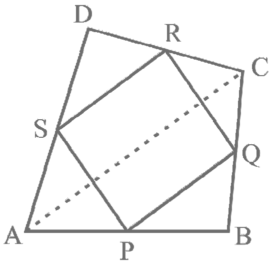
1. நாற்கரம் ABCD யில் AB, BC, CD மற்றும் DA இவைகளின் மையப் புள்ளிகள் முறையே P, Q, R மற்றும் S ஆகும். (படம் 8.20). AC என்பது மூலைவிட்டம்.

   (i) SR || AC மற்றும் $SR = \frac{1}{2}AC$

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS என்பது இணைகரம்

   எனக் காண்பி.

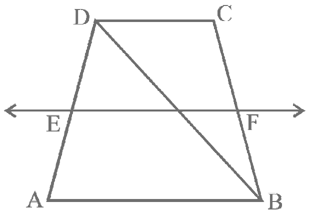


படம் 8.20

2. ABCD எனபது சாய்வு சதுரம் AB, BC, CD மற்றும் DA இவைகளின் மையப்புள்ளிகள் முறையே P, Q, R மற்றும் S ஆகும். P QRS நாற்கரம் ஒரு செவ்வகம் என நிரூபி.

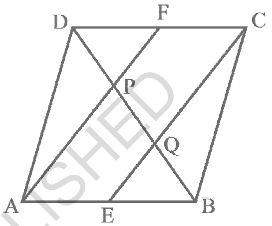
3. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகம். AB, BC, CD மற்றும் DA இவைகளின் மையப்புள்ளிகள் முறையே P, Q, R மற்றும் S ஆகும். PQRS எனப்து ஒரு சாய்வு சதுரம் என நிரூபி.

4. ABCD என்பது சரிவகம். இதில் AB || DC, BD என்பது மூலைவிட்டம். E என்பது AD யின் மையப்புள்ளி E வழியாக AB க்கு இணையாக செல்லும் கோடு BC யை F ல் வெட்டுகிறது. (படம் 8.21). F என்பது BC ன் மையப்புள்ளி என காண்பி.



படம் 8.21

5. ABCD என்பது இணைகரம். E மற்றும் F என்பவைகள் AB மற்றும் CD இவை களின் முறையே மையப் புள்ளிகள் ஆகும். (படம் 8.22). மூலைவிட்டம் BD ஐ துண்டு கோடுகள் AF மற்றும் EC மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கின்றன என்பதை காண்பி.



படம் 8.22

6. ABC என்பது C யில் செங்கோணத்தைக் கொண்டது. கர்ணம் AB யின் மையப்புள்ளி M வழியாக BC க்கு இணையான கோடு AC ஐ D என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

(i) D என்பது ACன் மையப்புள்ளி

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ எனக்காண்பி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.3 தொகுப்பு :

கீழ்கண்டவைகளை இந்த பாடத்திலிருந்து அறிந்து கொண்டீர்கள்.

1. ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிக்கின்றன.

2. ஒரு இணைகரத்தில்,

(i) எதிர்பக்கங்கள் சமம் (ii) எதிர்கோணங்கள் சமம்

(iii) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

3. செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமாகவும் ஒன்றையொன்று சமங்களாகவும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இதன் மறுதலையும் உண்மையாகிறது.

4. சாய்வு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மறுதலையும் உண்மையாகிறது.

5. ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமாகவும் ஒன்றை யொன்று சமங்களாகவும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இதன் மறுதலையும் உண்மை.

6. ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் மைப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடானது முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்த்திற்கு இணையாகவும் அதன் அளவில் பாதிக்கு சமமாகவும் இருக்கும்.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு பக்கத்திற்கு இணையான கோடு இருந்தால் அது மூன்றாவது பக்கத்தை இரண்டாக பிரிக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

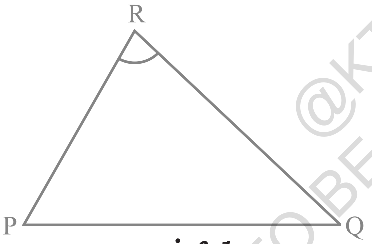
பாடம் 9

S4L8G5

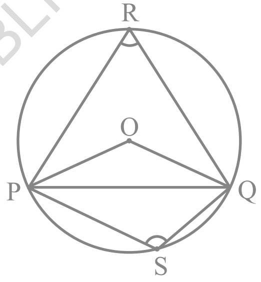
வட்டங்கள் (Circles)

9.1: ஒரு புள்ளியில் ஒரு நாண் தாங்கும் கோணம்.

ஒரு PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை எடுத்துக்கொள். R என்ற புள்ளியை PQR ன் மீது எடுகாமல் வேறுபுள்ளியில் எடுக்கவும். PR மற்றும் QR ஐ சேர்க்கவும். *(படம் (9.1).*



படம் 9.1

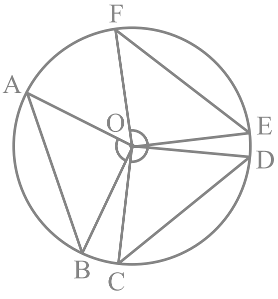


படம் 9.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\angle PRQ$ என்பது துண்டுக்கோடு PQ வால் தாங்கும் கோணம் ஆகும். (படம் 9.2)ல் தாங்கும் $\angle POQ$, $\angle PRQ$ மற்றும் $\angle PSQ$ கோணங்கள் என்ன கோணங்கள்? துண்டுக் கோடு PQ வால் மையப்புள்ளி 'O' ல் தாங்கும் கோணம் $\angle PRQ$ மற்றும் $\angle PSQ$ கோணங்கள். PQ வால் R மற்றும் S புள்ளிகளில் பெருவில் மற்றும் சிறுவில்லில தாங்கி உள்ள கோணங்கள் ஆகும். நாணின் அளவும் அதன் மையப்புள்ளியில் ஏற்பட்டு உள்ள கோணம் இவைகளுக்கு இடையே உள்ள உறவைப்பற்றி படிப்போம். வட்டத்தின் பல நாண்களை வரைந்து மற்றும் மையப்புள்ளியில் தாங்கும் கோணங்களை வரைந்து பார். பெரிய நாண்கள் பெரிய கோணங்களை தாங்குகிறது. ஒரு வட்டத்தில் இரு சமமான நாண்கள் இருந்தால் கோணங்கள் எப்படி இருக்கும்? வட்டத்தின் மையத்தில் தாங்கும் கோணங்கள் சமமாக இருக்குமா அல்லது சமமில்லாமல் இருக்குமா?

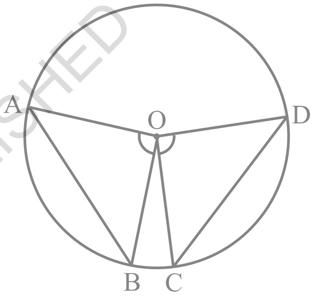
ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு அல்லது அதிகமான சமநீளம் கொண்ட நாண்களை வரைக. அவைகள் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும். (படம் 9.3). அந்த நாண்களால் தாங்கும் எல்லா கோணங்களும் சமமாக இருக்கும். இதற்கு நிரூபணம் கொடுக்கலாம்.



படம் 9.3

தேற்றம் 9.1: ஒரு வட்டத்தின் சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களை தாங்கும்.

நிரூபணம்: ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி O வில் AB மற்றும் CD சம நாண்கள் இருக்கின்றன. நிரூபிக்க வேண்டியவை $\angle AOB = \angle COD$.



படம் 9.4

முக்கோணங்கள் AOB மற்றும் COD களில்

OA = OC *(வட்டத்தின் ஆரங்கள்)*

OB = OD *(வட்டத்தின் ஆரங்கள்)*

AB = CD *(∴ கொடுக்கப்பட்டவை)*

எனவே $\Delta AOB \cong \Delta COD$ *(SSS விதி ப.ப.ப. விதி)*

இதனால் $\angle AOB = \angle COD$

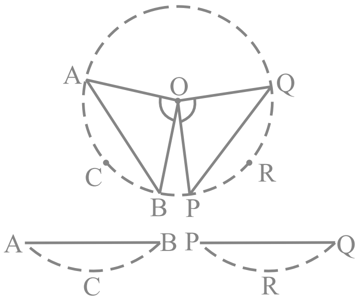
(சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த கோணங்கள்)

குறிப்பு : வசதிக்காக சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள் (Corresponding parts of congruent triangles - CPCT சுருக்கும்) நினைவில் கொள்ளவும். காரணம் இதை அடிக்கடி நாம் உபயோகிப்போம்.

ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு நாண்கள் மையத்தில் இரண்டு கோணங்களை சமமாக தாங்கினால் அந்த நாண்களைப் பற்றி நீ என்ன கூறுகின்றாய்? அவை இரண்டும் சம நாண்களா இல்லையா? கீழ்வரும் செயல்பாட்டினை செய்து சரி பார்ப்போம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நகல் தாளை எடுத்து அதன் மீது ஒரு வட்டத்தை நகல் எடு. வட்டத்தை வட்டமான வில் வடிவில் வெட்டி எடுக்கவும் A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது உள்ளன. $\angle AOB$ வட்ட மையத்தில் வரைக. மற்றும் ஒரு கோணம் $\angle POQ$ என வட்ட மையத்தில் வரை. இரண்டும் சமமாக இருக்கட்டும்.



படம் 9.5

வட்டகோணவில்லை AB மற்றும் PQ கோட்டில் வெட்டவும். (படம் 9.5). இரண்டு வட்டத்துண்டுகள் ACB மற்றும் PRQ கள் கிடைக்கின்றன. ஒன்றின் மீது ஒன்றை வைத்துப்பார்த்தால் இரண்டும் ஒத்துப் போவதை நீ பார்க்கலாம். அவை இரண்டும் சர்வசமம். எனவே AB = PQ ஆகிறது.

இந்த குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியில் கண்டதைப்போன்று வேறு சில சம கோணங்களை எடுத்து சரி பார்க்கவும். கிழ்கண்ட தேற்றத்தினால் எல்லா நாண்களும் சமம் ஆகும்.

தேற்றம் 9.2 : ஒரு வட்டத்தில் நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சமமான கோணங்களை தாங்கினால் நாண்கள் சமம் ஆகும்.

மேற்கண்டதேற்றம், தேற்றம் 9.1ன் மறுதலைத் தேற்றமாகும்.

படம் 9.4 ல் $\angle AOB = \angle COD$ என எடுத்துக்கொள்.

இப்பொழுது $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ஏன்?)

இப்பொது நீ AB = CD என பார்க்கிறாயா?

பயிற்சி 9.1

1. ஒத்த ஆரங்களைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்களும் சர்வசமம். என்பதை நனைவு கூர். சர்வசம வட்டங்களில் சம நாண்கள் இருந்தால், அவைகள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களை தாங்குகிறது என நிரூபி.

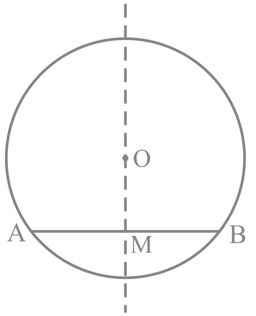
2. சர்வசம வட்டங்களில் சம நாண்கள் சமக்கோணங்களை வட்ட மையத்தில் தாங்கினால், அந்த நாண்கள் சமமாக இருக்கும் என நிரூபி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.2 : வட்டமையத்திலிருந்து ஒரு நாணுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு

செயல்பாடு : நகல்தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரைக. O என்பது மையப்புள்ளி. AB என்ற நாணை வரை. O வழியாக தாளை மடித்து ஒரு பாகத்தின் மீது மற்றொன்று அமையுமாறு செய்து மடித்த மடிப்பானது AB ஐ M ல் வெட்டும். இப்பொழுது $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$.

அல்லது OM என்பது AB க்கு செங்குத்தாக இருக்கும். B யும் A வும் ஒன்றின் மீது மற்றொன்று அமைகிறது (படம் 9.6) ஆகையால் MA = MB



படம் 9.6

மேலும் முக்கோணங்கள் OMA மற்றும் OMB என்பவைகளில் OA மற்றும் OB யை சேர்த்து இரண்டும் செங்கோண முக்கோணங்கள் என நீயே நிரூபித்து காண்பிக்கவும். மேற்கண்ட உதாரணம் ஒரு நிகழ்வுக்கு முடிவாக கிடைக்கின்றது.

தேற்றம் 9.3: ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு நாணுக்கு செங்குத்துக் கோடுவரைந்தால் அது அந்த நாணை இரு சமக் கூறிடும்.

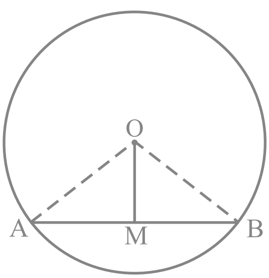
இந்த தேற்றத்தின் மறுதலை என்ன? தேற்றம் 9.3 என்ன என்று பார்ப்போம். கொடுக்கப்பட்டது, வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு நாணுக்கு செங்குத்துக்கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. நிரூபிக்கவேண்டியவை, நாணை செங்குத்துக்கோடு இரு சமக்கூறிடுகிறது. இதனுடைய மறுதலை தேற்றம் என்னவென்றால் ஒரு வட்டத்தில் மையப்புள்ளியிலிருந்து நாணுக்கு வரையும் கோடு இரு சமக்கூறிட்டால் அக்கோடு செங்குத்துகோடு ஆகும். கொடுக்கப்பட்டது, மையப்புள்ளியிலிருந்து நாணுக்கு வரையப்படும் கோடு நாணை இரு சமக்கூரிட்டால் அது செங்குத்துக்கோடு ஆகும். இதனுடைய மறுதலை தேற்றம் கீழ்கண்டவாறு அமையும்.

தேற்றம் 9.4: வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு கோடு நாணை இருசமக்கூறிடும்படி வரைந்தால் அது நாணுக்கு செங்குத்துக்கோடு ஆகிறது.

இது உண்மையா? ஒரு சில நிகழ்வுகளை செய்துபார்த்து முடிவு என்ன என்று கண்டுபிடி. இது எல்லா நிகழ்வுகளுக்கும் உண்மை எனக்காணலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

வட்டத்தின் மையப்புள்ளி O என்று எடுத்துக் கொள். AB என்பது நாண். O வையும் AB யின் மையப்புள்ளி M ஐயும் சேர். $OM \perp AB$ என நிரூபிக்க வேண்டும். OA மற்றும் OB இவற்றை சேர். (படம் 9.7). முக்கோணங்கள் OAM மற்றும் OBM இவை களில்,



படம் 9.7

OA = OB *(ஏன்?)*

AM = BM *(ஏன்?)*

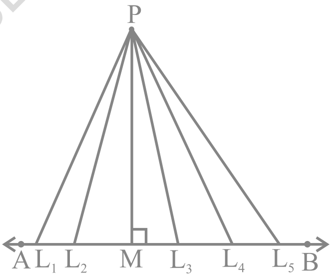
OM = OM *(பொது)*

ஆகையால் Δ OAM $\cong$ Δ OBM *(எப்படி?)*

இதிலிருந்து நாம் அறிவது $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ *(ஏன்?)*

9.3 : சம நாண்கள் மற்றும் மையப்புள்ளிகளிலிருந்து அவைகளின் தூரங்கள்.

AB என்பது ஒரு கோடு மற்றும் P ஒரு புள்ளி என எடுத்துக்கொள். ஒருக்கோட்டின் மீது எண்ணற்ற புள்ளிகள் இருக்கின்றன. ஒரு சிலபுள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டு P ஐ சேர்க்கவும். உனக்கு. PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4.......மற்றும் பல நேர்க்கோடுகள் கிடைக்கின்றன. PM என்பது P யிலிருந்து AB க்கு (படம் 9.8) வரையப்படும் மிகச் சிறியக் கோடு ஆகும்.



படம் 9.8

இதுவே மிகக்குறைந்த தூரம் எனக்கூறலாம். கணிதத்தில் நாம் **மிகக்குறைந்த தூரம் PM ஐயே AB க்கு P யிலிருந்து தூரம்** என்கிறோம்.

எனவே கீழ்கண்டவற்றை நாம் தீர்மானிக்கலாம்:

ஒரு கோட்லிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம் அவற்றிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் தூரம் ஆகும்.

அந்தப்புள்ளி AB கோட்டின் மீது இருந்தால் தூரம் (பூஜ்ஜியம்) என்பதைக் கவனி.

ஒரு வட்டத்திற்கு கணக்கில்லா நாண்கள் வரையலாம், சிறிய நாணை விட பெரிய நாண் வட்ட மையத்திற்கு மிக அருகில் இருக்கும். ஒரு வட்டத்திற்கு அநேக நாண்களை வரைந்து அவைகளின் தூரத்தை அளந்து இதை நீ சரி பார்க்கலாம்.

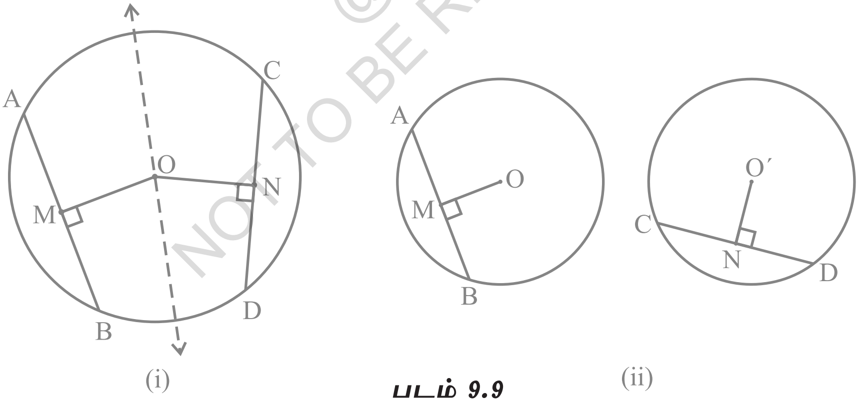
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

மையப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தின் அதி நீளமான நாணாகிய விட்டத்தின் தூரம் என்ன? விட்டம் மையப்புள்ளி வழியாக செல்வதால் இவை இருண்டிற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் O ஆகும். நாணின் நீளத்திற்கும் மையப்புள்ளியின் தூரத்திற்கும் ஏதாவது உறவு உள்ளதா என்று நீ நினைக்கின்றாயா?

அதைப்பற்றி இப்போது நாம் பார்ப்போம்.

செயல்பாடு : நகல்தாளின் மீது ஏதாவது ஆரம் எடுத்துக்கொண்டு ஒருவட்டத்தை வரைக. இரண்டு நாண்கள் AB மற்றும் CD யை வரை. O விலிருந்து செங்குத்துக்கோடுகள் OM மற்றும் ON ஐ வரைக. வட்டத்தை B யின் மீது D யும், A வின் மீது C யும் பொருந்தும்படி மடிக்கவும். (படம் 9.9 (i). O என்ற புள்ளி O என்ற மடிப்புமீதே விழுவதை நீ அறிவாய். எனவே OM=ON ஆகும். இதை மற்றும் இரண்டு சர்வசம வட்டங்களை O மற்றும் O^1 மையங்களாக எடுத்து இரண்டு சம நாண்கள் AB மற்றும் CD களை வரைக. செங்குத்து கோடுகளை OM மற்றும் O^1N ஐ அவைகளின் மீது வரை (படம் 9.9 (ii) ஒரு வட்டத்துண்டை வெட்டி AB மற்றும் CD ஒன்றுக்கொன்று பொருந்துமாறு வைக்கவும்.O மற்றும் O^1, M மற்றும் N இவைகள் ஒன்றோடு ஒன்று பொருந்துவதை நீ பார்க்கலாம். இவ்விதமாக கீழ்கண்டவற்றை நீ சரிபார்க்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



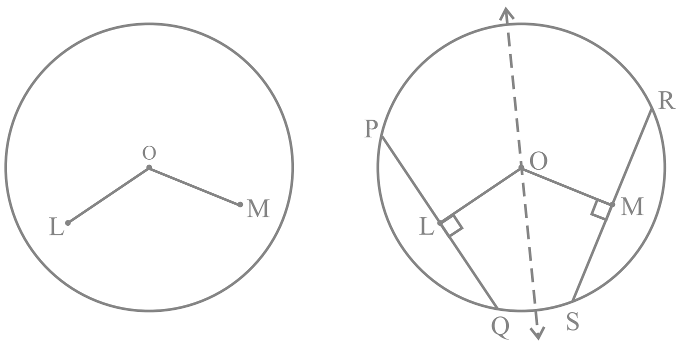
படம் 9.9

தேற்றம் 9.5 : வட்டத்தின் (சர்வசம வட்டங்களின்) சம நாண்கள் மையப்புள்ளி (மையப்புள்ளிகள்) லிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

இதனுடைய மறுதலைத்தேற்றம் உண்மை ஆகுமா இல்லையா? இதற்கு O வை மையப்புள்ளியாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரை. 'O' விலிருந்து OL மற்றும் OM களை வரைக (படம் 9.10 (ii). PQ மற்றும் RS இவைகளை அளக்கவும். இரண்டும் சமமாக உள்ளதா, இல்லையா? சமமாக இருக்கும்.

மேலும் சில சம நாண்களை வரைந்து குத்துயரங்களை வரைந்து சரி பார்க்கவும்.

இது தேற்றம் 9.5 ன் மறுதலை தேற்றத்தை சரிபார்க்கலாம்.



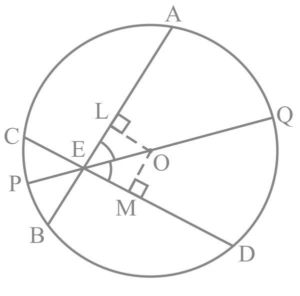
(i) **படம் 9.10** (ii)

தேற்றம் 9.6: வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து சமதூரத்தில் வரையப்பட்ட நாண்கள் சம நீளத்தை கொண்டவை.

மேற்கொண்ட முடிவை ஒரு உதாரணத்துடன் விளக்கலாம்.

எ.கா 2: ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு நாண்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் போது அதன் வழியாக ஊடுறும் விட்டத்திற்கு ஏற்படும் கோணங்கள் சமமாக இருந்தால் நாண்கள் சமமானவைகள் என நிரூபி.

தீர்வு: 'O' என்ற மையப்புள்ளியை கொண்ட வட்டத்தில் AB மற்றும் CD நாண்கள் ஒன்றைக் கொன்று E என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. PQ என்பது E வழியாக செல்லும் விட்டமாகும். இதில் $\angle AEQ = \angle DEQ$ ஆகும். *(படம் 9.11)*. நிரூபிக்க வேண்டியவை AB = CD.



படம் 9.11

AB க்கு குத்துயரம் OL மற்றும் CD க்கு குத்துயரம் OM ஐ வரை.

இப்பொழுது,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ *(முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பு)*

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$ என பார்க்கிறோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

முக்கோணங்கள் OLE மற்றும் OME களில்

$\angle LEO = \angle MEO$	(ஏன்?)
$\angle LOE = \angle MOE$	(மேலே நிரூபிக்கப்பட்டவை)
EO = EO	(பொது)
ஆகையால் $\Delta OLE \cong \Delta OME$	(ஏன்?)
இதனால் OL = OM	CPCT
எனவே AB = CD	(ஏன்?)

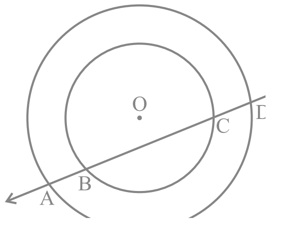
பயிற்சி 9.2

1. இரண்டு வட்டங்கள் *5* cm மற்றும் *3* cm ஆரங்கள் கொண்டு உள்ளன. இவை ஒன்றுக்கொன்று இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளுகின்றன. இரண்டு மையப்புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ளதூரம் *4* cm பொது நாணின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு சம நாண்கள் வட்டத்திற்கு உள்ளேயே வெட்டிக் கொள்கின்றன. ஒரு நாணின் துண்டுக்கோடுகள் மற்றொரு நாணின் துண்டுக்கோடுகளுக்கு சமம் என நிரூபி.

3. ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு சம நாண்கள் வட்டத்திற்கு உள்ளேயே வெட்டிக் கொள்கின்றன. வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி மற்றும் மையப்புள்ளி இவைகளை சேர்க்கும் கோடு நாண்களுடன் சமக்கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது என நிரூபி.

4. ஒரு கோடு பொதுமைய (ஒத்த மையங்களைக் கொண்ட) வட்டங்களை A,B,C மற்றும் D யில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. O மையப்புள்ளி. AB = CD என நிரூபி (படம் *9.12*).



படம் 9.12

5. மூன்று பெண்கள் ரேஷ்மா, சல்மா மற்றும் மந்தீப் (Mandip), பூங்காவில் *5* மீ ஆரம் உள்ள வட்டத்தின் மீது நின்று கொண்டு விளையாடுகிறார்கள். ரேஷ்மா பந்தை சல்மாவுக்கும், சல்மா மந்தீப்க்கும், மந்தீப் ரேஷ்மாவுக்கும் எரிகிறார்கள். ரேஷ்மா மற்றும் சல்மா, சல்மா மற்றும் மந்தீப் இவர்களுக்கு இடையே உள்ளத்தூரம் எவ்வளவு?

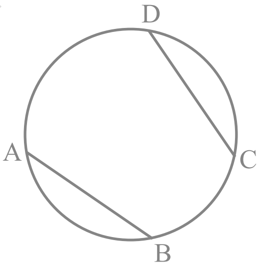
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

6. சில குடியிருப்புக்கள் அடங்கிய பகுதியில் ஒரு பூங்கா 20 மீ ஆரம் கொண்ட வட்ட வடிவில் உள்ளது. மூன்று பையன்கள் அன்குர் (an-kur), சையத் மற்றும் டேவிட் அதனுடைய எல்லை ஒரங்களில் சமதூரத்தில் உட்கார்ந்து கொண்டு உள்ளார்கள். ஒவ்வொருவரிடமும் தொலைபேசி பொம்மை உள்ளது. ஒவ்வொரு தொலைபேசிக்கும் இடையே தேவையான கம்பியின் நீளம் என்ன?

9.4 ஒரு வட்டத்தில் ஒரு வில் தாங்கும் கோணம்

ஒரு வட்டத்தில், விட்டமல்லாத ஒரு நாண் வரைந்தால் அது வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும்போது பிரிக்கிறது பெருவட்டவில் மற்றும் சிறுவட்டவில் என இரண்டு பகுதிகளாக. இரண்டு சம நாண்களை எடுத்துக் கொண்டால் வட்ட விற்களின் நீளங்களைப் பற்றி என்ன நினைக்கின்றாய்? இரண்டு விற்களும் சமமாக இருக்குமா? அந்த நாண் சமமாக இருந்தால் வட்ட விற்களும் சமமாக இருக்கும்.

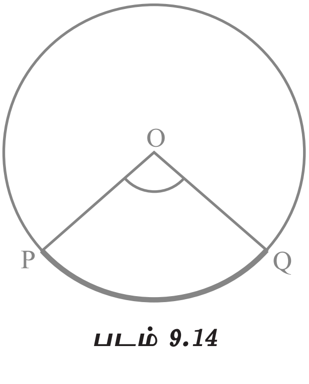
இதை வட்டவில் CD ஐ வெட்டி AB மீது வைத்து பார்த்தால் சமமாக இருப்பதைக் காணலாம். (படம் 9.13) இதிலிருந்து சம நாண்கள் இருந்தால் சம வட்ட விற்கள் கிடைக்கும் என அறிகிறோம். மேலும் மறுதலைத் தேற்றம் சர்வசம விற்கள் இருந்தால் சம நாண்கள் கிடைக்கும்.



படம் 9.13

ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு நாண்கள் இருந்தால் அவைகளின் ஒத்த விற்கள் சமம். மறுதலையாக விற்கள் சமமாக இருந்தால் ஒத்த நாண்கள் சமமாக இருக்கும்.

மேலும் வட்டவில்லினால் கிடைக்கும் கோணமும் அதனுடைய ஒத்த நாணால் கிடைக்கும் கோணமும் சமமாகிறது சிறுவட்டவில்லில் ஒருகோணமும் பெருவட்டவில்லில் பின்வளைக் கோணமும் கிடைக்கின்றது. படம் 9.14 ல் சிறு வட்டவில் PQ ஆல் O ல் $\angle POQ$ மற்றும் பெருவட்டவில் PQ ஆல் O ல் பின்வளைக் கோணம் $\angle POQ$ வும் கிடைக்கின்றது.



படம் 9.14

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

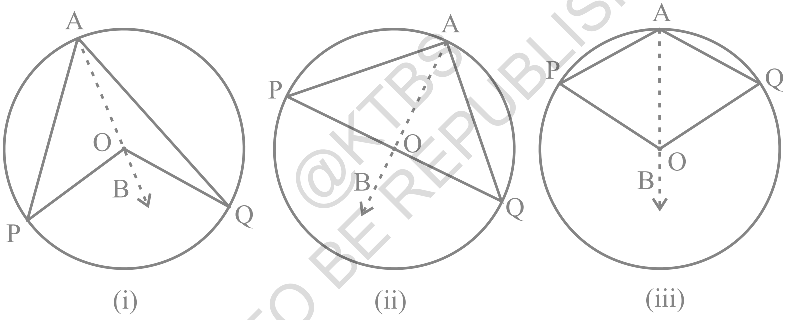
மேற்கண்ட பண்பு மற்றும் தேற்றம் 9.1 இவைகளிலிருந்து கீழ்வரும் முடிவு உண்மை ஆகிறது.

ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம வட்டவிற்கள் (அல்லது சம விற்கள்) வட்டமையத்தில் சமக்கோணங்களை தாங்குகின்றன.

ஆகையால் ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாண், வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒத்த சிறு வட்ட வில் தாங்கும் கோணத்திற்கு சமம். கீழ் வரும் தேற்றம் வட்டதின் வில், மையத்தில் ஏற்படும் கோணம் மற்றும் பரிதியில் ஏற்படும் கோணங்களின் உறவுகளைப் பற்றி கூறுகிறது.

தேற்றம் 9.7 : ஒருவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணமானது அதேவில் மீதி வட்டத்தின் பரிதியின் மீதுள்ள ஏதோ ஒரு புள்ளியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.

நிரூபணம்: வட்டத்தில் PQ என்ற வில் வட்டமையத்தில் $\angle POQ$ ஐ தாங்குகிறது. மீதிபரிதியில் A என்ற புள்ளியில் $\angle PAQ$ ஐ தாங்குகிறது. மையம் தாங்கும் கோணம் பரிதிதாங்கும் கோணதைப்போல இரண்டு மடங்கு ஆகும்.



படம் 9.15

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதாவது $\angle POQ = 2\angle PAQ$ என நிரூபிக்கப்பட வேண்டும்.

மேற்கண்ட மூன்று படங்களை எடுத்துக்கொள் (படம் 9.15 (i) ல் PQஎன்பது சிறுவட்டத்துண்டு. படம் (9.15 (ii) ல் PQ என்பது அரைவட்டம் மற்றும் படம் (iii)ல் PQ என்பது பெருவட்டத்துண்டு ஆகும்.

ஆரம்பமாக AO ஐ சேர்க்கவும். B க்கு அதை நீட்டவும். எல்லா படங்களிலும் $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

ஏனெனில் ஒரு முக்கோணத்தில் வெளிக்கோணம் இரண்டு எதிர் உட்கோணங்களுக்கு சமம்.

ΔOAQ ல், $OA = OQ$ (வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

ஆகையால் $\angle OAQ = \angle OQA$ (தேற்றம் 7.5)

எனவே $\angle BOQ = 2\angle OAQ \rightarrow (1)$

$\angle BOP = \angle 2OAP \rightarrow (2)$

(அதைப்போலவே) $\therefore \angle BOP + \angle BOQ = 2\left(\angle OAP + \angle OAQ\right)$

$\angle BOP + \angle BOQ = 2\left(\angle OAP + \angle OAQ\right)$

கூடுதலினால் $\angle POQ = 2\angle PAQ \rightarrow (3)$

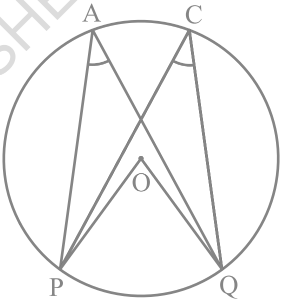
படம் (iii) ல் PQ ஒரு பெருவட்டவில், (iii) ஐ இடமாற்றம் செய்தால் பின்வளைக் கோணம் $\angle POQ = 2\angle PAQ$

குறிப்பு: மேற்கண்ட படங்களில் P மற்றும் Q வைச் சேர்த்தால் PQ என்ற நாண்கிடைக்கின்றது. எனவே $\angle PAQ$ ஆனது வட்டத்துண்டு PACQ ஆல் ஆனது.

தேற்றம் 9.7ல் A என்றபுள்ளி மீதி வட்டத்தின் பரிதியில் எங்கு வேண்டமானாலும் இருக்கலாம். எனவே C என்ற வேறு ஏதாவது மீதி வட்டப்பரிதியில் எடுத்துக் கொண்டால் (படம் 9.16) ல் நமக்கு கிடைப்பது.

$POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

ஆகையால் $\angle PCQ = \angle PAQ$



படம் 9.16

இதன் மூலம் கீழ்கண்ட தேற்றம் நமக்கு கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 9.8: ஒரு வட்டத்துண்டில் அமைந்த அனைத்து கோணங்களும் சமம்.

தேற்றம் 9.8 நிகழ்வு ii) ஐப் பற்றி கலந்தாலோசிப்போம். இங்கு $\angle PAQ$ என்பது அரைவட்டத்தில் உள்ள ஒரு கோணம். ஆதலால் $PAQ = \frac{1}{2} POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ அரைவட்டத்தில் C என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால் நமக்கு மறுபடியும் $\angle PCQ = 90°$ எனக்கிடைக்கிறது.

ஆதலால் வட்டத்தில் நமக்கு மேலும் ஒரு பண்பு கிடைக்கின்றது.

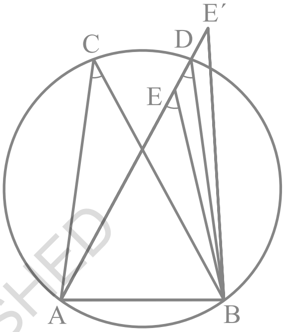
தேற்றம் 9.8ன் மறுதலைத் தேற்றமும் உண்மையாகிறது. அதை கீழ்கண்ட வாறு கூறலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 9.9: இரண்டு புள்ளிகளை சேர்க்கும் ஒரு துண்டுக்கோடு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளில் தாங்கப்படும் இரண்டுகோணங்களும் சமமானால், ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள், துண்டுக்கோட்டின் முனையில் உள்ள இரண்டுப்புள்ளிகள், ஆகிய நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டப்பரிதியில் அமையும்.

மேற்கண்ட முடிவின் உண்மையை கீழ்கண்டவாறு உண்மை எனக்கூறலாம்.

படம் 9.19ல், AB என்பது ஒரு துண்டுக்கோடு வட்டத்தின் ஒரே பக்கத்தில் இரண்டு புள்ளிகள் C மற்றும் D யில் இரண்டு சமகோணங்களை தாங்கி உள்ளன.



படம் 9.17

அதாவது $\angle ACB = \angle ADB$

A,B,C மற்றும் D புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீது உள்ளது என காண்பிக்க, A,B,C வழியாக செல்லும்படி ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டம் ஒருவேளை D வழியாக ஊடுருவவில்லை எனில் AD ஐ (AD நீட்டப்பட்டால்) ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கும் அதாவது E (அல்லது E^1)என எடுத்துக்கொள்.

புள்ளிகள், A,C,E மற்றும் B ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்தால்,

$\angle ACB = \angle AEB$ (ஏன்?)

ஆனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

$\angle ACB = \angle ADB$

ஆகையால் $\angle AEB = \angle ADB$

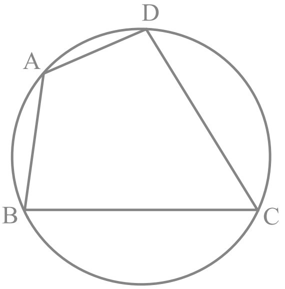
இது உண்மையெனில் கண்டிப்பாக E மற்றும் D ஒரே புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். (ஏன்?)

இதைப்போலவே E^1 மற்றும் D ஒரே புள்ளியாக இருக்க வேண்டும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

9.5 வட்ட நாற்கரங்கள்

படம் 9.18 ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீது அமைந்தால் ABCD என்பது வட்ட நாற்கரமாகும். இவ்விதமான நாற்கரங்களில் தனிப்பட்ட பண்புகள் காணப்படுகின்றன. பலவிதமான அளவுகளுடன் கூடிய பக்கங்களைக் கொண்ட ABCD என்ற பல வட்ட நாற்கரங்களை வரை.



படம் 9.18

பல அளவுகள் கொண்ட ஆரங்களைக் கொண்ட வட்டங்களை வரைந்து அதன்மீது 4 புள்ளிகளை வெவ்வேறு இடங்களில் குறித்து நாற்கரங்களை வரைக. எல்லா நாற்கரங்களிலும் கீழ் கண்ட அட்டவணையில் எழுதவும்.

நாற்கரத்தின் வரிசை எண்	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எதிர்கோணங்களை அளந்து எழுதவும். அட்டவணையிலிருந்து என்ன தெரிந்து கொள்கிறாய்?

இதில் நீ காணுவது $\angle A + \angle C = 180°$ மற்றும் $\angle B + \angle D = 180°$ ஆகும். இதிலிருந்து கீழ்கண்ட முடிவை கொண்டுவரலாம்.

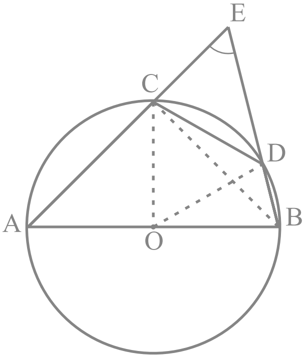
தேற்றம் 9.10 : ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் ஏதேனும் ஒரு ஜோடி எதிரெதிர் கோணங்களைக் கூட்டினால் 180° க்குச் சமம்

இதனுடைய மறுதலைத்தேற்றம் கீழ்கண்டவாறு உண்மையாக்கப் படுகிறது.

தேற்றம்9.11 : ஒரு நாற்கரத்தில் ஒரு ஜோடி எதிரெதிர் கோணங்களுக்களின் கூடுதல் 180° க்குச்சமம் எனில் அது வட்ட நாற்கரமாகும்.

தேற்றம் 9.9 ஐ போலவே இந்த தேற்றத்தையும் நிரூபணம் செய்யலாம்.

எ.கா. 2: *படம் 9.19ல்,* AB என்பது வட்டத்தின் விட்டம். CD என்பது வட்டத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமான ஒரு நாண். AC மற்றும் BD களை நீட்டினால் E என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle AEB = 60°$ என நிரூபி.



படம் 9.19

தீர்வு: OC, OD மற்றும் BC இவைகளை சேர்.

முக்கோணம் ODC என்பது சமபக்க முக்கோணமாகும். *(ஏன்?)*

ஆகையால் $\angle COD = 60°$

இப்போது $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ *(தேற்றம் 12.8)*

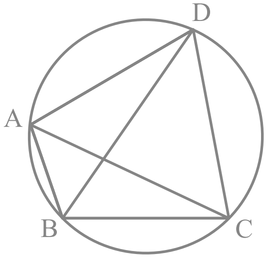
இதனால் நமக்கு கிடைப்பது $\angle CBD = 30°$

மறுபடியும் $\angle ACB = 90°$ *(ஏன்)*

எனவே $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

நமக்கு கிடைப்பது $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$ அதாவது $\angle AEB = 60°$

எ.கா. 3: *படம் 9.20* ல் ABCD என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம். AC மற்றும் BD என்பவைகள் விட்டங்கள். $\angle DBC = 55°$, மற்றும் $\angle BAC = 45°$ எனில் $\angle BCD$ -ஐக் கண்டுபிடி.



படம் 9.20

தீர்வு: $\angle CAD = \angle DBC = 55°$

(ஒரே வட்டத்துண்டின் மீது உள்ள கோணங்கள்)

ஆகையால் $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$
$= 55^0 + 45^0 = 100^0$

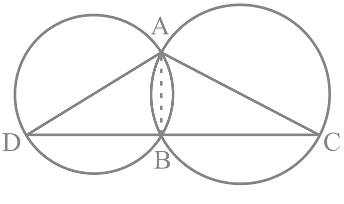
ஆனால் $\angle DAB + \angle BCD = 180°$

(வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்கள்)

$\angle BCD = 180° - 100 = 80°$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா. 4: இரண்டு வட்டங்கள், இரண்டு புள்ளிகள் A மற்றும் B யில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. AD மற்றும் AC இரண்டு விட்டங்கள் *(படம் **9.21**)*. B என்பது DC துண்டுக்கோட்டின் மீது அமைகிறது என நிரூபி.



படம் 9.21

தீர்வு: AB ஐ சேர்.

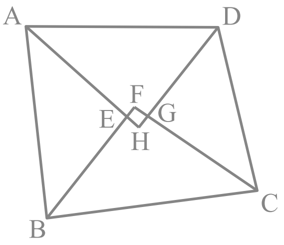
$\angle ABD = 90^\circ$
$\angle ABC = 90^\circ$ *(அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம்)*

ஆகையால் $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

எனவே DBC என்பது ஒருநேர்கோடு. அதாவது B என்பது DC யின் மீது அமைகிறது.

எ.கா 5: ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு உட் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகளை வரைந்தால் கிடைக்கும் நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் என நிரூபி.

தீர்வு: படம் ***9.22*** ல், ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம். இதில் AH, BF, CF மற்றும் DH இவைகள் நான்கு உட்கோணங்களின் $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ இவைகளின் இரு சமவெட்டிகளினால் ஏற்படும் நாற்கரம் EFGH ஆகும்.



படம் 9.22

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது $\angle FEH = \angle AEB = 180 - (\angle EAB - \angle EBA)$ *(ஏன்?)*

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

மற்றும் $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ *(ஏன்?)*

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

ஆகையால் $\angle FEH + \angle FGH = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A + \angle B + 180^\circ - \frac{1}{2}\angle C + \angle D$

$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

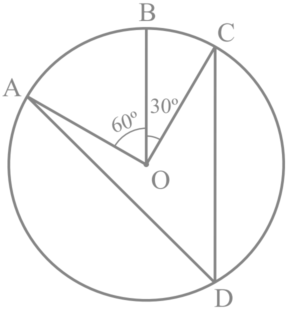
$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ$

$= 360^0 - 180^0 = 180^0$

ஆகையால் தேற்றம் ***9.11*** படி, நாற்கரம் EFGH என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரமாகும்.

பயிற்சி 9.3

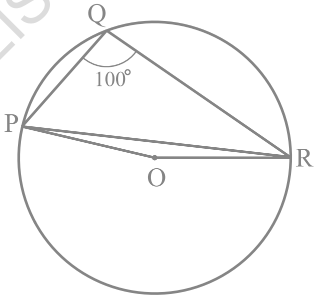
1. படம் 9.23 ல் O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் A,B,C பரிதியின் மீதுள்ள மூன்றுபுள்ளிகள். $\angle BOC = 30°$ மத்து $\angle AOB = 60°$, D என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள மற்றுமொரு புள்ளி எனில் $\angle ADC$ ஐ கண்டுபிடி.



படம் 9.23

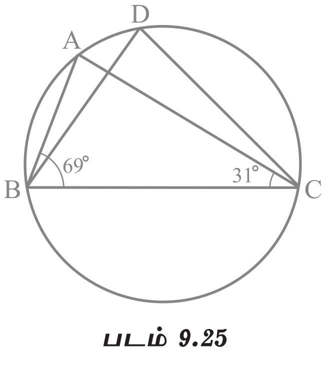
2. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணும் ஆரமும் சமம். அந்த நாணால் பெருவட்டத்துண்டில் ஒரு புள்ளியிலும், சிறுவட்டத்துண்டில் ஒரு புள்ளியிலும் ஏற்படும் கோணங்களையும் கண்டுபிடி.

3. படம் 9.24 ல், $\angle PQR = 100°$ 'O' வை மையப்புள்ளியாகக் கொண்டு, வட்டத்தின் மீது P,Q மற்றும் R புள்ளிகள் உள்ளன. $\angle OPR$ கண்டுபிடி.



படம் 9.24

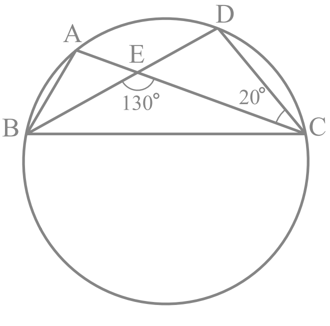
4. படம் 9.25 ல் $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ · $\angle BDC$ ஐக்கண்டுபிடி.



படம் 9.25

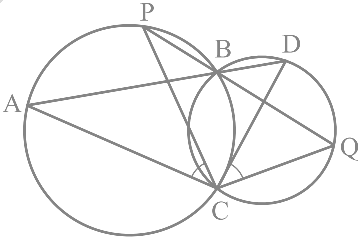
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. படம் 9.26ல், A,B,C மற்றும் D நான்கு புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது உள்ளன. AC மற்றும் BD, E என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\angle BEC = 130^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ECD = 20^\circ$ எனில் $\angle BAC$ ஐக் கண்டுபிடி.



படம் 9.26

6. ABCD என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம். விட்டங்கள் E என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\angle DBC = 70^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCD$ ஐக் கண்டு பிடி. மேலும் AB = BC எனில் $\angle ECD$ ஐக் கண்டுபிடி.
7. ஒரு நாற்கரத்தின் இரண்டு மூலைவிட்டங்களும் ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு விட்டங்களாகும். வட்டம் நான்கு உச்சிகளின் வழியாக கடந்து செல்கின்றன எனில் அந்தநாற்கரம் செவ்வகம் என நிரூபி.
8. ஒரு சரிவகத்தில் இணையாக பக்கம் அல்லாத பக்கங்கள் சமமாக இருந்தால் அது ஒரு வட்ட சரிவகம் என நிரூபி.
9. இருவட்டங்கள் ஒன்றையொன்று B மற்றும் C யில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. B வழியாகச் செல்லும் இரண்டு துண்டுக்கோடுகள் ABD மற்றும் PBQ களை முறையே A,D,P மற்றும் Q ல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. (படம் 9.27) $\angle ACP = \angle QCD$ என நிரூபி.



படம் 9.27

10. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் இரு வட்டங்களின் விட்டங்களாக வரையப்பட்டுள்ளன எனில் இரண்டு வட்டங்களின் வெட்டும்புள்ளிகள் மூன்றும் பக்கத்தின் மீது விழுகின்றன என நிரூபி.
11. இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் ADC, AC ஐ பொது கர்ணமாககொண்டுள்ளது. $\angle CAD = \angle CBD$ என நிரூபி.
12. ஒரு வட்ட இணைகரம் செவ்வகம் ஆகும் என நிரூபி.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.6 தொகுப்பு:

இவ்வலகில் நீங்கள் கற்றுக்கொண்ட கருத்துக்காண்:

1. **ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அதே தளத்தின் மேல் சமதூரத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணமே வட்டம் எனப்படும்.**

2. ஒரு வட்டத்தின் சம நாண்கள் (அல்லது சர்வசம வட்டங்களின் நாண்கள்) வட்டத்தின் மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.

3. ஒரு வட்டத்தின் (அல்லது சர்வ சம வட்டங்களில்) இரண்டு நாண்கள் வட்டத்தின் மைய்த்தில் (அல்லது ஒத்த மையங்களில்) சம கோணங்களைத் தாங்குமாயின், அந்த நாண்கள் சமம்.

4. ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு நாணுக்கு செங்குத்துக் கோடுவரைந்தால் அது அந்த நாணை இரு சமக் கூறிடும்.

5. வட்டத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு கோடு நாணை இருசமக்கூறிடும்படி வரைந்தால் அது நாணுக்கு செங்குத்துக்கோடு ஆகிறது.

6. ஒரு வட்டத்தில் உள்ள (அல்லது சர்வசம வட்டங்களில் உள்ள) சம நாண்கள் வட்டத்தின் (அல்லது சர்வசம வட்டங்களின்) மையப்புள்ளி (அல்லது மையப்புள்ளிகளில்) இருந்து சம தூரத்தில் அமையும்.

7. வட்டத்தின் (சர்வசம வட்டங்களில்) மையத்தில் (அல்லது மையங்களில்) இருந்து சமதூரத்தில் அமைந்த நாண்கள் சமம்.

8. ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு விற்கள் சர்வசமமாக இருந்தால், அவற்றின் ஒத்த நாண்கள் சமமாக இருக்கும் மேலும் மறுதலையாக, ஒரு வட்டத்தின் 2 நாண்கள் சமமாக இருப்பின், அவற்றின் ஒத்த (சிறு, பெரு) விற்கள் சர்வசமமாக இருக்கும்.

9. வட்டத்தின் சர்வசம விற்கள், மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10. ஒருவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணமானது அதேவில் மீதி வட்டத்தின் பரிதியின் மீதுள்ள ஏதோ ஒரு புள்ளியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.

11. ஒரு வட்டத்துண்டில் அமைந்த அனைத்து கோணங்களும் சமம்.

12. அரைவட்டத்தில் அமைந்த கோணம் ஒரு செங்கோணமாகும்.

13. இரண்டு புள்ளிகளை சேர்க்கும் ஒரு துண்டுக்கோடு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளில் தாங்கப்படும் இரண்டுகோணங்களும் சமமானால், ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள், துண்டுக்கோட்டின் முனையில் உள்ள இரண்டுப்புள்ளிகள், ஆகிய நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டப்பரிதியில் அமையும்.

14. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் இரு ஜோடி எதிரெதிர் கோணங்களைக் கூட்டினால் **180°** க்குச் சமம்.

15. ஒரு நாற்கரத்தில் இரு ஜோடி எதிரெதிர் கோணங்களுக்களின் கூடுதல் **180°** க்குச்சமம் எனில் அது வட்ட நாற்கரமாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

L7V4E3

பாடம் 10

ஹெரானுடைய சூத்திரம் (Heron's formula)

10.1 ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு - ஹெரானுடைய சூத்திரத்தின்படி

$$\text{முக்கோணத்தின் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times \text{அடிப்பக்கம்} \times \text{உயரம்}$$

அசமபக்க முக்கோணங்களின் பக்கத்தின் நீளங்களை பற்றி நமக்கு தெரியும் என இப்பொழுது நினைத்துக்கொள் மற்றும் உயரமானது தெரியவில்லை. என்றால் அதன் பரப்பளவை இது வரை நீ கண்டுபிடிக்க முடியுமா? எடுத்துக்காட்டுக்கு 40 மீ, 32 மீ மற்றும் 24 மீ பக்கங்களுடைய பரப்பளவை நீ எப்படி கண்டுபிடிப்பாய்? முக்கோணத்தின் உயரத்தை அறிந்திரிந்தால் மட்டுமே பரப்பளவுக்கான சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்த முடியும். ஆனால் உயரத்தை கணக்கிட நமக்கு குறிப்பு எதுவும் கிடையாது. அவ்வாறே முயற்சி செய்யவும் இது உனக்கு கிடைக்காமல் போயின், அப்படியாயின் அடுத்த பிரிவுக்கு போகவும்.

எகிப்தில் உள்ள அலேக்சான்றியாவில் சாத்தியமாக கிட்டதட்ட 10 ஆம் நூற்றாண்டில் இல் ஹெரான் பிறந்தார். கணிதப் பிரயோகத்தில் அவர் உழைத்தார். இதுவரை எண்ணற்ற கணிதம் மற்றும் இயற்பியல நிபந்தனை மேல் அவர் உழைத்தார் மற்றும் இந்த பலனில் சகலகலா நூல் எழுத்தாளராக வெவ்வாறாக அதனை (Field) கருதினார். மூன்று புஸ்த்தங்களில் எழுதப்பட்ட அளவியல் மேல் நிறைய கணக்குகளை அவர் வடிவியலில் செயலாற்றி உள்ளார்.

ஹெரான் 10 C.E - 75C.E

படம் 10.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

சதுரங்கள், செவ்வகங்கள், முக்கோணங்கள், சரிவகங்கள் (சரிவகம்) பரப்பளவை நான் புத்தகம் 1 இல் செயலாற்றியுள்ளேன், பறபரப்பளவுக்கொண்ட உருளை, கூம்பு, கோளம், மற்ற வெவ்வேறு தனிப்பட்ட நாற்கரங்கள், வட்டங்கள் போன்றவையை புத்தகம் 1 இல் செயலாற்றியுள்ளேன். இந்த புத்தகத்தில், மூன்று பக்கங்களின் கால அளவின்படி புகழ்வாய்ந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவுக்கான சூத்திரத்தை ஹெரான் பெற்றார்.

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காண ஹெரான்சால் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரமாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

அங்கே *a, b* மற்றும் *c* ஆனவை முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஆகும், மற்றும் *s* = அரை சற்றளவு, அதாவது முக்கோணத்தின் பாதி சுற்றளவாகும் $=\frac{a+b+c}{2}$

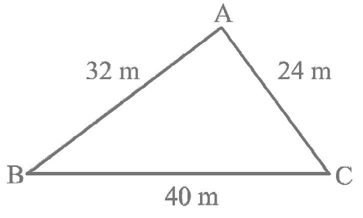
எளிதாக முக்கோணத்தின் உயரத்தை கண்டுப்பிடிக்க முடியாவிட்டால் அங்கே இந்த சூத்திரம் உதவியாக இருக்கும். ஒரு முக்கோண பூங்கா ABC இன் பரப்பளவை கணக்கிட இதை பயன்படுத்தவும்.

(படம் 10.2 பார்) இதை மேலே குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

$a = 40$ மீ $b = 24$ மீ $c = 32$ மீ என எடுத்துக்கொள்

அதுவாகையில் நமக்கு கிடைக்கும் S $=\frac{40+24+32}{2}$ மீ.

= *48 மீ.*



படம் 10.2

$(s - a) = (48 - 40)$ மீ $= 8$மீ

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ மீ

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ மீ

ஆதலால், பூங்கா ABC இன் பரப்பளவு

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(b-c)}$

$=\sqrt{48\times 8\times 24\times 16}$ ச.மீ = *384 ச.மீ.*

$32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ என

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நாம் பார்க்கலாம். ஆதலால், பூங்காவின் பக்கங்களானது ஒரு செங்குத்த முக்கோண மாக செய்யும். பெரிய பக்கமான, அது 40 மீ. கர்ணமாக இருக்கும் மற்றும் பக்கம் AB மற்றும் AC இன் நடுவில் உள்ள கோணம் 90° ஆகும்.

சூத்திரம் 1 ஐ பயன்படுத்தி, நாம் பூங்காவின் பரப்பளவை சரிபார்க்கு மாயின் $\frac{1}{2} \times 32 \times 34$ ச.மீ

= 384 ச.மீ

ஹெரான்னுடைய சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி நாம் கண்டுபிடித்தது நாம் கண்டுபிடித்த பரப்பளவின் சூத்திரம் அதேப்போன்று உள்ளது.

இப்பொழுது ஹெரான்னுடைய சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி, முன்பே விவாதித்தப்படி மற்ற முக்கோணங்களின் பரப்பளவை கண்டுப்பிடித்து நீங்கள் உண்மையை சோதிக்கவும். அதாவது

(i) 10 செ.மீ பக்கமுடைய சம பக்க முக்கோணம்

(ii) 5 செ.மீ சமமான பக்கங்களின் அளவு மற்றும் 8 செ.மீ. மற்ற பக்கம் கொண்ட இருசம்பக்கமுக்கோணம்.

அதனை நீங்கள் பார்க்கவும்.

(i) க்கு பதிலாக நமக்கு $s = \frac{10+10+10}{2}$ செ.மீ = 15 செ.மீ

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \sqrt{15\ (15-10)\ (15-10)\ (15-10)}$ ச.செ.மீ

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ ச.செ.மீ. = $25\sqrt{3}$ ச.செ.மீ

(ii) க்கு பதிலாக நமக்கு

கிடைப்பது $s = \frac{8+5+5}{2}$ செ.மீ = 9 செ.மீ

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \sqrt{9\ (9-8)\ (9-5)(9-5)}$ ச.செ.மீ.

$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ ச.செ.மீ

= 12 ச.செ.மீ.

சில அதிகமான எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு இப்பொழுது தீர்வு காணலாம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 1: *8 செ.மீ மற்றும் 11 செ.மீ உள்ள இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் 32 செ.மீ சுற்றளவைக் கொண்ட, ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுப்பிடி (படம் 10.3 ஐ பார்)*

தீர்வு: இங்கே முக்கோணத்தின் சுற்றளவானது = 32 செ.மீ

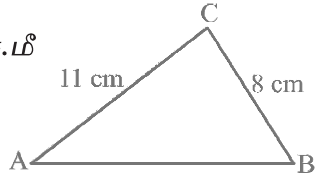
$a = 8$ செ.மீ மற்றும் $b = 11$ செ.மீ

அதுப்போல் $2s = 32$ அதாவது, $s = 16$ செ.மீ

$(s - a) = (16 - 8)$ செ.மீ. = 8 செ.மீ.

$(s - b) = (16 - 11)$ செ.மீ. = 5 செ.மீ.

$(s - c) = (16 - 13)$ செ.மீ. = 3 செ.மீ.



படம் 10.3

ஆதலால், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ ச.செ.மீ.

= $8\sqrt{30}$ ச.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 2: *120மீ, 80 மீ மற்றும் 50 மீ பக்கங்களுடை ABC ஒரு முக்கோண பூங்காவாகும் (படம் 10.4 ஐ பார்) அதனைச் சுற்றி வேலி மற்றும் உள்ளே புள்வெளி நட தோட்டக்காரி டானியா அமைத்தாள். அவளுக்கு நடுவதற்கு தேவையான நில பரப்பளவு எவ்வளவு? ஒரு பக்கத்தின் மேல் வாயிலுக்கா 3 மீ. அகலம் உள்ள இடத்தை விட்டு ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ரூ. 20 முள் கம்பியை வேலியாக போடும் செலவை கண்டுபிடி.*

தீர்வு:பூங்காவின் பரப்பளவை கண்டுபிடிக்க, நாம் பெறுவது

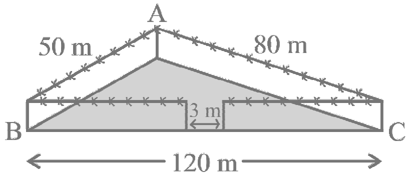
$2s$ = 50 மீ. + 80 மீ. + 120 மீ = 250 மீ

அதாவது $s = 125$ மீ.

இப்பொழுது $(s - a) = (125 - 120)$மீ.
= 5 மீ.

$(s - b) = (125 - 80)$ மீ. = 45 மீ.

$(s - c) = (125 - 50)$ மீ. = 75 மீ



படம் 10.4

ஆகவே, பூங்காவின் பரப்பு = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$

$= 375\sqrt{15}$ மீ ^{2}

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு : பூங்காவின் சுற்றளவு AB + BC + CA = 250 மீ

ஆதலால், வேலி போடுவதற்கு தேவையான கம்பியின்

நீளம் = 25 மீ - 3 மீ. (வாயிலுக்காக 3 மீ நீளம் விடப்பட்டுள்ள) = 247 மீ

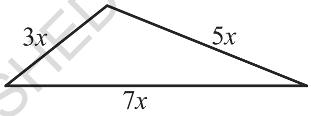
வேலி போடுவதற்காண செலவு = ரூ. 20 × 247 = ரூ. 4940

எடுத்துக்காட்டு 3 : *3 : 5 : 7 என்ற விகிதத்தில் ஒரு முக்கோண மனையின் பக்கங்களாகும் மற்றும் அதனுடைய சுற்றளவு 300 மீ ஆகும். அதன் பரப்பளவை கண்டுப்பிடி.*

தீர்வு: *(படம் 10.5ஐ பார்)* $3x$, $5x$ *மற்றும்* $7x$ *ஆன*

அதன் பக்கங்கள், மீட்டரில் உள்ளதாக எண்ணிக்கொள்.

(முக்கோணத்தின் சுற்றளவு)



படம் 10.5

ஆதலால், $15x=300, x=20$ என அது கொடுக்கும். முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் இவ்வாறு இருக்கும்

3×20 மீ, 5×20 மீ. மற்றும் 7×20 மீ

அதாவது 60 மீ, 100 மீ மற்றும் 140 மீ.

இப்பொழுது நீங்கள் பரப்பளவை கண்டு பிடிக்கலாம் (ஹெரானனுடைய சூத்திரத்தை பயன்படுத்துக.)

நாம் பெற்றிருப்பது $s = \dfrac{60+100+140}{2}$ மீ = *150 மீ.*

மற்றும் அதன் பரப்பளவானது

$$= \sqrt{150(150-60)\,(150-100)\,(150-140)} \text{ ச.மீ.}$$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ ச.மீ.}$$

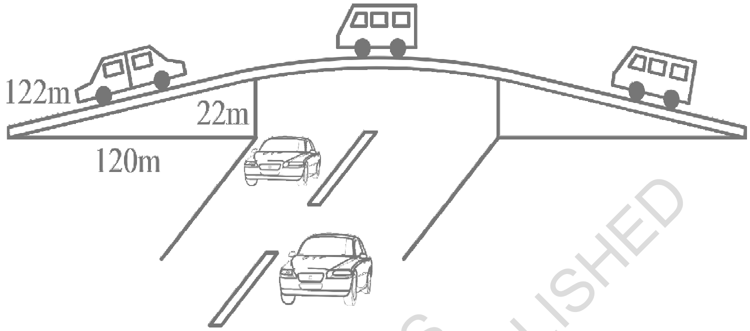
$$= 1500\sqrt{3} \text{ ச.மீ.}$$

பயிற்சி 10.1

1. பக்கம் 'a' மூலமாக கொண்டு ஒரு சம்பக்க முக்கோணம், 'முன்னே பள்ளிக்கூடம்' என தெரிவிப்பது ஒரு அடையாள சாலை பலகையாகும். ஹெரான்னுடைய சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி, சாலை பலகையின் பரப்பளவை கண்டு பிடி. அதனுடைய சுற்றளவு 180 செ.மீ ஆயின் சாலை பலகையின் பரப்பளவு என்னவாகயிருக்கும்?

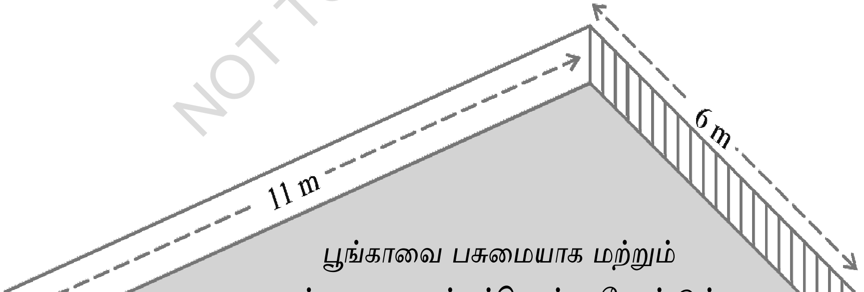
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. விளம்பரங்களுக்காக பயன்படுத்தப்பட்ட ஒரு மேம்பால சுவரின் பக்கங்கள் முக்கோணமாகும். (படம் 10.6ஐ பார்) 122 மீ. 22 மீ மற்றும் 120 மீ சுவரின் பக்கங்களாகும். விளம்பரங்கள் ஒரு வருடத்திற்கு ஒரு ச.மீ க்கு ரூ. 5000 என இலாபத்தை சம்பாதிகும். விளம்பரக்கம்பெனி ஒன்று 3 மாதங்களுக்கு சுவர்களில் ஒன்றைக் கொண்டது. அது செலுத்திய வாடகை எவ்வளவு?



படம் 10.6

3. ஒரு பூங்காவில் அங்கே சறுக்குமரம் ஒன்று இருக்கும். (படம் 10.7ஐ பார்) பூங்காவை பசுமையாக மற்றும் சுத்தமாக வைத்துக்கொள் என்ற செய்தியை சில சுவரின் பக்கங்களான ஒன்றில் வண்ணங்களில் பூசப்பட்டுள்ளது. 15 மீ. 11மீ மற்றும் 6 மீ சுவற்றின் பக்கங்களாயின், வண்ணம் பூசிய பரப்பளவை கண்டுப்பிடி.



படம் 10.7

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 18 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ உடைய இரண்டு பக்கங்களின் முக்கோண பரப்பளவை கண்டுப்பிடி மற்றும் அதன் சுற்றளவு 42 செ.மீ ஆகும்.

5. 12 : 17 : 25 விகிதங்களான ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் அதன் சுற்றளவு 540 செ.மீ ஆகும். அதன் பரப்பளவை கண்டுப்பிடி.

6. 30 செ.மீ சுற்றளவைக் கொண்ட இரு சம பக்க முக்கோணமானது சமமானபக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் 12 செ.மீ சம அளவுக் கொண்டதாகும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுப்பிடி.

10.2 தொகுப்பு:

இந்தப்பாடத்தில், கீழே கொடுக்கப்பட்ட குறிப்புகளை நீங்கள் படித்திருப்பாய்.

1. ஹெரான்னுடைய சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி கணக்கிடப்பட்ட a,b மற்றும் c ஆன பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

அங்கே, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

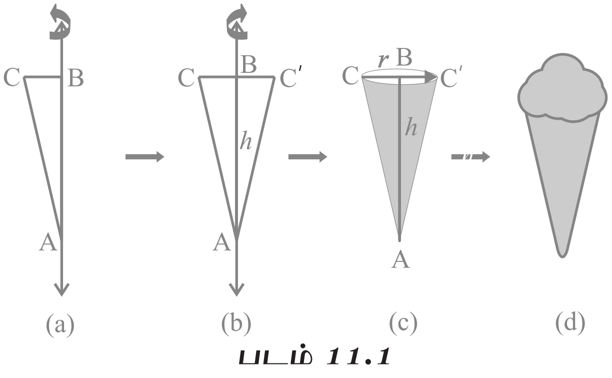
பாடம் 11

புறப்பரப்பளவுகள் மற்றும் கன அளவுகள்
(Surface Areas and Volumes)

11.1 ஒரு நேர் வட்ட கூம்பின் புறப்பரப்பளவு

இதுவரை, சர்வசம படங்களின் குவியல் மேல் நாம் திடங்களை உற்ப்பத்தி செய்யலாம், சம்பவத்தில், அதுப்போன்ற படங்களை பட்டகம் என அழைக்கலாம் பட்டகம் அல்லாத திடங்களை மற்றொருவகை என பார்க்கலாம் இப்பொழுது (இந்த வகைகள் ஆன திடங்களை கூம்பகம் என அழைப்போம்). அவற்றை உற்ப்பத்தி செய்வது எப்படி என பார்க்கலாம்.

செயல்பாடு: B இல் செங்கோணமான ஒரு செங்கோன முக்கோணமான ABC ஐ வெட்டவும். முக்கோணத்தின் பக்கத்தை AB என கூறு செங்குத்தமான நீள வட்டமான ஒன்றில் ஒரு நீளமான தடித்த கயிரை ஒட்டவும் (படம் 11.1 (*a*) ஐ பார்) முக்கோணமான பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒன்றின் மேல் உன் கைகளால் கயிரை பிடித்துக் கொள்ளவும் மற்றும் ஒரு எண்ணிக்கை முறையில் கயிரை சுற்றி வெளியே இருக்கும் முக்கோணத்தை சுற்றும்போது நிகழ்ந்தது என்ன? கயிரைச் சுற்றி சுற்றும் போது உருவான முக்கோணத்தின் வடிவத்தை அடையாளங்கான உன்னால் முடியுமா (படம் 11.1 (b) ஐ பார்)? அது பாத்திர வடிவத்தில் உள்ள குவிந்த ஐஸ்க்கரீம் சாப்பிட்ட கலத்தை உன்னால் ஞாபகப்படுத்தி கொள்ள முடியுமா (படம் 11.1 (c) மற்றும் (d) ஐ பார்.

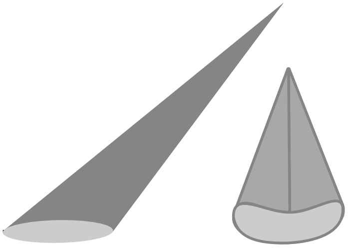


படம் 11.1

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இதனை நேர்வட்ட கூம்பு என அழைக்கலாம். நேர்வட்ட வடிவக்கூம்பான 11.1 (c) படத்தில், உச்சி புள்ளியை A எனலாம், உயரத்தை AB எனலாம், ஆரத்தை BC எனலாம் மற்றும் கூம்பின் சாய்வு உயரத்தை AC என அழைக்கலாம். கூம்பின் அடித்தளமான வட்டத்தின் மையத்தை இங்கே B எனலாம். h, r மற்றும் l முறையே

எப்பொழுதும் கூம்பின் உயரம், ஆரம் மற்றும் சாய்வு உயரமாகும். எவ்வகை கூம்புகளை நேர் வட்ட வடிவக்கூம்பு என நாம் அழைக்க முடியாது எனப்பார்போம் கூம்பு எந்த வகையானது எனப்பார். இங்கே, (படம் 11.2ஐ பார்) நேர் வட்ட கூம்பு அற்ற படங்களான இவைகள் என்ன வென்று நீ பார்; (a) இல் உச்சியிலிருந்து அடித்தள மையத்தை இணைக்கும் கோடு அடித்தளத்திற்க்கு செங்குத்த கோணமாக இருக்காது, மற்றும் (b) இல் அடித்தளம் வட்ட வடிவமாக இல்லை.

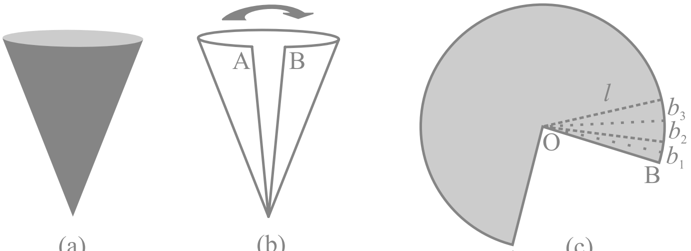


(a) படம் 11.2 (b)

உருளையின் நிகழ்வுப் போல், அப்பொழுதிலிருந்தே நேர்வட்ட வடிவ கூம்புகளை அதை மட்டும் நாம் கற்றுக் கொண்டுள்ளோம். இந்த பாடத்தில் ‘கூம்பு’ என ஞாபாக படுத்திக்கொள், அது ஒரு நேர்வட்ட வடிவக்கூம்பு என பொருளாகும்.

செயல்பாடு: (i) காகிதம் ஒன்றின் மேல் பிசிறு இல்லாத கூம்பு காகித த்தால் அழகாக, சுத்தமாக வெட்டவும், பக்க நீள வாட்டத்தில் நேராகவும், மற்றும் இதை வெளியே திறக்க, கூம்பின் புறமானது உருவாகும் காகிதத்தின் வடிவமானதை பார்க்லாம். (l ஆல் குறிப்பிடப்பட்ட கூம்பின் சாய்வு உயரம் என்பது கூம்பில் நீ வெட்டிய நீளவாட்ட மான கோடு ஆகும்) பார்ப்பதற்க்கு கேக்கின் வட்ட பகுதிப் போல இருக்கும்.

(ii) பக்கங்களை நீ இப்பொழது அருகில் கொண்டு வரவும். கூம்பின் அடி த்தளம் வட்ட வடிவமாக உருவாகுவதை பட்ம 11.3 (c) இல் வளைவு பகுதியை நீ பார்க்கலாம்.



(a) (b) (c)

படம் 11.3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(iii) வெட்டியை கொண்டு நூற்றுக்கணக்கான சிறிய துண்டு களாக வெட்டினால் இப்பொழுது படம் *11.3* (c) இல் ஒரு காகிதம் போல் இருக்குமாயின், ‘O’ புள்ளியிலிருந்து வரைந்த கோடுகள் நீள வாட்டத்தில் இருக்கும். ஒவ்வொரு வெட்டிய பகுதிகள் ஒரு சிறிய முக்கோணமாகும் அதனுடைய உயரமானது கூம்பின் சாய்வு உயரம் l ஆகும்.

(iv) ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவான இப்பொழுது = $\frac{1}{2} \times$ ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் அடிதளம் $\times\ l$

ஆகையால், துண்டுகாகிதத்தின் முழுமையான பரப்பளவு

= எல்லா முக்கோணங்களுடைய பரப்பளவின் கூடுதல்

$= \frac{1}{2}\ b_1 l + \frac{1}{2}\ b_2 l + \frac{1}{2}\ b_3 l + \ldots\ldots.$

$= \frac{1}{2}\ l\,[b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..]$

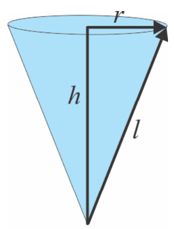
$= \frac{1}{2} \times l \times$ (*11.15* படத்தில் உள்ள வளைவு எல்லையான முழு நீளம்)

(படத்தினுடைய வளைவுப் பகுதியின் மேல் செய்யப்பட்டதும் போல $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..$).

ஆனால் கூம்பின் அடித்தள சுற்றளவால் செய்யப்பட்ட படமான வளைவுப் பகுதி மற்றும் $2\pi r$ = கூம்பின் அடித்தள சுற்றளவாகும், அங்கே கூம்பின் அடித்தள ஆரம் r ஆகும்.

ஆகையால் **ஒரு கூம்பின் வளைவுப் பரப்பளவு** $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l$

அங்கே r என்பது அடித்தள ஆரம் மற்றும் l என்பது சாய்வு உயரம்



படம் 11.4

கவனி: $l^2 = r^2 + h^2$ என்பதை குறித்துக்கொள் (படம் 11.4லிருந்து பார்த்ததைப் போல்) பித்தாகரஸ் தேற்றத்தை பிரயோகிக்கவும். இங்கே கூம்பின் உயரம் h ஆகும்.

ஆதலால், $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

இப்பொழுது கூம்பின் அடித்தளம் மூடியிருக்கும்மாயின் πr^2 க்கு சம பரப்பளவுக்கு தேவையான r ஆரமான காகிதத்துண்டு வட்ட வடிவமானதாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆதலால், **ஒரு கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு** $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

எடுத்துக்காட்டு 4: *7 செ.மீ அடித்தள ஆரம் மற்றும் 10 செ.மீ அதனுடைய சாய்வு உயரம் உடைய நேர் வட்ட வடிவக் கூம்பின் வளைவுப் புரப் பரப்பளவை கண்டுபிடி.*

தீர்வு: வளைவுப் புறப் பரப்பளவு $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ ச.மீ}$$

$$= 220 \text{ ச.மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : *ஒரு கூம்பின் உயரம் 16 செ.மீ மற்றும் அதுனடைய அடித்தள ஆரம் 12 செ.மீ. கூம்பின் வளைவுப் புற பரப்பளவு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி ($\pi = 3.14$ என உபயோகி)*

தீர்வு: இங்கே $h = 16$ செ.மீ மற்றும் $r = 12$ செ.மீ

ஆகையால், $l^2 = h^2 + r^2$ இல் இருந்து, நமக்கு இருக்கும்

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ செ.மீ} = 20 \text{ செ.மீ}$$

ஆகையால், வளைவுப் புற பரப்பளவு $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 753.6 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மொத்தப்புறப்பரப்பளவு $= \pi rl + \pi r^2$

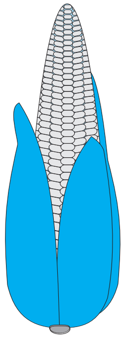
$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ ச.செ.மீ}$$

$$= 1205.76 \text{ ச.செ.மீ.}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 6: *(படம் 11.5ஐ பார்) ஒரு மக்காச்சோளம், கூம்பைப் போன்று சிறிதளவு வடிவ முடைய, 2.1 செ.மீ, அதனுடைய மிக அகலமான முடிவின் ஆரம் மற்றும் 20 செ.மீ நீளம் (உயரம்) போல் இருக்கும். தாங்கிய மக்காச்ச சோள வளைந்த புறத்தில் ஒவ்வொரு சதுர மீட்டரில் சராசரியாக நான்கு தானியங்கள் இருக்கும் எனில் மக்காச்சோளத்தில் முழுவதுமாக எத்தனை தானியங்கள் உள்ளது எனக் கண்டு பிடி.*



படம் 11.5

தீர்வு: கூம்பின் மேல் வளைவுப் புறத்தில் மட்டும் கண்டு பிடித்த மக்கா சோளத்தின் தானியங்களின் மொத்த

எண்ணிக்கையை கண்டுபிடித்தால், மக்காச்சோள கூம்பின் வளைவப் புரப்பளவை தெரிந்துக் கொள்ள தேவையாகும். இந்த கேள்வியில், கூம்பின் உயரத்தை நமக்கு கொடுத்துள்ளார்கள், அவ்வாறே தேவையான சாய்வு உயரத்தையும் கண்டுபிடி.

இங்கே $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ செ.மீ.

$= \sqrt{404.41}$ செ.மீ

$= 20.11$ செ.மீ

ஆதலால், மக்காச்சோள கூம்பின் வளைவுப் பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ ச.செ.மீ.

$= 132.726$ ச.செ.மீ.

$=$ ***132.73*** *ச.செ.மீ. (தோராயமாக)*

மக்காசோளத்தின் மீது 1 ச.மீட்டர் பரப்பில் 4 தானியங்கள் உள்ளன. எனவே அதன் மொத்த வளைந்த புறப்பரப்பின் மீது அமைந்த தாணியங்களின் எண்ணிக்கை $= 132.73 \times 4 = 530.92 =$ தோராயமாக 531

ஆகையால், மக்காச்சோள கூம்பின் மேல் தோராயமாக 531 தாணியங்கள் அங்கே இருக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.1

$\pi = \frac{22}{7}$ என நினை, (வேறாக நிர்ணயிக்கப்பட்டதை தவிர)

1. ஒரு கூம்பின் அடித்தள விட்டம் 10.5 செ.மீ மற்றும் அதன் சாய்வு உயரம் 10 செ.மீ. அதன் வளைவுப் புறப் பரப்பளவை கண்டுபிடி.
2. ஒரு கூம்பின் சாய்வு உயரம் 21 மீ மற்றும் அதன் அடித்தள விட்டம 24 மீ எனில் அதன் மொத்த புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.
3. ஒரு கூம்பின் வளைவுப் பரப்பளவு 308 ச.செ.மீ. ஆகும் மற்றும் அதன் சாய்வு உயரம் 21 மீ ஆகும்.
   (i) அடித்தள ஆரம் மற்றும்
   (ii) கூம்பின் மொத்த புறப்பரப்பளவை கண்டு பிடி.
4. 10 மீ. உயரம் கொண்டது ஒரு கூம்பு கூடராம் மற்றும் அதன் அடித்தள ஆரம் 24 மீ. ஆகும்.
   (i) கூடாரத்தின் சாய்வு உயரம்.
   (ii) ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ரூ. 70 வீதம் செலவு செய்தாகில், கூடாரம் செய்ய தேவையான கித்தான் துணியின் (canvas) விலையைக் கண்டுபிடி.

5. 6 மீ. அடித்தள ஆரம் மற்றும் 8 மீ உயரம் கொண்ட கூம்பு கூடாரத்தை செய்ய தேவையான 3 மீட்டர் அகலம் கொண்ட தார்ச்சீலையின் நீளம் என்ன? வெட்டும்போது மற்றும் ஓரங்களை தைக்கும் போது ஏற்படும்கழிவுக்காகதோராயமாக20செ.மீதேவையானபொருள்அதிக நீளத்தை கொண்டதாக எடுத்துக்கொள். (π = 3.14 என உபயோகி)

6. 25 மீ. மற்றும் 14 மீ. முறையே கூம்பு கல்லறையின் சாய்வு உயரம் மற்றும் அடித்தள விட்டமாகும். 100 சதுர மீட்டருக்கு, ரூ. 210 வீதம் மேல் வெள்ளை அடிப்பதற்க்கான செலவை கண்டுபிடி.

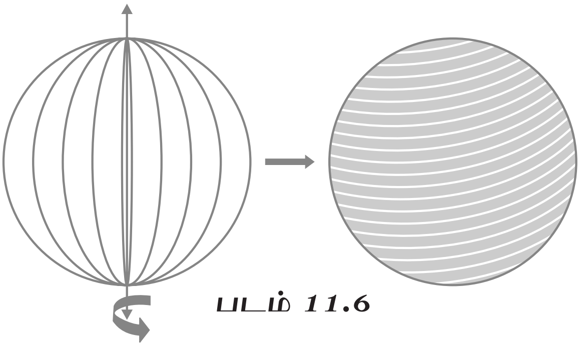
7. 7 செ.மீ அடித்தள ஆரம் உள்ள ஓர் நேர் வட்ட வடிவ கூம்பு ஒரு ஜோக்கர் தொப்பியின் வடிவத்தில் உள்ளது மற்றும் அதன் உயரம் 24 செ.மீ. அதுப்போன்ற 10 தொப்பிகளை செய்ய தேவையான தாளின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.

8. ஒரு பேருந்து நிறுத்தம் சாலையின் மீதமுள்ள பகுதியிலிருந்து மறு சுழற்சியிலான அட்டை பலகையினால் செய்யப்பட்ட 50 உள்ளீடற்ற கூம்பை பயன் படுத்தி தடுப்பு போடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கூம்பும் 40 செ.மீ அடித்தள விட்டமும் மற்றும் 1 மீ. உயரம் கொண்டதாக இருக்கும். வர்ணம் பூச ஒவ்வொரு கூம்பு வெளிபக்கமாயின், மற்றும் ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ரூ. 12 இன் வீதம் வர்ணம் பூசுவதற்க்கான செலவு என்னவாகும்? (π = 3.14 பயன் படுத்தி மற்றும் $\sqrt{1.04}$ = 1.02 என எடுத்துக் கொள்)

11.2 ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு

கோளம் என்றால் என்ன? இது ஒரு வட்டத்தை போன்றுள்ளதா? ஒரு தாளின் மீது வட்டத்தை உன்னால் வரைய முடியுமா? உன்னால் முடியும், ஏனெனில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து (ஆரம் என அழை) நிலையான தூரத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் அது மூடிய படம் ஒரு தளத்தில் இருப்பது ஒரு வட்டமாகும், அதனை வட்டமையம் என அழைக்கலாம். ஒரு வட்டதட்டு விட்டம் நீள வட்டத்தில் வாயிலாக நூலை ஒன்று ஒட்டவும் மற்றும் சுற்றவும் என்பது முந்தைய பிரிவில் முக்கோணத்தை சுற்றுவது போலாகும், நீ பார்க்கும் புது திடமானது (படம் 11.6 இல் பார்) எதைப் போன்று இது ஒத்திருக்கும்? ஒரு பந்து? ஆம். இதை ஒரு கோளம் என அழைக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 11.6

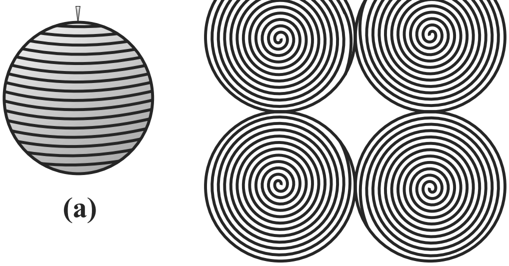
வட்டத்தினுடைய மையத்திற்க்கு என்ன நேரிடும் என்பதை நீ ஊகிக்க முடியுமா, சுற்றுவதன் மேல் ஒரு கோளம் எப்பொழுது உருவாகும்? இருப்பினும். கோளத்தின் மையம் ஏற்றபடி இது இருக்கும் ஆதலால் ஒரு மூன்று பரிமாணமுள்ள படமான (திடமான படம்), ஒன்று ஒரு கோளமாகும். காலி இடத்தில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளின் மேல் செய்யப்பட்டது, ஆரங்கள் என அழைப்பது மாறாத தூரத்தில் அமைந்திருக்கும். கோளத்தின் மையம் என அழைப்பது ஒரு நிலயான புள்ளியிலிருப்பதாகும்.

குறிப்பு: ஒரு பந்தின் மேற்ப்புறம் கோளத்தைப் போல இருக்கும். ஒரு மேற்ப்புறம் கோளம் ஆன திடத்தை திண்ம கோளம் என்கிறோம்.

செயல்பாடு: பம்பரத்தைக் கொண்டு எப்பொழதாவது நீ விளையாடிதுன்டா (அல்லது) ஒருவனோடு ஒரு சிலர் ஆடுவதை மட்டும் நீ கவனித்துள்ளாயா? இதனை சுற்றி கயிறால் சுற்றுவது எப்படி என நீ கட்டாயம் தெரிந்துக் கொண்டிருப்பாய். இப்பொழுது, ஒரு ரப்பர் பந்தை எடுத்துக்கொள் மற்றும் அதனுள் ஒரு ஆணியால் ஓட்டை போடவும். ஆணியைக் கொண்டு, பந்தைச் சுற்றி கயிறை சுற்றவும், பந்தின் முழப்பகுதியையும் நீ சேரும்போது, மற்றும் பந்தின் மீதமுள்ள பகுதியை சற்றி கயிறால் சற்றுவதை தொடரவும், பந்தை முழுவதுமாக மூடும்வரை நீ செய்யவும். (படம் 11.7ஐ பார்) கயிற்றின் மேல் உள்ள தொடக்கம் மற்றும் முடிவு புள்ளிகளை குறிக்கவும், மற்றும் பந்தின் மேற்புறத்திலிருந்து கயிறை மெதுவாக பிரிக்கவும்.

இப்பொழுது, பந்தின் விட்டத்தை அளக்க நீ உன் ஆசிரியரின் உதவியை நாடவும், அதுனடைய ஆரம் அதிலிருந்து சுலபமாக கிடைக்கும், பேப்பர் தாளின் மேலிருந்து, பந்தின் ஆரத்தை சமமாகக் கொண்டு ஆரங்களான நான்கு வட்டங்களை வரைக. பந்தைச் சுற்றி சுற்றிய கயிரால் ஒன்றின் பின் ஒன்றாக வட்டங்களை நிரப்ப தொடங்கவும் (படம் 11.7(b) ஐ பார்)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



(a) (b)

படம் 11.7

இவைகளினால் நீ அடைந்தது என்ன? கயிறானது, கோளத்தின் மேற்ப்பரப்பளவை முழுவதுமாக மூடியபிறகு, நான்கு வட்டங்களின் பகுதிகளை முழுவதுமாக பயன்படுத்தி நிரப்பவும், அது கோளத்தை போல ஒன்றேயான எல்லா ஆரங்களும் கொண்டதாக இருக்கும் அப்படியெனில் அதன் கருத்து என்ன? r ஆரமான கோணத்தின மேற்ப்பரப்பளவை இது

= r ஆரமான வட்டத்தின் பரப்பளவு 4 மடங்காகும்.

= $4 \times (\pi r^2)$

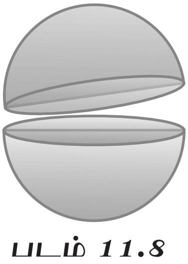
ஆகையால், **ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு** = $4\pi r^2$

கோளத்தின் ஆரம் r எனவாகும்.

ஒரு கோளத்தின் மேற்புறத்தில் நீ பார்க்கும் முகங்கள் எத்தனை? அங்கே இருப்பது ஒன்று மட்டும், அது ஒரு வளைவாகும்.

இப்பொழுது, ஒரு திடக்கோளத்தை எடுத்துக்கொள், மற்றும் மைய வழியாக செல்லும் அந்ததளம் ''இடைவழியாக'' இது சரியாக வெட்டும். கோளத்திற்க்கு நேரிட்டது என்ன?

ஆம், இரண்டு சம துண்டுகளாக பிரிந்து கிடைக்க கூடியது. (படம் 11.8 ஐ பார்) ஒவ்வொரு பாதியை என்ன வென்று அழைப்பாய்? இதனை ஒரு அரைக்கோளம் என அழைக்கலாம். (ஏனெனில் ஹெமி என்றால் பாதி) மற்றும் ஒரு அரைக்கோளத்தின் மேற்ப்புறம் என்னவாக இருக்கும்? இதற்க்கு எவ்வளவு முகங்கள் இருக்கும்? இரண்டு! ஒன்று தட்டையான முகம் (அடித்தளம்) மற்றும் ஒரு வளைவு முகம் இங்கே இருக்கும்.



படம் 11.8

கோளத்தின் மேற்ப்புறப்பரப்பளவானது ஒரு அரைக்கோளத்தின் மேற்ப்புறப்பரப்பளவில் அரை பாகத்திற்க்கு சமமாக இருக்கும். அது $4\pi r^2$ இல் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆதலால் | ஒரு அரைக்கோளத்தின் வளைவு புறப்பரப்பளவு $= 2\pi r^2$ |

ஒரு பகுதியில் இருக்கும் அரைக் கோளத்தின் அது கோளத்தின் ஆரம் r ஆகும்.

ஒரு அரைக்கோளத்தில் உள்ள இரண்டு முகங்களை இப்பொழுது எடுத்துக்கொள் அதன் மேற்ப்பறப்பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

| ஒரு அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவு $= 3\pi r^2$ |

எடுத்துக்காட்டு 4: *7 செ.மீ ஆரம் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் மேற்ப்புறப் பரப்பளவை கண்டுபிடி.*

தீர்வு: *7 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்ப்புறப்பரப்பளவு $4\pi r^2$ ஆக இருக்கும்.*

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 616 \text{ ச.செ.மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : *21 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு அரைக்கோளைத்தின் (i) வளைவு மேற்ப்புறப் பரப்பளவு மற்றும் (ii) மொத்த புறப் பரப்பளவு இவற்றைக் கண்டுபிடி.*

தீர்வு: *21 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு அரைக்கோளத்தின் மேற்ப்புறப்பரப்பளவு ஆக இருக்கும்*

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 2772 \text{ ச.செ.மீ.}$$

(ii) *அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவானது*

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 4158 \text{ ச.செ.மீ.}$$

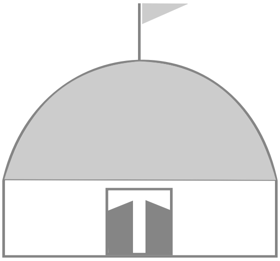
எடுத்துக்காட்டு 6 : *உள்ளீடற்ற கோளத்தில் சாகசச் செயலை செய்யும் சர்க்கஸ்மோட்டார்சைக்கிள்ஓட்டுபவர்7மீட்டர்விட்டத்தினுள்ளேசெய்வார். சவாரி செய்யும் மோட்டார் சைகலிஷ்ட்டுக்கு கிடைக்ககூடிய பரப்பளவை கண்டுபிடி.*

தீர்வு: *கோளத்தின் விட்டம் = 7 மீ. ஆதலால் அதன் ஆரம் = 3.5 மீ. கொடுக்கப்பட்டது ஒரு கோளம் புறப்பரப்பளவில் மோட்டார் சைக்லிஷ்ட்க்கு கிடைக்கக் கூடிய சவாரி செய்யும் இடம்*

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ ச.மீ.} = 154 \text{ ச.மீ}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 7: வர்ணம் அடிக்க தேவையுள்ள ஒரு கட்டிடத்தில் குவிந்த கூரை ஒரு அரைக் கோளமாகும் (படம் 11.9ஐ பார்) ஒரு குவிந்த கூரையின் அடித்தள சுற்றளவு 17.6 மீ. ஆயின் ஒரு 100 சதுர செண்டிமீட்டருக்கு ரூ. 5 வர்ண செலவு என்ற விதத்தில் வர்ணம் அடிப்பதற்க்கான செலவை கண்டுப்பிடி



படம் 11.9

தீர்வு: வர்ணம் அடிக்கவேண்டிய குவிந்த கூரையின் (மண்டபம்) மேற்ப்புறம் மட்டுமானால், குவிந்த கூரைக்கு தேவையான வர்ணம் அடிக்கும் பரப்பை தெரிந்துக்கொள்ள அரைக்கோளத்தின் வளைவு மேற்ப்பரப்பளவை கண்டுபிடிக்க தேவையானதாகும். இப்பொழுது, குவிந்தக் கூரையின் சுற்றளவு = 17.6 மீ. ஆதலால், 17.6 = $2\pi r$

ஆகையால், குவிந்தக் கூரையின் ஆரம் = $r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

குவிந்தக் கூரையின் வளைவு மேற்பரப்பளவு = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ ச.மீ.

= 49.28 ச.மீ

இப்பொழுது, வர்ணம் அடிக்க 100 ச.செ.மீக்கு ரூ. 5 எனில்

அதுபோல், 1 சதுர மீட்டருக்கு வர்ணம் அடிக்கும் செலவு = ரூ. 500

ஆதலால், குவிந்தக் கூரைக்கு முழுவதுமாக வர்ணம் அடிக்க ஆகும் செலவு = ரூ. 500 × 49.28 = ரூ. 24,640

பயிற்சி 11.2

$\pi = \frac{22}{7}$ என நினை, (வேறாக நிர்ணயிக்கப்பட்டதை தவிர)

1. கீழ்கண்ட ஆரமுடைய ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.

   (i) 10.5 செ.மீ. (ii) 5.6 செ.மீ. (iii) 14 செ.மீ.

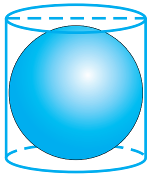
2. கீழ்கண்ட விட்ட முடைய ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.

   (i) 14 செ.மீ. (ii) 21 செ.மீ. (iii) 3.5 மீ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. 10 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி ($\pi = \frac{22}{7}$ என பயன்படுத்து)
4. காற்றாடிக்கும் சாதனத்தினால் ஒரு கோளமான பலூனின் ஆரமானது 7 செ.மீ லிருந்து 14 செ.மீ வரை அதிகப்படுத்தபட்டது. இரண்டு நிகழ்வுகளில் உள்ள பலூனின் புறப்பரப்பளவுகளை விகிதத்தில் கண்டுபிடி.
5. 10.5 செ.மீ உள்விட்டமுடைய பித்தளையால் செய்யப்பட்ட கிண்ணமானது ஒரு அரைக்கோளமாகும். ஒரு 100 சதுர மீட்டருக்கு ரூ. 16 இன் விகிதப்படி உள் பக்கத்தின் மேல் தகர முலாம் பூசுதலுக்கான செலவை கண்டுபிடி.
6. 154 சதுர செண்டி மீட்டர் புறப்பரப்புடைய ஒரு கோளத்தின் ஆரத்தை கண்டுபிடி.
7. சந்திரனின் விட்டமானது பூமியின் விட்டத்தில் நான்கில் ஒரு பங்கு தோராயமாக இருக்குமானல் அதனுடைய புறப்பரப்புகளை விகிதத்தில் கண்டுபிடி.
8. 0.25 செ.மீ தடிப்பான, உருக்கு இரும்பால் செய்யப்பட்ட கிண்ணமானது ஒரு அரைக்கோளமாகும், 5 செ.மீ. என்பது கிண்ணத்தின் உள்ளேயுள்ள ஆரமாகும். கிண்ணத்தில் வெளியேயுள்ள வளைவின் மேற்ப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.
9. r ஆரத்தை உடைய ஒரு கோளமானது ஒரு நேர்வட்ட உருளையால் சுற்றி அடைக்கப்பட்டுள்ளது. (படம்11.10 ஐ பார்).
   (i) கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு,
   (ii) உருளையின் வளைவு புறப்பரப்பளவு.
   (iii) (i) மற்றும் (ii) இல் பெற்ற புறப் பரப்புளவுகளின் விகிதங்கள்.

   இவற்றைக் கண்டுபிடி.

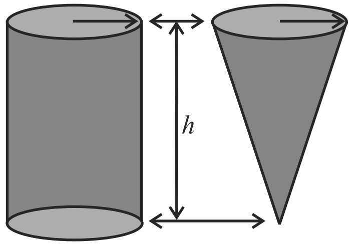


படம் 11.10

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

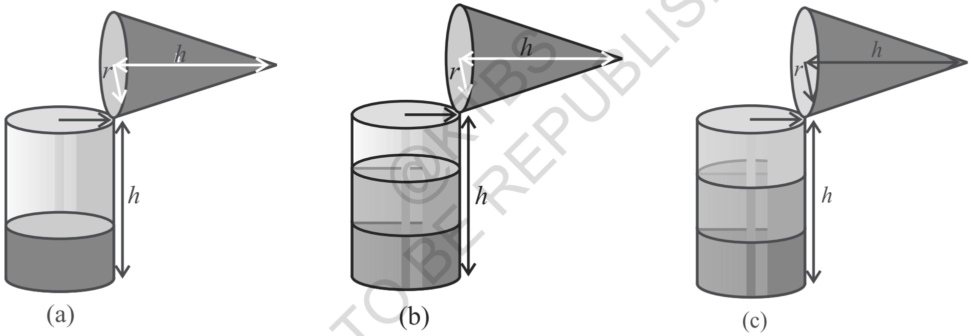
11.3 ஓர் நேர் வட்ட கூம்பின் கனம்

படம் 11.11 இல், ஒன்றேயான உயரம் மற்றும் ஒன்றேயான அடித்தள ஆரம் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டவடிவ கூம்பு மற்றும் அங்கே ஒரு நேர் வட்டவடிவ உருளையை நீ பார்க்க முடிகிறதா?



படம் 11.11

செயல்பாடு : ஒரு உள்ளீடற்ற உருளை செய்ய முயற்சிக்கவும் மற்றும் ஒன்றேயான உயரம் மற்றும் ஒன்றேயான அடித்தள ஆரமுள்ள உள்ள அதுப்போல் ஒரு உள்ளீடற்ற கூம்பு இருக்க வேண்டும் (படம் 11.11ஐ பார்) அப்படியாயின், நமக்கு உதவும் படியான ஒரு பரி சோதனையில் நாம் முயற்ச்சிப்போம், ஒரு நேர் வட்டவடிவ கூம்பு கனம் என்னவாக இருக்கும்! என்பதை நடைமுறையில் பார்க்கலாம்.



படம் 11.12

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆகையால், இதுப்போல தொடங்கவும்.

ஒரு முறை மணலைக் கொண்டு, மேல் விளிம்பு வரை கூம்பில் நிரப்பவும், மற்றும் காலி செய்து உருளையின் உள்ளே போடவும் (படம் 11.12 (a) ஐ பார்). அது உருளையின் ஒரு பகுதியின் ஒரு பகுதியை மட்டும் நிரப்பி இருக்கும் என நாம் கண்டுபிடித்தது.

மறுபடியும் கூம்பின் விளிம்பு வரை நிரப்பவும், மற்றும் அதை காலி செய்து உருளையின் உள்ளே போட, இதுவரை உருளை நிரம்ப வில்லை என்பதைப் பார்த்தோம் (படம் 11.12 (b)ஐ பார்).

மூன்றாவது முறை நிரப்பிய கூம்பானது, மற்றும் காலி செய்து உருளையின் உள்ளே போட, உருளையின் விளிம்பு வரை இது நிரப்பும் என்பதை பார்க்கலாம்(படம் 11.12 (c)ஐ பார்)

கூம்பைப் போல ஒன்றேயான உயரம் மற்றும் ஒன்றேயான அடித்தள ஆரமாக பெற்றிருக்கும் உருளையின் கன அளவுகளை ஒப்பிடும் போது ஒரு கூம்பின் கன அளவு ஒரு உருளையின் கன அளவில் மூன்றில் ஒரு பங்காகும் என கருது.

ஆகையால் **ஒரு கூம்பின் கன அளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$**

அங்கே r என்பது அடித்தள ஆரம் மற்றும் h என்பது கூம்பின் உயரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8: *21 செ.மீ. மற்றும் 28 செ.மீ. முறையே அது கூம்பின் உயரம் மற்றும் சாய்வு உயரமாகும். கூம்பின் கன அளவைக் கண்டுபிடி.*

தீர்வு: $l^2 = r^2 + h^2$ யிலிருந்து, நமக்கு கிடைப்பது

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ செ.மீ.} = 7\sqrt{7} \text{ செ.மீ.}$$

ஆகையால், கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 7546 \text{ ச.செ.மீ.}$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 9: *551 ச.மீ பரப்பளவு உடைய ஒரு துண்டு கித்தான் துணி மோனிகாவிடம் இருந்தது. கூம்பு வடிவ கூடாரம் அமைக்க வேண்டிய அவள் அதை பயன் படுத்தினாள் அது 7 மீ. அடித்தள ஆரமாகும். எல்லா ஓரங்களை தைக்கும் போது மற்றும் வெட்டும்போது ஏற்படும் கழிவு, தோராயமாக 1 ச.மீ எனில் செய்யப்பட்ட கூடாரத்தின் கன அளவை கண்டுபிடி.*

தீர்வு: அப்படியானால் கித்தான் துணியின் பரப்பளவு = 1 ச.மீ.

மற்றும் கழவில் நீங்கிய கித்தான் துணியின் பரப்பளவு = (1) ச.மீ.

இப்பொழுது, கூடாரத்தின் புறப்பரப்பளவு = (551 – 1) = 550 ச.மீ.

கூம்பு வடிவ கூடாரத்திற்க்கு தேவையான அடித்தள ஆரம் = 7 மீ.

ஒரு வளைவு மேற்ப்புறம் மட்டும் தான் ஒரு கூடாரத்திற்க்கு இருக்கும் என குறித்துக் கொள் (கித்தான் துணியானது கூடாரத்தின் தரையை மூடி மறைக்காது)

ஆதலால், கூடாரத்தின் வளைவு புறப்பரப்பளவு = 550 ச.மீ

$$\pi rl = 550$$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$l = \frac{550}{22} \text{ மீ.} = 25 \text{ மீ.}$$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

ஆதலால், $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m$$

$$= 24 \text{ மீ.}$$

ஆகையால், கூம்பு வடிவ கூடாரத்தின் கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ க.மீ.}$$

$$= 1232 \text{ க.மீ.}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.3

$\pi = \frac{22}{7}$ என நினை, (வேறாக நிர்ணயிக்கப்பட்டதை தவிர)

1. கீழ்கண்ட நேர்வட்ட வடிவமுள்ள கூம்பின் கன அளவை கண்டுபிடி.
   (i) 6 செ.மீ. ஆரம், 7 செ.மீ. உயரம்
   (ii) *3.5 செ.மீ. ஆரம், 12 செ.மீ உயரம்*
2. ஒரு கூம்பு பாத்திரத்தில் கொள் திறனை லிட்டர்களில் கண்டுபிடி.
   (i) *7 செ.மீ ஆரம் மற்றும் 25 செ.மீ சாய்வு உயரம்*
   (ii) *உயரம் 12 செ.மீ, சாய்வு உயரம் 13 செ.மீ.*
3. *ஒரு கூம்பின் உயரம் 15 செ.மீ ஆகும். அதனுடைய கன அளவு 1570 க.செ.மீ. ஆகுமெனில், அதன் அடித்தள விட்டத்தை கண்டுபிடிக்கவும.*
4. *9 செ.மீ உயரம் உள்ள ஒரு நேர்வட்ட வடிவ கூம்பின் கன அளவு 48* π *க.செ.மீ எனில் அடித்தள விட்டத்தை கண்டுபிடி.*
5. *3.5 மீ. விட்டம் மேல் உள்ள ஒரு கூம்பு குழியின் ஆழம் 12 மீ. ஆகும். கிலோ லிட்டர்களில் அதன் கொள்திறன் என்ன?*

6. ஒரு நேர்வட்ட வடிவ கூம்பின் கன அளவு 9586 க.செ.மீ. அதன் அடித்தள விட்டம் 28 செ.மீ எனில்.

   (i) கூம்பின் உயரம்

   (ii) கூம்பின் சாய்வு உயரம்

   (iii) கூம்பின் வளைவு புறப்பரப்பளவு ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

7. 5 செ.மீ., 12 செ.மீ. மற்றும் 13 செ.மீ பக்கங்களுடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணமான ABC இல் 12 செ.மீ உள்ள பக்கத்தின் மீது சுழற்றப்படுகிறது. அப்படியாயின் உருவாகும் திடத்தின் கன அளவை கண்டுபிடி.

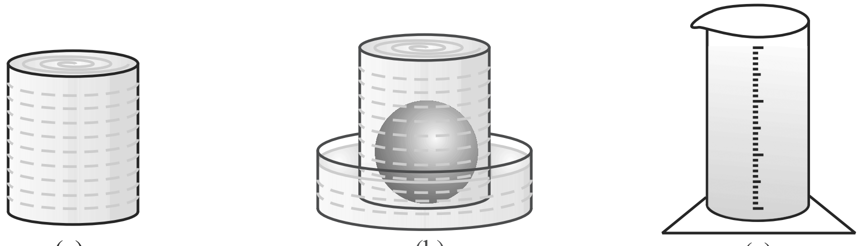
8. மேலே உள்ள கேள்வி 7 இல் ஆன முக்கோணம் ABC 5 செ.மீ உள்ள பக்கத்தின் மீது சுழற்றப்படுகிறது அப்படியாயின் அதனால் உருவான திட உருவத்தின் கன அளவை கண்டுபிடி. அதனுடன் கேள்வி 7 மற்றும் 8 இல் பெற்ற இரண்டு திடங்களின் கன அளவை விகிதத்தில் கண்டுபிடி.

9. 3 மீ. உயரம் மற்றும் 10.5 மீ. விட்டம் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவமான ஒரு கோதுமை குவியலாகும். அதன் கன அளவை கண்டுபிடி. மழையிலிருந்து பாதுக்காக்க கித்தான் துணியால் குவியலை மூட வேண்டும். தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.

11.4 ஒரு கோளத்தின் கன அளவு.

இப்பொழுது, ஒரு கோளத்தின் கன அளவை அளக்க எப்படி செல்வது என பார்ப்போம். முதலில், வித்தியாசமான ஆரங்களைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது மூன்று கோளங்களை எடுத்துக்கொள், மற்றும் ஒரு முறைக்கு ஒன்று என ஒவ்வொரு கோளங்களை உள்ளே போடுவதற்க்கான தகுந்த போதுமான பெரிய பாத்திரம், தவிரவும், பாத்திரத்தை வைக்க ஒரு பெரிய நீர்த்தொட்டியை எடுத்துக்கொள். அப்படியெனில், நீரை நீர்த்தொட்டியின் விளிம்புவரை நிரப்பவும் (படம் 11.13 (c) ஐ பார்) r ஆனது மூழ்கிய கோளத் தின் ஆரம் என எண்ணிக்கொள். (கோளத்தின் விட்டத்தைக் கொண்டு ஆரத்தை நீ கண்டுபிடிக்க முடியும்) ஆகவை $\frac{4}{3}\pi r^3$ ஐ மதிப்பிடு. வழிந்தோடிய நீரின் கன அளவை அளக்க கிட்டதட்ட சமமான இந்த மதிப்பை கண்டிபிடிக்க முடியுமா?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(a) (b) (c)

படம் 11.13

இப்பொழுது செய்த முறையை திரும்ப ஒரு முறை செய், அதுவும் வித்தியாசமான அளவுள்ள கோளங்கள் கொண்டு. அப்படியாயின் $\frac{4}{3}\pi R^3$ இன் மதிப்பை கணக்கிடு மற்றும்இந்த கோளத்தின் ஆரம் (r) ஐ கண்டுபிடி. மறுபடியும் ஒரு முறை கோளத்தால் வெளியேறிய (வழிற்தோடிய) நீரின் கன அளவானது கிட்டதட்ட இந்த மதிப்புக்கு சமமாக இருக்கும் இது நமக்கு என்ன கூறும்? வெளியேறிய நீரின் கன அளவு போல ஒன்றேயான கோளத்தின் கன அளவு என நமக்கு தெரியும். வெவ்வேறு ஆரங்களைக் கொண்ட கோளங்களால் இந்த பரிச்சோதனை திரும்ப செய், நமக்கு கிடைப்பது மாறுபடாத முடிவு, அதாவது, கோளத்தின் கன அளவு ஆரத்தினுடைய கன மடங்கு $\frac{4}{3}\pi$ க்கு சமமாகும் இது கொடுக்கும் அந்த கருத்து

ஒரு கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

அங்கே r என்பது கோளத்தின் ஆரம் ஆகும்.

பின்னால், உயர் வகுப்புகளில் இதனையும் நிரூபிக்கலாம். ஆனால் இந்த நிலையில், உண்மையென இப்பொழுது எடுத்துக்கொள்.

அப்படியானால் ஒரு கோளத்தின் பாதியானது ஒரு அரைக் கோளமாகும், ஒரு அரைக் கோளத்தின் கன அளவு என்னவாக இருக்கும் என்பதை நீ யூகம் செய்ய முடியுமா? ஆம்,

இது $\frac{4}{3}\pi r^3$ இல் $\frac{1}{2}$ ஆகும் $= \frac{2}{3}\pi r^3$

ஆகையால்,

ஒரு அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$

அங்கே r என்பது அரைக்கோளத்தின் ஆரமாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

சூத்திரங்களான இவைகளை பயன் படுத்தி விளக்க கூடிய சில உதாரணங்களை எடுத்துக்கொள்.

எடுத்துக்காட்டு 10: 11.2 செ.மீ ஆரம் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் கன அளவை கண்டுபிடி.

தீர்வு: தேவையான கன அளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2$ க.செ.மீ.

$= 5887.32$ க.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 11: 4.9 செ.மீ ஆரமுடைய ஒரு உலோக கோளம் ஒரு எரி குண்டாகும். ஒரு கன செ.மீட்டருக்கு ***7.8*** கிராம் உலோகத்தின் பொருள் அடர்த்தி (Density) யானால், எரிகுண்டின் பொருள் தினவை (Mass) கண்டுபிடி.

தீர்வு : உலோகத்தால் செய்யப்பட்ட கோளமானது ஒரு திடத்தினால் ஆன எரிகுண்டாகும் மற்றும் கன அளவு மற்றும் பொருள் அடர்த்தியின் பெருக்கல் தொகையானது அதனுடைய பொருள் தினவுக்கு சமமாகும், கோளத்தின் கன அளவை கண்டுபிடிக்க நமக்கு தேவை.

இப்பொழுது, கோளத்தின் கன அளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9$ க.செ.மீ.

$= 493$ க.செ.மீ *(கிட்டதட்ட)*

மேலும், உலோகத்தின் *1* க.செ.மீ பொருள்தினவு = ***7.8*** கிராம்

ஆதலால், எரி குண்டின் பொருள்தினவு

$= 7.8 \times 493$ கி.

$= 3845.44$ கி.

$= 3.85$ கி.கிராம் *(கிட்டதட்ட)*

எடுத்துக்காட்டு 12 : 3.5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு அரைக்கோள் வடிவ கிண்ணமாகும். இது கொள்ளும் நீரின் கன அளவு என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு: கிண்ணத்தின் கொள்ளுளவான நீரின் கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5$ க.செ.மீ.

$= 89.8$ க.செ.மீ

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.4

$\pi = \frac{22}{7}$ $\pi = \frac{22}{7}$ என நினை, (வேறாக நிர்ணயிக்கப்பட்டதை தவிர)

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஆரத்தைக் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் கன அளவை, கண்டுபிடி.

   (i) 7 செ.மீ.   (ii) 0.63 மீ.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விட்டம் கொண்ட ஒரு திடக்கோளமான பந்து வெளியேறிய நீர் எவ்வளவு இருக்கும் என கண்டுபிடி.

   (i) 28 செ.மீ.   (ii) 0.21 மீ.

3. 4.2 செ.மீ ஒரு உலோக பந்தின் விட்டமாகும். உலோகத்தின் பொருள் அடர்த்தி ஒரு க.செ.மீ க்கு 8.9 கிராம் ஆனால், பந்தின் பொருள் தினவு என்னவாக இருக்கும்?

4. சந்திரனின் விட்டமானது தோராயமாக நான்கில் ஒரு பங்கு பூமியின் விட்டமாகும். பூமியின் கன அளவானது சந்திரனின் கன அளவுக்கு பின்னத்தில் என்னவாக இருக்கும்?

5. 10.5 செ.மீ விட்டமுள்ள அரைக்கோள கிண்ணம் எவ்வளவு லிட்டர் பாலைக் கொள்ளும்.

6. 1 செ.மீ பருமனைக் கொண்ட இரும்பு தகடினால் செய்யப்பட்ட ஒரு அரைக்கோள தொட்டியாகும். 1 மீ. இதன் உள் ஆரம் ஆயின், தொட்டியை செய்ய பயன் படுத்திய இரும்பின் கன அளவை கண்டுபிடி.

7. 154 ச.செ.மீ புறப்பரப்பளவை கொண்ட ஒரு கோளத்தின் கன அளவை கண்டுபிடி.

8. ஒரு கட்டடத்தின் குவிந்தக்கூரை ஒரு அரை கோள வடிவமாகும். உள்பக்கத்திலிருந்து. ரூ. 498.96 செலவில் வெள்ளை அடிக்கப்பட்டது. ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ரூ.200 வீதம் வெள்ளை அடிக்குமாயின்,

   (i) குவிந்த கூரையின் உள் புறப்பரப்பளவு.

   (ii) குவிந்த கூரையின் உள் இருக்கும் காற்றின் கன அளவு.

   ஆகியவற்றை கண்டு பிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. 27 திட இரும்பு கோளங்களான, ஒவ்வொன்றும் ஆரம் r மற்றும் புறப்பரப்பளவு S ஐ உருக்கி S^1 புறப்பரப்பளவுள்ள ஒரு கோளத்தை உருவாக்கு.

(i) r^1 ஆரமுள்ள புதிய கோளம்

(ii) S மற்றும் S^1 இன் விகிதம்.

ஆகியவற்றை கண்டு பிடி.

10. 3.5 மி.மீ விட்டமுடைய ஒரு கோள வடிவத்தில் உள்ள ஒரு மருந்தின் மீது மூடப்பட்ட உறையாகும் (Capsule). இந்த கேப்சுலை நிரப்ப தேவையான மருந்து (க.மி.மீட்டரில்) எவ்வளவு?

11.5 தொகுப்பு

இந்தப்பாடத்தினுள், பின்வரும் கருத்துகளை நீகற்றுக் கொண்டிருப்பாய்.

1. ஒரு கூம்பின் வளைவு புறப்பரப்பளவு $=\pi r l$
2. ஒரு நேர் வட்ட கூம்பின் மொத்த பரப்பளவு $= \pi r l + \pi r^2$ அதாவது $\pi r (l + r)$
3. r ஆரமுடைய ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 4\pi r^2$
4. ஒரு அரைக்கோளத்தின் வளைவு புறப்பரப்பளவு $= 2\pi r^2$
5. ஒரு அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவு $= 3\pi r^2$
6. ஒரு கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. r ஆரத்தை உடைய ஒரு கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$
8. ஒரு அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$

(இங்கே எழுத்துக்களான l, b, h, a, r முதலியவை சூழநிலையைப் பொருத்து வழக்கமான பொருளையே குறிக்கும்)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Q3W7Z8

பாடம் 12

புள்ளியியல் (Statistics)

12.1 விவரங்களை வரைப்படங்களில் பிரதியிடுதல்.

எற்கனவே விவாதிக்கப்பட்ட அட்டவனையால் விவரங்கள் பிரிதிநிதியானது. விவரங்களான பிரதிநிதியை மற்றொரு கவனத்திற்க்கு திருப்புவோம் இப்பொழுது அதுதான் வரைப்பட பிரதிநிதியாகும். ஒரு படம் ஆயிரம் வார்த்தைகளுக்கு சமம் என்பதை நன்றாக கூறியுள்ளனர். வரைப்பட வாயிலாக காட்டியுள்ள தனிப்பட்ட விவரங்களை அதனுள் எப்பொதும் மிக நன்றாக வெவ்வேறு படுத்தலாம். உண்மையான விவரங்களை விட புரிந்துக் கொள்வதற்க்கு எளிதாக மற்றும் பிரிதிநிதியானது, இந்த பிரிவில் பிரிதிநிதியான வரைப்படத்தை பின்வருவனற்றுள் நாம் படிப்போம்.

(A) செவ்வக வரைப்படங்கள் (Bar graphs)

(B) ஒழுங்கான அகலம் மற்றும் வெவ்வேறுபடும் அகலங்கள் கொண்ட நிகழ்வெண் செவ்வகம்

(C) நிகழ்வெண் பல கோணம் (Frequency Polygons)

(A) **செவ்வக வரைப்படங்கள் (**Bar graphs**)**

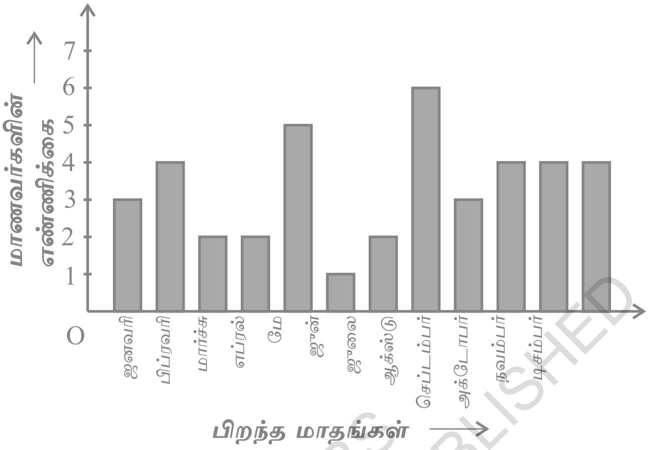
முந்தைய வகுப்புகளில், ஏற்கனவே நீ படித்துள்ள, மற்றும் அமைக்கப்பட்ட செவ்வக வரைப்படங்கள். அதிக வழக்கப்படியான அனுகதக்க வழியாக அதனை இங்கே விவாதிக்கலாம். ஒரு அச்சின் மீது (x - அச்சு என்க), சமமான இடைவெளிகளை இடையே கொண்டு, ஒரே அளவு அகலங்களை உடைய செவ்வகங்களினால் ஒரு மாறிக்கு உண் டான வெவ்வேறு விவரங்களைக் கொண்டு வரையப்படுதவதே செவ்வக வரைபடங்கள் எனப்படும்.

மற்றொரு அச்சு (Yஅச்சு என, கூறு) மீது காட்டியுள்ள படி மாறியின் மதிப்புகள் ஆகும் மற்றும் செவ்வக உயரங்கள் அந்த மாறியின் மதிப்புகளை

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

பொருந்தியது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : *9* ஆம் வகுப்பு குறிப்பிட்ட பிரிவில், அவர்களுடைய பிறந்த மாதங்களை பற்றி *40* மாணவர்களிடம் கேட்டுள்ளோம் மற்றும் இதுவரை கிடைத்த விவரங்களைக் கொண்டு பின்வரும் வரைப்படத்தை தயார் செய்யவும்.



படம் 12.1

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செவ்வக வரைப்படத்தை கவனி மற்றும் பின்வருவன கேள்விகளுக்கு விடை அளிக்கவும்.

(i) நவம்பர் மாதத்தில் பிறந்த மாணவர்கள் எவ்வளவு பேர்?

(ii) எண்ணிக்கையில் அதிகமாக மாணவர்கள் பிறந்த மாதம் எது?

தீர்வு : 'பிறந்த மாதம்' என்பது இங்கே மாறி என குறிப்பிடவும் மற்றும் 'பிறந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை' மாறியின் மதிப்பாகும்.

(i) நவம்பர் மாதத்தில் பிறந்த மாணவர்கள் *4*

(ii) ஆகஸ்ட் மாதத்தில் பிறந்த மாணவர்கள் எண்ணிக்கையில் மிக அதிகமானவர்கள்.

பின்வரும் உதாரணங்களை கருத்தில் கொண்டு செவ்வக வரைப்படங்களை அமைப்பது எப்படி என்று நினைவுக்கு கொண்டுவரவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : ரூ. *20,000* ஒரு மாதத்திற்க்கான ஒரு குடும்பத்தின் வருமானமாகும். வெவ்வேறு தலைப்புகள் கீழே ஒரு மாத த்திற்க்கு ஆகும் திட்டமிட்டப்பட்ட செலவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 12.1

தலைப்புகள் (Heads)	செலவுகள் (ஆயிரம் ரூபாயில்)
பலசரக்கு	4
வாடகை	5
குழந்தைகளின் படிப்பு	5
மருத்துவம்	2
எரிபொருள்	2
பொழுது போக்கு	1
மற்ற செலவு	1

மேலேயுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு செவ்வக வரைப்படம் வரைக.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு: பின்வரும் படிநிலைகளில் உள்ள விவரங்களுக்கு செவ்வக வரைப்படம் ஒன்று நாம் வரைய வேண்டும். ஆயிரம் ரூபாய் இரண்டாவது நிரல் அளவு என்பதை குறித்துக் கொள். ஆகையால், ரூ. 4000 என்பது பலசரக்கு செலவு எதிரில் நிற்க்கும் 4 ஆகும்..

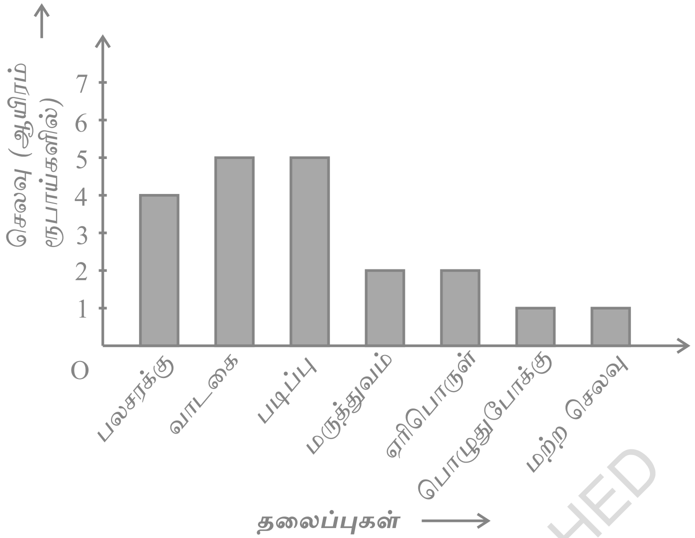
1. எந்த அளவையாவது தேர்ந்தெடுத்து கிடைக்கை அச்சு மீது தலைப்புகளை மாறியை பிரதிப்படுத்தவும். இருப்பினும், செவ்வகத்தின் அகலங்களை பற்றி நமக்கு முக்கியமில்லை, ஆனால் தெளிவுக்காக, எல்லா செவ்வகங்களின் அகலங்கள் சமமாக இருக்கும் படி எடுத்துக்கொள் மற்றும் நடுவில் இருக்கும் இடை வெளிகள் சமமாக இருக்கும் படி பராமரிக்கவும். ஒரு அலகை ஒரு தலை என பிரிதிப் படுத்தவும்.

2. செங்குத்த அச்சின் மீது செலவுக்கான (மதிப்பு) நாம் பிரிதிநிதிப் படுத்தியுள்ளோம் அதனால் ரூ. 5000 என்பது மிக அதிகமான செலவு. ரூ. 1000 அலகு 1 போல தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்.

3. முதல் தலைப்பை பிரதிநிதி படுத்துவது பலசரக்கு ஆகும். அதற்கான செவ்வகத்தின் அகலம் அலகு 1 மற்றும் உயரம் அலகு 4.

4. இதேப்போன்று, இரண்டு தொடற்ச்சியான செவ்வகத்தின் நடுவில் 1 அலகு இருக்குமாறு இடைவெளி விட்டு பிரதிநிதியிக்கு மற்றொரு தலைப்பாகும்.

படம் 12.2 இல் ஒரு செவ்வக வரைபடம் வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 12.2

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இங்கே, ஒரு கண்ணோட்டத்தில் விவரங்களுடை குணாதிசயங்களை சம்பந்தப்படுத்தி பார்ப்பதற்க்கு உனக்கு எளிதாக இருக்கும், உதாரணத்திற்க்கு, மருத்துவ செலவானது கல்விக்கு ஆகும் செலவு இரண்டு மடங்கை விட அதிகமாக இருக்கும். ஆதலால், அட்டவணை வடிவத்தை விட விவரங்களை பிரிதிநிதியிடுவது நன்றாக இருக்கும் என சில வழிகளில் இது தொண்டு செய்யும்.

செயல் பாடு 3 : செயல் முறை 1 இல் ஒரே மாதிரியான 4 குழுக்களிளும் தொடரும், தகுந்த செவ்வக வரைப்படங்களில் விவரங்களை பிரதியிடுக, வரைப்படங்களின் இடைவெளி பிரிவுகள் தொடரும் நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணை எப்படியென்று இப்பொழுது நீ பார்க்கலாம்.

(B) நிகழ்வெண் செவ்வகம்

செவ்வக வரைப்படம் போல இது பிரிநிதியிடப்பட்ட வடிவமாகும். ஆனால் தொடர் இடைவெளி பிரிவுகளில் இது பயன்படுத்தபட்டுள்ளது. இப்பொதைக்கு, ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை அட்டணை 12.2 என கருதுக ஒரு வகுப்பில் 36 மாணவர்களின் எடையை பிரிதிநிதிப் படுத்தும்.

அட்டவணை 12.2

எடைகள் (கி.கி.இல்)	**மாணவர்களின் எண்ணிக்கை**
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
மொத்தம்	**36**

பின்வருமாறுள்ள வரைபட்டத்தில் மேல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை இது பிரதிநிதிப்படுத்தும்.

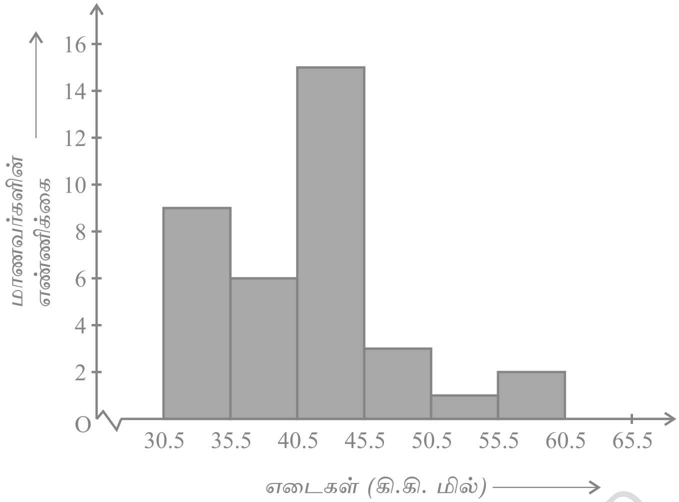
(i) ஒரு தகுந்த அலகை கொண்டு X அச்சின் மீது எடைகளை பிரதிநிதிப்படுத்து. 5 கி.கி = 1 செ.மீ அளவு என தேர்ந்தெடு. X அச்சின் மீது முதல் இடைவெளியானது பூச்சியத்தில் இருந்து அல்லாமல் 3.05 லிருந்து தொடங்குவதால், அச்சின் மீது உடைப்பட்டு அல்லது வளைவுகளால் குறிக்கப்பட்டு இருக்கும்.

(ii) தகுந்த அளவைக் கொண்டு செங்குத்த அச்சின் மீது நிகழ் வெண் மாணவர்கள் எண்ணிக்கையை பிரதிநிதியாக்கும். மிக அதிக நிகழ்வெண் 15 ஆகும் அப்படியெனில், மிக அதிகமான நிகழ்வெண்ணை சரிப்படுத்தி அளவை நாம் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(iii) பிரிவு அளவுக்கு சமமாக அகலத்தை (அல்லது செவ்வக பட்டை) கொண்ட செவ்வகங்கள் இப்பொழுது நாம் வரையவேண்டும். பிரிவு இடைவெளிகளை சார்ந்த நிகழ்வெண்கள் ஒத்த நீளங்கள் மற்றும் பிரிவு அளவின் படி அகலத்தைக் கொண்ட (செவ்வக பட்டைகள்) செவ்வகங்களை இப்பொழுது வரையலாம்.

(iv) இவ்வழியில், படம் 12.3 இல் காட்டியுள்ளப்படி வரைப்படம் ஒன்று கிடைக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 12.3

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

தொடர்ச்சியான செவ்வகங்களின் நடுவில் இடைவெளிகள் இல்லாமல் அங்கே இருப்பதை கவனி, கன வரைப்படங்கள் போல் தோன்றும் இந்த முடிவான வரைப்படங்கள். இது ஒரு செவ்வக நிகழ்வெண் என அழைப்போம், தொடர்பிரிவுகளுடைய பரவல் நிகழ்வெண் ஒரு குழுவுள்ளதாக பிரிதிநிதியாக்கப்பட்ட வரைப்படமாகும். அதனோடு ஒரு செவ்வக வரைப்படம் அல்லாமல், இதன் அமைப்பினுள் முக்கியமான பங்கு வகிக்கும் செவ்வகத்தின் அகலங்கள்.

இவ்வாறு செய்கையில் செவ்வகத்தின பரப்பளவுகள் நிகழ்வெண்களை ஒத்த விகிதத்திற்க்கு நேராக நிற்க்கும். எப்படியிருப்பினும், அதன் பிறகு செவ்வகத்தின் அகலங்கள் சமமாக இருக்கும், நிகழ்வெண்கள் விகிதத்தின்படி செவ்வகத்தின் நீளங்கள் ஆகும். அது ஏனெனில், (iii) கூறியதைப்போல் நாம் நீளத்தை கொண்டுள்ளோம்.

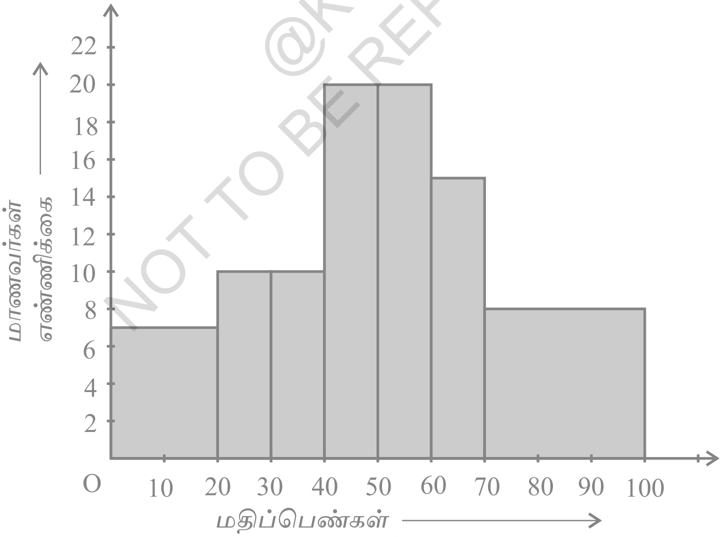
இப்பொழுது மேலே ஒன்றிலிருந்து வித்தியாசமான ஒரு சூழ்நிலை எனகருது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :100 மதிப்பெண்கள் உள்ள ஒரு கணித தேர்வில் இரண்டு பிரிவுகளுடை மாணவர்களின் செயல்களை அராய வேண்டுமென ஒரு ஆசிரியர்க்கு தேவைப்பட்டது. அவர்ளுடைய செயல்களை பார்க்கவும். சில மாணவர்கள் 20 மதிப்பெண்களுக்கு குறைவாகவும் மற்றும் சில மாணவர்கள் 70 மதிப்பெண்கள் அல்லது அதற்க்கும் மேல் என்பதை அவள் கண்டுபிடித்தாள். 0-20, 20-30, ... 60-70, 70-100 வருமாறு வெவ்வேறு அளவுகளில் இடைவெளியுள்ள குழுவுகளாக இருக்க அவள் முடிவு செய்தாள். கீழ்வருவன அட்டவனையை அவள் உருவாக்கினாள்.

அட்டவணை 12.3

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70 க்கு அதிகம்	8
மொத்தம்	**90**

படம் 12.4 இல் கட்டியுள்ளப்படிப் போல் ஒரு மாணவனால் தயாரிக்கப்பட்ட இந்த அட்டவணை ஒரு செவ்வக நிகழ்வெண் ஆகும்.



படம் 12.4

வரைப்படத்தின் பிரிதிநிதியினை ஜாக்கிரதையாக பரீட்ச்சிக்கவும். விவரங்களை அது சரியாக பிரிதிநிதியாக்குமா என நீ யோசி? கிடையாது. படம் ஒன்று தவறாக கொடுக்கும் வரைபடமாகும். முன்னதாக நாம் குறிப்பிட்டதுப் போல், ஒரு செவ்வக நிகழ்வெண்ணின் நிகழ்வெண்கள்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இதுப்போன்ற பிரச்சனைகள் எழாது, ஏன்எனில் எல்லா செவ்வகங்களின் அகலம் சமமாக இருக்கும். ஆனால் இங்கே, செவ்வகத்தின் அகலங்கள் வெவ்வேறுபடும். சரியான படத்தை இந்த செவ்வக நிகழ்வெண் மேல் கொடுக்காது. உதாரணத்திற்க்கு, 60-70 அதைவிட 70-100 இடைவெளியில்அதிகமான நிகழ்வெண்ணை காட்டும். நிகழ்வு அதுவானது அல்ல.

அகையால், நிகழ்வெண்கள் விகிதப்படி அப்படியானால் மறுப்படியும் பரப்பளவுகளுக்கான செவ்வகத்தின் நீளங்களை இப்பொழுதே மாற்றங்கள் செய்வது நமக்கு தேவையான ஒன்றாகும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்வரும் படி நிலைகளின் பின்பற்றவும்.

1. மிககுறைந்தபிரிவுஅளவுகளைக்கொண்டபிரிவுஇடைவெளியுள்ளதை தேர்ந்தெடுக்கவும். மேலயுள்ள எடுத்துக்காட்டில், மிக்குறைந்த இடைவெளியின் அளவு 10.
2. இடைவெளி அளவு 10 விகிதப்படி மாற்றங்களுக்கு பிறகு செவ்வகங்களின் நீளமாகும்.

   எடுத்துக்காட்டாக, பிரிவின் அளவு 20 இருக்குமாயின், செவ்வகத்தின் நீளம் 7 ஆகும். பிரிவின் அளவு 10 ஆகும்போது, செவ்வகத்தின் நீளம் $\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$ ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

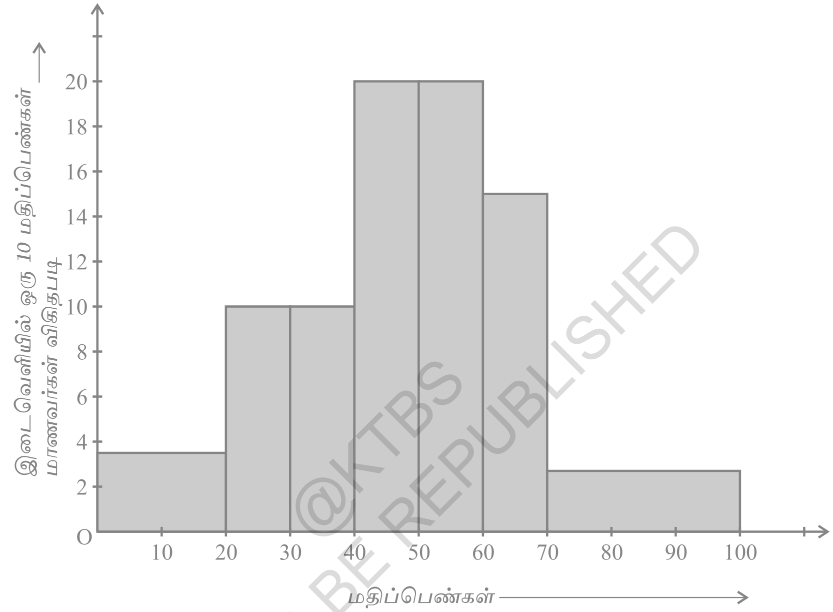
ஒரேமாதிரியான, வகையில் முன்னுக்கு போல, பினவரும் அட்டவணை கிடைக்கும்.

அட்டவணை 12.4

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	பிரிவுகளின் அகலம்	செவ்வகத்தின் நீளம்
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 - 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

அப்படியானால், ஒவ்வொரு நிகழ்விலும், மதிப்பெண்களின் இடைவெளி 10 ஆயின் நீளத்தை கணக்கிடலாம், ''இடைவெளி 10 மதிப்பெண்கள் வீதப்படி மாணவர்களுக்கு இவைகளை நீளம் என்று அழைக்கலாம்.''

ஆகையால், படம் 12.5 கொடுக்கப்பட்ட அகலம் வெவ்வேறுபடும் எனில் இது சரியான செவ்வக நிகழ்வெண் ஆகும்.

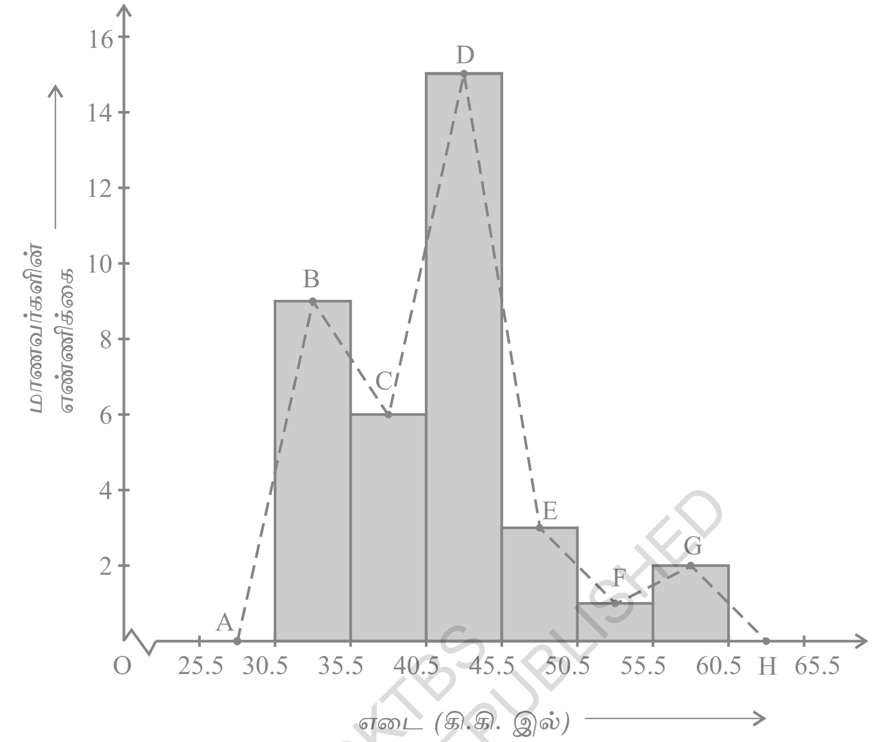


படம் 12.5

(C) நிகழ்வெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

விவரங்கள் மற்றும் நிகழ்வெண்கள் பிரதிநிதியிடும் வழியில் பார்ப்பது இன்னொன்றாகும் இது ஒரு பலகோணம் ஆகும். இது பார்பதற்க்கு என்னவாக இருக்கும். படம் 12.3 இல் பிரதிநிதியிடுவது செ வ்வகம் நிகழ்வெண் என கருது. இந்த செவ்வக நிகழ்வெண்ணின் அடு த்தடுத்து செவ்வகங்களின் மேல் பக்கங்களில் உள்ள கோட்டு துண்டு களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கவும். BCDEFG மற்றும் G இவைகள் மையப்புள்ளிகளாகும், துண்டு கோடுகளால் இணைக்கும்போது, BCDEFG படம் நமக்கு கிடைக்கும் (படம் 12.6ஐ பார்) பலகோணத்தை பூர்த்திசெய்ய வேண்டுமெனில், 30.5-35.5 முன்னால் நிகழ்வெண் பூஜ்யத்துடன் கூடிய ஒரு இடைவெளி பிரிவு இருக்கும் என கருது மற்றும் 55.5-60.5 ஒன்றுக்கு பின்னால், A மற்றும் H முறையே அதனுடைய மையப்புள்ளிகளாகும், படம் 12.3 இல் காட்டிய விவரங்களை ஒத்த நிகழ்வெண் பலகோணம் ABCDEFGH ஆகும் இதனை படம் 12.6 இல் நாம் காட்டியுள்ளோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 12.6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இருப்பினும், மிக குறைந்த பிரிவுகளில் முன்னுக்குபோன பிரிவுகள் அங்கே வெளிப்படுத்தில்லை மற்றும் மிக உயர்ந்த பிரிவுகளில் பின்னுக்கு போன பிரிவுகள் அங்கே வெளிப்படுவதில்லை, முதல் பிரிவிற்கு முன்னும் மற்றும் கடைசி பிரிவிற்கு பிறகுமாக இரு பிரிவுகளை, நிகழ்வெண்கள் பூச்சியமாகக் கொண்டு சேர்ப்பதினால் உறுவாகும் நிகழ்வெண்பலகோணத்தின் பரப்பரவை, நிகழ்வெண் செவ்வகத்தின் பரப்பிற்கு சமமாகிறது. (குறிப்பு: சர்வசம முக்கோணங்களின் தன்மைகளை பயன் படுத்தவும்).

இப்பொழுது, எழும் கேள்விக்கு: முதல் பிரிவில் முன்னுக்குபோல பிரிவுகளில் அங்கே பிரிவுகள் இல்லையெனில் பலகோணத்தை பூர்த்தி செய்வது எப்படி? சூழ்நிலை அதுப்போன்றது என கருதவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : *மதிப்பெண்களை கருத்தில் கொண்டு, 100 மதிப்பெண்களுக்கு ஒரு தேர்வுக்கான வகுப்பில் 51 மாணவர்களுக்கு கிடைத்த மதிப்பெண்கள். 12.5 அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.*

அட்டவைண 12.5

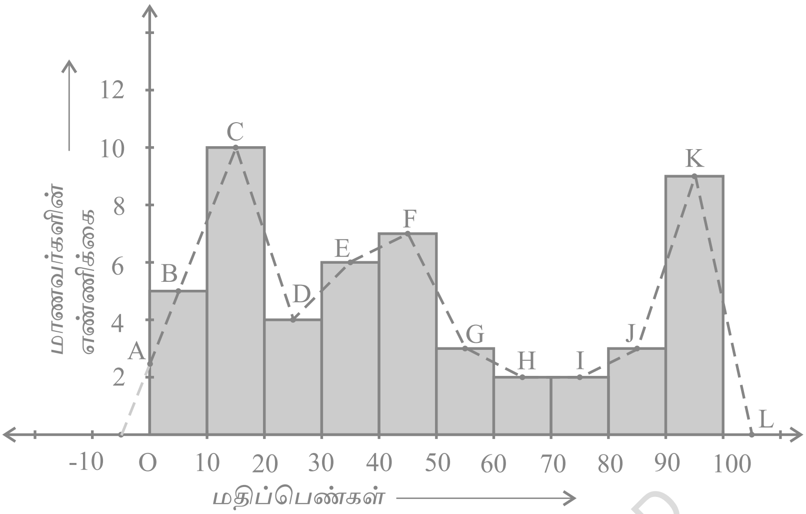
மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
மொத்தம்	**51**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இந்த நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணையில் ஒத்த நிகழ்வெண் பலகோணம் ஒன்று வரைக.

தீர்வு : இந்த விவரங்களுக்கு முதலில் ஒரு செவ்வக நிகழ்வெண்ணை வரைக B, C, D, E, F, G, H, I, J, K முறையே செவ்வகங்களைப் போலுள்ள மேலிருக்கும் மையப்புள்ளிகளை குறிக்கவும். இங்கே 0-10, என்பது முதல் பிரிவு ஆகையால் 0-10 முன்னுக்கு போல பிரிவுகளை கண்டு பிடிக்கவும். நாம் எதிர்மறை திசையில் படுக்கிடக்கை அச்சில் நீளப்படுத்துவும் மற்றும் (-10),-0 இடைவெளி பிரிவுக்கு மையப்புள்ளிகளை கண்டுபிடி. முதல் முடிவுப்புள்ளி, அதாவது, படுக்கை அச்சில் மேலேயுள்ள எதிற்மறை திசையில் நிகழ்வெண் பூஜ்யமாக கொண்ட மையப்புள்ளியை B இணைக்கும்.

குறிக்கப்பட்ட புள்ளி ஆனது செங்குத்த அச்சு இந்த துண்டு கோடுகளை சந்திக்கும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் கடைசி பிரிவில் பின்னுக்கு வருவது போல பிரிவில் உள்ள மையப்புள்ளியை `L' எனவாகும். ஆகவே OABCDEFGHIJKL என்பது ஒரு நிகழ்வெண் பலகோணம் அதை படம் 12.7 இல் காட்டியுள்ளோம்.



படம் 12.7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிகழ்வெண் செவ்வகங்களை வரையாமல் நிகழ்வெண் பல கோண த்தையும் வரையலாம். இதற்க்காக, விவரங்களை பயன் படுத்தி இடைவெளி பிரிவுகளான மையப்புள்ளிகள் நமக்கு தேவை. இடைவெளி பிரிவுகளான மையப்புள்ளிகளை மதிப்பெண் பிரிவுகள் என அழைபேம்.

ஒரு இடைவெளி பிரிவுகளில் உள்ள மதிப்பெண் பிரிவுகளை கண்டுபிடி, ஒரு பிரிவிலுள்ள மேல் அளவு (Limit) மற்றும் கீழ் அளவு இரண்டையும் கூட்டி மற்றும் 2 ஆல் வகுக்கவும்.

அப்படியெனில்

$$\text{மதிப்பெண் பிரிவுகள்} = \frac{\text{மேல் அளவு} + \text{கீழ் அளவு}}{2}$$

உதாரணமாக இதை கருதவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு நகரத்தில், பின் வருவன அட்டவணையில். கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் விலை வாசிக்கான அறிகுறியை படித்து செய்யப்பட்ட கவனிப்புகள் ஒரு வாரத்திற்க்காகும்.

அட்டவணை 12.6

விலை வாசியின் அட்டவணை	வாரங்களின் எண்ணிக்கை
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
மொத்தம்	**52**

மேலேயுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் பல கோணம் ஒன்று வரைக (நிகழ்வெண் செவ்வகம் அமைக்காமல்)

தீர்வு : ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரையாமல் தேவையான நிகழ்வெண் பல கோணத்தை நாம் வரையலாம். மேலே கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளில் மதிப்பெண்களை கண்டுபிடிப்போம், அதாவது 140-150, 150-160,..............

140150 குள் உள்ள பெரிய அளவு = 150, மற்றும் குறைந்த அளவு = 140

ஆகையால் பிரிவின் மதிப்பெண் = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

இதைதொடர்ந்து, மற்றபிரிவுகளின்மதிப்பெண்களைகண்டுபிடிக்கவும்.

ஆகையால், பினவரும் அட்டவணையில் காட்டியுள்ளப்படி ஒரு புதிய அட்டவணை கிடைத்தது.

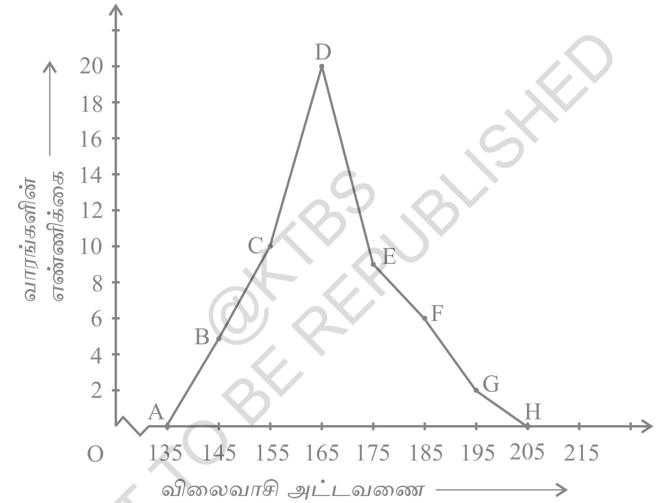
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அட்டவணை 12.7

பிரிவுகள்	பிரிவின் மதிப்பெண்	நிகழ்வெண்
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
மொத்தம்		**52**

கிடையான அச்சில் நீள வட்டத்தில் பிரிவுகளின் மதிப்பெண் குறியிடும் போது ஒரு நிகழ்வெண் பலகோணத்தை இப்பொழுது நாம் வரையலாம். செங்குத்த அச்சில் நிகழ்வெண்களும் மற்றும் மேலும் துண்டுக கோடு களான B *(145,5)*, C *(155,10)*, D *(165,20)*, E *(175,9)*, F *(185,6)* மற்றும் G *(195,2)* இந்த புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

நிகழ்வெண் பூஜ்ஜியத்தோடு (மிக குறைந்த பிரிவான 140-150)க்கு முன்னால்) 130-140 பிரிவிற்கான மதிப்பெண் இன் ஒத்த புள்ளிகளை குறியிடுவதை நாம் மறக்ககூடாது. அதாவது A *(135,0)* மற்றும் G *(195,2)* விற்க்கு பின்னால் உடனடியாக உண்டாகும் புள்ளி H *(205,0)* ஆகும். ஆகையால், (படம் 12.8 ஐ பார்) ABCDEFGH என்பது ஒரு முடிவான நிகழ்வெண் பலகோணமாகும்.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 12.8

தொடர்ச்சியாகவும் மற்றும் மிகப்பெரியதாக இருக்கும் விவரங்களை குறிக்க நிகழ்வெண் பலகோணம் பயன்படுகிறது. ஒரே மாதிரியான இயற்கைக்குணமான விவரங்களைக் கொண்ட இரண்டு வித்தியாசமான கனங்களை ஒப்பிடும்போது இது மிகபயனுள்ளதாகும், எடுத்துக்காட் டாக, ஒரே மாதிரியான வகுப்பில் இரண்டு வித்தியாசமான பிரிவுகளின் செயலாற்றலை குறிக்கலாம்.

பயிற்சி 12.1

1. உலகம் முழுவதும் பரவியுள்ள 15-44 (வருடங்களில்) வயதுகளில் இடையே இருக்கும் பெண்களின் நடுவில் உள்ள இறப்பு மற்றும் நோய்வாய்க்கான காரணங்கள் ஒரு சங்கம் ஆராய்ந்து, பின் வரும் எண்கள் (% இல் கண்டது)

வ.எ.	காரணங்கள்	பெண்களின் மரணம் விகிதம் (%)
1	இனவிருத்தி உடல்நிலை.	31.8
2	நரம்பியல் மனோ நிலை	25.4
3	காயங்கள்	12.4
4	இருதய இரத்த ஓட்டத்தின் நிலை	43
5	சுவாச சம்பந்தமான நிலை	4.1
6	மற்ற காரணங்களுக்கு	22.0

(i) மேலேயுள்ள கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை வரைப்படமாக பிரதி இடு.

(ii) உலகம் முழுவதும் பரவியுள்ள இறப்பு மற்றும் பெண்களின் உடல் நலமின்மை பெரும் காரணம் என்பது எந்த சூழ்நிலையில்?

(iii) மேற்கூறிய (ii) ஆம் கேள்வியில் உள்ள பெருங்காரணமானது. அவ்வாறு அமைந்ததற்கு முக்கியபங்கு வகிக்கும் ஏதேனும் இரண்டு காரணிகளை ஆசிரியர் உதவியைக் கொண்டு கண்டுபிடிக்க முயற்சி செய்.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இந்திய பொது நல ஸ்தாபனத்தில் வித்தியாசமான பிரிவுகளில் ஒரு ஆயிரம் சிறுவர்களுக்கு (10க்கு அருகாமையில்) சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை மீதிருக்கும் விவரங்கள் பின்வருமாறு.

பிரிவுகள்	ஒரு ஆயிரம் சிறுவர்களுக்கு பெண்களின் எண்ணிக்கை
ஷெடில்டு சாதி (SC)	940
ஷெடில்டு டிரைபு (ST)	970
(SC/ST) அல்லாத	920
பின் தங்கிய மாவட்டங்கள்	950
பின் தங்காத மாவட்டங்கள்	920
கிராமம்	930
நகரம்	910

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) ஒரு செவ்வக வரைப்படம் வழியே மேலேயுள்ள தகவல் பிரதிநிதியிடவும்.

(ii) ஒரு வரைப்படத்திலிருத்து சேரும் முடிவுகள் என்ன என்பதை வகுப்பு அறையில் விவாதிக்கவும்.

3. ஒரு மாநில சட்டசபை தேர்தலில் வெளிவரும் வாக்குகளின் எண்ணிக்கையான வெவ்வேறு அரசியல் கட்ச்சிகள் வெற்றி அடைந்த இடங்களை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

அரசியல் கட்ச்சிகள்	A	B	C	D	E	F
வென்ற இடங்கள்	75	35	37	29	10	37

(i) பிரதிநிதியிடப்பட்ட ஓட்டு எண்ணிக்கையின் முடிவுகளை ஒரு செவ்வக வரைப்படமாக வரையவும்.

(ii) மிக அதிகமான இடங்களை எண்ணிக்கையில் வெற்றி அடைந்த அரசியல் கட்சி யாது?

4. ஒரு மில்லி மீட்டருக்கு சரியாக அளக்கப்பட்ட ஒரு செடியின் 40 இலைகளின் நீளம், மற்றும் கீழ்வரும் அட்டவனையில் பிரதியிதி படுத்திய விவரங்களைப் பெற்றது.

நீளம் (மி.மீ)	இலைகளின் எண்ணிக்கை
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை பிரதிநிதியிட்டு ஒரு நிக்ழ்வெண் செவ்வகம் வரைக. (குறிப்பு: இடைவெளி பிரிவுகள் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்படி முதலில் செய்யவும்)

(ii) கொடுத்த விவரங்களை தகுந்தபடி பிரதியிதியிட வேறு வரைப் படம் ஏதேனும் உள்ளதா?

(iii) 153. மி.மி நீள முள்ள இலைகளே மிக அதிகமான எண்ணிக்கையில் உள்ளன என்ற முடிவு சரியானதா? ஏன்?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. 400 நியான் விளக்குகளின் வாழ்நாள் பின்வருவன அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வாழ்நாள் (மணிகளில்)	விளக்குகளின் எண்ணிக்கை
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தின் உதவியைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட தகவலை பிரதியிடவும்.

(ii) 700 மணிகளுக்கும் அதிகமாக வாழ்க்கை காலம் உள்ள விளக்குகள் எத்தனை?

6. அவர்களுக்கு கிடைத்த மதிப்பெண்களுக்கு இணங்க இரண்டு பிரிவு மாணவர்களால் கொடுக்கப்பட்ட பரவலை பின் வரும் அட்டவணையில் உள்ளது.

பிரிவு – A		பிரிவு – B	
மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

ஒரே வரைப்படத்தின் மீது இரண்டு பிரிவுகளான மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைஇரண்டு நிகழ்வெண் பலகோணத்தில் பிரதிநிதிபடுத்தவும்.

இரண்டு பிரிவுகளின் செயல்களை இரண்டு பலகோணத்திலிருந்து ஒப்பிடவும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கிரிக்கெட் பந்தயத்தில் முதல் 600 பந்துகளின் எண்ணிக்கையில் A மற்றும் B ஆன இரண்டு குழுவின் ஓட்டங்களுக்காக எடுத்த மதிப்பெண்கள்:

பந்துகளின் எண்ணிக்கை	குழு A	குழு B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

ஒரே வரைபடத்தில், மேல் உள்ள இரண்டு குழுக்களின் விவரங்களை நிகழ்வெண் பலகோணங்களில் பிரதிநிதி படுத்தவும். (குறிப்பு: தொடர்ச்சியான இடைவெளி பிரிவுகளை முதலில் செய்யவும்)

8. பின்வருமாறு நிருவியுள்ள ஒரு பூங்காவில் விளையாடும் வெவ்வேறு குழுக்கள் குழைந்தைகளின் எண்ணிக்கையானது தற்செயலான ஒரு ஆராய்ச்சியாகும்.

வயது (வருடங்களில்)	குழந்தைகளின் எண்ணக்கை
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

மேலேயுள்ள விவரங்களுக்கு பிரிதிநிதியளிக்கும்படி ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரைக.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. ஒரு உள்ளூர் தொலைபேசி விவரங்களடங்கிய புத்தகதிலிருந்து தற்செயலாக தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட *100* குடும்பங்களின் பெயர்களாகும்.

எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை	**குடும்ப பெயர்களின் எண்ணிக்கை**
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) கொடுக்கப்பட்ட தகவலை விவரமாக விளக்கி ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரைக.

(ii) குடும்ப பெயர்கள் மிக அதிகமான எண்ணிக்கையில் உள்ள இடைவெளி பிரிவினை எழுதவும்.

*12.2.*தொகுப்பு

இந்தப்பாடத்தில், பின்வரும் குறிப்புகளை நீங்கள் படித்திருப்பீர்கள்.

1. செவ்வக வரைப்படம், நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் உருவாகும் வரைப்படத்தின் விவரங்களை அறிமுகப் படுத்துவது எப்படி என்பது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பிற்சேர்க்கை : 2

கணிதமாதிரிக்கு முன்னுரை

A2.1 முன்னுரை

தொடக்க வகுப்புகளிலிருந்து நீங்கள் உங்களைச் சுற்றியுள்ள நடைமுறை பிரச்சனைகளை தீர்த்து வந்துளிர்கள். எடுத்து காட்டாக தனி வட்டியினை அதற்குரிய சூத்திரத்தைக் கொண்டு அதிக கணக்குகளை தீர்த்து உள்ளீர்கள். அசல், வட்டிவீதம் மற்றும் காலம் போன்ற வட்டிக்கு தொடர்புடைய மூன்று அளவுகளை மற்றும் வட்டிவீதம் இதற்குரிய தொடர்புடைய சூத்திரம். இந்த சூத்திரம் கணித மாதிரிக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு ஆகும். கணிதமாதிரி என்பது நடைமுறை சூழ்நிலையில் உபயோகப்படுத்தப்படும் தொடர்பே ஆகும்.

© TNTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கணித மாதிரிகள் நடைமுறை வாழ்க்கை சூழ்நிலைகளை தீர்க்க உதவுகின்றன எடுத்துக்காட்டாக.

- செயற்கை கோள் ஏவுதல்
- பருவகாற்றுகள் வருவதை முன் கூட்டியே கூறுதல்.
- வாகனங்களினால் உண்டாகும் மாசுப்பாட்டை குறைத்தல்.
- பெரியநகரங்களில் போக்குவரத்து நெரிசலை தவிர்த்தல்.

இந்தப்பாடத்தில் கணிதமாதிரியை அமைக்கும் வழிகளைப்பற்றி அறிமுகப்படுத்தலாம். இது கணிதமாதிரி எனப்படும். கணித மாதிரியில் உண்மையான ஒரு பிரச்சனையை எடுத்துக்கொண்டு அதனை சமமான கணித கணக்குகளாக மாற்றலாம். கணக்குகளை தீர்த்து அதன் தீர்வினை நடைமுறை பிரச்சனையுடன் ஒப்பிட்டு பார்க்கலாம். பின் உண்மையான

பிரச்சனையுடன் நாம் கண்ட தீர்வு எவ்வளவு தூரம் பொருந்துகிறது என்பதையும் பார்க்கலாம் ஆகவே கணித மாதிரியில் உள்ள நிலைகளானவை உருவாக்கம், தீர்வு விளக்கம் மற்றும் சரிபார்த்தல்.

பிரிவு A2.2-வில் உள்ள வழி கணக்குகளை தீர்க்கும் வழிமுறைகளை கொண்டு நாம் இந்த பகுதியை தொடரலாம். நீ முந்தைய வகுப்புகளின் தீர்த்த வழிகணக்குகளை போன்ற வழிகணக்குகளை இங்கு நாம் பார்க்கலாம். வழிகணக்குகளை தீர்க்க பயன்படுத்திய வழிகளில் சில கணித மாதிரிகளிலும் உபயோகப்படுவதையும் காணலாம்.

அடுதப்பகுதியில் அதாவது பிரிவு A2.3யில் சில எளிய மாதிரிகளை பார்க்கலாம் பிரிவு A2.4-யில் மாதிரிகளை வழிமுறைகள் அதன் பயன்கள் மற்றும் அதன் சில குறைபாடுகளையும் காணலாம்.

A2.2 வழிக்கணக்குகளை மறுமார்வை இடுதல்

இந்த பிரிவில் நீ முந்தைய வகுப்புகளில் தீர்த்த சில கணக்குகளை போன்ற வழி கணக்குகளைப் பார்ப்போம் நாம் நேர்மாறல் கணக்கில் இருந்து தொடரலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 1: *நான் எனது காரில் 48 லிட்டர் பெட்ரோலில் 432 கிலோமீட்டர் தூரம் பயணம் செய்வேன் 180 கி.மீ தூரம் செல்ல எனக்கு எவ்வளவு பெட்ரோல் தேவைப்படும்.*

தீர்வு: இந்த கணக்கை தீர்ப்பதில் உள்ள வழிகளை பட்டியல் இடலாம்.

படி 1: உருவாக்கம் : அதிக தூரம் செல்ல வெண்டும் ஆனால் அதிக பெட்ரோல் தேவைப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது நமக்கு தேவையான பெட்ரோலும் நாம் கடந்து செல்லும் தூரமும் நேர் விகிதத்தில் உள்ளன.

432 கி.மீ. தூரம் பயணம் செய்ய தேவைப்புடம் பெட்ரோல் = 48 லி

180 கி.மீ. தூரம் பயணம் செய்ய தேவைப்படும் பெட்ரோல் = ?

கணித விளக்கம் : x = கடந்ததூரம்

y = தேவைப்படும் பெட்ரோல்

ஆகவே y ஆனது x உடன் நேர் விகித த்தில் உள்ளது.

ஆகவே, $y = kx$, k ஒரு மாறிலி

48 லிட்டர் பெட்ரோலில் நான் 432 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்வேன்

ஆகவே, $y = 48,\ x = 432$

ஆகவே, $k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{48}{432} = \dfrac{1}{9}$

எனில், $y = kx$

என்பதால், $y = \dfrac{1}{9}x$ .....(1)

சமன்பாடு 1 அல்லது சூத்திரமானது தேவைப்படும் பெட்ரோல் மற்றும் கடந்த தூரத்திற்கு இடையே உள்ள தொடர்பை கூறுகிறது.

படி 2 : தீர்த்தல் : 180 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய தேவைப்படும் பெட்ரோல் அளவை கண்டுபிடிக்க வேண்டும். $x = 180$ எனில், y-ன் மதிப்பை காண வேண்டும் $x = 180$ என 1-ல் பிரதியிட நமக்கு

$y = \dfrac{180}{9} = 20$ என கிடைக்கும்.

படி 3: விளக்கம் : $y = 20$ என்பதன் பொருள் 180 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய 20 லிட்டர் பெட்ரோல் தேவைப்படுகிறது.

சூத்திரம் (1) ஐ எல்லா சூழ்நிலைகளிலும் உன்னால் உபயோகிக்க முடியாது என உனக்குத் தோன்றுகிறதா? எடுத்துக்காட்டாக 432 கி.மீ என்பது மலை பிரதேசத்திலும் 180 கி.மீ என்பது சம தளத்தில் என கொள்வோம். முதல் வழியில் பெட்ரோலை கார் அதிக அளவிலும் இரண்டாவது வழியில் பெட்ரோலை கார் குறைந்த அளவிலும் எடுத்துக் கொள்ளும். ஆகவே, சூத்திரமானது இரண்டு வழிகளும் ஒரே வழி என இருந்தால் மட்டுமே பெட்ரோல் எடுத்து கொள்ளும் விகிதம் சமம் என்றால் மட்டுமே இது பொருந்தும் அல்லது விதிகளில் வேறுபாடு இருந்தால், காருக்கு இரண்டாவது வழியில் பெட்ரோல் தேவைப்படும் அளவு மிகவும் குறைவாக இருக்கும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இரண்டு வழிகளும் ஒரே மாதிரி இருந்தால் மட்டுமே தேவைபடும் பெட்ரோலின் அளவும், கடந்த தூரமும் நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் இதனை, கணக்கினைத்த தீர்க்கும் பொழுது நாம் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: *கதிர் என்பவன் ஒரு வருடத்தில் 8% தனிவட்டி வீதம் ₹ 15,000 ஐ முதலூடு செய்தான். முதலீட்டை திரும்ப பெறும் சமயம் அவன் துணி துவைக்கும் எந்திரம் வாங்க நினைத்தான். அதன் விலையானது ₹ 19,000. அவன் எத்தனை காலத்திற்கு (வருடத்திற்கு) ₹ 15000 ஐ முதலீடு செய்தால், அவனுக்கு துணி துவைக்கும் எந்திரம் வாங்க தேவையான பணம் கிடைக்கும்.*

தீர்வு படி 1: கணக்கினை உருவாக்குதல் : இங்கு, நமக்கு அசல் மற்றும் வட்டிவீதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ₹15,000 உடன் கிடைக்கும் வட்டியும் சேர்த்து சுதிர் துணி துவைக்கும் எந்திரம் வாங்க நினைத்தான். நாம் வருடங்களிண் எண்ணிக்கையை கணக்கிட வேண்டும்.

கணிதவிளக்கம் : தனிவட்டியின் சூத்திரம் $I = \frac{Pnr}{100}$

இங்கு p = அசல்

n = வருடங்களின் எண்ணிக்கை

r = % வட்டிவீதம்

I = கிடைக்கும் வட்டி

இங்கு அசல் = ₹15,000

துணிதுவைக்கும் வாங்க சுதிருக்கு தேவையான தொகை = ₹ 19,000

ஆகவே, அவனுக்கு கிடைக்க வேண்டிய வட்டி = ₹(19000 – 15000)

= ₹ 4,000

₹15,000 முதலீடு செய்யப்பட்ட வருடங்களின் எண்ணக்கை = n

₹ 15,000 க்கு n வருடங்களுக்கு 8% வட்டிவீத் கிடைக்கும் வட்டி = I

ஆகவே, $I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆகவே, I = 1200n

₹ 15000 ஐ 8% வட்டிவீதம் முதலீடு செய்யப்பட்டால், இது வட்டிவீதத் திற்கும் வருடங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள தொடர்பு ஆகும்.

கிடைக்கும் வட்டி ₹ 4000எனில் நாம் காலத்தினை கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

I = 4000 என (1) - ல் பிரதியிட்டால்

$$4000 = 1200n \qquad ......(1)$$

படி 2: *கணக்கின் தீர்வு : சமன் பாடு (2) ஐ தீர்த்தால்*

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3} \qquad ......2)$$

படி 3: விளக்கம் $n = 3\frac{1}{3}$ மற்றும் ஒரு வருடத்தில் 3-ல் ஒரு பங்கு என்பது 4 மாதங்கள். மேலே கூறியுள்ள உதாரணத்தில் நீங்கள் வீதம் கொண்ட ஊகங்களை கவனித்தீர்களா? நாம் வட்டி கணக்கிடும் முழு காலத்திற்கு வட்டி மாறாமல் இருக்கும் என்று நாம் கொள்ள இல்லாவிடில் $I = \frac{Pnr}{100}$ என்ற சூத்திரம் பொருந்தாது அதேபோல் துணிதுவைக்கும் எந்திரத்தின் விலையும் சுதிர் வாங்கும் சமயம் வரை ஏறாமல் இருக்க வேண்டும் என நாம் கொள்ளவேண்டும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 3: ஆற்றங்கரையிலுள்ள இரண்டு ஊர்ளுக்கு இடையே மேல்நோக்கி செல்லும் பொழுது மோட்டார்படகு 6 மணி நேரத்தில் கடக்கிறது கீழ்நோக்கி வரும் பொழுது 5 மணி நேரத்தில் கடக்கிறது. ஆற்றின் வேகம் 2 கி.மீ/மணி (மணிக்கு 2 கி. மீ) எனில் நிலையான நீரில் படகின் வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : படி 1 : உருவாக்கம்: அற்றின் வேகமும், இரண்டு ஊர்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை கடக்க மோட்டார்படகு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமும் நமக்குத் தெரியும். நிலையான நீரில் மோட்டர்படகின் வேத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

கணித விளக்கம்: படகின் வேகத்தை x எனவும் கடக்க எடுத்து கொள்ளும் நேரத்தை t எனவும் கடந்த தூரத்தை y எனவும் கொண்டால்,

$$y = tx \qquad ......(1)$$

d என்பது இரண்டு இடங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

மேல் நோக்கி செல்லும் பொழுது, படகின் உண்மையான வேகம்

= படகின் வேகம் – ஆற்றின் வேகம்

ஏனெனில் படகானது ஆற்றின் போக்கிற்கு எதிராகச் செல்கிறது ஆகவே மேல்நோக்கி செல்லும் பொழுது படகின் வேகம் $(x-2)$ கி.மீ/1 மணி.

மேல்நோக்கி செல்லும் பொழுது இரண்டு ஊர்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 6 மணி நேரம். ஆகவே சமன்பாடு (1)-ன் படி

$d = 6(x-2)$ .....(2)

படகு கீழ்நோக்கி செல்லும் பொழுது ஆற்றின் வேகமானது படகின் வேகத்தோடு கூட்டப்பட வேண்டும்.

ஆகவே, கீழ்நோக்கி செல்லும் பொழுது படகின் வேகம் $(x+2)$ கி.மீ/ மணி

கீழ்நோக்கி செல்லும் பொழுது இரண்டு ஊர்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் 5 மணி நேரம், ஆகவே

$d = 5(x+3)$ .....(3)

சமன்பாடு (2) மற்றும் (3) ன் படி

$5(x+2) = 6(x-2)$ .....(4)

படி 2: தீர்வினை காணல்

சமன்பாடு (4)ல் x ஐ தீர்க்க, $x = 22$ என நமக்கு கிடைக்கும்.

படி 3 : விளக்கம்

$x = 22$ என்பதால் நிலையான நீரில் படகின் வேகம் 22 கி.மீ/மணி ஆகும்.

மேற்குரிய எடுத்துக்காட்டில் எல்லா இடங்களிலும் ஆற்றின் வேகம் சமமாக இருக்காது என்பது நமக்குத் தெரியும். கரையின் அருகில்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிதானமாகவும் நடுவில் அதிகமாகவும் இருக்கும். படகு கரையில் இருந்து நகரத் தொடங்கி நடுவில் செல்லும். அடைய வேண்டிய இடம் வந்ததும் அதன் வேகத்தைக் குறைத்து கொண்டு கரையை நோக்கிச் செல்லும் ஆகவே கரையில் படகின் வேகத்திற்கு ஆற்றின் நடுவில் அதனுடைய வேகத் திற்கும் சிறு வேறுபாடு உண்டு. படகு கரைக்கு அருகில் வரும் பொழுது அதன் வேகம் குறைந்தாலும் ஆற்றின் வேகம் அதன் வேகத்தை குறைந்த காலத்திற்கு மாறுபாடு அடையச் செய்யும். ஆகவே ஆற்றின் வேகத்தின் வேறுபாட்டை நாம் புறக்கணித்து விடலாம். அதேபோல் படகின் வேகத் தில் இருக்கும் வேறபாட்டையும் புறகணித்து விடலாம். ஆற்றின் வேகத்தை தவிர ஆற்றின் நீருக்கும் படகின் அடி பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள உராய்வு படகின் வேகத்தை தாக்கும். இதன் விளைவும் மிகக்குறைவாக இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

ஆகவே நாம்

1. ஆற்றின் வேகமும், படகின் வேகமும் எல்லா நேரங்களிலும் நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

2. படகு மற்றும் நீருக்கு இடையே உள்ள உராய்வின் விளைவும், காற்றினால் ஏற்படும் உராய்வின் விளைவும் புறக்கணிக்கத்தக்கது என நாம் கொள்ளலாம்.

நிலையான நீரில் படகின் வேகத்தை மேற்கூரிய ஊகங்களைக் கொண்டு நாம் கண்டறிந்தோம்.

மேலே கண்ட வழிக்கணக்குகளில், வழிக் கணக்குகளை தீர்க்க 3 படிநிலைகள் உள்ளன. அவை

1. **உருவாக்கம் :** கணக்குகளை ஆராய்ந்து, கணக்கின் தீர்வின் மீது எந்த காரணிகள் அதிக அளவில் காரணமாய் உள்ளது என்பதை அறிய வேண்டும். இவை தொடர்புடைய காரணிகள். நம் முதல் எடுத்துக்காட்டில் தொடர்புடைய காரணிகள் கடந்த தூரம் மற்றும் உபயோகித்த பெட்ரோலின் அளவு ஆகும். வண்டி செல்லக்கூடிய வழிகளின் தன்மை, ஓட்டுதலின் வேகம் போன்ற காரணிகளை நாம் புறக்கணித்தோம். இல்லாவிடில் அந்தக் கணக்கினை தீர்ப்பது மிகவும் கடினம், நாம் புறக்கணித்த காரணிகள் தொடர்பில்லாத காரணிகள் ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பின் கணக்குகளை ஒன்று அல்லது ஒன்றைவிட அதிகமான கணித சமன்பாடுகளின் வடிவில் எழுதலாம்.

2. ***தீர்வு :*** படி (1)ல் கிடைத்த சமன்பாட்டினை தகுந்த வழியில் தீர்த்து, கணக்கின் தீர்வினை காணலாம்.

3. ***விளக்கம்:*** படி (2) - ல் கிடைத்த தீர்வு என்பது கொடுக்கப் பட்ட வழிக்கணக்கில் உள்ள சூழலை மட்டுமே குறிக்கிறது.

உங்களுக்காக சில பயிற்சிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று வழிகளை நீங்கள் புரிந்து கொள்வதற்காக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகளுக்கு பயன் படுத்தி சரிபார்க்கலாம்.

பயிற்சி A2.1

பின்வரும் கணக்குகளில் தொடர்புடைய மற்றும் தொடர் பில்லாத காரணிகளை மேர்கூறிய படிகள் 1, 2 மற்றும் 3 ஐ செய்யும் பொழுது குறிப்பிடவும்.

1. ஒருகம்பெனிக்குகுறிப்பிட்டகாலத்திற்குகம்யூட்டர்தேவைப்படுகிறது. கம்பெனி மாதத்திற்கு ₹2000 வாடகை வீதமும் வாங்கலாம். அல்லது ₹ 25000 க்கு கம்யூட்டர் ஒன்று வாங்கலாம். கம்பெனி அதிக நாட்களுக்கு கம்யூட்டரை உபயோகப்படுத்தும் எனில் வாடகைக்கு எடுப்பதை விட சொந்தமாக வாங்குவதே மலிவானதாகும். இல்லாவிடில் கம்பெனி ஒரு மாத்திற்கே கம்யூட்டரை உபயோகப்படுத்தும் எனில் வாடகைக்கு வாங்குவதே சிறந்தது. எவ்வளவு மாதங்களுக்கு வாடைகக்கு எடுப்பது வாங்குவதை விட மலிவானது ?

2. ஒரு கார் ஓர் இடம் A யிலிருந்து புறப்பட்டு 40 கி.மீ/ம வேகத்தில் Bயை நோக்கிச் செல்கிறது. அதே சமயத்தில் மற்றொரு கார் B யிலிருந்து புறப்பட்டு 30 கி.மீ/ம வேகத்தில் Aஐ நோக்கிச் செல்கிறது. A மற்றும் B க்கு இடையே உள்ள தூரம் 100 கி.மீ எனில் இரண்டு கார்களும் எத்தனை முணி நேரத்திற்கு பிறகு சந்தித்துக் கொள்ளும்.

3. சந்திரன் பூமியிலிருந்து 3,84,0000 கி.மீ தூரத்தில் உள்ளது. பூமியைச் சுற்றி அதனுடைய பாதை வட்ட வடிவில் உள்ளது. பூமியை சந்திரன்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

24 மணி நேரத்தில் சுற்றுகிறது என கொண்டால், சந்திரனின் பூமியைச் சுற்றும் வேகத்தை கணக்கிடு ($\pi = 3.14$ என்பதை உபயோகிக்கலாம்).

4. ஒரு குடும்பம் மின்சாரக் கட்டணம் சராசரியாக ₹1000 ஐ செலுத்தியது. ஆனால் அந்த சமயங்களில் அந்த குடும்பம் நீர்சூடாக்கியை (water heater) உபயோகிக்கவில்லை. நீர் சூடாக்கியை உபயோகித்த மாதங்களில் அக்குடும்பம் சராசரியாக ₹ 1240ஐ மின்சாரக் கட்டணமாகச் செலுத்தியது. ஒரு மணி நேரத்திற்கு நீர் சூடாக்கியை உபயோகித்தற்கு விலை ₹ 8.00 ஒரு நாளிர் நீர் சூடாக்கியை உபயோகித்த மணி நேரங்களை கணக்கிடுக.

A2.3 சில கணித மாதிரிகள்

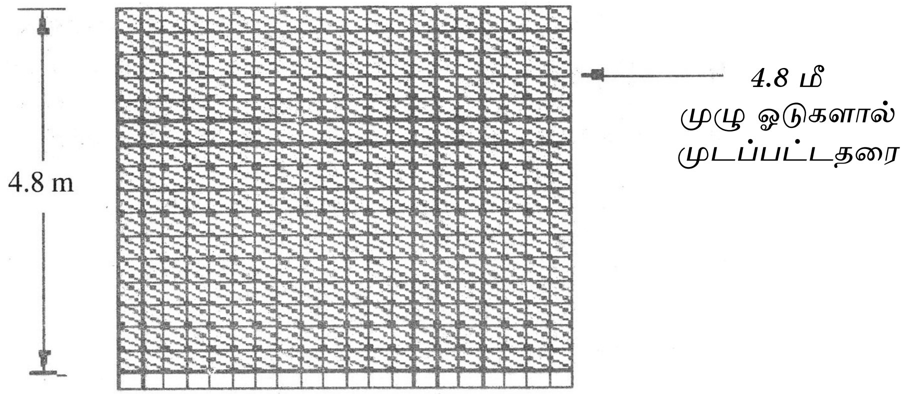
இதுவரை நம்முடைய கலந்துரையாடலில் புதியதாக எதுவும் இல்லை. நாம் பார்த்த மூன்று படிகளோடு மேலும் ஒரு படியை இந்த பகுதியில் சேர்க்கப் போகிறோம். அந்த படி சரிபார்த்தல் (validation) எனப்படும். சரிபார்த்தல் என்றால் என்ன? நாம் காணலாம். நம்முடைய தினசரி வாழக்கை சூழ்நிலையில், உண்மையாக பொருந்தாத விடையை தரும் கணித மாதிரியை நம்மால் ஒத்துக்கொள்ள முடியாது. விடையை சரிபார்க்கும் வழிகளை காணல், தேவைபட்டால் கணித விளக்கங்களை மாற்றி எழுதும் முறையே சரிபார்த்தல் எனப்படுகிறது. கணித மாதிரியில் இது முக்கியமான படியாக கருதப்படுகிறது. இந்த பிரிவில் இந்த படி உங்களுக்கு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது.

முதலில் சரிபார்த்தலுக்கு பிறகு நமது கணித மாதிரியை மாற்றி அமைக்காத ஒரு எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: நீளம் 6 மீ மற்றும் அகலம் 5 மீ கொண்டுள்ள ஓர் அறையை நீங்கள் கொண்டுள்ளீர்கள். பக்க அளவு 30 செ.மீ கொண்டுள்ள **மொனசக் ஓடுகளால்** (Mosaic tiles) அந்த அறையின் தரையை தளம் போடவேண்டும் என நீங்கள் நினைக்கிறீர்கள். எத்தனை டைல்கள் உங்களுக்கு தேவைப்படும். இதனை கணித மாதிரியை அமைந்து தீர்.

தீர்வு : உருவாக்குதல் : அறையின் பரப்பினையும், ஓட்டின் பரப்பினையும் கணக்கினைத் தீர்ப்பதற்கு நாம் கருத வேண்டும் ஓட்டின்பக்க அளவு 0.3. மீ அறையின் நீளம் 6 மீ. ஆகவே அறையின் நீளத்தை $\frac{6}{0.3} = 20$ ஓடுகளை கொண்டு ஒரு வரிசையில் வைக்கலாம் (A2.1 ஐ பார்)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் A2.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அறையின் அகலம் 5மீ. ஆகவே $\frac{5}{0.3} = 16.67$ ஆகவே செங்குத்தாக 16 ஓடுகளை வைக்கலாம். $16 \times 0.3 = 4.8$ $5 - 4.8 = 0.2$மீ அகலத்தில் 0.2 மீ பரப்பு ஓடுகளால் மூடப்படாமல் இருக்கும். இந்த பகுதி மற்ற டைல்களை வெட்டி அதனை மூட வேண்டும். தரையின் 0.2 மீ பகுதி மூடப்படாமல் இருக்கும். மூடலின் பக்க அளவு 0.3 மீ பகுதி மூடப்படாமல் இருக்கும். மூடலின் பக்க அளவு 0.3 மீ அதனை பாதியாக வெட்டினாலும் அது தரையை மூடாது. ஆகவே டைலினை 2 சமமான பாகங்களாக உடைக்க முடியாது.

கணிதவிளக்கம் : நம்மிடம்,

தேவையான டைல்களின் எண்ணிக்கை = (அகலத்தின் ஓடுகளின் எண்ணிக்கை × நீளத்தின் ஓடுல்களின் எண்ணிக்கை) + மூடப்படாமல் இருக்கும் பகுதியை மூட தேவைப்படும் ஓடுகள்.

தீர்வு: மேலே கூறியதைப் போல நீளத்தில் தேவைப்படும் டைல்களின் எண்ணிக்கை 20 மற்றும் அகலத்தில் தேவைபடும் ஓடுகளின் எண்ணிக்கை 16. கடைசி வரிசையை பூர்த்தி செய் 20 டைல்கள் மேலும் தேவைப்படுகிறது.

இந்த மதிப்புகளை (1) - ல் பிரதியிட்டால்

$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$ என நமக்கு கிடைகிறது.

விளக்கம் : தரையினை மூட 340 ஓடுகள் தேவைப்படும்.

சரிபார்த்தல் : *நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் உங்களது மேஸ்திரி உங்களை சில டைல்களை அதிகம் வாங்கச் சொல்வார். சரியான அளவில் வெட்டும் பொழுது வீணாகி விடும் டைல்களை நிரப்புவதற்காக அதிகம் வாங்கச் சொல்வார். அந்த எண்ணிக்கை உங்களது மேஸ்திரியின் திறமையை பொறுத்தது. ஆனால் சமன்பாடு (1) ஐ இதற்காக நாம் மாற்ற முடியாது இதனால் நமக்கு தேவையான டைல்களின் எண்ணிக்கையை பற்றி ஓர் பொதுக்கருத்தை நமக்கு அளிக்கிறது ஆகவே நாம் இதனை இங்கு நிறுத்திக் கொள்ளலாம். நாம் இப்பொழுது மற்றொரு சூழ்நிலையை கவனிப்போம்.*

எடுத்துக்காட்டு 5 : *2000 வருடத்தில் ஐக்கிய நாடுகளின் 191 உறுப்பினர் நாடுகள் ஓர் ஒப்பந்தத்தில் கையெழுத்துத்திட்டனர். அதன் படி 2015க்குள் சில முன்னேற்ற அடைவுகளை அடைய அந்நாடுகள் ஒத்துக்கொண்டன. இவை மில்லினியம் முன்னேற்ற அடைவுகள் எனப்படும். இந்த அடைவுகளில் ஒன்று பாலின சமத்துவத்தை முன்னேற்ற செய்வது ஆகும். துவக்கப்பள்ளி, உயர்நிலைப் பள்ளி மற்றும் கல்வியில் பெண்கள் மற்றும் ஆண்களுக்கு இடையேயான விகிதத்தை கொண்டு நாம் அடைவினை அடைந்துள்ளோமா என்பதை நாம் அறிந்து கொள்ளலாம் இந்தியா, ஒப்பந்தத்தில் கையெழுத்து இடத்தால் ஒப்பந்த்ததை ஆது ஒப்புக்கொண்டது. துவக்கப்ள்ளியில் சேர்ந்த பெண்களின் சதவீதம் அட்டவணை A2.1-ல் கொடுக்கப்ட்டுள்ளது.*

அட்டவணை A2.1

வருடம்	சேர்ந்தவர்கள் (%ல்)
1991 - 92	41.1
1992 - 93	42.6
1993 - 94	42.7
1994 - 95	42.9
1995 - 96	43.1
1996 - 97	43.2
1997 - 98	43.5
1998 - 99	43.5
1999 - 2000	43.6
2000 - 01	43.7
2001 - 02	44.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இந்த அட்டவணை துவக்கப்பள்ளியில் சேர்ந்த பெண்களின் விகிதம் உயர்ந்ததை கணித பூர்வமாக உணர்த்துகிறது. எந்த வருடத்தில் பெண்களின் சேர்க்கை 50% ஐ அடைந்தனர் எனப்தை கணக்கிடலாம்.

தீர்வு : இதனை முதலின் கணிதவியல் கணக்காக மாற்ற வேண்டும்.

படி 1: உருவாக்கம் : அட்டவணை A2.1 1991 - 1992, 92 - 93 மற்றும் பல வருடங்களில் அடைந்த சேர்கையினை தருகிறது. கல்வி வருடத்தின் தொடக்கத்தில் மாணவர்கள் சேர்ந்திருந்தாலும் அதனை 1991-னை எடுத்து கொள்ளலாம். துவக்கப்பள்ளியில் சேர்ந்த பெண்களின் சதவீதம் ஒரே விகிதத்தில் உயர்ந்துள்ளது என்பதை அட்டவணை A2.1 ஐ கொண்டு அறியலாம். வருடங்களின் எண்ணிக்கை முக்கியமே. ஆனால் குறிப்பிட்ட வருடம் முக்கியம் அல்ல. (இதே போன்ற சூழ்நிலைய பார்க்க ₹ 1500 க்கு 3 வருடங்களுக்கு 8% வட்டிவீதத்தில் வட்டியை கணக்கிட வேண்டும் எனில், அந்த குறிப்பிட்ட காலம் 1999 முதல் 2002 ஆகவோ அல்லது 2001 முதல் 2004 வரையோ இருக்கலாம். அந்த மூன்று வருடங்களின் வட்டிவீதமே கணக்கில் கொள்ளபடும்). அவ்வாறே இங்கும் 1991க்கு பிறகே வருடங்களின் எண்ணிக்கையையும் சேர்க்கையும் ஏறிக்கொண்டே போவதை காணலாம் 1991ஐ 0 வது வருடமாகவும், 1992 ஐ 1 என்றும் எழுதவும். 1991க்கு பிறகு 1992 என்பதால் கடந்த வருடம் 1. அதேபோல், 1993க்கு 2 எனவும், 1994க்கு 3 போன்ற பலவும் எழுதலாம். ஆகவே அட்டவணை A2.1 ஆனது A2.2 ஆக மாறி உள்ளது.

அட்டவணை A2.2

வருடம்	சேர்ந்தவர்கள் (%ல்)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	431
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதிகமான சேர்க்கையின் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம்	சேர்ந்தவர்கள் (%ல்)	அதிகரிப்பு
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

அட்டவணை A2.3

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1991லிருந்து 1992 என்ற ஒரு வருடகாலத்தில் சேர்க்கை 41.9% லிருந்து 42.6% ஆக 0.7% உயர்ந்துள்ளது. இரண்டாவது வருட முடிவில் 42.6% லிருந்து 42.7 ஆக 0.1% உயர்ந்துள்ளது. மேலுள்ள அட்டவணையில் வருடங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் சதவீதத்திற்கும் இடையே ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்பினை நம்மால் காண முடியவில்லை. ஆனால் உயர்வு நிலையாக உள்ளது. முதல் வருடம் மற்றும் 10 வது வருடத்தில் மட்டும் அதிகமாயுள்ளது. இந்த மதிப்புகளின் சராசரி

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22$$

சேர்க்கையானது நிலையாக 0.22% என்ற விகிதத்தில் உள்ளது என நாம் கொள்ளலாம்.

கணித விளக்கம்

சேர்க்கையானது நிலையாக வருடத்திற்கு 0.22% விகிதத்தில் உயர்ந்துள்ளது என்பது நாம் கொள்ளலாம்.

ஆகவே முதல் வருடம் சேர்க்கை சதவீதம் (Enrolment percentage (EP))

$= 41.9 + 0.22$

இரண்டாவது வருடம் சேர்க்கை சதவீதம்

$$= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 0.22 \times 2$$

மூன்றாவது வருடம் சேர்க்கை சதவீதம்

$$41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$$

ஆகவே,

n வது வருடம் சேர்க்கை சதவீதம் $= 41.9 + 0.22n,\ n \geq 1$ .....(1)

இப்பொழுது எத்தனை வருடங்களில் சேர்க்கை 50% ஐ அடையும் என்பதை நாம் கணக்கிட வேண்டும். ஆகவே சூத்திரத்தில் அல்லது சமன்பாட்டில் உள்ள n-ன் மதிப்பை நாம் காண வேண்டும்.

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad .....(2)$$

படி 2 : தீர்வு : n ஐ காண (2)ஐ தீர்க்கும் பொழுது

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

படி 3: விளக்கம் : *வருடங்களின் எண்ணிக்கை தசமத்தில் வந்ததால் நாம் அடுத்த உயர்ந்த முழு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் அது 37. ஆகவே சேர்க்கையின் சதவீதம் 1991 + 37 = 2028 வருடத்தில் 50% அடையும்.*

பொதுவாக வழக்கணக்கினை நாம் இங்கே நிறுத்தி விடுவோம். ஆனால் நாம் உண்மை வாழ்க்கை சூழ்நிலையை கொண்டிருப்பதால் இந்த மதிப்பு உண்மையான சூழ்நிலையுடன் எந்த அளவிற்கு ஒத்துபோகிறது என்பதை நாம் காணலாம்.

படி 4 : சரிப்பார்த்தல் : *சூத்திரம் (2) உண்மையான சூழ்நிலைக்கு ஒத்துப் போகிறதா என்பதைப் பார்ப்போம் சூத்திரம் 2ஐக் கொண்டு கண்டு பிடித்த மதிப்புகளை தெரிந்த மதிப்பை கொண்டு வேறு பாட்டினை கண்டு பிடித்து ஒப்புமைப்படுத்தலாம்.*

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அட்டவணை A 2.4

வருடம்	சேர்க்கை(%ல்)	(1)ஐ கொண்டு (%ல்) பெற்ற மதிப்பெண்	வேறுபாடு (% ல்)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.32	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

சூத்திரம் (2) ஐக் கொண்டு கண்டு பிடித்த சில மதிப்புகள் உண்மையான மிதப்பினை விட 0.3% அல்லது 0.5% குறைவாக உள்ளதை நீங்கள் காணலாம். ஒவ்வொரு வருடமும். சேர்க்கையின் உயர்வு 1% லிருந்து 2% ஆக இருப்பதால் 3 முல் 5 வருடங்களுக்கு வித்தியாசத்தில் 2 உயர்ந்துள்ளது. இந்த வித்தியாசம் ஒத்து கொள்ளபடுவதாக உள்ளதால் நாம் இங்கேயே நிறுத்தி கொள்ளலாம். இந்த கணக்கில் (2) என்பது நமது கணிதமாதிரி.

இந்த பிழை பெரியது என நாம் கருதினால், இந்த மாதிரியை இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டும். ஆகவே நாம் உருவாக்கம் படி 1க்கு மறு படியும் சென்று சமன் பாடு (1)ஐ மாற்ற வேண்டும்.

படி 1: மறு உருவாக்கம் : மதிப்பானது நிலையாக 0.22%ல் உயர்ந்துள்ளது என்பதை நாம் இன்னும் கொள்ளலாம் நாம் பிழையை குறைக்க நிருத்த காரணியை அறிமுகப் படுத்தலாம். இதற்கு எல்லா பிழைகளின் சராசரியை காணலாம்.

அது $$\frac{0+0.48+10.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

பழைகளின் சராசரியை கொண்டு சூத்திரத்தை திருத்தி கொள்ளலாம்.

திருத்தப்பட்ட கணிதவிளக்கும் : (2)ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சே ர்க்கை சதவீதத்தை காண உதவும் சூத்திரத்துடன் பிழை சராசரியைக் கூட்ட வேண்டும். ஆகவே நமது திருத்தப்பட்ட சூத்திரம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

n வது வருடத்தில் சேர்க்கை சதவீதம் $= 41.9 + 0.22n + 0.18$

$$= 42.08 + 0.22\,n,\ n \geq 1$$

சமன்பாடு (2) மேலும் திருத்தலாம். n ஐ காண புதிய சமன்பாடு

$$50 = 42.08 - 10.22n$$

படி 2 : திருத்தப்பட்ட தீர்வு : சமன்பாடு (4) ஐ n க்காக தீர்த்தால்

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

படி 3: விளக்கம் : $n = 36$ ஆக இருப்பதால் துவக்கபள்ளியில் பெண்களின் சேர்க்கை சதவீதம் 50% ஐ அடைந்த வருடம்.

$$1991 + 36 = 2027.$$

படி 4: சரிபார்த்தல் மறுபடியும் சூத்திரம் (4) ஐ கொண்டு கிடைத்த மதிப்புகளை உண்மையான மதிப்புகளை ஒப்பிடலாம் அட்டவணை A2.5 ஒப்பிடுதல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அட்டவணை A2.5

வருடம்	சேர்க்கை (%ல்)	(2)ஐ கொண்டு பெற்ற மதிப்பெண்	மதிப்பு கருக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு	(4) ஐக் கொண்டு பெற்ற மதிப்புகள்	மதிப்புகளுக்கு இடையே யுள்ள வேறு பாடு
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.32	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.14	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	–0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	–0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	–0.18

(2) ஐக் கொண்டு பெற்ற மதிப்புகளை விட 4ஐக் கொண்டு பெற்ற மதிப்புகள் உண்மையான மதிப்பிற்கு அருகில் இருப்பதை நாம் காணலாம். இந்த வகையில் பிழைகளின் சராசரி 0.

நாம் வழிகளை இங்கே நிறுத்தி விடலாம். ஆகவே வருடங்களுக்கும் சேக்கையின் சதவீதத்திற்கும் இடையே தொடர்பை சமன்பாடு (4) கணித விளக்கத்தில் தருகிறது. வளர்ச்சியை காட்டும் கணித மாதிரியை நாம் உருவாக்கினோம்.

மேலே உள்ள சூழ்நிலையில் நாம் பின்பற்றிய வழிகளைக் கொண்டதே கணித மாதிரி.

நமக்கு தெரிந்த கணித கருவிகளைக் கொண்டு கணித மாதிரியை உருவாக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை கொண்டு அனுமானங்களை உருவாக்க இன்னும் பல கணித கருவிகள் உள்ளன. அவை இந்த பகுதிக்கு அப்பாற்பட்டது. உங்களுக்கு மாதிரியின் வழிமுறைகளை விளக்குவதே மாதிரியை உருவாக்கியதன் நோக்கம் ஆகும். இந்த நிலையில் உங்களால் சரியான அனுமானங்களை ஊகிக்க முடியாது.

இதுவரை கொடுத்த விளக்கங்களை கொண்டு, உங்களால் நடைமுறை வாழ்க்கை சூழ்நிலையில் கணித மாதிரையை உருவாக்க முடியும் என புரிந்து கொண்டுள்ளீர்களா என்பதை சோதி த்து கொள்ளுங்கள். இங்கு நீங்கள் முயற்சி செய்ய பயிற்சி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A2.2

1. கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் 400 மீ ஒட்டப்பந்தயம் ஒலிம்பிக்கில் இடம் பெற்ற பின் தங்கம் பதக்கம் வென்றவர்களின் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வருடங்கள் மற்றும் நேரத்தை தொடர்புடைய கணித மாதிரியை அமைக்கவும். அடுத்த ஒலிம்பிக்கில் நேரத்தை கணக்கிடவும்.

அட்டவணை A2.6

வருடம்	நேரம் (நொடிகளில்)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 கணிதமாதிரிகளின் வழிகள், அதன் பயன்கள் மற்றும் குறைபாடுகள்.

நாம் எடுத்து கொண்ட எடுத்துகாட்டைக் கொண்டு கணித மாதிரியின் அம்சங்களை பட்டியலிட்டு ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். முந்தைய பிரிவுகளின் முடிவுகளை கொண்டு கணித மாதிரியில் உள்ள படிகளை சுருக்கமாக காணலாம்.

படி 1 : உருவாக்குதல் : *பிரிவு A2.2-ல் எடுத்துக்காட்டு 1-ல் உருவாக்குதலுக்கு பிரிவு A 2.3-ல் எடுத்துக்காட்டு 1-ல் உள்ள உருவாக்குதலுக்கும் வேறுபாடு இருப்பதை நாம் கண்டோம். எடுத்துகாட்டு 1-ல் எல்லா விவரங்களும் உடனே உபயோகப்படுத்துவது போல் இருந்தன. ஆனால் A2.3-ல் கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி அவ்வாறு இல்லை. மேலும் இதன் திற்கு சிறிது அதிக நேரம் எடுத்துக் கொண்டது. நாம் முதல் சூத்திரத்தை சோதித்தோம். அது இரண்டாவது சூத்திரத்தைப் போன்று சரியாக இல்லை, பொதுவாக இது உண்மை. நடைமுறை வாழ்க்கை சூழ்நிலையில் முதல் மாதிரிக்கு கண்டிப்பாக சில மாற்றங்கள் தேவைபடும். நடைமுறை வாழ்க்கை - கணக்குகளை தீர்க்கும் பொழுது உருவாக்குதலுக்கு அதிக நேரம் எடுத்துக் கொள்ளும். எடுத்துகாட்டாக நியூட்டனின் மூன்று இயக்க விதிகள், இயக்கத்தின் கணித விளக்கம் ஆகும். அவற்றை கூறுவதும் எளிது.*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆனால் நியூட்டன் இந்த விதிகளை அதிக விவரங்களை சேகரித்து மற்றும் அவருக்கு முன் உள்ளவர்கள் செய்தவற்றையும் சேர்த்து ஆரயந்த பிறகே செய்தார்.

உருவாக்குதல் கீழ்வரும் மூன்று படிகளை கொண்டுள்ளது.

1. ***கணக்குகளைக் கூறுவது:*** எப்பொழுதும் கணக்குகள் சிலது தெளிவற்றதாக காணப்படும். எடுத்துகாட்டாக, விரிவான நோக்கம் என்ன வென்றால். ஆண்கள் மற்றும் பெண்களின் சேர்க்கை சமமாக இருக்க வேண்டும் என்பதை உறுதிப்படுத்துதல் ஆகும். இது பள்ளி செல்லும் வயதுடைய குழந்தைகளில் 50% ஆண்கள் மற்றும் பள்ளி செல்லும் வயதுடைய குழந்தைகளில் 50% பெண்கள் கண்டிப்பாக சே ர்க்கப்பட்டிருக்க வேண்டும் என்பதே அதன் பொருள் இதையே வேறு முறையில் கூறவேண்டுமானால், பள்ளி செல்லும் குழந்தைகளில் 50% பெண் குழந்தைகள் என்பதை உறுதிப்படுத்த வேண்டும் என்பதாகும். நமது கணக்கில் நாம் இரண்டாவது முறையை எடுத்துக் கொண்டோம்.

2. ***தொடர்புடைய காரணிகளை காணால்:*** நமது கணக்கில் எந்த காரணிகள் தொடர்புடையவை, முக்கியம் என்றும் எவை முக்கியமில்லாதவை என்றும் முடிவு செய்ய வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, துவக்கப் பள்ளியில் சேர்க்கைகளை பார்க்கும் பொழுது, சென்ற வருடம் சேர்க்கப்பட்டிருந்த பெண் குழந்தைகளின் சதவீதம் இந்த வருடம் சேர்க்கப்பட்ட பெண் குழந்தைகளின் சதவீததத்திற்க்கு காரணமாய் அமையும். இது எதனால் எனில் பள்ளிகளில் பெண் குழந்தைகளின் சே ர்க்கை அதிகமாக அதிகமாக பெற்றோர்கள் தங்கள் குழந்தைகளையும் பள்ளியில் சேர்க்க வேண்டும் என்று நினைப்பார்கள். இந்த காரணியை நாம் ஒதுக்கி விட வேண்டும். ஏனெனில் சேர்க்கை சதவீதம் குறிப்பிட்ட சதவீதத்தை தாண்டிய பின்னரே இது முக்கிய காரணியாக கொள்ளலாம். மேலும் இந்த காரணியை நாம் கணக்கில் சேர்த்துக் கொண்டால் அது நாம் மாதிரியை இன்றும் சிக்கலாக மாற்றும்.

3. ***கணித உருவாக்கம்:*** நமக்கு இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட கணக்கு என்ன என்பதும் எந்த காரணிகள் முக்கியம் என்பதும் தெளிவாக உள்ளது. பின் கொடுக்கப்பட்ட காரணிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பினை சமன் பாடாகவோ, வரைபடமாகவோ அல்லது வேறு ஏதேனும் விளக்கத்திலோ அமைக்க வைண்டும். அது ஒரு சமன்பாடு

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனில் ஒவ்வொரு காரணியும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறியில் சமன்பாட்டில் குறிக்கபட வேண்டும்.

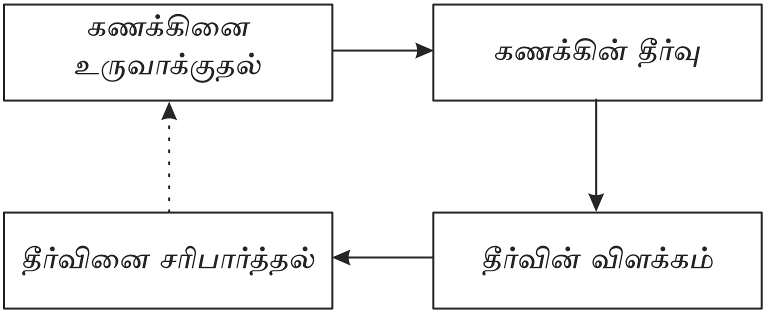
படி (2) : தீர்வினை காணல் : கணித உருவாக்கம் நமது தீர்வினை கொடுக்காது. சமன்பாட்டினை, கணக்கினை தொடர்பு படுத்தி தீர்க்க வேண்டும். இங்கே உங்களது கணித அறிவு மிகவும் உபயோகமாக இருக்கும்.

படி (3) : தீர்வின் விளக்கம் : இந்த மாதிரியின் தீர்வு என்பது மாறியின் மதிப்பு அல்லது மதிப்புகள் ஆகும். நாம் நம் நடைமுறை வாழ்க்கை கணக்கிற்கும் சென்று இந்த மதிப்புகள் கணக்கில் எத்தகைய பொருளைத் தருகிறது என பார்க்க வேண்டும்.

படி (4) : கணக்குகளை சரிபார்த்தல் : நாம் A2.3-ல் பார்த்தபடி, தீர்வினை கண்டுபிடித்தவுடன், இந்த தீர்வு நடைமுறைக்கு பொருந்துகின்றதா என சோதனை செய்ய வேண்டும். அது பொருந்தினால் நமது கணிதமாதிரி ஏற்றுகொள்ளப்பட்டது என பொருள்படும். கணித தீர்வு பொருந்தவில்லை எனில் நாம் மறுபடி உருவாக்கும் படிக்கு சென்று மீண்டும் நமது மாதிரியின் முன்னேற்றம் செய்ய வேண்டும்.

இந்த படியே நமது வழிக்கணக்குகளை தீர்ப்பத்ற்கும், கணித மாதிரிக்கும் இடையே உள்ள மிகப்பெரிய வேறுபாடு ஆகும். இதுவே நமது வழி கணக்குகளில் விட்டுபோன ஓர் முக்கியமான படியாகும் - சில நடைமுறை கணக்குகளில் நமது தீர்வினை சரிபார்க்க வேண்டிய அவசியம் இருக்காது ஏனெனில் நமது கணக்கு எளிமையானாதாகவும் சரியான முறையில் தீர்வும் கிடைத்து விடும் இதைப் நம் A2.3-ன் முதல் மாதிரி போன்றது.

படம் A2.2 ன் கணித மாதிரியில் உபயோகித்த படிகளின் வரிசையை சுருக்கமாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் A2.2

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தீர்வினை சரிபார்தலிலிருந்து, கணக்கினை உருவாக்குதல் புள்ளி கோடில் (dotted line) கொடுக்கபட்டுள்ளது. ஏனெனில் முறபடியும் அந்த படியை தொடர வேண்டிய அவசியம் இல்லை என்பதே குறிக்கிறது.

இப்பொழுது நீங்கள் கணித மாதிரியில் உள்ள படிகளை பற்றி படித்தீர்கள். நாம் இப்பொழுது அதன் அம்சங்களை பற்றிப் பார்போம்.

கணிதமாதிரியின் முக்கிய நோக்கம் நடைமுறை கணக்குகளை, கணித கணக்குகளாக மாற்றி சில முக்கியமான விவரங்களைப் பெறுவதே ஆகும். இது நேரடி கவனிப்பு முறை அல்லது சோதனைகளை செய்து விவரங்களை பெறமுடியாத நிலைகளில் அல்லது மிகவும் விலை உயர்ந்த நிலையில் இந்த முறை மிகவும் உபயோகம் ஆகும்.

நீங்கள் நாம் ஏன் கணித மாதிரியை எடுத்து கொள்ள வேண்டும் என ஆச்சரியப்படலாம். இதன் பயன்களை பற்றி பார்ப்போம். நாம் மதுரா சுத்தகரிப்பு ஆலையின் கழிவினால், தாஜமஹாலின் மீது உற்படுகிற அரிப்பை பற்றி படிக்க வேண்டும் என கொள்ளலாம். நாம் நேரடியாக தாஜ்மஹாலின் மீது சோதனைகளைச் செய்து பார்க்க முடியாது பார்க்கவும் கூடாது. அது பாதுகாப் பானதும் அல்ல. அல்லது தாஜ்மகாலைப் போன்றதோர் சிறு மாதிரியை செய்து கொண்டு சோதிக்கலாம். அதற்கு பல வசதிகள் தேவை. இது மிகவும் விலை உயர்ந்தாக இருக்கும். இங்கு கணித மாதிரி மிகவும் உயர்ந்த அளவில் உபயோகப்படும்.

மறுபடியும், ஐந்து வருடங்களுக்கு பிறகு எத்தனை துவக்கப் பள்ளிகள் தேவைப்படும் என்பதை அறிய வேண்டும் என கொள்வோம். இதனை கணித மாதிரியைக் கொண்டே தீர்க்க வேண்டும். அதே போல் அறிவியல் அறிஞர்களால் கணித மாதியைக் கொண்டே பலவித கருத்துகளை வெளியிட முடியதது.

A2.3-ல் சரியான விடையை பெறுவதற்காக மேலும் சிறந்த வழியில் இரண்டாவது எடுத்துகாட்டை எடுத்து கொள்ளலாம். ஆனால் நாம் தொடரவில்லை. ஏனெனில் நம்மிடம் தகுந்த கணித மாதிரி இல்லை. இது நம் நடைமுறை வாழ்க்கையிலும் நடக்கும். சரியான கணித கருவிகள்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இல்லாததால் நாம் தோராயமான விடையிலேயே தருப்தி அடைந்து விடுகிறோம்.

நமது மாதிரியை எந்த அளவிற்கு நாம் விரிவாக்க வேண்டும் என நீங்கள் நினைக்கலாம். அதனை சரியான முறையில் பெற பல காரணிகளை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். இதனை செய்யும் பொழுது அதிக மாறிகளை நமது சமன்பாட்டில் பயன்படுத்த வேண்டி இருக்கும். பின் நமக்கு மிகவும் சிக்கலான சமன்பாடு கிடைத்து விடும். இதனை உபயோகப்படுத்துவது கடினம். கணித மாதிரிக்கு உபயோகப் படுத்த எளிமையாக இருக்க வேண்டும். சிறந்த மாதிரி இரண்டு காரணிகளை சமமாக கொண்டு இருக்க வேண்டும்.

1. துல்லியம் (நடைமுறைக்கு எவ்வளவு அருகிலுள்ளது)

2. உபயோகிக்க எளிமை

எடுத்துக்கூட்டாக, நியூட்டனின் இயக்க விதிகள் மிகவும் எளிமையானவைஅதேபோல்பலசூழ்நிலைகளில்உபயோகப்படுத்தக்கூடிய ஒரு சிறந்த மாதிரி. ஆகவே கணிதமாதிரி நமது பிரச்சனைகளுக்கு விடையை அளிக்குமா? எல்லா சமயங்களிலும் அல்ல. அதற்கு சில கட்டுபாடுகள் உண்டு.

மாதிரி என்பது நடைமுறை வாழ்க்கை கணக்குகளின் ஒரு சுருக்கப்பட்ட வடிவம் என்பதே நாம் நினைவில் கொள்ள வேண்டும். இரண்டு கணக்கு கள் ஒரே மாதிரி இருக்காது என்பதையும் புரிந்து கொள்ள வேண்டும். அதாவது நாட்டின் வரைபடம், நாட்டின் இயல்பியல் அம்சங்கள் மற்றும் நாடு இவற்றிற்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு போன்றது நம்மால் ஓர் இடம் கடல் மட்டத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது என்பதை வரைபடம் கொண்டு காணலாம். ஆனால் அந்த இடத்தில் உள்ள மனிதர்களின் குணநலன்கள் பற்றி நம்மால் அறியமுடியாது. ஆகவே எந்த பிரச்சனையை தீர்க்க் கணிதமாரிதி உதவுமோ அதற்கு இதனை உபயோகிக்க வேண்டும். அதனை அமைக்கும் பொழுது மற்ற காரணிகளை ஒதுக்கிவிட வேண்டும். இந்த மாதிரியை எவ்வித கட்டுபாகுளுக்குள் பயன்படுத்த முடியுமோ அங்கே மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும். அடுத்த வகுப்புகளில் இந்த காரணிகளைப் பற்றி இன்னும் சிறிது அதிகமாகக் காணலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A2.3

1. உங்கள் பாடப்புத்தகத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன கணக்கு களைத் தீர்பதற்கும் கணித மாதிரியின் வழிகளுக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு எவ்வாறு உள்ளது?

2. நான்கு சாலைகள் சந்திக்கும் இடத்தில் காத்திருக்கும் நேரத்தை (waiting time) குறைக்க வேண்டும் எனில் பின்வரும் காரணிகளில் எவை முக்கியம்? எவை முக்கியமல்ல?

   (i) பெட்ரோல் விலை

   (ii) நான்கு வேறுபட்ட ரோடுகளில் வரும் வாகனங்களின் வீதம்.

   (iii) சைக்கிள் ரிக்ஷா போன்ற நிதானமாக நகரும் வண்டிகள் மற்றும் கார், மோட்டார்சைக்கில் போன்ற வேகமாக நகரும் வண்டிகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.5 தொகுப்பு

இந்த பிற்சேற்கையில் நாம் பின்வரும் கருத்துகளை படித்தோம்.

1. வழிக் கணக்குகளைத் தீர்க்கும் வழிகள்.

2. கணித மாதிரிகள் சில உருவாக்குதல்.

3. கணித மாதிரிகளை உருவாக்கும் பொழுது உபயோகப்படுத்தபடும் படிகள்.

1. உருவாக்கம்
   - (i) கேள்வியை அமைத்தல்
   - (ii) தொடர்புடைய காரணிகளை காணல்
   - (iii) கணித விளக்கம்.
2. தீர்வுகளை காணல்
3. நடைமுறை வாழக்கை கணக்கில் நம் தீர்வின் விளக்கம்.
4. கணித மாதிரி எந்த அளவிற்கு சரியாக பிரச்சனைக்கு தீர்பை அளந்துள்ளது என்பதை சரிபார்த்தல்.

4. கணித மாதிரியின் நோக்கங்கள், பயன்பள் மற்றும் கட்டுபாடுகள்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

விடைகள்/குறிப்புகள்

பயிற்சி 7.1

1. அவை சமம்

6. $\angle BAC = \angle DAE$

பயிற்சி 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. ஒவ்வொன்றும் 45°

பயிற்சி 7.3

3. (ii) லிருந்து (i), $\angle ABM = \angle PQN$

பயிற்சி 7.4

4. BD ஐ இணை மற்றும் $\angle B > \angle D$. என காட்டுக. AC ஐ இணை மற்றும் $\angle A > \angle C$ என காட்டுக.

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, மற்றும் பல,

பயிற்சி 8.1

1. 36°, 60°, 108° மற்றும் 156°

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

6. (i) ΔDAC மற்றும் ΔBCA யிலிருந்து $\angle DAC = \angle BCA$ மற்றும் $\angle ACD = \angle CAB$ மற்றும் பல என காட்டுக.

   (ii) தேற்றம் *8.4* ஐ உபயோகித்து $\angle BAC = \angle BCA$ என காட்டுக.

பயிற்சி 8.2

2. PQRS ஒரு இணைகரம் எனக்காட்டுக. PQ||AC மற்றும் PS||BD எனவும் காட்டுக. ஆகவே $\angle P = 90°$

5. AECF ஒரு இணைகரம். ஆகவே AF||CE மற்றும் பல

பயிற்சி 9.1

1. தேற்றம் *10.1*ஐ போன்றே சர்வசம வட்டங்களின் நாண்களைக் கொண்டு நிரூபிக்க.

2. இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசமத்தை சர்வசம அடிகோள் பகோப SAS கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 9.2

1. *6* செ.மீ முதலில் சிறிய வட்டத்தின் ஆரமும் வட்டமையங்களை இணைக்கும் கோடும் செங்குத்து என நிரூபிக்கவும். பின் சிறிய வட்டத்தின் விட்டமானது பொதுவான நாண் என நிரூபிக்கவும்.

2. O வட்டமையத்தை உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்பவை E ல் வெட்டிக் கொள்ளும் சம நாண்கள். AB ன் மீது செங்குத்து OM மற்றும் CD ன் மீது செங்குத்து ON வரைக. OE ஐ இணைக்கவும். செங்கோண Δ OME மற்றும் ΔONE என்பவை சர்வசமம் என நிரூபி.

3. எடுத்துக்காட்டு *2* ல் உள்ளது போல் தொடரவும்.

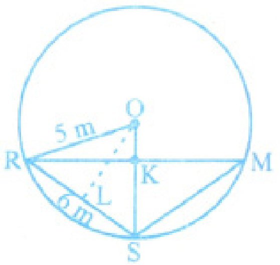
4. AD ன் மீது செங்குத்து OM வரைக

5. ரேஷ்மா, சல்மா மற்றும் மன்தீப் இவர்களை முறையே R,S,M என குறிக்கவும். KR = x m (படத்தை காண்க) என்க

   ΔORS ன் பரப்பு = $\frac{1}{2} \times x \times 5$

$\Delta ORS +$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

.x ன் மதிப்பை காண் ஆகவே RM ஐ காண்.



6. சமபக்க முக்கோணத்தின் பண்புகள் மற்றும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் பண்புகளை உபயோகி.

பயிற்சி 9.3

1. 45°

2. 150°, 30°

3. 10°

4. 80°

5. 110°

6. $\angle BCD = 80°$ மற்றும் $\angle ECD = 50°$

8. CD ன் மீது செங்குத்து AM மற்றும் BN வரைக (AB || CD மற்றும் AB < CD). $\Delta AMD \cong \Delta BNC$ என காட்டுக. இது $\angle C = \angle D$ என்பதை தரும். ஆகவே $\angle A + \angle C = 180°$.

பயிற்சி 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2

2. ₹ 1650000

3. $20\sqrt{2}\ m^2$

4. $21\sqrt{11}\ cm^2$

5. 9000 cm^2

6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.1

1. 165 செ.மீ.^{2}
2. 1244.57 m^2
3. (i)7 செ.மீ. (ii) 462 செ.மீ.^{2}
4. (i)26 m (ii) ₹ 137280
5. 63 m
6. ₹ 1155
7. 5500 செ.மீ.^{2}
8. ₹ 384.34 (தோராயமாக)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.2

1. (i) 1386 செ.மீ.^{2} (ii) 394.24 செ.மீ.^{2} (iii) 2464 செ.மீ.^{2}
2. (i) 616 செ.மீ.^{2} (ii) 1386 செ.மீ.^{2} (iii) 38.5 மீ.^{2}
3. 942 செ.மீ.^{2}
4. 1:4
5. ₹ 27.72
6. 3.5 செ.மீ.
7. 1:16
8. 173.25 செ.மீ.^{2}
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4 \pi r^2$ (iii) 1 : 1

பயிற்சி 11.3

1. (i) 264 செ.மீ.^{2} (ii) 154 செ.மீ.^{2}
2. (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}l$
3. 10 செ.மீ.
4. 8செ.மீ.
5. 38.5 kl
6. (i) 48 செ.மீ. (ii) 50 செ.மீ. (iii) 2200 செ.மீ.^{2}
7. 100 π செ.மீ.^{3}
8. 240 π செ.மீ.^{3}; 5: 12
9. 86.625 × மீ.^{3}, 99.825 மீ.^{2}

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}\ cm^3$ (ii) 1.05 மீ.^{3} (தோராயமாக)
2. (i) $11498\ \frac{2}{3}\ cm^3$ (ii) 0.004851 மீ.^{3}
3. 345. 39 கி. (தோராயமாக)
4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 லிட்டர் (தோராயமாக)
6. 0.06348 மீ.^{3} (தோராயமாக)
7. 179 $\frac{2}{3}$ செ.மீ.^{3}
8. (i) 249.48 மீ.^{2} (ii) 523.9மீ.^{3} (தோராயமாக)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 மீ.மீ ^{3} (தோராயமாக)

பயிற்சி 12.1

1. (ii) இனப் பெருக்கத்தின் போது உடல் நிலை.

3. (ii) பார்டி A

4. (ii) நிகழ்வெண் பல கோணம் (iii) இல்லை

5. (ii) 184

வயது (வருடங்களில்)	நிகழ்வெண்	அகலம்	செவ்வகத்தின் நீளம்
1 – 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1 = 5$
2 – 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1 = 3$
3 – 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1 = 3$
5 – 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1 = 6$
7 – 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1 = 3$
10 – 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1 = 2$
15 – 17	4	2	$\frac{10}{5}\times 1 = 2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நீங்கள், இப்பொழுது இந்த நீளத்தை கொண்டு செவ்வக வரைபடத்தை வரையலாம்.

9. (i)

எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை	நிகழ்வெண்	பிரிவு இடைவெளியின் அகலம்	செவ்வகத்தின் நீளம்
1 – 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2 = 4$
4 – 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2 = 30$
6 – 8	44	2	$\frac{44}{2}\times = 44$
8 – 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2 = 8$
12 – 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2 = 1$

செவ்வக வரைபடத்தை வரையவும்.

(ii) 6–8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A 2.1

*1. **படிநிலை 1 :** சூத்திரமாக்கல் : கண்னியை வாடகைக்கு வாங்க வேண்டிய காலம் மற்றும் அதற்கான கொடுக்கப்பட்ட இரு செலவுகள் ஆகிய இவையே நமக்குத் தேவையான காரணிகள் ஆகும். இங்கு, கணினியை வாங்குவதற்கான விலையிலோ அல்லது வாடகைசெ செலவிலோ குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் எதுவும் இல்லை என நாம் அனுமானிக்கலாம். எனவே, இவற்றில் ஏற்படும் மாறுதல்களை நிராகரிக்கலாம். மேலும் நாம் எல்லா வகைலான வெவ்வேறு தலைமுறையைச் சார்ந்த கணினிகளும் ஒன்று போலவே இருப்ப தாகக் கருதுவோம். அதவாது அவற்றில் உள்ள வேறுபாடுகள் நமக்கு தேவையற்றவை.*

கணினியை x மாதங்களுக்கு வாடகைக்கு எடுக்க ஆகும் செலவு ₹ 2000 x. இச்செலவு கணிணி விலைக்கு வாங்கும் செலவை மீறுமேயானால்,

சொந்தமாக கணினி வாங்குவதே உசிதமாகும். எனவே, சமன் பாடானது,

$2000\,x = 25000$ ......(1)

படிநிலை 2 : *தீர்வு : (1) ஐத் தீர்க்கும் போது,*

$$x = \frac{25000}{2000} = 12.5$$

படிநிலை 3 : *பொருள் விளக்கம் 12.5 மாதஸ்களுக்கு மேலான காலத்திற்கு கணினியை வாடகைக்கு எடுக்க ஆகும் செலவு, அதன் விலையைக் காட்டிலும் அதிகரிப்பதால், 12 மாதங்களுக்கு மேல் கணினியைப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின், அதை சொந்த மாக வாங்குவதே மலிவாக இருக்கும்.*

2. ***படிநிலை 1 :*** *சூத்திரமாக்கல்: கார்கள் ஓரே சீரான மாறதா வேகத்தில் செலவதாக அனுமானம் செய்வோம். எனவே, வேகத்தில் வரும் மாறுதல்களை நிராகரிப்போம்.*

x மணிநேரம் கழித்து கார்கள் சந்திக்குமேயாயின், முதல் காரனது A யிலிருந்து $40x$ கி.மீ மற்றும் இரண்டாவது காரானது $30x$ கி.மீ தூரம் கடந்திருக்கும். அதாவது A-யிலிருந்து அது $(100 - 30x)$ கி.மீ தூரத்தில் இருக்கும். எனவே, சமன்பாடானது,

$$40x = 100 - 30x \text{ ஆக}$$

இருக்கும். அதாவது, $70x = 100$

படிநிலை 2 : *தீர்வு : சமன்பாட்டை தீர்தால், நமக்கு* $x = \frac{100}{70}$ *என்பது கிடைக்கிறது.*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படிநிலை 3: *பொருள் விளக்கம் : தோராயாமாக* $\frac{100}{70}$ *என்பது 1.4 மணி நேரம் எனவே, இரு கார்களும் 1.4 மணி நேரம் கழித்து ஒன்றை ஒன்று சந்திக்கும்.*

3. ***படிநிலை 1 :*** *சூத்திரமாக்கல் : சந்திரன் பூமியைச் சுற்றும் வேகம்.*

$$\frac{\text{சுற்றுப்பாதையின் நீளம்}}{\text{எடுத்துக்கொண்ட நேரம்}}$$

படிநிலை 2: *தீர்வு : சுற்றுப்பாதையானது கிட்டத்தட்ட வட்டமாக இருப்பதால், அதன் நீளம் என்பது*

$2 \times \pi \times 384000$ *கி.மீ* $= 2411520$ *கி.மீ.*

சந்திரன் ஒரு முழு சுற்றை முடிக்க 24 மணிநேரம் எடுத்துக்கொள்கிறது.

எனவே, வேகம் = $\frac{2411520}{24}$ = *100480 கிமீ/மணி.*

படிநிலை 3 : *பொருள் விளக்கம்: வேகமானது 100480 கி.மீ/மணி ஆகும்.*

4. **சூத்திரமாக்கல் :** *விலைப்பட்டியலில் (Bill) வரும் வித்தியாசமானது, நீர் சூடாக்கும் இயந்திரத்தைப் பயன் படுத்துவதால் மட்டுமே என்று அனுமானிக்கப் படுகிறது.*

நீர் சூடாக்கும் இயந்திரத்தை பயன்படுத்தும் சராசரி மணி நேரங்கள் = x *என்க.*

நீர் சூடாக்கும் இயந்திரத்தைப் பயன் படுத்துவதால் ஏற்படும் வித்தியாசம்

= ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

1 மணி நேரத்திற்கு இயந்திரத்தைப் பயன்படுத்த ஆகும் செலவு = ₹ 8

எனவே, *30 நாட்களுக்கு பயன்படுத்த ஆகும் செலவு* = $8 \times 30 \times x$

மேலும், 30 நாட்களுக்கு பயன்படுத்த ஆகும் செலவு = இயந்திரத்தைப் பயன்புடத்துவதால் பில் இல் காணப்படும் வித்தியாசம்.

எனவே, $240x = 240$

தீர்வு: *இச்சமன்பாட்டில் இருந்து,* $x = 1$ *என்பது நமக்குக் கிடைக்கிறது.*

பொருள் விளக்கம்: $x = 1$ *என்பதால், நீர் சூடாக்கும் இயந்திரமானது சராசரியாக ஒரு நாளில் 1 மணி நேரம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.*

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி A 2.2

1. *இங்கு நாம் எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வினையும் கலந்தாலோசிக்கப் போவதில்லை. கடைசியாகப் பார்த்தி எடுத்துக்காட்டில் பயன்படுத்தப் பட்ட அதே முறையையே நீங்கள் பயன் படுத்தலாம் அல்லது உங்களுக்குப் பொருத்தமாகத் தோன்றும் எந்த முறையையும் பயன் படுத்தலாம்.*

பயிற்சி A 2.3

1. சூத்திரமாக்கும் பகுதியானது, நிஜ வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையில் மிகவும் விரிவானதாக இருக்கலாம் என முன்பே கூறினோம். மேலும், வழிக்கணக்குகளின் விடைகளை நாம் சரிப்பார்பதில்லை. இதுதவிர, வழிக்கணக்கானது ஒரு 'சரியான விடையைக்' கொண்டிருக்கும். இது நிஜ வாழ்வு சூழ்நிலைக்கு மாறாக இருக்கலாம்.

2. (ii) மற்றும் (iii) இவையே மிக முக்கியமான காரணிகள் ஆகும். இங்கு (i) என்பது விற்கப்படும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையின் மீது நேராக பாதிப்பை ஏற்படுத்துவதாக இருப்பினும் அது மிக முக்கியமான காரணி அன்று.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED