கர்நாடக அரசு

கணிதம்

MATHEMATICS

10

பத்தாம் வகுப்பு

TENTH STANDARD

பகுதி - 1

PART - 1

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

National Council of Educational Reserch and Training

Karnataka Textbook Society (R)
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003.

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
15 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, Professor of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, Professor and Head (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, PGT, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, Professor and Head, DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, Professor, RIE, Mysore

Jayanti Datta, PGT, Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, Lecturer (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, Professor (Retd.) & Consultant, DESM, NCERT

Rama Balaji, TGT, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, Teacher and Member, Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, Professor (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, TGT, Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, TGT, Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, TGT, Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, TGT, Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, TGT, D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, TGT, Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, TGT, Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, TGT, Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, TGT, Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, Lecturer, Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, Emeritus Professor, IIT, New Delhi; Monika Singh, Lecturer, Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar,

New Delhi; G. Sri Hari Babu, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, TGT, Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, TGT, S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head (Retd.), DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Purnendu Kumar Barik, Copy Editor; Naresh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators; Yogita Sharma, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ 10ನೇ ತರಗತಿ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತಮಿಳು ಭಾಷೆಗೆ ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಅನುವಾದಿಸಿ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 2018–19 ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಆಂಗ್ಲ ಮಾಧ್ಯಮದ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷ್, ಹಿಂದಿ ಮತ್ತು ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆದು ಭಾಗ–1 ಮತ್ತು ಭಾಗ–2 ಎಂಬುದಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು 2005 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲಾ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಚಿಂತನಾಶೀಲರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯ ವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು, ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸುಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅನುಮತಿ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ ಹಾಗೂ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ಎಲ್ಲ ಅಧಿಕಾರಿ, ಸಿಬ್ಬಂದಿಗಳಿಗೆ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗೆ, ಸುಂದರವಾಗಿ ಡಿಟಿಪಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿರುವ ಡಿಟಿಪಿ ಆಪರೇಟರ್ ಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ವಿತರಿಸಿರುವ ಮುದ್ರಕರುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಎನ್. ಮಂಜುಶ್ರೀ ಭಾ.ಆ.ಸೇ.
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು

Tamil Translation Committee

Smt. Sujatha G. Rao., J-338, Senavihar, Kammanahalli Main Road, Bengaluru - 560043

Sri G. Sampath, Assistant Master (Maths) Tagore Memorial High School (Tamil Medium), Yeshwwanthpuram, Bengaluru - 22

Sri A. Dananjayan, Principal, Sri Annamma Devi Vidyamandira English Medium High School, Kumaraswamy Layout, Bengaluru.

Sri M. Mani, Retired H.M., KGF, Kolar - 563113

Sri S. Nagaraj, Retired H.M., KGF, Kolar - 563113

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Scrutiniser

Smt. Sujatha G. Rao., J-338, Senavihar, Kammanahalli Main Road, Bengaluru - 560043

Advise and Guidance

Sri M. P. Madegowda., Managing Director, KTBS Bengaluru.

Smt M. D. Usha., Deputy Director, KTBS Bengaluru.

Programme Co-Ordinator

Smt. Bhagyalakshmi, Assistant Director, KTBS, Bengaluru.

பொருளடக்கம்

பகுதி - 1

வ.என்	பாடம்	பக்கம்
1	மெய் எண்கள் (Real Numbers)	1 - 11
2	பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)	12 - 26
3	இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடி (Pair of Linear Equations in Two Variables)	27 - 44
4.	இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Qudratic Equations)	45 - 60
5.	கூட்டுத் தொடர் வரிசைகள் (Arithmetic Progressions)	61 - 94
6.	முக்கோணங்கள் (Triangles)	95 - 125
7.	ஆயத்தொலை வடிவியல் (Co-ordinate Geometry)	126 - 142
A1	கணிதத்தில் நிரூபணங்கள் (Proofs in Mathematics)	143 - 173
	விடைகள் (Answers)	174 - 183

Q2I7Q6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மெய் எண்கள்

REAL NUMBERS

C9T4R2

1

1.1 அறிமுகம்

நீங்கள் 9 ஆம் வகுப்பில் உலகிற்கு மெய் எண் தோன்றியதையும் விகிதமுறு எண்கள் அறிமுகமானதைப் பற்றியும் தெரிந்து கொண்டீர்கள் இந்த பாடத்திலும் அவைகளைப்பற்றி தொடர்ந்து படிப்போம். இப்பாடத்தில் 1.2 மற்றும் 1.3 பிரிவில் யூக்லீட்டின் வகுத்தல் அல்காரிதம் மற்றும் எண் கணித அடிப்படைத்தேற்றம் பற்றியும் படிப்போம்.

யூக்லிட்டின் வகுத்தல் அல்காரிதம் என்ற பெயரில் உள்ளவாறு எண்களின் வகுத்தலைப் பற்றி படிப்போம். நாம் எளிய முறையில், a என்ற வகுபடும் எண்ணை b என்ற வகுக்கும் எண்ணால் வகுத்தால் r என்ற எண் b ஐ விட சிறியதாக இருக்கும் போது மீதியாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். அனைவரும் இதை நீண்ட வகுத்தல் முறையில் வகுத்து மீதியை கண்டுபிடிப் போம். இதன் குணங்களை உபயோகித்து இரண்டு மிகை எண்களின் உ.பொ.கா. (HCF) எப்படி கண்டுபிடிப்பது என்பதைப்பார்க்கலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

மற்றொரு பக்கம் எண் கணித அடிப்படைத்தேற்றம் மிகை எண்களின் பெருக்கலைக்கொண்டதாக உள்ளது. ஒரு கூட்டு எண்ணை, பகா எண்களாக பிரித்து எழுதுவதே எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றம் என்பதை நீங்கள் முன்பே அறிவாய். இத்தேற்றம் கணிதத்தில் அதிகம் பயன்படுகிறது. எண் கணித அடிப்படைத்தேற்றம், நமக்கு இரண்டு முக்கிய விதத்தில் பயன்படுகிறது. முதலாவது $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ போன்ற அனேக எண்களை விகிதமுறு எண்கள் என நிரூபிப்பதற்கு உதவுகிறது, என்பதை நீங்கள் 9ஆம் வகுப்பில்

படித்துள்ளீர்ள். இரண்டாவதாக, $\frac{p}{q},(q\neq0)$ என்ற அமைப்பில் உள்ள

விகிதமுறு எண்ணை எந்தெந்த சூழலில் முடிவுறும் தசம விரிவாக்கத்தையும், எந்தெந்த சூழலில் முடிவுறா தசம விரிவாக்கத்தையும் கொன்டிருக்கும்

என்பதை கண்டறியவும் பயன்படுகிறது. $\frac{p}{q}$ ன் பகுதி எண் q ன் பகா காரணிகளின் தசம விரிவாக்கத்தை கொன்டு இதை புரிந்துகொள்ளலாம்.

1.2 எண் கணித அடிப்படைத்தேற்றம் :

முந்தைய வகுப்புகளில் ஒரு இயல் எண்னை எப்படி அதனுடைய பகாக்காரணிகளின் பெருக்குதொகையாக எழுதலாம் என்பதை படித்துள்ளீர்கள். உதாரணத்திற்கு $2 = 2, 4 = 2 \times 2, 253 = 11 \times 23$ மற்றும் பல. இனி, இயல் எண்களை மறு திசையில் இருந்து பார்க்க முயற்சிக்கலாம். அதாவது, பகா எண்களை பெருக்கினால் இயல் எண்களை உருவாக்க முடியுமா? இதைப்பற்றி படிப்போம்.

பகா எண்கள் 2, 3, 7, 11 மற்றும் 23 ஐ எடுத்துக்கொள். இவற்றில் சில அல்லது அனைத்து எண்களையும் எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் பெருக்கினால் ஒரு பெரிய மிகை எண்களின் தொகுப்பு கிடைக்கிறது. (உண்மையில் கூறினால் எண்ணிலா எண்கள் கிடைக்கின்றன.)

ஒரு சில எண்களை பட்டியலிட்டு பார்போம் :

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

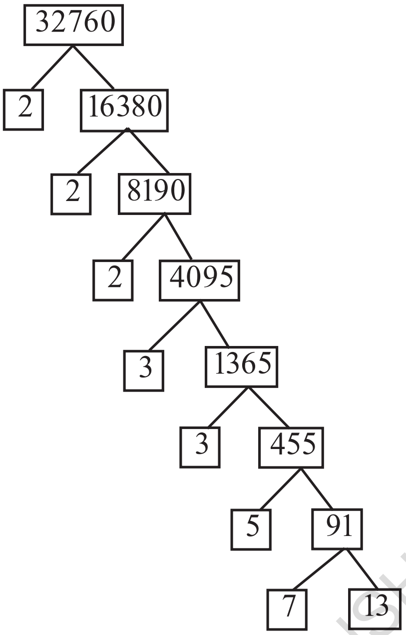
$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ மற்றும் பல.

நீ எடுத்துக்கொண்ட பகா எண்களின் தொகுப்பானது சாத்தியமான அனைத்து பகா எண்களையும் கொண்டுள்ளது எனக்கொள்வோம். இந்த தொகுப்பின் அளவைப்பற்றி உன்னால் யூகிக்க முடியுமா? இது முடிவுறு எண்கள் அல்லது முடிவுறா எண்களைக் கொண்டதாக இருக்குமா? அநேக கூட்டு எண்களை உருவாக்க முடியுமா? நீ என்ன நினைக்கின்றாய்? பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்குத்தொகைளாக இல்லாத கூட்டு எண்கள் கிடைக்க வாயப்பு உண்டா? இதற்கு பதில் அளிக்கையில், மிகை எண்களை நாம் செய்ததுபோன்று எதிர் முறையிலும் காரணிப்படுத்தலாம்.

உனக்கு ஏற்கனவே பழகப்பட்ட காரணி மரத்தை உபயோக்கிபோம். ஒரு பெரிய எண்ணான 32760 ஐ எடுத்துக்கொண்டு கீழ் கண்ட வாறு காரணிப் படுத்துவோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



மேற்கண்டவாறு 32760 ஐ பகா எண்கள் $2 \times 2 \times 2 \times 3\ 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ஆகியவற்றின் பெருக்குத்தொகை ஆக எழுதலாம். $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ என்ற பகாஎண்களின் அடுக்குகளாக எழுதலாம். மற்றும் ஒரு எண் 123456789 ஐ எடுத்துக்கொண்டால் $3^2 \times 3803 \times 3607$ ஆக எழுதலாம். 3803 மற்றும் 3607 இவைகள் பகா எண்களா என்பதை சரிபார்ப்போம். (நீயாகவே வேறுசில இயல் எண்களை எடுத்து முயற்சி செய்). இதிலிருந்து நாம் ஒரு முடிவு செய்வது என்னவென்றால், ஒவ்வொரு கூட்டு எண்ணும் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருகற்பலனாக எழுதலாம் என்பதே. செ ால்லப்போனால் இச்சொற்றொடர் உண்மையே. இதையே எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றம் என்கிறோம். முழுக்களைப்பற்றி அறிந்து கொள்ள இது மிகவும் உதவுகிறது என்பதால் இந்த தேற்றத்தை பொருத்தமான முறையில் கீழ்கண்டவாறு கூறலாம்.

தேற்றம். ***1.1*** (எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றம்) **:** *ஒவ்வொரு கூட்டு எண்ணும் பகா எண்களின் (காரணிகளின்) பெருக்கல்பலனாக எழுதப்படலாம் மற்றும் இக்கரணிப்படுத்துதலானது, பகாக்காரணிகள் எழுதப்படும் வரிசையைத் தவிர்த்து, தனித்தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்கும்.*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 1.2 எண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம் என்று அழைக்கப்படுவதற்கு முன்பே அதற்கு சமமான மொழி அநேகமாக முதன்முதலாக யூக்லிட்டின் உறுப்புக்கள், புத்தகம் IX ல் ஆய்வுப்பொருள் (Proposition) 14 ல் பதிவு செய்யப்பட்டிருந்தது. எப்படி இருப்பினும் முதல் சரியான நிரூபணம் கார்ல் பிரிட்ரிச் காஸ் - Carl Fritirich Gauss என்பவரால் எண்கணித ஆராய்ச்சிக்கட்டுரையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கார்ல் பிரிட்ரிச் காஸ்
(1777-1855)

கார்ல் பிரிட்ரிச் காஸ் கணித வல்லுநர்களின் இளவரசர் என்று குறிப்பிடப்படுகின்றார். மிகச்சிறந்த *3* கணித வல்லுநர்களாக ஆர்க்கிமிடிஸ் Archimedes மற்றும் நியூட்டன் Newton இவர்களில் காஸ் இவரே தனி சிறப்புவாய்ந்தவர் ஆவார். இவர் கணிதம் மற்றும் அறிவியலில் தனது அடிப்படை பங்கை அளித்துள்ளார்.

எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றத்தில் மேலும் ஒரு முக்கிய மான உண்மை உள்ளது. அதாவது கூட்டு எண்ணின் பெருக்கற்பலனுக்குச்சமம் என்பதுதனித்தன்மை பெற்றதாகும். மேலும் பகா எண்கள் எந்த வரிசையில் வேண்டுமானாலும் இருந்து கொள்ளலாம். எடுத்துகாட்டாக $2 \times 3 \times 5 \times 7$ என்பது $3 \times 5 \times 7 \times 2$ அல்லது வேறு வகையிலும் எழுதிக்கொள்ளலாம், இதை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

ஒரு இயற்கை எண்ணின் பகா எண்களின் காரணிகள் எந்த வரிசையில் எழுதப்பட்டாலும் அது தனித்தன்மை வாய்ந்ததாக அமையும்.

பொதுவாக, x என்பது ஒரு கூட்டு எண்ணாக இருக்கும் போது, காரணிப்டுத்தினால் $x = p_1 p_2 .....p_n$ ஆக எழுதலாம். $p_1, p_2 .....p_n$ என்பவைகள் பகா எண்களாகும், ஏறுவரிசையிலும் எழுதப்பட்ருக்க வேண்டும். அதாவது $p_1 \leq p_2 \leq .....p_n$ அதே பகா எண்களை சேர்த்து எழுதுகின்ற போது எண்களின் அடுக்குகளாகவும் எழுதலாம். எ.கா : $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ என எழுதலாம்.

காரணிஎண்கள் ஏறுவரிசையில் எழுதப்பட்டால் கண்டிப்பாக அது தனித்தன்மை பெற்றதாகவே கருதப்படுகிறது.

எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத்தேற்றத்தின் உபயோகங்கள் கணிதத்திலும் மற்றையத்துறைகளிலும் எவ்வாறு பயன்படுத்தபடுகிறது. என்பதை உதாரணங்களைக்கொண்டு பார்க்கலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ. கா 1 : 4^n எண்ணில் n என்பது ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் என எடுத்துக்கொண்டால், n இன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிற்கு, 4^n என்ற எண் '0' ல் முடிவறுமா?

தீர்வு : n க்கு எந்த எண்னாக எடுத்துக்கொண்டாலும் 4^n, 0 ல் முடிய அது 5 இல் வகுக்கக்கூடிய எண்ணாக இருக்க வேண்டும். எனவே 4^n ல் பகா காரணிகளில் 5 எண் இருக்கவேண்டும். ஆனால் இது இயலாது. காரணம் $4^n = (2)2^n$ ஆகும். இதில் 2 மட்டுமே பகா காரணியாக இருக்கும். எனவே எண்கனித அடிப்படைத்தேற்றத்தின் படி 4^n க்கு பகா காரணி வேறு எதுவும் இல்லை என ஆணித்தரமாகிறது. எனவே எண் 0 ல் முடிவதற்கு n க்கு எந்த மதிப்பும் இல்லை.

நீங்கள் முந்தைய வகுப்புக்களில் எண்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை உபயோகித்து இரண்டு மிகை எண்களின் உ.பொ.கா. மற்றும் அ.பொ.ம.க்களை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பது என்பதை ஏற்கனவே தெரிந்து கொண்டுள்ளாய். இந்த முறைக்கு பகா காரணி படுத்துதல் முறை என்று பெயர். இதை ஒரு உதாரணத்தை கொண்டு தெரிந்து கொள்வோம்.

எ. கா 2 : 6 மற்றும் 20 இவைகளின் உ.பொ.கா..மற்றும் அ.பொ.ம. இவைகளை பகா காரணிப்படுத்துதல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நாம் அறிவோம் $6 = 2^1 \times 3^1$ மற்றும் $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

எனவே உ.பொ.கா. $(6, 20)= 2^1$ மற்றும் அ.பொ.ம $(6,20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ இம்முறையே நீங்கள் முந்தைய வகுப்புக்களில் தெரிந்து கொண்டவை ஆகும்.

உ.பொ.கா.$(6,20) = 2^1$ = எண்களின் பொதுவான பகாக்காரணிகளின் மிகச்சிறிய அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலன்.

அ.பொ.ம. $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$. எண்களின் ஒவ்வொரு பகாக்காரணிகளின் மிகப்பெரிய அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலன்.

மேற்கண்ட உதாரணத்திலிருந்து நீ உ.பொ.கா..$(6, 20) \times$ அ.பொ.ம. $(6, 20) = (6 \times 20)$ என்பதைக் கவனித்திருப்பாய்.

உண்மையில் கூறப்போனால், a மற்றும் b என்ற இரண்டு மிகை முழுக்களுக்கு உ.பொ.கா. $(a, b) \times$ அ.பொ.ம. $(a, b) = a \times b$. என சரிபார்க்கலாம். இந்த முடிவை உபயோகித்து இரண்டு மிகை முழுக்களின் உ.பொ.காவை கண்டுபிடித்தால், இவைகளைக் கொண்டு அ.பொ.ம. வைக்கண்டு பிடிக்கலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ. கா 3 : 96 மற்றும் 404 இவைகளின் உ.பொ.கா. வை பகாகாரணிப் படுத்துதல் முறையில் கண்டுபிடி. ஆகையால் அ.பொ.ம ஐயும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நமக்கு தெரியும் : $96 = 2^5 \times 3, 404 = 2^2 \times 101$

எனவே இரண்டு எண்களின் உ.பொ.கா. $2^2 = 4$

$$\text{மேலும் அ.பொ.ம } (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{உ.பொ.கா.}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

எ. கா 4 : 6, 72 மற்றும் 120 இவைகளின் உ.பொ.கா.மற்றும் அ.பொ.ம வை பகாகாரணிப்படுத்துதல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : காரணிப்படுத்துதல் முறையில் $6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ இங்கு 2^1 மற்றும் 3^1 என்பனவே பொதுக்காரணிகளான 2 மற்றும் 3 ஆகியவற்றின் மிகச்சிய அடுக்காகவும் உள்ளன.

ஆகையால் உ.பொ.கா. $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பகாக்காரணிகளான 2, 3 மற்றும் 5 ஆகியவைகளின் மிகப்பெரிய அடுக்குகளாக முறையே 2^3, 3^2 மற்றும் 5^1 என்பனவாக உள்ளன.

எனவே அ.பொ.ம $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

குறிப்பு : $6 \times 72 \times 120 \neq$ உ.பொ.கா. $(6, 72, 120) \times$ அ.பொ.ம $(6, 72, 120)$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் மூன்று எண்களாக இருந்தால் அவற்றின் பெருக்கற்பலனானது அவற்றின் உ.பொ.கா. மற்றும் அ.பொ.ம. வின் பெருக்கல் பலனிற்கு சமமாக இருக்காது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்கண்ட எண்களை அவற்றின் பகா காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுது.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. கீழ்காணும் சோடி எண்களுக்கு அவற்றின் உ.பொ.கா. மற்றும் அ.பொ.ம இவைகளை கண்டுபிடித்து உ.பொ.கா.× அ.பொ.ம = இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலன் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

   (i) 26 மற்றும் 91 (ii) 510 மற்றும் 92 (iii) 336 மற்றும் 54

3. கீழ்கண்ட எண்களுக்கு பகா காரணிப்படுத்துதல் முறையில் அ.பொ.ம மற்றும் உ.பொ.கா. களை கண்டுபிடி.

   (i) 12, 15 மற்றும் 21 (ii) 17, 23 மற்றும் 29 (iii) 8, 9 மற்றும் 25

4. உ.பொ.கா. (306, 657) = 9 என கொடுக்கப்பட்டுள்ள போது அ.பொ.ம (306, 657) ஐக் கண்டுபிடி.
5. ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n க்கு 6^n ஆனது '0' ல் முடிவடையுமா என சரிபார்க்கவும்?
6. $(7 \times 11 \times 13 + 3)$ மற்றும் $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ என்பவைகள் ஏன் கூட்டு எண்கள் என விவரி.
7. ஒரு விளையாட்டுத்திடலைச்சுற்றி ஒரு வட்ட வடிவப்பாதை உள்ளது. சோனியா வட்டப்பாதையை ஒரு சுற்று சுற்றிவர 18 நிமிடங்கள் எடுத்துக்கொள்கிறாள். இதைப்போலவே ரவி ஒருசுற்று சுற்றிவர 12 நிமிடங்கள் எடுத்துக் கெள்கிறான். இரண்டு பேரும் ஒரே நேரத்தில், ஒரே ஆரம்பபுள்ளியில், ஒரே திசையை நோக்கிச்சென்றால் எவ்வளவு நேரம் கழித்து இருவரும் ஆரம்பபுள்ளியில் மறுபடியும் சந்தித்துக்கொள்வார்கள்?

1.3 விகிதமுறா எண்களை திரும்ப அலசுதல் (Revisiting Irrational Numbers)

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

9 ஆம் வகுப்பில் விகிதமுறா எண்களையும் அவைகளின் அநேக பண்புகளைப்பற்றியும் அறிந்து கொண்டீர்கள். விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் இவைகள் இரண்டும் சேர்ந்து எப்படி மெய் எண்கள் கிடைக்கின்றன என்பதையும் தெரிந்து கொண்டீர்கள். விகிதமுறா எண்களை எப்படி எண் கோட்டின் மீது இடங்குறிப்பது என்பதையும் தெரிந்து கொண்டிர்கள். இந்த பிரிவில் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ மற்றும் $5-\sqrt{3}$, பொதுவாக $\sqrt{p}$, இதில் p என்பது பகா எண், எப்படி விகிதமுறா எண் என்று நிரூபிப்பது என்பதைப்பார்போம். எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றத்தை உபயோகித்து நிரூபணம் செய்வோம்.

's' என்பது $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுதமுடியாததாகவும் இதில், p மற்றும் q ஆகியன முழுக்கள், $q \neq 0$ ஆகவும் இருக்கும்போது, விகிதமுரா என் என்றழைக்கப்படுகிறது.உனக்கு ஏற்கனவே தெரிந்த விகிதமுறா எண்கள் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110 ...... மற்றும் பல.

நாம் $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்பதை நிரூபணம் செய்வதற்கு முன்பு₹, எண் கணித அடிப்படைத்தேற்றத்தின் அடிப்படையில்

நிரூபணத்தைக் கொண்ட கீழ்காணும் தோற்றமானது நமக்கு தேவையாக உள்ளது.

தேற்றம் 1.2 : p என்ற எண் ஒரு பகா எண்ணை எடுத்துக்கொள். p - யானது a^2 ஐ வகுக்கும் எனில், p யானது a - ஐயும் வகுக்கும். இதில் a யானது ஒரு மிகைமுழு.

***நிரூபணம் :**

a வின் பகா காரணியாக்குதலை கீழ்கண்டவாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

$a = p_1\, p_2 ...... p_n$, இதில் $p_1, p_2, ..., p_n$ என்பன பகாக்காரணிகள், எல்லாமே வெவ்வேரானதாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

$$\therefore a^2 = (p_1\, p_2 ...... p_n)\,(p_1\, p_2 ...... p_n) = p^2_1\, p^2_2 ...... p^2_n$$

a^2 ஐ p வகுக்கும் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகையால் எண்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை உபயோகித்தால் p என்பது a^2 ன் பகா காரணி ஆகும். எப்படி இருப்பினும் எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றத்தில் காரணிகளின் தனித்தன்மையை உபயோகிக்கின்ற போது நாம் a^2 ன் பகா காரணிகள், $p_1, p_2, ..., p_n$ என்பது உணருகிறோம். ஆகையால் p என்பது $p_1\, p_2 ......, p_n$ இவைகளில் ஒன்று ஆகும்.

இப்போது, $a = p_1\; p_2 ...... p_n$ என்பதால் a ஐ p வகுக்கின்றது.

இப்போது நாம் $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்பதை நிரூபிக்க தயாராக உள்ளோம்.

இந்த நிரூபணம் முரண்பாடால் நிரூபணம் என்ற ஒரு கலைநுட்பத்தை அடிப்படையாக கொண்டது. (இந்த கலை நுட்பத்தைபற்றி பிற்சேற்கை 1ல் விரிவாக அலசப்பட்டுள்ளது).

தேற்றம் 1.3 : $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண்.

நிரூபணம் : $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்று முரணாக எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே, $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, இதில் r மற்றும் s $(\neq 0)$ என்பன முழுக்கள். r மற்றும் s ஆகியன *1* - ஐ தவிர வேறு பொதுக்காரணியைக் கொண்டுள்ளது என்க. அப்பொதுக்காரணியால் வகுப்பதன் மூலம் $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ என்பது கிடைக்கும். இதில், a மற்றும் b ஆகியன பொதுக்காரணிகளற்றவை.

ஆகையால் $b\sqrt{2} = a$ ஆகும்.

இரண்டு பக்கமும் வர்கமாக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது $2b^2 = a^2$ எனவே a^2 ஐ 2 வகுக்கிறது. இப்பொழுது தேற்றம் 1.2 இன் படி a வை 2 வகுக்கின்றது. எனவே நாம் $a = 2c$ என எழுதலாம், c ஒரு முழு.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

*தேர்வுக்கு ஏற்றது அல்ல.

a இன் மதிப்பை பொருத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது $2b^2 = 4c^2$, $\therefore b^2 = 2c^2$

இதன் பொருள் b^2 ஐ 2 வகுக்கிறது. எனவே b ஐ 2 வகுக்கிறது.

(மறுபடியும் தேற்றம் 1.3 ஐ உபயோகி. p = 2 என எடுத்துக்கொள்)

ஆதலால் a மற்றும் b க்கு குறைந்தது 2 என்ற பொதுக்காரணி உள்ளது. ஆனால் இது a மற்றும் b க்கு 1 மட்டுமே பொதுக்காரணி என்பதற்கு முரணாக உள்ளது.

இந்த முரண்பாடானது நாம் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்று எடுத்துக்கொண்டதின் விளைவு ஆகும்.

எனவே நாம் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா என முடிவு செய்கிறோம்.

எ.கா 5: $\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

தீர்வு : $\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என மறுதலையாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ என்றமைந்தவகையில் a மற்றும் $b(\neq 0)$ ஆகிய முழுக்களை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒருவேளை a மற்றும் b க்கு ***1*** ஐ விடுத்து வேறு பொதுக்காரணி உண்டு எனில் அப்பொதுக்காரணியால் a மற்றும் b இவைகளை வகுத்து a மற்றும் b களை பொதுக்காரணிகளற்றவைகளாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே $b\sqrt{3} = a$ ஆகிறது.

இரண்டு பக்கமும் வர்க்கமாக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது $3b^2 = a^2$

ஆகையால், a^2 ஐ 3 வகுக்கிறது. மேலும் 1.2 தேற்றத்தின்படி a ஐ 3 வகுக்கிறது என்பது தொடர்கிறது.

எதோ ஒரு முழு c ஐ க் கொண்டு நாம் a = 3c என எழுதலாம். a வின் மதிப்பை பொருத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது $3b^2 = 9c^2$ அதாவது $b^2 = 3c^2$

இதன் பொருள் b^2 ஐ 3 வகுக்கிறது. எனவே b ஐ 3 வகுக்கிறது. (தேற்றம் 1.2 ஐ உபயோகி, p = 3 என எடுத்துக்கொள்)

ஆகையால் a மற்றும் b க்கு குறைந்தது 3 என்பது பொதுக்காரணியாக இருக்கும். ஆனால் a மற்றும் b என்பவைகள் பொதுக்காரணிகளற்ற எண்கள் என்பதால் இது a மற்றும் b க்கு 1 மட்டுமே பொதுக்காரணி என்பதின் முரண்பாடாக உள்ளது.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

இந்த முரண்பாடானது நாம் $\sqrt{3}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்று எடுத்துக் கொண்டதின் கரணமாக எழுந்துள்ளது.

எனவே நாம் $\sqrt{3}$ என்பது விகிதமுறா எண் என முடிவுசெய்கிறோம்.

நாம் 9 ஆம் வகுப்பில் கற்றதை நினைவு கூறுவோம்.

- விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் மற்றும் வித்தியாசமானது விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- பூச்சியம் அல்லாத விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கற்பலன் மற்றும் வகுத்தலானது விகிதமுறா எண் ஆகும்.

ஒரு சில குறிப்பிட்ட வகைகளை இங்கு நிரூபிக்கலாம்

எ.கா 6: $5 - \sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனக்காண்பி.

தீர்வு: $5-\sqrt{3}$ என்பதை முரணாக விகிதமுறு எண்ணாக எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது, $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ என்றமைந்த வகையில் பொதுக்காரணிகளற்ற a மற்றும் b $(b \neq 0)$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடிக்கலாம்.

எனவே, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ ஆகிறது.

சமன்பாட்டை மாற்றி அமைத்தால் நமக்கு கிடைப்பது,

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$$

a மற்றும் b என்பன முழுக்கள் என்பதால், $5 - \frac{a}{b}$ ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகவும் $\sqrt{3}$ யும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவும் நமக்கு கிடைக்கிறது.

ஆனால் இது $\sqrt{3}$ என்பது விதமுறா எண் என்பதற்கு முரணாக உள்ளது. இந்த முரண்பாடு எழுவதற்கான காரணம் நாம் தவறான ஒரு யூகத்தை அதாவது $5-\sqrt{3}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக எடுத்துக் கொண்டதே.

எனவே நாம் $5-\sqrt{3}$ என்பது, விகிதமுறா எண் என முடிவு செய்கிறோம்.

எ.கா 7: $3\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிமுறா எண் எனக்காண்பி.

தீர்வு : $3\sqrt{2}$ என்பதை முரணாக விகிதமுறு எண்ணாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ என்றமைந்த வகையில், பொதுக்காரணிகளற்ற a மற்றும் b $(b \neq 0)$ ஆகியவற்றை நாம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மாற்றி அமைத்தலில் நமக்கு $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ஆகிறது.

3, a மற்றும் b என்பவைகள் முழுக்கள் என்பதால் $\frac{a}{3b}$ என்பது விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{2}$ என்பதும் விகிதமுறு எண் ஆகிறது. ஆனால் இது

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்ற உண்மைக்கு முரணாக உள்ளது. எனவே நாம் $3\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்ற முடிவுக்கு வரலாம்.

பயிற்சி - 1.2

1. $\sqrt{5}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபி.
2. $3 + 2\sqrt{5}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபி.
3. கீழ்கண்டவைகளை விகிதமுறா எண்கள் என நிரூபி.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 தொகுப்பு :

இந்த அதிகாரத்தில் நீங்கள் படித்தவைகள் :

1. **எண்கணிதத்தின் அடிப்படைத்தேற்றம் :**

   ஒரு கூட்டு எண் அதனுடைய பகா காரணிகளின் பெருக்கல் தொகைக்கு சமம். கிடைத்த பகாகாரணிகள் அமைந்துள்ள வரிசையை தவிர்த்து இந்த காரணிப்படுத்துதல் தனித்தன்மை வாய்ந்தது ஆகும்.

2. p என்பது ஒரு பகா எண் மற்றும் p யானது a^2 ஐ வகுக்கும் எனில் p யானது a - வையும் வகுக்கும். இதில் a என்பது ஒரு மிகை முழு.

3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ இவைகள் விகிதமுறா எண்கள் என நிரூபித்தல்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படிப்பவர்களுக்கு ஒரு குறிப்பு

நீங்கள் படித்தவை :

p, q மற்றும் r மிகை முழுக்களாக இருந்தால்,

HCF (p, q, r) × LCM (p, q, r) ≠ p × q × r (எ.கா.8ஐ பார்)

p, q மற்றும் r மூன்று எண்களாக இருக்கின்ற போது கீழ்காணும் முடிவுகள் உண்மையாகின்றன.

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p.\, q.\, r.\, \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q).\, \text{HCF}(q, r).\, \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p.\, q.\, r.\, \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q).\, \text{LCM}(q, r).\, \text{LCM}(p, r)}$$

பல்லுறுப்புக் கோவைகள்
POLYNOMIALS

G5U8C7

2

2.1 அறிமுகம் :

9ஆம் வகுப்பில், நீங்கள் ஒரு மாறிலி மற்றும் அவைகளின் படிகளைப் பற்றியும் படித்தீர்கள். $P(x)$ இல், x இன் அதிகபட்ச அடுக்கு, $P(x)$ பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி என படித்தீர்கள் என்பதை நினைவு கூறவும். உதரானமாக $4x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையில் xன் படி *1* ஆகும். $2y^2 - 3y + 4$ என்பது பல்லுறுப்புக்கோவையில் மாறி y ன் படி *2* ஆகும். $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ பல்லுறுப்புக்கோவையில் மாறி x ன் படி *3* மற்றும் $7u^6 - \frac{3}{4}u^4 + 4u^2 + u - 8$ பல்லுறுப்புக்கோவையில் u ன் படி *6*. $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ போன்றவைகள், பல்லுறுப்புக்கோவைகள் அல்ல.

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி *1* என்றால் அதை நாம் ஒரு **படி பல்லுறுப்புக்கோவை** என்று அழைக்கின்றோம். உதாரணத்திற்கு $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, மற்றும் பல ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி *2* என்றால், அதை நாம் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை என்று அழைக்கின்றோம். இருபடி (quadratic polynomial) என்ற வார்த்தை சதுரம் square என்று வார்த்தையில் இருந்து வந்ததாகும். உதாரணத்திற்கு $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 - \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$, மற்றும் பல ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாட்டில் மாறியின் குணகங்கள் மெய் எண்களாக இருக்க வேண்டும். பொதுவாக x என்ற மாறியைக்கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடுகள் $ax^2 + bx + c$, என்ற வடிவில் இருக்க வேண்டும். a,b, மற்றும் c இவைகள் மெய் எண்களாகவும் $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையில் படி *3* ஆக இருந்தால் அதற்கு முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை ஆகும். உதாரணத்திற்கு $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}x^3$, $3 - x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ ஆகும். முப்படிக்கோவைகளின் இதனுடைய பொது வடிவம், $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ஆகும். இங்கு a, b, c, d மெய் எண்கள் ஆகும். $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பொழுது $p(x) = x^2 - 3x - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $x = 2$ என பல்லுறுப்புக்கோவையில் பொருத்தினால் நமக்கு $p(2) = (2)^2 - 3(2) - 4 = -6$, என கிடைக்கிறது. இதைப்போலவே p(0) என்பதே x=0 வில் $p(x)$ இன் மதிப்பாகும், அதாவது −4 ஆகும்.

$p(x)$ என்பது x ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை ஆனால் மற்றும் k என்பது மெய் எண் ஆனால் x க்கு பதில் k ஐ இடமாற்றம் செய்யால் நமக்கு $x = k$ வுக்கு P(k) ன் மதிப்பு கிடைக்கிறது. இதை P(k) என குறிப்பிடலாம்.

$p(x) = x^2 - 3x - 4$,

$x = -1$ என எடுத்துக்கொண்டால் $p(x)$ ன் மதிப்பு என்ன?

நமக்கு கிடைப்பது, $p(-1) = (-1)^2 - 3x(-1) - 4 = 0$

மேலும், $p(4) = (4)^2 - 3(4) - 4 = 0$ ஆகும்.

$p(-1) = 0$ மற்றும் $p(4) = 0$, கிடைப்பதால், **−1** மற்றும் **4** இவைணீள் $x^2 - 3x - 4$ என்ற இருபடிச் சம்பாட்டின் பூச்சியங்களாகும். பொதுவாக $p(K) = 0$ ஆக இருப்பின், k என்ற மெய் எண்ணானது **பூச்சியப்பல்லுறுப்புக் கோவை** $p(x)$ இன் பூஜ்ஜியம் என அழைக்கப்படுகிறது.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9 ஆம் வகுப்பில் நீங்கள் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் பூஜ்ஜியங்களை எவ்வாறு கண்டு பிடிப்பது என்பதை படித்துள்ளீர்கள். $p(x) = 2x + 3$ என்ற ஒருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டால், k என்பது அதன் பூஜ்ஜியம் எனில் $p(k) = 0$ என்பது $2k + 3 = 0$ ஆகையால், $k = \frac{-3}{2}$ என கொடுக்கிறது.

பொதுவாக k என்பது p(x) ன் பூச்சியமாக k இருந்தால் $p(x) = ax + b$ ஆனால் பிறகு $p(k) = ak + b = 0$ ஆகும்.

$k = -\frac{b}{a}$ ஆக இருக்கும்.

எனவே $ax + b$, என்ற ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் $-\frac{b}{a}$ ஆகும்.

ஆகையால் $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x \text{ ன் குணகம்}}$ என பூச்சியத்தின் மதிப்பு கிடைக்கிறது.

இப்படியாக பூச்சியப்பல்லுறுப்புக்கோவை அதனுடைய குணகங்களைப் பொருத்துள்ளது. மற்ற பல்லுறுப்புக்கோவைகளிலும் இதைப்போன்றே இருக்குமா? உதரணமாக இருபடிபல்லுறுப்பு க்கோவையின் பூஜ்ஜியங்களும் குணகங்களையே பொருத்துள்ளதா?

இந்த பாடத்தில் மேற்கண்ட கேள்விகளுக்கு பதில் அளிக்க முயற்சி செய்வோம். மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு வகுத்தல் அல்காரிதம் பற்றியும் படிப்போம்.

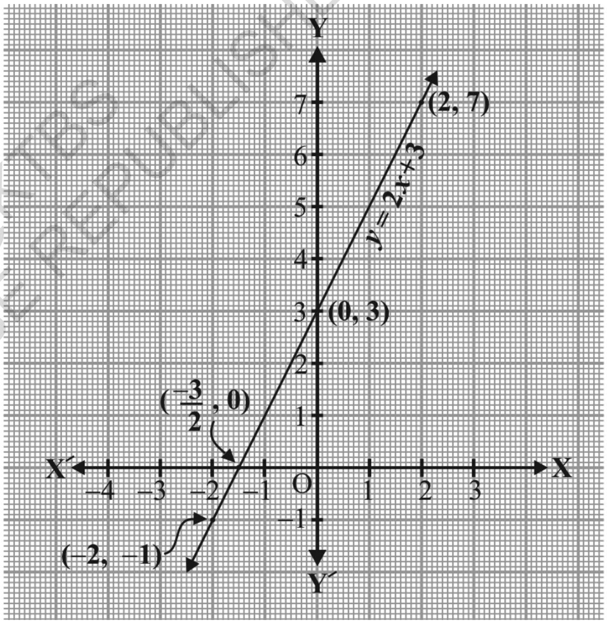
2.2 பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் அர்த்தம் :

p(k) = 0 ஆக உள்ளபோது p(x) பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமானது மெய் எண் k என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். பல்லுறுப்புக்கோவகளின் பூஜ்ஜியங்கள் ஏன் முக்கியம்? இங்கு பதில் அளிப்பதற்கு முதலில் ஒருபடி மற்றும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் வரைபடத்தில் குறிப்பிடுதல் மற்றும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் வடிவியல் அர்த்தங்களையும் பார்ப்போம்.

முதலில் ஒருபடிச்சமன்பாடு $ax+b, a\neq0$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம். IX ஆம் வகுப்பில் $y = ax + b$ என்பதின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு என படித்தீர்கள். உதாரணமாக $y = 2x + 3$ ன் வரைபடம் (−2, −1) மற்றும் (2,7) என்ற புள்ளிகளின் வழியாக செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கின்றது.

x	−2	2
$y = 2x + 3$	−1	7

படம் 2.1 லிருந்து $y= 2x + 3$ என்பதன் வரைபடமானது, x – அச்சை $x=-1$ மற்றும் $x=-2$ க்கும் மத்தியில் வெட்டுகின்றன. அதாவது$(-\frac{3}{2},0)$ என்ற புள்ளி ஆகும். நமக்கு $2x + 3$ ன் பூச்சியம் $-\frac{3}{2}$ என்பது தெரியும். இப்படியாக பல்லுறுப்புக் கோவையான $2x + 3$ இன் பூஜ்ஜியமானது $y=2x+3$ இன் வரைபடம் x அச்சை வெட்டும் புள்ளி ஆகும்.



படம் 2.1

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

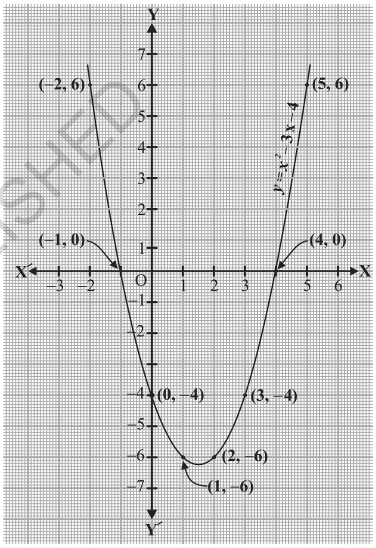
பொதுவாக $ax + b$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $a \neq 0$ ஆக உள்ளபோது $y = ax + b$ ன் வரைபடம் x அச்சை $(-\frac{b}{a}, 0)$ என்ற ஒரே புள்ளியில் வெட்டும் நேர்கோடாகும்.

ஆகவே, $ax + b$, $a \neq 0$ என்ற ஒரு படிச்சமன்பாடானது, ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தையே கொண்டது. அதாவது, $y = ax + b$ என்ற வரைபடம் x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x அச்சுத்தூரமே அந்த பூஜ்ஜியமாகும்.

இப்பொழுது இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியத்தின் வடிவியல் அர்த்தத்தை பார்ப்போம். $x^2 - 3x - 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்*. $y = x^2 - 3x - 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வடிவியல் அர்த்தத்தை படிப்போம். x இன் சில மதிப்புகளுக்கு ஒத்த $y = x^2 - 3x - 4$ ன் சில மதிப்புக்களை மதிப்புக்களை 2.1 அட்டவணையில் கண்டுபிடிப்போம்.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

மேற்கண்ட புள்ளிகளை வரைபடத்தின் மீது இடங்குறித்தால் படம் 2.2ல் இருப்பபதைப் போல் கிடைக்கும்.



படம் 2.2

உண்மையில் கூறப்போனால் $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ஆக உள்ளபோது $y = ax^2 + bx + c$ என்ற வரைபடம், மேற்புறம் திறந்த வாறு $\cup$ அல்லது கீழ்புறம் திறந்தவாறு $\cap$, $a > 0$ அல்லது $a < 0$ ஆகவும் உள்ள மதிப்புகளை பொருத்து கிடைக்கும். இந்த வளைவுகளுக்கு பரவளையங்கள் (parobolas) என்று பெயர்.

அட்டவணை 2.1 லிருந்து இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் –1 மற்றும் 4 ஆகும். படம் 2.2 லிருந்து $y = x^2 - 3x - 4$ வரைபடம் x அச்சுவை –1 மற்றும் 4 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

இவ்வாறாக, $y = x^2 - 3x - 4$ என்ற வரைபடமானது x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளில் x இன் அச்சுத்தூரங்களே, $x^2 - 3x - 4$ என்ற இருபடிபல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

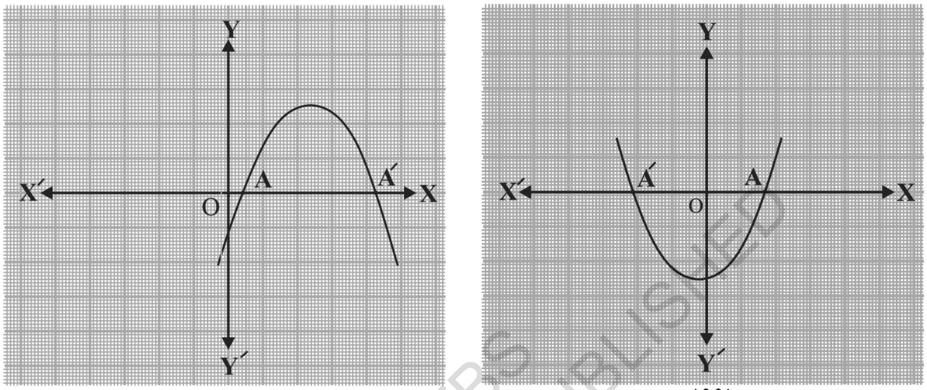
இது அனைத்து இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் உண்மை ஆகிறது. $y = ax^2 + bx + c$ ன் வரைபடம் பரவளையமாக x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x அச்சுத்தொலைவுகளே $ax^2 + bx + c$ ல் $a \neq 0$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புகோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* Plotting of graphs of quadratic or cubic polynomials is not meant to be done by the students, nor is to be evaluated.

நாம் முன்பு படித்ததைப் போன்று $y = ax^2 + bx + c$ ன் வரைபடத்தின் அமைப்பானது கீழ்வரும் 3 வகைகளில் நமக்கு கிடைக்கும்.

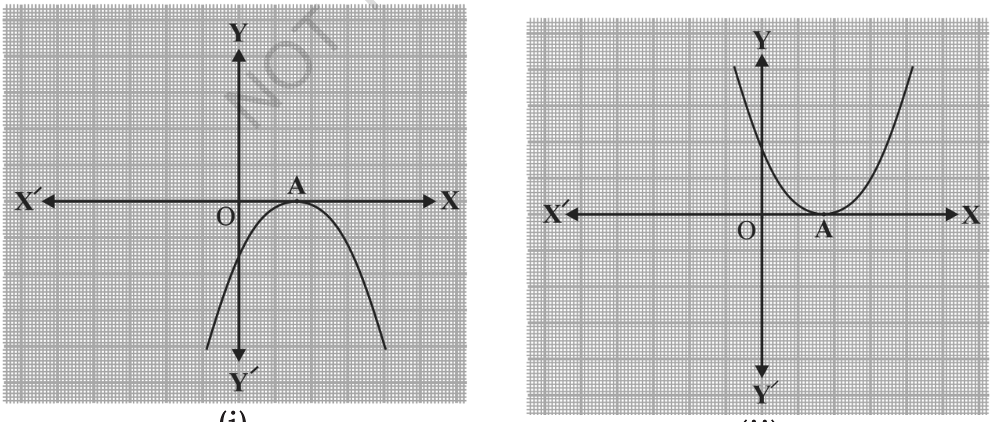
வகை (i) : இதில் வரைபடம் x அச்சுவை A மற்றும் A^1 இரண்டு தனித்தனி புள்ளிகளில் வெட்டும். இப்புள்ளிகளின் x அச்சுத்தூரங்களே $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும். இந்தவகையில் படம் 2.3 ஐ கவனி.



(i) (ii)

படம் 2.3

வகை (ii) : இங்கு வரைபடம் x அச்சுவை ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றது. மேற்கண்ட இரண்டு புள்ளிகள் A மற்றும் A^1 ஒன்றின் மீது ஒன்றாக ஒரே புள்ளியாக கிடைக்கின்றது. அதாவது இரண்டு புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளியில் ஒத்துப்போகின்றன. படம் 2.4 ஐ கவனி.



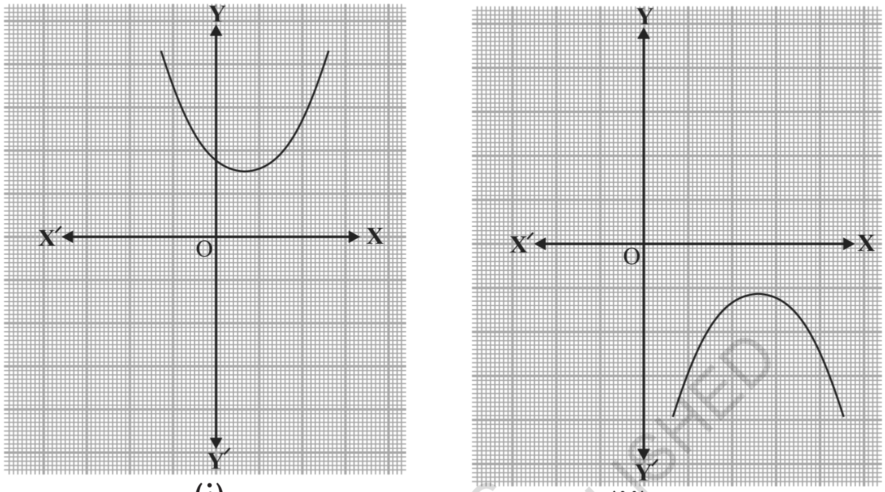
(i) (ii)

படம் 2.4

இந்த வகையில் புள்ளி A வின் $x -$ ன் அச்சுத்தூரம் மட்டுமே $ax^2 + bx + c$ இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியமாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

வகை **(iii)** இங்கு இந்த வரைபடம் முழுமையாக x அச்சுக்கு மேலே அல்லது x அச்சுக்கு கீழே காணப்படும். ஆகையால் வரைபடம் x அச்சுவை எந்த புள்ளியிலும் வெட்டுவதில்லை. படம் 2.5 ஐ கவனி.



(i) (ii)

படம் 2.5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனவே $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையில் இந்த வகையில் பூச்சியம் இல்லை.

மேற்கண்ட வரைபடங்களிலிருந்து இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு இரண்டு தனிப்பட்ட பூச்சியங்கள் அல்லது ஒரு பூச்சியம் அல்லது பூச்சியமே இல்லாமலும் இருக்கலாம். இதனுடைய வேறு ஒரு அர்த்தம், இரண்டு அடுக்குகளைக்கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூச்சியங்கள் உள்ளன.

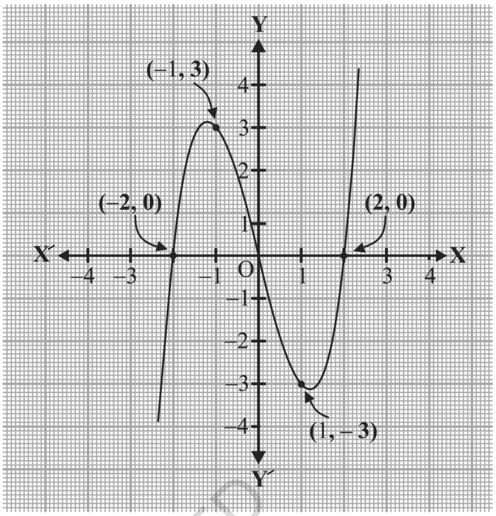
இப்பொழுது மூன்றுபடி (முப்படி) பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் எப்படி இருக்கும் என நீ எதிர்பார்க்கின்றாய்? மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $x^3 - 4x$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இதனுடைய வரைபடம் எப்படி இருக்கும் என்று பார்ப்போம். x க்கு ஒருசில மதிப்புக்களை கொடுத்து y ன் ஒத்த மதிப்புக்களை கீழ்கண்டவாறு பட்டியலிடு.

அட்டவணை 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

இந்த புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் இடங்குறித்துப்பார்த்தால் படம் 2.6 ல் உள்ளதைப்போன்று கிடைக்கும்.

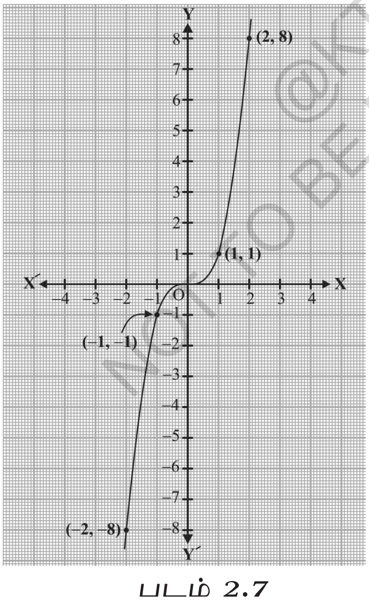
மேற்கண்டஅட்டவணையிலிருந்து −2, 0 மற்றும் 2, $x^3 - 4x$ ன் பூச்சியங்களாக உள்ளதைக்காணலாம். $y = x^3 - 4x$ ன் வரைபடம் x − அச்சுவை வெட்டும் புள்ளிகளின் x அச்சுத்தொலைவுகள் −2, 0 மற்றும் 2 என்பன மட்டுமே எனக் காணலாம். வளைவு x அச்சை 3 புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு 3 பூச்சியங்கள் மட்டுமே உள்ளதைக்காணலாம்.



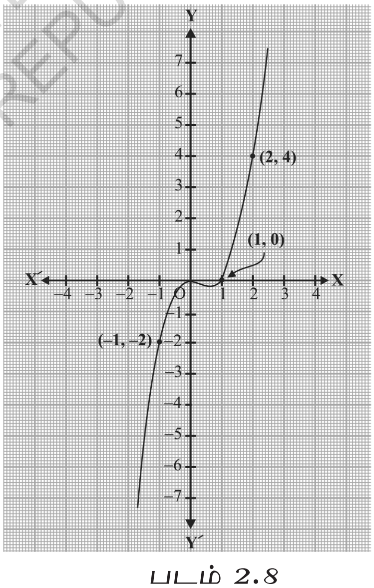
படம் 2.6

மேலும் ஒருசில எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். x^3 மற்றும் $x^3 - x^2$ என்ற முப்படி பல்லுறுப்புகோவையை எடுத்துக் கொள். $y = x^2$ மற்றும் $y = x^3 - x^2$ என்ற வரைபடங்களை 2.7 மற்றும் 2.8 என்றவாறு முறையே வரையவும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 2.7



படம் 2.8

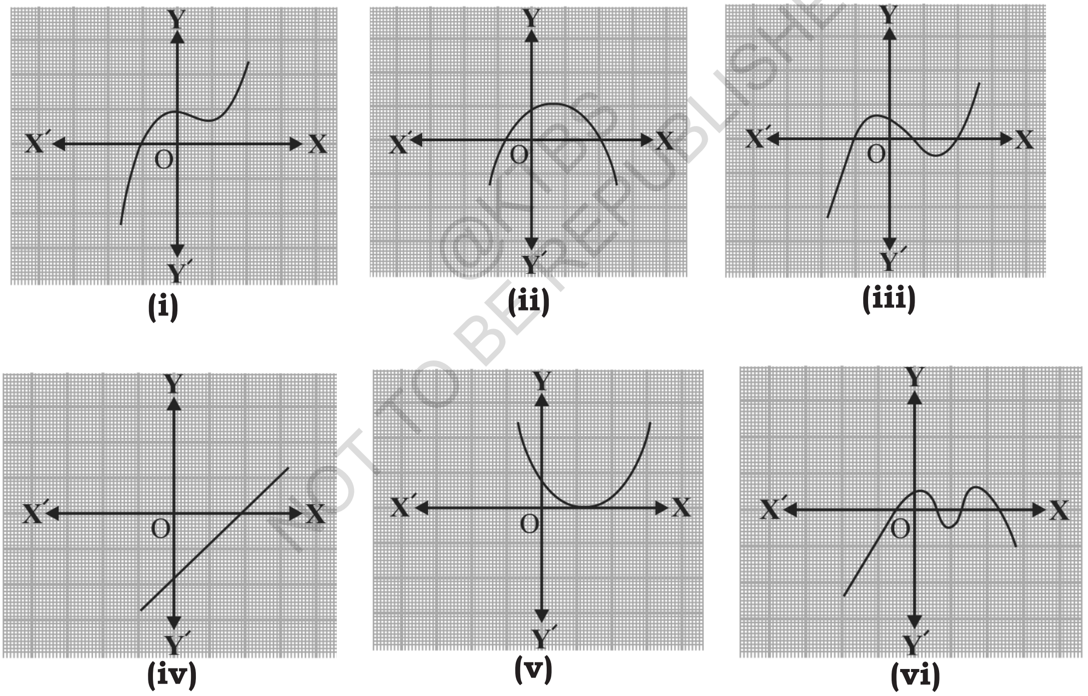
x^3 ன் பூச்சியம் 0 மட்டும் உள்ளதைக்கவனி. மேலும் படம் 2.7ல் வரைபடமானது x அச்சுத்தூரம் 0 ல் மட்டுமே x அச்சை வெட்டுவதைக்காணலாம். இதைப்போலவே $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ஆதலால், 0 மற்றும் 1 மட்டுமே $x^3 - x^2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களாக உள்ளன. மேலும் படம் 9.8ல் $y = x^3 - x^2$ என்ற வரைபடமானது அதே

x அச்சுத்தூரங்களைக் கொண்ட புள்ளிகளில் மட்டுமே x அச்சுவை வெட்டிக்கொள்கின்றன.

மேற்கண்ட உதாரணங்களில் இருந்து மூன்று படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் மூன்று ஆக உள்ளதைக் கவனி.

குறிப்பு : பொதுவாக கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை P(x) ல் n படிகள் இருந்தால் அதன் வரைபடம் x – அச்சை n புள்ளிகளில் வெட்டும். எனவே பல்லுறுப்புக்கோவை p(x) ஆனது அதிக பட்சமாக n பூஜியங்களை கொண்டிருக்கும்.

எ.கா1 : கீழே கொடுக்கப்பட்ட படம் *2.9* ஐ கவனி. p(x) என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் y = p(x) என்ற வரைபடத்தில் ஒவ்வொன்றிலும் பூச்சியத்தின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.



படம் 2.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு :

(i) வரைபடம் x அச்சை *1* புள்ளியில் வெட்டுவதால் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை *1* ஆகும்.

(ii) வரைபடம் x அச்சை *2* புள்ளிகளில் வெட்டுவதால் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை *2* ஆகும்.

(iii) பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும் (ஏன்?)

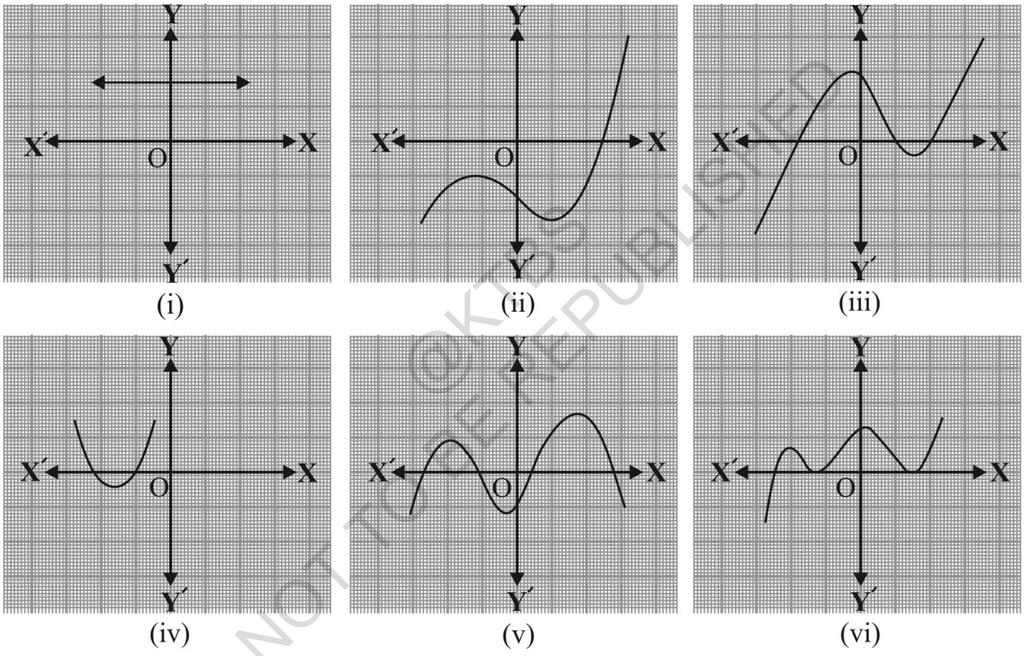
(iv) பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும் (ஏன்?)

(v) பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும் (ஏன்?)

(vi) பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும் (ஏன்?)

பயிற்சி 2.1

1. கீழே படம் 2.10 ல் $y = p(x)$ ன் வரைபடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையிலும் $p(x)$ ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி.



படம் 2.10

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.3 பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்களுக்கு இடையே உள்ள உறவுகள்.

நீங்கள் ஏற்கனவே $ax + b$ என்ற ஒருபடிச்சமன்பாட்டின் பூச்சியம் $-\frac{b}{a}$ என படித்துள்ளீர்கள். பிரிவு 2.1 ல் இருபடிச் சமன்பாட்டின் பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்களுக்கு இடையே ஏற்பட்ட உறவைப்பற்றி எழுந்த கேள்விக்கு விடையளிப்போம். இதற்கு $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ என்ற இருபடி சமன்பாடு ஒன்றை உதாரணத்திற்கு எடுத்துக்கொள்வோம். நீங்கள் IX ஆம் வகுப்பில், மத்திய உறுப்பை இரண்டாக பிரித்து, காரணிபடுத்தினீர்கள். எனவே, பெருக்கல் தொகை $6 \times 2x^2 = 12x^2$ கிடைக்கும் படி மத்திய நடுவில்

உள்ள உறுப்பு '$-8x$' ஐ இரண்டு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதவேண்டும். எனவே நாம் எழுதுவது,

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x\,(x - 3) - 2\,(x - 3) \\ &= (2x - 2)\,(x - 3) \\ &= 2\,(x - 1)\,(x - 3) \end{aligned}$$

எனவே, $x-1 = 0$ அல்லது $x-3=0$ ஆக இருக்கும்போது, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியம் ஆகும். அதாவது $x = 1$ அல்லது $x = 3$ ஆகும்.

எனவே, $2x^2 - 8x + 6$ பூச்சியங்கள் ***1*** மற்றும் ***3*** ஆகும்.

கீழ்கண்டவற்றை கவனி.

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= \boldsymbol{1 + 3 = 4} = \dfrac{-(-8)}{2} = \dfrac{-(x \text{ ன் குணகம்})}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்கல் $= 1 \times 3 = 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ என்ற மற்றுமொரு இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். மத்திய உறுப்பை இரண்டாக பிரிக்கும் முறையில்,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \\ &= 3x\,(x + 2) - 1\,(x + 2) = (3x - 2)\,(x + 2) \end{aligned}$$

எனவே, $3x - 1 = 0$ அல்லது $x - 2 = 0$ எனில் $3x^2 + 5x - 2$ ன் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகிறது. அதாவது $x = \dfrac{1}{3}$ அல்லது $x = -2$ ஆக இருக்கும்போது. எனவே $3x^2 + 5x - 2$ ன் பூச்சியங்கள் $\dfrac{1}{3}$ மற்றும் $\boldsymbol{-2}$ ஆகும்.

கீழ்கண்டவற்றை கவனி :

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= \dfrac{1}{3} + (-2) = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{-x \text{ ன் குணகம்}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்குதல் $= \dfrac{1}{3} \times (-2) = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பொதுவாக, α* மற்றும் β* இவைகள் $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ ன் பூச்சியங்களாக உள்ளபோது $(x - \alpha)$ மற்றும் $(x - \beta)$ என்பன $p(x)$ இன் காரணிகளாக இருக்கும்.

---

* α, β இவைகள் கிரேக்க எழுத்துக்கள் 'ஆல்பா' மற்றும் 'பீட்டா' என்று முறையே அழைக்கப்படுகின்றன. γ 'காம்மா' என்பதை மேல் வகுப்புகளில் படிப்பீர்கள்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore\ ax^2 + bx + c \;=\; k(x-\alpha)\,(x-\beta)$, இங்கு k ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

$= k\,[x^2 - (\alpha+\beta)\,x + \alpha\beta]$

$= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$

x^2 மற்றும் x , மாறிலி இவைகளின் குணகங்களை இரண்டு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ மற்றும் $c = k\alpha\beta$ ஆகும்.

இதனால் நமக்கு கிடைப்பது, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ ன் குணகம்})}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்கல் $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

ஒரு சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எ.கா 2 : இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $x^2 + 7x + 10$ ன் பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்கள் இவைகளுக்கு இடையே உள்ள உறவுகளை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை $x^2 + 7x + 10 = (x+2)\,(x+5)$

எனவே, நமக்கு கிடைக்கும் பூச்சியங்கள் $x + 2 = 0$ அல்லது $x + 5 = 0$ அதாவது மற்றும் ஆகும். ஆகவே $x^2 + 7x + 10$ ன் பூச்சியங்கள் -2 அல்லது -5. இப்பொழுது,

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= \frac{-2 + (-5)}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ ன் குணகம்})}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்கல் $= (-2)\times(-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

எ.கா 3 : $x^2 - 3$ பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களை கண்டுபிடித்து, பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்கள் இவைகளுக்கு இடையே உள்ள உறவுகளை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$ என்ற முற்றொருமையை நினைவுகூறு, இதை உபயோகித்து $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})\,(x + \sqrt{3})$ என எழுதலாம்.

எனவே, $x = \sqrt{3}$ மற்றும் $x = -\sqrt{3}$ ஆக இருக்கும்போது $x^2 - 3$ என்பது பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

இப்பொழுது,

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x \text{ ன் குணகம்})}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்கல் $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$

எ.கா 4 : பூச்சிங்களின் கூட்டுத்தொகை மற்றும் பெருக்குத்தொகை முறையே -3 மற்றும் 2 ஆக இருக்கும். இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை $ax^2 + bx + c$, என எடுத்துக்கொள்வோம். இதனுடைய பூச்சியங்கள் α மற்றும் β வாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

எனவே $\alpha\beta = 2 = \dfrac{c}{a}$

எனவே $a = 1$, $b = 3$ மற்றும் $c = 2$

எனவே நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்யும் வகையில் அமைந்த ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 + 3x + 2$ ஆகும்.

இந்த நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்யும் எந்த ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையுமே $k(x^2 + 3x + 2)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இதில் k என்பது மெய்எண்.

மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவை : இப்பொழுது மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக்கோள்வோம். மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்களுக்கும் மேற்கூறிய உறவு பொருத்தமாகுமா?

உதாரணத்திற்கு $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = 4, -2, \dfrac{1}{2}$ ஆக உள்ளபோது, $p(x) = 0$ ஆக இருக்கும். மூன்றுபடி பல்லுறுப்புகோவை என்பதால் அதிகபட்சமாக மூன்று பூச்சியங்கள் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= 4 + (-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} = \dfrac{-(-5)}{2}$

$$= \frac{-(x \text{ ன் குணகம்})}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$$

பூச்சியங்களின் பெருக்கல் $= 4 \times (-2) \times \dfrac{1}{2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$= -4 = \frac{-8}{2} = \frac{\text{மாறிலியின் உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணகம்}}$$

இருப்பினும், மற்றுமொரு உறவு இவைகளுக்குள் உள்ளது. இரண்டு இரண்டாக பூச்சியங்களின் பெருக்குதொகைகளின் கூடுதலானது,

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = 8 - 1 + 2$$

$$= -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ ன் குணகம்}}{x^3 \text{ ன் குணகம்}}$$

பொதுவாக மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $ax^3 + bx^3 + cx + d$ என்ற அமைப்பில் உள்ளபோது α, β, மற்றும் γ இவைகள் பூச்சியங்களாக இருந்தால் கீழ்கண்ட உறவை நிரூபிக்க முடியும்.

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ஒரு உதாரணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எ.கா 5* : $3, -1, -\frac{1}{3}$ இவைகள், மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ன் பூச்சியங்களா என சரிபார்க்கவும். மேலும் பூச்சியங்கள் மற்றும் குணகங்களிடையே உள்ள உறவை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புகோவையை $ax^3 + bx^3 + cx + d$ என்ற பொதுவடிவத்துடன் ஒப்பிட்டால்,

$a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$, மேலும்,

$$\therefore p(3) = 3 \times 3^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3$$
$$= 81 - 45 - 33 - 3$$
$$= 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3$$
$$= -3 - 5 + 11 - 3$$
$$= 0$$

$$p\left(-\frac{3}{1}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$
$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$
$$= 0$$

* தேர்வுக்கண்ணோட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டது அல்ல

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனவே, 3, –1 மற்றும் $-\frac{1}{3}$ இவைகள் $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ன் பூச்சியங்கள் என சரிப்பார்க்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையால். $\alpha = 3$, $\beta = -1$ மற்றும் $\gamma = -\frac{3}{1}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{3}{1}\right) = 2 - \frac{3}{1} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 3(-1)+(-1) \times \left(-\frac{3}{1}\right) + \left(-\frac{3}{1}\right) \times 3 = -3 + \frac{3}{1} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$\alpha\beta\gamma = (3)\times(-1)\times\left(-\frac{3}{1}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$ என்ற உறவுகள் சரிபார்க்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 2.2

1. கீழ்கண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பூச்சியங்களை கண்டுபிடி மற்றும் பூச்சியங்கள், குணகங்கள் இவைகளுக்கு இடையிலான உறவை சரி பார்க்கவும்.

   i) $x^2 - 2x - 8$ ii) $4s^2 - 4s + 1$ iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   iv) $4u^2 + 8u$ v) $t^2 - 15$ vi) $3x^2 - x - 4$

2. கீழ்கொடுக்கப்பட்டுள்ள பூச்சியங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்குத்தையை முறையே கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையைக் கண்டுபிடி.

   i) $\frac{1}{4}$, –1 ii) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ iii) 0, $\sqrt{5}$

   iv) 1, 1 v) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ vi) 4, 1

3. பல்லுறுப்புக்கோவை $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ன் பூச்சியங்கள் a – b, a, a+b எனில் a மற்றும் b யைக் கண்டுபிடி.

4. பல்லுறுப்புக்கோவை $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ ன் இரண்டு பூச்சியங்கள் $2 \pm \sqrt{3}$ எனில் மற்ற இரண்டு பூச்சியங்களைக் கண்டுபிடி.

5. பல்லுறுப்புக்கோவை $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ஐ பல்லுறுப்புக்கோவை $x^2 - 2x + k$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $(x + a)$ கிடைத்தால் k மற்றும் a மதிப்புக்களை கண்டுபிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.4 தொகுப்பு

இந்த பாடத்தில் நீங்கள் கற்றுக் கொண்டவைகள்

1. பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் படிகள் 1, 2 மற்றும் 3 ஆக இருந்தால் அவைகளுக்கு முறையே ஒருபடி, இருபடி மற்றும் மூன்றுபடி (முப்படி) பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்று பெயர்.
2. a, b,c மெய் எண்களாக உள்ளபோது $a \neq 0$ இருந்தால் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.
3. பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$ வரைபடத்தில், வரைபடம் x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x – அச்சுத்தூரங்களே $y = p(x)$ ன் பூச்சியங்கள் ஆகும்.
4. இதுவே பல்லுனுப்புக் கொவைகளின் வகுத்தல் அல்கோரிதம் எனப்படும். இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு 2 பூச்சியங்களும், மூன்று படி பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு 3 பூச்சியங்களும் அதிகபட்சமாக உள்ளன.
5. இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ ன் பூச்சியங்கள் α, β மற்றும் β எனில் $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
6. மூன்றுபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ன் பூச்சியங்கள் α, β மற்றும் γ எனில்

   $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$ $\qquad$ $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

   மற்றும் $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ ஆகும்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடி
PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

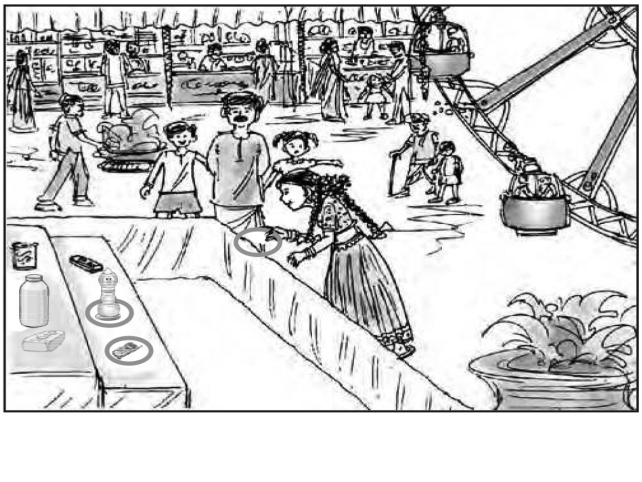
I6J8T4

3

3.1 அறிமுகம் :

உங்கள் வாழ்வில் கீழ்கண்ட சூழ்நிலைகளை நீங்கள் சந்தித்திருக்கலாம். அகிலா ஒரு கிராமத்தில் திருவிழாவிற்குச் சென்றாள். இவள் இராட்ச சக்கர விளையாட்டில் அமர்ந்து விளையாட விரும்பினாள். மற்றும் விழாக்கால வளைய எறியாட்டம் (மேசை மீது வைக்கப்பட்ட பொருட்களின் மீது நீ சரியாக வளையத்தை எறிந்தால் அப்பொருள் உனக்கே சொந்தமாகும்) இவ்விரண்டு விளையாட்டுக்களில் கலந்து கொள்ள விரும்பினாள். அவள் வளையம் எறிதல் விளையாடிய பங்கேற்ற எண்ணிக்கையில் பாதி இராட்சச் சக்கரத்தில் விளையாடிய எண்ணிக்கை ஆகும். இராட்ச சக்கரத்தில் ஒரு முறை விளையாட்டுவதற்கு ரூ 3ம், வளையம் எறிதல் ஒரு முறைவிளையாடுவதற்கு ரூ 4 ம் விளையாட்டுக்கட்டணம் ஆகும். அவள் இரண்டு விளையாட்டிற்கும் சேர்த்து ரூ 20 கட்டணம் செலுத்தினாள் என்றால் இரண்டு விளையாட்டிலும் தனித்தனியாக எத்தனை முறை அவள் விளையாடினாள் என்பதைக் கண்டுபிடி.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



இதற்கான விடைகளை கண்டுபிடிப்பதற்கு பலவிதமான முறைகளில் நீ முயற்சிக்கலாம். ஒரு வேளை அவள் இராட்ச சக்கரத்தில் 2 முறை அல்லது 3 முறை விளையாடி இருப்பாள் என்றெல்லாம் யூகிக்கலாம். இப்படியாக பல வழிகளில் நீ முயற்சி செய்வாய். அல்லது 9 ஆம் வகுப்பில் பயின்ற இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டை இதுபொன்ற சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்தலாம்.

இந்த முறையை இங்கு நாம் அணுகுவோம். அகிலா இராட்சச சக்கர விளையாட்டில் விளையாடிய எண்ணிகையை x எனவும், வளையம் எறிதல் விளையாட்டில் விளையாடிய எண்ணிக்கையை y எனவும் எடுத்துக்கொள், கணக்கில் கூறியபடி,

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

மேலும் $$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு x மற்றும் y ன் மதிப்புக்களை தீர்வுகான முடியுமா? இதற்கு அநேக முறைகள் உள்ளன. இதைப் பற்றி இந்த பாடத்தில் படிப்போம்.

3.2 இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு சோடி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வரைபட முறையில் தீர்வு செய்தல்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு சோடி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு இல்லை எனில் அந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் நிலைத்தன்மை அல்லது உறுதி தன்மை அற்றவை என அழைக்கப்படுகின்றன. இரண்டு மாறிகள் உள்ள ஒரு சோடி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வு உண்டு எனில் அந்த சமன்பாடுகளை உறுதியானவை அல்லது நிலைத்தன்மை உள்ளவை என அழைக்கிறோம். ஒரு சோடி ஒரு படிச் சமன்பாடுகள் சமமானவைகளாக இருக்கும் எனில் அது போன்ற சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

இரண்டு மாறிகளைக்கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடுகளின் சோடியைப் பற்றி கீழ்கண்டவாறு தொகுத்துக் கூறலாம்.

(i) பல நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனில் இதில் ஒரு தீர்வு மட்டுமே இருக்கும் (நிலையான சோடி சமன்பாடுகள்.)

(ii) நேர்க்கோடுகள் இணையாக இருக்கும். அப்போது சமன்பாடுகளுக்குதீர்வு இல்லை. (நிலையற்ற சோடி சமன்பாடுகள்.)

(iii) நேர்க்கோடுகள் ஒன்றின் மீது மற்றொன்று இணைந்து பொருந்தும் (சார்ந்த (நிலையான) சோடி சமன்பாடுகள்)

எடுத்துக்காட்டுகள் **1, 2** மற்றும் **3** ஐ மறுபடியும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) $x - 2y = 0$ மற்றும் $3x + 4y - 20 = 0$ (வெட்டிக் கொள்கின்றன.)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ மற்றும் $4x + 6y - 18 = 0$ (ஒன்றின் மீது மற்றொன்று பொருந்தி போகின்றன.)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ மற்றும் $2x + 4y - 12 = 0$ (இணையாக உள்ளன.)

கொடுக்கப்பட்ட மூன்று உதாரணங்களிலும் $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ இவைகளை எழுதி ஒப்பிட்டு பார்ப்போம். இங்கு a_1, b_1, c_1 மற்றும் a_2, b_2, c_2 என்பவைகள் குணகங்கள் ஆகும் மற்றும் பிரிவு **3.2** இல் சமன்பாடுகள் பொதுவடிவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவனை 3.1

Sl. No.	Pair of lines	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	Compare the ratios	Graphical Representation	Algebraic Interpretation
1	$x - 2y = 0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Intersecting lines	Exactly one solution (unique)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	Coincident lines	Infinitely many solutions
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	Parallel lines	No solution

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

மேற்கண்ட அட்டவணையில் சமன்பாடுகளை

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என எடுத்துக் கொண்டால்

(i) வெட்டிக் கொண்டால் $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ஆக இருக்கும்

(ii) ஒன்றோடு ஒன்று பொருந்தினால் $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ஆக இருக்கும்

(iii) இணையாக இருந்தால் $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ஆக இருக்கும்

உண்மையில் இதனுடைய மறுதலையும் உண்மையாகும். இதை நீயாகவே உதாரணங்களை எடுத்து சரிபார்க்கவும்.

மேலும் ஒரு சில உதாரணங்களை எடுத்து சரிபார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழ்கண்ட சோடி சமன்பாடுகள் நிலையானதா என்று வரைபடம் மூலம் சரிபார்க்கவும் அப்படியிருந்தால் தீர்வுகளையும் கண்டுபிடி.

$$x + 3y = 6 \qquad (1)$$
$$2x - 3y = 12 \qquad (2)$$

தீர்வு : சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) இவர்களின் வரைபடத்தை வரைக. முதலில் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் இரண்டு தீர்வுகளை அட்டவணை 3.5ல் உள்ளவாறு கண்டுபிடி.

அட்டவணை 3.2

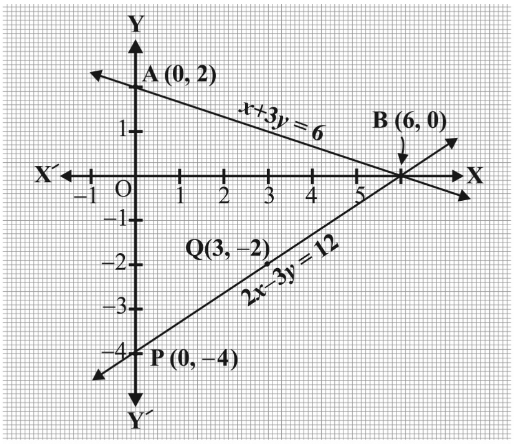
x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	−4	−2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அட்டவணை 3.2 இல் உள்ளவாறு A (0, 2), B (6, 0), P (0, −4), மற்றும் Q(3, −2) புள்ளிகளை வரைப்படத் தாளில் குறித்து AB மற்றும் PQ வை இணைத்து நேர்க்கோடுகளை வரை.

AB மற்றும் PQ க்கு பொதுவான புள்ளியாக B (6, 0) உள்ளது. எனவே இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x = 6$, $y = 0$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளும் நிலையானவை.



படம் 3.1

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்கண்ட சோடி சமன்பாடுகளை வரைபடம் மூலம் தீர்வுகள் இல்லையா தனித்தன்மை பெற்றுள்ளதா அல்லது இணையற்ற அநேக தீர்வுகளை பெற்றுள்ளது எனக்காண்டு பிடி.

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

தீர்வு : சமன்பாடு (2)ஐ $\frac{3}{5}$ ஆல் பெருக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது $5x - 8y + 1 = 0$ ஆகும்.

இது சமன்பாடு (1) போலவே உள்ளது. எனவே இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்துகின்றன. எனவே (1) மற்றும் (2) எல்லையற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது.

அட்டவணை தயாரித்து நீயே வரைபடம் வரைந்து தீர்வு காணவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: சம்பா (champa) ஏலவிற்பனைக்கூட்டம் ஒன்றிற்கு காற்சட்டை மட்டும் அரைப்பாவாடை வாங்குவதற்குச் சென்றாள். அவளுடைய சிநேகிதிகள் எத்தனை காற்சட்டைகள் மற்றும் அரைப்பாவாடைகள் வாங்கினாய் என்று கேட்டார்கள், அதற்கு அவள் ''இரண்டு மடங்கு காற்சட்டைகளில் இரண்டு அரைப்பாவாடைகள் குறைவு. மேலும் நான்கு மடங்கு காற்சட்டைகளில் நான்கு அரைப்பாவாடைகள் குறைவு'' என்று கூறினாள். சம்பா எத்தயை காற்சட்டைகள் எத்தனை அரைப்பாவடைகள் வாங்கினாள்? அவளுடைய சிநேகிதிகளுக்கு உதவிபுரியுங்கள்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தீர்வு : சம்பா வாங்கிய காற்சட்டைகள் x எனவும், அரைப்பாவாடைகள் y எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

பிறகு நமக்கு கிடைத்த சமன்பாடுகள்,

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

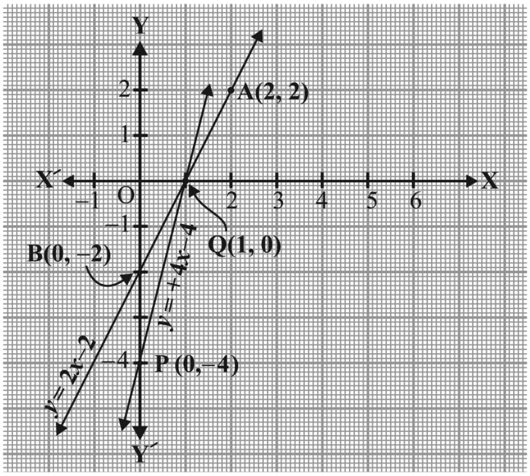
மற்றும் $$y = 4x - 4 \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) இவைகளின் தீர்வுகளை அட்டவணை 3.6ல் உள்ளபடி கண்டுபிடிக்கவும்.

அட்டவணை 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	−2

x	0	1
$y = 4x - 4$	−4	0



படம் 3.2

படம் 3.6ல் உள்ளவாறு இரண்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை குறித்து வரைபடத்தை வரையவும். இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் (1,0) என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x = 1$, $y = 0$ அதாவது வாங்கிய காற்சட்டை 1 மற்றும் அரைப்பாவாடை எதுவும் வாங்கவில்லை.

இந்த தீர்வுகளை வைத்து சமன்பாடுகளை சரிபார்க்கவும்.

பயிற்சி 3.1

1. கீழ்வரும் கணக்குகளுக்கு ஒரு சோடி ஒருபடிச்சமன்பாடுகளை அமைத்து அவைகளை வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க.

i) பத்தாம் வகுப்பில் 10 மாணவமாணவிகள் கணித வினாடி வினாவில் கலந்து கொண்டார்கள். மாணவர்களை விட மாணவிகள் 4 பேர் அதிகம். வினாடி வினாவில் கலந்து கொண்ட மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி.

ii) 5 கரிக்கோல்கள் (பென்சில்கள்) மற்றும் எழுதுகோல்கள் (பேனாக்கள்) மொத்த விலை ₹ 50 ஆகும். இதைப் போலவே 7 கரிக்கோல்கள் மற்றும் 5 எழுதுகோல்கள் மொத்த விலை ₹ 46 ஆகும். ஒரு கரிக்கோல் மற்றும் ஒரு எழுதுகோலின் விலையைக்கண்டுபிடி.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடிச்சமன்பாடுகளின் சோடிகளில் $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ விகிதங்களை ஒப்பிட்டுப்பார்த்து இவைகள் ஒன்றுக்கொண்று வெட்டிக் கொள்கின்றனவா, இணையாக உள்ளனவா அல்லது ஒன்றின் மீது ஒன்று ஒத்துப்போகிறதா எனக்கண்டுபிடி.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. கீழ்கண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடிகளில் $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ விகிதங்களை ஒப்பிட்டுப்பார்த்து இவைகள் ஒன்றுக்கொண்று

வெட்டிக் கொள்கின்றனவா, இணையாக உள்ளனவா அல்லது ஒனறின் மீது ஒன்று ஒத்துப்போகிறதா எனக்கண்டுபிடி.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. கீழ்கண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடி நிலைத்தன்மை/ நிலையற்றவையா எனக்கண்டுபிடி. நிலைத்தன்மை பெற்றவைகள் எனில் வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்.

(i) $x + y = 5, 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8, 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0, \; 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0, 4x - 4y - 5 = 0$

5. ஒரு செவ்வக தோட்டத்தின் சுற்றளவின் பாதி 36m ஆகும். இதனுடைய நீளம், அகலத்தைவிட 4m அதிகமாக உள்ளது. நீளம், அகலம் அளவுகளைக் கண்டுபிடி.

6. $2x + 3y - 8 = 0$ என்ற ஒருபடிச்சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு கீழ்கண்ட கட்டுப்பாடுகள் பூர்த்தி செய்யும் மற்றொரு ஒருபடி சமன்பாட்டை எழுது.

(i) வெட்டிக் கொள்ளும் கோடு (ii) இணைக்கோடு

(iii) ஒன்றின்மீது ஒன்று ஒத்துப்போகும் கோடு

7. சமன்பாடுகள் $x - y + 1 = 0$ மற்றும் $3x + 2y - 12 = 0$ இவைகளின் வரைபடத்தை வரைக. இரண்டு கோடுகளுக்கும், x – அச்சுவுக்கும் இடையில் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் 3 உச்சிகளின் அச்சுத்தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

3.3 ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடியை இயற்கணிதம் மூலம் தீர்வு காணுதல் :

சென்ற பிரிவில் ஒருபடிச்சமன்பாடுகளின் தீர்வை வரைபடத்தின் மூலம் தீர்வு காணுதலைப் படித்தோம். வரைபடத்தில் ஒருசில சிக்கலான புள்ளிகள்

$(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ போன்றவைகளை குறிப்பதற்கு சிரமமாக

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இருப்பதால் தவறுகள் ஏற்பட வாய்ப்புக்கள் ஏற்படலாம் எனவே தீர்வு காண்பதற்கு வேற்று முறைகள் உள்ளதா? இதற்கு அநேக இயல்கணித முறைகள் இருப்பதால் ஒரு சிலவற்றை கீழே படிப்போம்.

***3.3.1* பதிலீடு முறை (Substitution Methods)** : பதிலீடு முறையில் ஒரு சில கணக்குகளைப் படிப்போம்.

எ.கா. *4* : கீழ்கண்ட சோடி சமன்பாடுகளை தீர்வு காண்.

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

தீர்வு :

படி *1* : இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒரு மாறியை ஒருபக்கமும் மற்றொரு மாறியை மறுபக்கமும் கீழ்கண்டவாறு எடுத்துக்கொள்வோம். *(2)* ஆம் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x + 2y = 3$$
$$x = 3 - 2y \qquad (3)$$

படி *2* : x ன் மதிப்பை, சமன்பாடு *(1)*ல் பதிலிடுவோம். நமக்கு கிடைப்பது,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$
$$21 - 14y - 15y = 2$$
$$-29y = -19$$
$$y = \frac{19}{29}$$

படி *3* : கிடைத்த $y = \frac{19}{29}$ என்ற மதிப்பை, சமன்பாடு 3ல் பதிலீடு செய்.

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

எனவே தீர்வுகள் $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் : $x = \frac{49}{29}$ மற்றும் $y = \frac{19}{29}$ என்ற மதிப்புக்களை சமன்பாடுகள் *(1)* மற்றும் *(2)*ல் பதிலீடு செய்தால் இரண்டு பக்கமும் சரியாக இருப்பதைப் பார்க்கலாம்.

பதிலீடு முறையை தெளிவாக புரிந்து கொள்வதற்கு கீழ்கண்ட படிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

படி *1* : இரண்டு சமன்பாடுகளிலும், ஏதாவது ஒன்றை வசிதியாக உள்ளதை, அதாவது *(2)*ல் x ஐ இ.கை.ப எடுத்துக்கொள்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படி 2 : x ன் மதிப்பை (1)ல் பதிலீடு செய்து சமன்பாடு முழுவது y மாறியில் உள்ளதை சுருக்கி y ன் மதிப்பை $y = \frac{19}{29}$ ஐ கண்டுபிடி.

படி 3 : y ன் மதிப்பை கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் ஏதவது ஒன்றில் அதாவது (3)ல் பதிலீடு செய்து, அடுத்த மாறியை x ஐ கண்டு பிடி.

குறிப்பு : ஒரு சோடி ஒரு படிசமன்பாட்டை தீர்வு காணுவதற்கு, ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறிக்கு பதிலாக பதிலீடு செய்வதால் இம்முறைக்கு பதிலீடுமுறை என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : பயிற்சி 3.1ல் கணக்கு எண் 1ல் உள்ளதை பதிலீடு முறையில் தீர்வுகாண்.

தீர்வு : அப்டாப் மற்றும் அவரின் மகள் வயது முறையே s மற்றும் t வருடங்கள் என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே நமக்கு கிடைக்கும் ஒருச்சோடி ஒருபடிச்சமன்பாடுகள்.

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ ie, } s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

$$s + 3 = 3(t + 3), \text{ ie, } s - 3t = 6 \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) ஐ உபயோகித்து $s = 3t + 6$

சமன்பாடு (3)ஐ (1) ல் முதலீடு செய்தால் நடக்கு கிடைப்பது,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

$$4t = 48 \quad \therefore t = 12$$

t ன் மதிப்பை, சமன்பாடு (2)ல் பொருத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது,

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

ஆகையால் அப்டாப் மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனை சரிசெய்கின்றனவா என்று சரிபார்த்துக்கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : ஒரு கடையில் 2 கரிக்கோல்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்கள் இவைகளின் விலை ₹9 ஆகும். 4 கரிக்கோல்கள் மற்றும் 6 அழிப்பான்கள் இவைகளின் விலை ₹18 ஆகும், எனில் ஒரு கரிக்கோல் மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை என்ன?

தீர்வு : கிடைக்கும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்,

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

x ன் மதிப்பை y ல் கிடைக்குமாறு $2x + 3y = 9$ ஐ

$$x = \frac{9 - 3y)}{2}$$ என எழுதிக்கொள்வோம் (3)

சமன்பாடு (2), $2x + 3y = 9$ ல் x ன்பதிலீடு செய்யவும்.

நமக்கு கிடைப்பது, $$x = \frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

அதாவது $$18x - 6y + 6y = 18$$

$$\therefore \quad 18 = 18$$

இந்த சொற்றொடர் y ன் எல்லா மதிப்புக்குக்கும் உண்மை ஆகும். yன் மதிப்புக்களை பொருத்தது. இங்கு இரண்டு சமன்பாடுகளும் சமமாக உள்ளது. எனவே (1) மற்றும் (2) சமன்பாடுகளுக்கு இணையற்ற அநேக தீர்வுகள் உள்ளன. ஆகையால் நம்மால் ஒவ்வொரு கரிக்கோல் மற்றும் அழிப்பானின் விலை கண்டுபிடிக்க இயலவில்லை எனவே பொதுவான பல தீர்வுகள் உள்ளன இச்சூழ்நிலையில் பொதுவானவைகளாக உள்ளன.

எ.கா 10 : இரண்டு இரயில்களை $x + 2y - 4 = 0$, $2x + 4y - 12 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளாக எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டு தண்டவாளங்களும் ஒன்றையொன்று சந்தித்துக்கொள்ளுமா?

தீர்வு : நமக்கு கிடைத்த இரண்டு சமன்பாடுகள்,

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1) ல் x ன் மதிப்பை y ல் கண்டுபிடித்தால் நமக்கு கிடைப்பது

$$x = 4 - 2y$$

இப்பொழுது x ன் மதிப்பை சமன்பாடு (2)ல் நமக்கு கிடைப்பது,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

ie., $$8 - 12 = 0$$

ie., $$-4 = 0$$

இது தவறான சமன்பாடு ஆகும். இந்த சமன்பாடுகளுக்கு பொதுவான தீர்வு இல்லை. எனவே இரண்டு தண்டவாளங்களும் சந்திக்க முடியாது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 3.2

1. கீழ் கண்ட ஒரு சோடி ஒருபடிச்சமன்பாடுகளை பதிலீடு முறையில் தீர்வுகாண்.

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{2} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$

2. தீர்வு **:** $2x+3y = 11$ மற்றும் $2x - 4y = -24$ மற்றும் $y = mx + 3$ல் m ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

3. கீழ்கண்ட ஒருசோடி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் கணக்குகளை பதிலீடு முறையில் தீர்வு காண்.

(i) இரண்டு எண்களின் வித்தியாசம் 26. ஒரு எண் மற்ற எண்ணைப்போன்று மூன்று மடங்கானது. எண்களைக் கண்டுபிடி.

(ii) இரண்டு மிகை நிரப்புக்கோணங்களில், பெரிய கோணம் சிறிய கோணத்தைவிட 18^0 அதிகமாக உள்ளது எனில் இரண்டு கோணங்களையும் கண்டு பிடி.

(iii) மரப்பந்தாட்ட பயிற்சியாளர் ஒருவர் 7 மட்டைகளும் 6 பந்துகளும் சேர்ந்து ₹3800 க்கு வாங்கினார். அவள் பிறகு 3 மட்டைகளும் 5 பந்துகளும் சேர்ந்து ₹1750 க்கும் வாங்குகிறாள் எனில் **1** மட்டை மற்றும் **1** பந்து விலையை கண்டு பிடி.

(iv) ஒரு நகரத்தில் வாடகை சிற்றுந்து (Taxi) இன் கட்டணமானது நிலையான கட்டணம் மற்றும் பயணத்தூரத்தின் கட்டணம் ஆகியவை சேர்ந்தது. 10km பயணத்தூரத்திற்கு கட்டணம் ₹ 105 மற்றும் 15 km க்கு ₹ 155 எனில் நிலையாணக்கட்டணம் எவ்வளவு? **1** km எவ்வளவு பயணக்கட்டணம்? ஒரு மனிதர்

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

15 km பயணம் செய்தால் அவர் எவ்வளவு பயணக்கட்டணம் செலுத்த வேண்டும்?

(v) ஒரு பின்னத்தின் பகுதி மற்றும் தொகுதிக்கு 2 ஐக் கூட்டினால் நமக்கு கிடைப்பது $\frac{9}{11}$. அதே பின்னத்திற்கு பகுதி மற்று தொகுதிக்கு 3 ஐக் கூட்டினால் நமக்கு கிடைப்பது $\frac{5}{6}$ எனில் பின்னத்தைக் கண்டுபிடி.

(vi) 5 வருடங்களுக்கு பிறகு தந்தை ஜாக்கோப்பின் வயது அவரின் மகன் வயதைப் போன்று 3 மடங்கு ஆகும். 5 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு யாக்கோப்பின் வயது, அவரின் மகன் வயதைப்போல 7 மடங்கு ஆகும் எனில் அவர்கள் இருவரின் தற்போதைய வயதைக் கண்டுபிடி?

3.3.2 நீக்குதல் (Elimination) முறை :

இப்பொழுது மற்றுமொரு முறை ஒருமாறியை நீக்குதல் (விலக்குதல்) முறையை எடுத்துக் கொள்வோம். பதிலீடு முறையை விட இந்த முறை மிகவும் எளிமையானது. இந்த முறை எப்படிப்பட்டது என்பதைப் பார்ப்போம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 8 : இரண்டு வேலைக்காரார்களின் சம்பளம் 9:7 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவர்களின் மாதச் செலவுகளின் விகிதம் 4:3 ஒவ்வொருவரும் மாதம் ₹2000 சேமிப்பு செய்கிறார்கள் எனில் அவர்களின் மாதச் சம்பளத்தைக் கண்டுபிடி?

தீர்வு : இருவரின் மாதச்சம்பளங்களை ₹$9x$ எனவும், ₹$7x$ எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். மற்றும் அவர்களின் செலவுகளை முறையே ₹ 4y மற்றும் ₹ 3y எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

கொடுக்கப்பட்ட கணக்கின்படி நமக்கு கிடைக்கும் ஒருபடி ஒருசோடி சமன்பாடுகள் :

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$
$$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

படி 1 : சமன்பாடு (1) ஐ 3 ஆலும், சமன்பாடு (2) ஐ 4 ஆலும் பெருக்கவும். இதனால் y ன் குணகங்கள் சமமாக்கப்பட்டு, y உறுப்பு நீக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது நமக்கு கிடைக்கும் சமன்பாடுகள்,

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

படி 2 : சமன்பாடு (3) ஐ சமன்பாடு (4) லிருந்து கழிக்கவும். y சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்கப்படுகிறது. ஏனெனில் yன் குணகங்கள் இரண்டும் சமமாக உள்ளதால் y விலக்கப்பட்டு xன் மதிப்பை பெறுகிறோம்.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

$$\therefore \qquad x = 2000$$

படி 3 : x ன் மதிப்பை (1) ல் பதிவீடு செய்தால், நமக்கு கிடைப்பது,

$$9\,(2000) - 4\,y = 2000 \text{ ie., } 4y = 16000$$

$$\therefore \qquad y = 4000$$

எனவே சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் $x = 2000$ மற்றும் $y = 4000$ ஆகும். எனவே இரண்டு பேர்களுடைய மாதச்சம்பளம் முறையே ₹ 18000 மற்றும் ₹ 14,000 ஆகும்.

சரிபார்த்தல் : 18000 : 14000 = 9 : 7 ஆகும்.

செலவுகளின் விகிதம் = 18000 − 2000 : 14000 − 2000

= 16000 : 12000 : 4 : 3 ஆகிறது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

குறிப்புக்கள் :

1) மேற்கண்ட உதாரணத்தை தீர்வுகண்ட முறைக்கு நீக்குதல் முறை என்று பெயர். ஏனெனில் ஒரு மாறியை விலக்கி விடுகிறோம். இந்த உதாரணத்தில் y நீக்கப்பட்டு உள்ளது. x ஐ நீக்கப்பட்டும் செய்யலாம் அதை நீயே முயற்சி செய்.

2) பதிலீடு முறை மற்றும் வரைபடம் முறைகளையும் உபயோகித்து இதை தீர்வு செய்யலாம். தீர்வு செய்த பிறகு எந்த முறை எளிமையானது என்று முடிவு செய்யவும்.

படி 1 : இரண்டு சமன்பாடுகளின் ஏதாவது ஒரு (x அல்லது y) குணகத்தை எடுத்து இரண்டு சமன்பாடுகளையும் பெருக்கினால் ஒரு சமன்பாட்டின் குணகம் சமமாகி நீக்கப்படுகிறது.

படி 2 : பிறகு ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து மற்றொரு சமன்பாட்டை கூட்டவும் அல்லது கழிக்கவும். ஒரு மாறி நீக்கப்பட்டு, மற்றொரு மாறியின் மதிப்புக்கிடைக்கிறது. இப்பொழுது படி 3க்கு போகவும்.

படி 2ல் மாறி இல்லாத உண்மையான சொற்றொடர் கிடைத்தால், மூல சோடி சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு இல்லை. இது நிலையற்ற தன்மையைக் குறிக்கும்.

படி 3 : x அல்லது y மாறியின் தீர்வைக் கண்டுபிடி. ஒரு மாறியின் மதிப்பு கிடைத்தால் மற்றமாறியின் மதிப்பு கிடைப்பதற்கு ஏதுவாக இருக்கும்.

படி 4 : கொடுக்கப்பட்ட மூல சமன்பாடு ஒன்றை எடுத்து x (அல்லது y)ஏதாவது ஒரு மூல சமன்பாடுகளில் பதிலீடு செய்தால் மற்று மொருமாறியை கண்டுபிடிக்கலாம். இதைப்போன்ற மேலும் ஒருசில எடுத்துக்காட்டுக்களைப்பார்ப்போம்.

எ.கா 9 : கீழ்கண்ட ஒரு சோடி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் எல்லா இயன்ற தீர்வுகளையும் நீக்குதல் முறையில் கண்டுபிடி.

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

தீர்வு :

படி 1 : சமன்பாடு (1)ஐ 2 ஆல் மற்றும் (2) ஐ 1 ஆல் பெருக்கவும் இப்போது நமக்கு x ஆல் சமமான குணகங்கள் கிடைக்கின்றன. இப்படியாக நமக்கு 2 சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

படி 2 : (3) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து (4) ஆம் சமன்பாட்டைக்கழிக்கவும்.

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$0 = 9$ எனவே இந்த சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஓர் இரண்டு இலக்க எண் மற்றும் அதனுடைய இலக்கங்களின் மறுதலை எண்களைக் கூட்டினால் கிடைக்கும் எண் 66 என்கிறபோது, இரண்டு இலக்கங்களுக்கு வித்தியாசம் 2 எனில் அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி. இதைப் போன்று எத்தனை எண்கள் உள்ளன?

தீர்வு: முதல் எண்ணில் உள்ள பத்து இலக்க எண் மற்றும் ஒன்று இலக்க எண் முறையே x மற்றும் y என எடுத்துக்கொள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட முதல் என் $10x+y$ ஆகும். (எ.கா 56=10(5) + 6). இலக்கங்கள் மாற்றப்பட்டால், x ஒன்று இலக்க எண்ணாகவும், y பத்து இலக்க எண்ணாகவும்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மாறுகிறது. இப்புதிய எண் 10 y + 6 (எ.கா 56ஐ மறுதலையாக எழுதினால் *65 = 10(6) + 5)* என நமக்கு கிடைக்கிறது. கணக்கில் கூறியபடி

$$(10x + y) + (10x + y) = 66$$

ie., $11 (x + y) = 66$

ie., $x + y = 6$ (1)

நமக்கு மேலும் இரண்டு இலக்கங்களுக்கும் வித்தியாசம் 2. எனவே

$x - y = 2$ (2)

அல்லது $y - x = 2$ (3)ஆகும்.

(1) மற்றும் *(2)* ஐ விலக்குதல் முறையில் தீர்வு செய்தால் நமக்கு கிடைப்பது $x = 4$ மற்றும் $y = 2$ ஆகும்.

இவ்வகையில் நமக்கு கிடைக்கும் முதல் எண் $xy = 42$. இப்பொழுது *(1)* மற்றும் *(3)*ஐ விலக்குதல் முறையில் தீர்வு செய்தால் நமக்கு கிடைப்பது, $x = 2$ மற்றும் $y = 4$ எனக்கிடைக்கிறது.

இந்த வகையில் நமக்குகிடைப்பது முதல் எண் *42* ஆகிறது.கணக்கில் கூறிய நிபந்தனை படி இரண்டு எண்கள் *42* மற்றும் *24* ஆகும். மற்றும் *(1)*மற்றும் நீக்குதல் முறையில் தீர்வுகண்டால் *24* மற்றும் *42* அக கிடைக்கிறது.

சரிபார்த்தல் : *42 + 24 = 66* மற்றும் *4 - 2 = 2* ஆகும். மேலும் *24 + 42 = 66* மற்றும் *4 - 2 = 2* ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

பயிற்சி 3.3

1) கீழ்கண்டவைகளுக்குநீக்குதல்முறை மற்றும்பதிலீடுமுறைகளில்தீர்வு காண்.

(i) $x + y = 5$ மற்றும் $2x - 3y = 4$

(ii) $3x + 4y = 10$ மற்றும் $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ மற்றும் $9x = 2y + 7$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ மற்றும் $x - \frac{y}{3} = 3$

2) கீழ்கண்ட கணக்குகளில் கிடைக்கும் சோடி ஒருபடிச்சமன்பாடுகளை (அவைகள் இருந்தால்) நீக்குதல் முறையில் தீர்வுகாண் :

(i) ஒரு பின்னத்தில் தொகுதியில் 1ஐ கூட்டி, பகுதியில் 1ஐ கழித்தால் நமக்கு பின்னம் 1 ஆக கிடைக்கிறது. பின்னத்தில் பகுதியில் மட்டும் 1ஐ கூட்டினால் நமக்கு கிடைக்கும் பின்னம் $\frac{1}{2}$ ஆகும் எனில் அந்த பின்னம் எது?

(ii) 5 வருடங்களுக்கு முன்பு நூரி (Noori) யின் வயது சோனுவின் வயதைப்போன்று 3 மடங்கு. 10 வருடங்கள் கழித்து நூரியின் வயது சோனுவின் வயதைப்போன்று 2 மடங்கு எனில் அவர்கள் இருவரின் வயதையும் கண்டுபிடி ?

(iii) இரண்டு இலக்க எண் ஒன்றின் இரண்டு இலக்கங்களைக்கூட்டினால் கிடைப்பது 9. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் 9 மடங்கை எடுத்துக்கொண்டால், அது மறுதலை எண்ணைப் போன்று 2 மடங்கிற்குச்சமம் எனில் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைக்கண்டுபிடி.

(iv) மீனா ₹2000 எடுப்பதற்கு வங்கிக்குச்சென்றாள். அவள் காசாளரிடம் ₹50 மற்றும் ₹100 காகித ரூபாய்களாக கேட்டாள். மீனா வாங்கிய ரூபாய் நோட்டுக்களின் மொத்த என்னிக்கை 25 ஆகும் எனில் அவளுக்கு கிடைத்த ₹ 50 மற்றும் ₹100 ரூபாய் நோட்டுகள் எத்தனை?

(v) கடன்கொடுக்கும் நூல் நிலையம் ஒன்று ஒரு புத்தகத்திற்கு முதல் 3 நாட்களுக்கு நிலையான கட்டணம் ஒன்றை நிர்ணயித்துள்ளது. மேலும் கூடுதலாக ஒவ்வொரு நாளுக்கும் கூடுதல் தொகையை நிர்ணயித்துள்ளது. சரிதா 7 நாட்களுக்கு ₹27 கொடுத்தாள். சுசி 5 நாட்கள் புத்தகம் வைத்திருந்ததிற்கு ₹21 கொடுத்தாள். எனவே நிலையான கட்டணம் எவ்வளவு மற்றும கூடுதலாக ஒரு நாளைக்கு எவ்வளவு கட்டணம் வசூலிக்கப்படுகிறது என்பதை கண்டுபிடி.

NOT TO BE REPUBLISHED
© KTBS

3.4 தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில், நீங்கள் பின்வரும் கருத்துக்களை படித்து முடித்திருக்கிறீர்கள்

1. இரண்டு மாறிகள் உடைய ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் பின்வரும் முறைகளால் தீர்க்கப்படுகின்றன அவை

   (i) வரைபட முறை (ii) இயற்கணித முறை

2. வரைபட முறை : இரண்டு மாறிகளை உடைய ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் வரைபடத்தை இரண்டு நேர்க்கோட்டுக்களால் தொடர்புபடுகிறது.

   (i) இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கிறது எனில் அந்த புள்ளி இரண்டு சமன்பாட்டுகளின் தீர்வை சீராக (அ) சரியாக தருகிறது. இந்த வகையில் ஒரு ஜோடி சமன்பாடுகள் **நிலையானவை (அ) மாறிலி.**

   (ii) முடிவில்லாமல் பல தீர்வுகளை சமன்பாடுகள் கொடுத்தால் அந்த நேர்க்கோடுகள் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருத்தக்கூடியவையாக இருந்தால் அந்த நேர்கோட்டின் மேல் ஒவ்வொருபுள்ளிகளும் தறக்கூடியவை தீர்வுகளாகும் இந்த வகையில் இரண்டு சமன்பாடுகள் ஒன்றை சார்ந்துள்ளவை என்கிறோம்.

   (iii) நேர்க்கோடுகள் இணைக்கோடுளாக இருந்தால், அதன்பிறகு, அந்த ஜோடி கோடுகள் தீர்வுகளை பெற்றிருபதில்லை இந்த வகையில், அந்த ஒரு ஜோடி சமன்பாடுகளை நிலையற்றவை என்கிறோம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. இயற்கணித முறை : ஒரு ஜோடி நேரிய (எளிய) சமன்பாடுகளின் தீர்வு (அ) தீர்வுகள் கண்டுபிடிக்க பின் வரும் முறை களை பற்றி நாம் விவாதிப்போம்.

(i) பதிலீடு முறை (substitution)

(ii) நீக்கும் முறை (elimination)

4. ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ஆல் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் அவை பின்வரும் சூழலை உருவாக்க முடிகின்றன.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (இந்த வகையில் நேரிய சமன்பாட்டின் ஜோடிகள் மாறாதவை.)

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (இந்த வகையில் நேரிய சமன்பாட்டின் ஜோடிகள் மாறுபவை)

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (இந்த வகையில் நேரிய சமன்பாட்டின் ஜோடிகள் ஒன்றை ஒன்ற சார்ந்தும் (ம) மாறாதவை)

5. பல சூழ்நிலைகளை இரண்டு சமன்பாடுகளினால் கணிதமுறையில் எதையும் தொடர்புப் படுத்தலாம். அந்த சமன்பாடுகளை தொடங்குவதற்கு நேரிய சமன்பாடுகளாக இருக்க வேண்டியதில்லை, ஆனால் அவைகளை நாம் மாற்றுகின்ற ஜோடிகளாக சுருக்கப் படுகிறது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இருபடிச் சமன்பாடுகள்
QUDRATIC EQUATIONS

G5U8C7

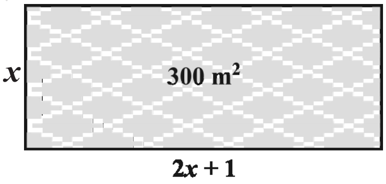
4

4.1 அறிமுகம் :

பாடம் 2 இல் பலவகையான பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பற்றி நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். ax^2+bx+c என்பது ஒருவகையான இருபடி. பல்லுறுப்பு கோவையாகும் இங்கு $a \neq 0$ இந்த பல்லுறுப்பு கோவையை சுழிக்கு (zero) சமன்பாடுத்தும் போது நாம் பெறுவது இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நம்முடைய உண்மையான (நடைமுறை) வாழ்க்கையில் பல சூழல்களை எதிர்க்கொள்ளும் போது (நிர்வகிக்கும் போது) இருபடிச் சமன்பாடுகள் நேரிடுகின்றன. ஒருவேளை, எடுத்துக்காட்டிற்காக, ஓர் அற க்கட்டளை (Charity) யொன்று, இறைவணக்கம் நடத்தும் ஒரு கூடத்தை (Hall) கட்டுவதாக முடிவு செய்து அவ்வாறு செய்யும்போது, 300 ச.மீ, பரப்பளவு உடைய, கூடம் அமைக்கப்பட்ட பகுதியின் நீளம், அதன் அகலத்தைப் போல இரண்டு மடங்குடன் ஒரு மீட்டர் அதிகம். கூடத்தின் நீளம் மற்றும் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்? ஒருவேளை கூடத்தின் அகலம் x மீ இருப்பதாக எடுத்துக்கொண்டால், அதனுடைய நீளம் $(2x+1)$ மீட்டராக இருக்கும். இவற்றை நடைமுறையில் படம் 4.1 இல் காட்டியாதுபோல, இந்த விவரங்களை உடையதாக இருக்கும்.



படம் 4.1

இப்போது, கூடத்தின் பரப்பளவு $= x(2x+1)$ மீ²

$= (2x^2+1)$ மீ²

ஆகையால், $2x^2+x = 300$ (கணக்கில் கொடுத்துள்ளவை)

எனவே, $2x^2+x - 300 = 0$

ஆகையால், $2x^2+x-300=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு கூடத்தினுடைய அகலத்தை நிறைவு படுத்தி தீர்வை கொடுக்கிறது.

முதன் முதலாக பாபிலோனியர்கள் இருபடி சமன்பாட்டுக்கான தீர்வு கண்டனர். என பலதர மக்கள் நம்புகின்றனர்.

நிகழ்வாக, கொடுக்கபட்டுள்ள கூட்டுத்தொகை மிகை எண்ணுக்கும் மற்றும் பெருக்கல் தொகை மிகை எண்ணுக்கும் இரண்டு எண்களை கண்டுபிடிப்பது எவ்வாறென்று அவர்கள் தெரிந்து வைத்திருந்தனர். இந்த சிக்கலை (கேள்வி) தீர்ப்பது எப்படி என்றால் $x^2+px+q = 0$ என்ற வடிவத்திலுள்ள இருபடி சமன்பாட்டை தீர்ப்பதற்கு சமமாக இருக்கிறது.

கிரேக்க கணித மேதை யூக்லிட் (Euclid) ஆனவர் (இன்றைய காலத்தில் தீர்புகள் எனப்படும்) நீளங்களை கண்டறிய வடிவியலை கையாண்டு மேம்படுத்தினார். பொது வடிவில் உள்ள இருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வை காணும் முறையை கண்டுபிடித்ததன்பெருமை பண்டைய இந்திய கணிதமேதைகளை சாரும். உண்மையில் பிரம்ம குப்தா (கி.மு. 598–665) $ax^2+bx = c$ என்ற வடிவத்தின் மூலம் இருபடி சமன்பாட்டை தீர்க்க ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கி கொடுத்தார். அதன் பிறகு (கி.மு.1025யில்) சிரிதராச்சாரியா என்பவர் ஒரு சூத்திரத்தை வருவித்தார். அதுவே (பாஸ்கரா .. ஆல் எடுத்துரைக்கப்பட்ட) வர்க்கத்தை பூர்த்தி செய்து இருபடி சமன்பாட்டினை தீர்க்கும் சூத்திரமாக இருப்பதை இப்போது நாம் அறிகிறோம்.

அரேபிய நாட்டு கணித மேதை ஆல்-க்வாரிஜிமி (Al–khwarizmi) ஏறத்தாழ கி.மு (800) இவர் கூட பல்வேறுபட்ட இருபடி சமன்பாடுகளை பற்றி அறிந்திருந்தார். Abraham bar Hiyya Ha–Nasi தான் எழுதிய நூல் Liber embadorum ஐரோப்பாவில் கி.மு 1435 யில் வெளியிடும் போது வெவ்வேறு இருபடி சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வுகள் முழுமையாக கொடுத்து இருந்தார்.

இந்த பாடப்பகுதியில் நீங்கள் இருபடிச்சமன்பாடுகளைப் பற்றி படிக்க இருக்கின்றீர்கள் மற்றும் அவற்றின் மூலங்கள் (roots) பல்வேறு வழிகளில் கண்டிபிடிப்பீர்கள். இதனுடன் உங்களுடைய அன்றாட வாழ்க்கை சூழலில் இருபடிச்சமன்பாட்டின் பயன்பாடுகள் சிலவற்றை பார்க்கலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.2 இருபடிச் சமன்பாடுகள் (*Quadratic Equations*)

$ax^2+bx+c=0$ என்ற வடிவத்தின் ஒரு சமன்பாட்டில் x மாறியாக (Variable) கொண்டுள்ள சமன்பாடு ஓர் இருபடிச்சமன்பாடாகும். இங்கு a,b,c என்பன மெய்யெண்கள் ஆனால் $a\neq0$. எடுத்துக்காட்டாக $2x^2+x-300=0$ என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும். இதேபோல, $2x^2-3x+1=0$ $4x-3x^2+2=0$ மற்றும் $1-x^2+300=0$ என்பவைகள் கூட இருபடிச்சமன்பாடாகும்.

அதாவது $P(x)=0$ என்ற வடிவத்திலுள்ள எந்தொரு சமன்பாடும், $P(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையின் அடுக்கு 2 (படி degree) ஆக இருக்கும் போது அது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும். ஆனால் நாம் எழுதும் போது $P(x)$ இன் உறுப்புகள் அதனுடைய அடுக்கின் (படி) இறங்கு வரிசையில் எழுத வேண்டும். அப்போது தான் நாம், இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் பெற முடியும். அதாவது **$ax^2+bx+c=0$,** என்பதே **இருபடிச்சமன்பாட்டின் பொதுவான வடிவம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த சமன்பாட்டில் $a\neq0$ ஆகும்.

நம்மைச் சுற்றியுள்ள இந்த உலகத்தில் அநேக சூழ்நிலையில் உள்ள சில எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக்கொண்டு நாம் பார்போம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 1 :

பின்வரும் சூழ்நிலைகளை கணிதவடிவிலான முறையில் காண்போம்.

(i) ஜான் மற்றும் ஜீவன்தி சேர்ந்து 45 கோலிகளை வைத்திருந்தனர், ஒவ்வெறுவரும் 5 கோலிகளை தொலைத்து விட்டனர். இப்போது இரண்டு பேரிடமும் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கைகளின் பெருக்கல்பலன் 124 க்கு சமம். அப்படி யானால் அவர்களிடம் எத்தனை கோலிகள் தொடக்கத்தில் இருந்திருக்கும் என்பதை கண்டுபிடிக்க நாம் முயலுவோம்.

(ii) குடிசை தொழிலின் மூலம் ஒரு குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் பொம்மைகள் ஒரு குறிபிட்ட எண்ணிக்கையில் தயாரிக்க பட்டுள்ளது. அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பொம்மைகளின் விலையானது 55 லிருந்து தயாரிக்கபட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கை குறைக்க படுவதற்கு (கழிக்க) சமம். அந்த குறிப்பிட்ட நாளில் தயாரிக்கபட்ட பொம்மைகளின் மொத்த விலை ₹.750 ஆகும். அந்த நாளில்

தயாரிக்கபட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கை கண்டுபிடிக்க நாம் விரும்பவோம்.

தீர்வு :(i)ஜான்வத்திருந்த கோலிகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

ஜீவன்தி வைத்திருந்த கோலிகளின் எண்ணிக்கை = $45-x$ (ஏன்?)

5 கோலிகளை இழந்தபிறகு ஜானிடம் உள்ள கோலிகள் = $x-5$

5 கோலிகள் காணாமல் போனபிறகு ஜீவன்தியிடம் உள்ள கோலிகள்

$$= 45-x-5=40-x$$

ஆகையால், அவற்றின் பெருக்கல் தொகை = $(x-5)(40-x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

ஆகையால் $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (கொடுத்துள்ள பெருக்கல் தொகை = 124)

எனவே $-x^2+45x-200-124=0$

எனவே $-x^2+45x-324=0$

எனவே $x^2-45x+324=0$

ஆகையால், இந்த இருபடிச் சமன்பாடு ஜான்னிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கைய நிறைவேற்றும். $x^2-45x+324=0$

கணித முறையில் இந்த கணக்கை தீர்பதற்கு தேவையான குறியீடு இதுவே ஆகும்.

(ii) அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கை x ஆக இருக்கட்டும் என எடுத்துக் கொள்க. ஆகையால், அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் ஒவ்வொன்றின் விலை (ரூபாயில்) = $55-x$

ஆகையால், அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் மொத்த விலை (ரூபாயில்) = $x(55-x)$

ஆகையால் $x(55-x) = 750$

ஆதலால் $55x-x^2 = 750$

ஆதலால் $-x^2+55x-750 = 0$

ஆதலால் $x^2-55x+750=0$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆகையால், அந்த குறிப்பிட்ட நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கையை இருபடிச்சமன்பாடு நிறைவு செய்கிறது. $x^2-55x+750=0$ கணிதம் முறைப்படி இந்த சமன்பாடு, கணக்கை தீர்க்க போதுமானவை (தேவையானவை) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின் வரும் சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருக்குமா என சோதிக்கவும்?

(i) $(x-2)^2+1 = 2x-3$ (ii) $x(x+1)+8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)= x^2+1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3-4$

தீர்வு :

(i) இ.கை.ப $=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1$

$=x^2-4x+5$

ஆகையால், $(x-2)^2+1 = 2x-3$ என்பதை

$x^2-4x+5 = 2x-3$ என்றும் எழுதலாம்.

அதாவது $x^2-6x+8 = 0$

அது $ax^2+bx+c=0$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது. ஆகையால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக இருக்கிறது.

(ii) $x(x+1)+8 = x^2+x+8$ மற்றும் $(x+2)(x-2) = x^2-4$

ஆகையால், $x^2+x+8 = x^2-4$

ஆதலால் $x+12 = 0$

அது $ax^2+bx+c = 0$ வடிவத்தில் இல்லை. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகாது.

(iii) இங்கு, இ.கை.ப = $x(2x+3)=2x^2+3x$

ஆகையால் $x(2x+3) = x^2+1$ ஐ மீண்டும் இவ்வாறு எழுதலாம்.

$2x^2+3x=x^2+1$

ஆகையால், நமக்கு கிடைப்பது $x^2+3x-1 = 0$

இது $ax^2+bx+c = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது. ஆகையால், இந்த சமன்பாடு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) இங்கு, இ.கை.ப (LHS) = $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

ஆகையல், $(x+2)^3=x^3-4$ ஐ மீண்டும் இவ்வாறு எழுத முடியும்.

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3-4$$

அதாவது, $6x^2+12x+12=0$

அல்லது, $x^2+2x+2=0$

அது, $ax^2+bx+c=0$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது.

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ளசமன்பாடு ஓர்இருபடிச்சமன்பாடாகும்.

கவனிக்கவும் : எச்சரிக்கையாக (கவனமாக) இரு! மேலுள்ள (ii) இல், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு போல இருக்கிறது ஆனால் அது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக இல்லை.

மேலுள்ள (iv) இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு மும்மடி சமன்பாடாக, இருபதாக தோற்றம் அளிக்கிறது (சமன்பாட்டின் படி (அ) அடுக்கு 3) மற்றும் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக அது இல்லை; அது மாற்றி அமைக்கும்போது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக இருக்கும், அவ்வாறாக நீங்கள் பார்க்க முடியும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடா அல்லது இல்லையா என அதை முடிவு செய்வதற்கு முன்னால் நாம் அதனை சுருக்க வேண்டும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 4.1

1. பின்வருபவைகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருக்கிறதா சோதிக்கவும்.

(i) $(x+1)^2=2(x-3)$ (ii) $x^2-2x=(-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1)=x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3)=(x+5)(x-1)$ (vi) $x^2+3x+1=(x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$ (iv) $x^3-4x^2-x+1=(x-2)^3$

2. பின்வரும் சூழ்நிலைகளை இருபடிச் சமன்பாட்டின் வடிவத்தில் குறிப்பிடுக.

(i) செவ்வக வடிவ வீட்டுமனையின் பரப்பளவு 528 மீ². வீட்டுமனையின் நீளம் (மீட்டரில்), அதனுடைய அகலத்தை போல இரண்டு மடங்கு காட்டிலும் ஒன்று அதிகம், வீட்டு மனையின் நீளம் மற்றும் அகலம் நாம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

(ii) தொடர்ச்சியான இரண்டு மிகை முழுக்களின் பெருக்கல் தொகை 306. நாம் முழுக்களை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

(iii) ரோகனுடைய அம்மா வயது அவனை காட்டிலும் (விட) 26 ஆண்டுகள் அதிகம் உள்ளவர். இப்போதுலிருந்து 3 ஆண்டுகளுக்கு பிறகு அவர்களின் வயதுகளின் (ஆண்டுகளில்) பெருக்கல் தொகை, 360 ஆக இருக்கும். தற்போது ரோகனுடைய வயது கண்டு பிடிக்க நாம் விரும்புவோம்.

(iv) ஒரு (தொடர்வண்டி) இரயில் சீரான வேகத்தில் 480 கி.மீ தூரத்தை பயணிக்கிறது. அதனுடைய வேகம் 8 கீ.மீ/மணிக்கு குறைவாக பெற்றிருந்தால் அதே தொலைவு கடக்க 3 மணி நேரம் அதிகமாக எடுத்துக்கொண்டிருந்திருக்கும். இரயிலின் வேகத்தை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

4.3 காரணிபடுத்துதல் முறையால் இருபடிச்சமன் பாடுகளைத் தீர்த்தல். (Solution of a quadratic equation by factorisation)

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைக் கவனிக்கவும். இந்த சமன்பாட்டின் இ.கை.ப (LHS) பக்கத்தில் நாம் x இடத்தில் 1 ஆல் மாற்றம் செய்வதனால் நமக்கு கிடைப்பவை $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ சமன்பாட்டின் வ.கை.ப (RHS). நாம் $2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் 1 என கூறுவோம்.

இதனுடைய பொருள் 1 என்பது என்னவென்றால் $2x^2 - 3x + 1$ இன் பல்லுறுப்பு கோவையின் சுழி (பூஜ்ஜியம்) என்பதே.

பொதுவாக, மெய் எண் $\propto$ என்பது $\propto^2 + b\propto + c = 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலம் என அழைக்கப்படுகிறது. $x = \propto$ யை இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் என நம்மால் சொல்ல முடியும். அல்லது $\propto$ என்பது இருபடிச் சமன்பாட்டை நிறைவடையச் செய்கிறது. என்று சொல்லக்கூடும். ax^2+bx+c என்ற இருபடி பல்லுறுப்பு கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் மற்றும் $ax^2+bx+c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒன்றே ஆகும் என்பதை கவனிக்கவும்.

பாடம் 2 இல் நீங்கள் கற்று இருப்பவை ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு கோவை அதிகபட்சமாக இரண்டு பூஜ்ஜியங்களை கொண்டிருக்கும். ஆகையால் எந்த ஓர் இருபடி சமன்பாட்டிலும் அதிகபடியாக இரண்டு

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மூலங்களை கொண்டிருக்கும். 9வது வகுப்பில் நீங்கள் கற்று கொள்ள கூடியவை இருபடி பல்லுறுப்பு கோவையில் காரணி படுத்துவதற்காக அதனுடைய நடு உறுப்பை பிரித்து விடுவது எவ்வாறு? இந்த அறிவு திறனை பயன்படுத்தி நாம் இருபடி சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் கண்டுபிடிப்போம்.

நாம் எவ்வாறு பார்க்க முடியும் என்பதை எடுத்து கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்களை காரணி படுத்துதலால் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு : $-5x$ என்ற நடு உறுப்பை பிரித்து $-2x - 3x$ போல முதலில் எடுத்து கொள்ளவும்.

காரணம் : $[(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3]$

ஆகையால் $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x + 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$

இப்பொழுது $2x$ என்பதை $(2x-3)(x-1) = 0$ போல மீண்டும் எழுத முடியும்.

ஆகையால் $2x^2 - 5x + 3 = 0$ என்பதற்காக x இன் மதிப்பு

$(2x-3)(x-1) = 0$ என்பதற்கான மதிப்பும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும்.

அதாவது $2x - 3 = 0$ அல்லது $x - 1 = 0$ இவ் இரண்டில் ஒன்று.

இப்பொழுது $2x - 3 = 0$ ஆனால் $x = \frac{3}{2}$ மற்றும் $x - 1 = 0$ ஆனால் $x = 1$ என கொடுக்கும்.

ஆகையால் $x = \frac{3}{2}$ மற்றும் $x = 1$ என்பது சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். மற்றொரு வாக்கியத்தில், **1** மற்றும் $\frac{3}{2}$ என்பன $2x^2 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சரியாக உள்ளதா என சரி பார்க்கவும்.

குறிப்பு : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை காரணி முறையால் இரண்டு நேரிய (ஒருபடி) காரணிகளாக மாற்றி மற்றும் ஒவ்வொரு காரணியையும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமபடுத்துவதன் மூலம் நாம் கண்டு பிடித்திருக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $6x^2 - x - 2 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டு பிடி.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு : நமக்கு கிடைத்திருப்பவை

$$6x^2-x-2 = 6x^2+3x-4x-2$$
$$= 3x(2x+1)-2(2x+1)$$
$$= (3x-2)(2x+1)$$

$6x^2-x-2=0$ இன் மூலங்கள், $(3x-2)(2x+1)=0$ என்பதில் உள்ள x இன் மதிப்புகளாக இருக்கிறது.

ஆகையால், $3x-2=0$ அல்லது $2x+1=0$

அதாவது $x=\frac{2}{3}$ அல்லது $x=-\frac{1}{2}$

ஆகையால், $6x^2-x-2=0$ இன் மூலங்கள் $\frac{2}{3}$ மற்றும் $\frac{-1}{2}$ ஆகும்.

நாம் மூலங்களை சரிப்பார்ப்போம். $\frac{2}{3}$ மற்றும் $\frac{1}{2}$ இவைகளைக் கொண்டு சோதிப்பதால் $6x^2-x-2=0$ வைத் தருகின்றன அல்லது நிறைவேற்று கின்றன.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 5 : $3x^2-2\sqrt{6x}+2=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $3x^2-2\sqrt{6x}+2=3x^2-\sqrt{6x}-\sqrt{6x}+2$

$$=\sqrt{3}x(\sqrt{3}x-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$$
$$=(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$$

ஆகையால், $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})=0$ இல் x இன் மதிப்பு எதுவாக இருக்குமோ அதுவே சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

இப்போது $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$ ஆக உள்ளது.

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ஆகையால், இந்த மூலம் இருமுறை மீண்டும் மீண்டும் வந்துள்ளது. $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$ என்ற ஒவ்வொரு காரணிக்காக, ஒன்றே மீண்டும் மீண்டும் உள்ளது.

ஆகையால், $3x^2-2\sqrt{6x}+2=0$ இன் மூலங்கள் $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : பிரிவு (பகுதி) 4.1 இல் உள்ள, இறைவணக்கக் கூடத்தின் (Hall) அளவுகளை விவாதித்து கண்டபிடிப்போம்.

தீர்வு : பகுதி 4.1 இல், இவற்றை நாம் கண்டுபிடித்தோம். அந்த கூடத்தின் அகலம் x மீ என்றால், $2x^2+x-300=0$ சமன்பாட்டை, x இன் மதிப்புகளானது சரி செய்கிறது. அதனால், காரணி படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி, நாம் இந்த சமன்பாட்டை $2x^2-24x+25x-300=0$ என்றவாறு எழுதலாம்

$$2x^2-24x+25x-300=0$$

$$2x(x-12)+25(x-12)=0$$

அதாவது, $$(2x+25)(x-12)=0$$

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $x=12$ அல்லது $x=-12.5$ ஆகும்.

இதிலிருந்து x குறை மதிப்பாக (negative) இருக்க முடியாது, ஏனெனில் அது கூடத்தின் அகலம் x ஆகும்.

ஆதலால், கூடத்தின் அகலம் 12 மீ ஆகும். அதனுடைய நீளம்

$= 2x+1 = 2 \times 12+1$

$= 25$ மீ ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

பயிற்சி 4.2

1. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் காரணிப் படுத்தல் முறையால் கண்டுபிடி.

   (i) $x^2-3x-10=0$ (ii) $2x^2-x-6=0$

   (iii) $\sqrt{2}\,x^2-7x+5\sqrt{2}=0$ (iv) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

   (v) $100x^2-20x+1=0$

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டு 1 இல் உள்ள கணக்குகளைத் தீர்க்கவும்.

3. இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தெகை 27 மற்றும் பெருக்கல் தொகை 182 யாக உள்ள எண்களைக் கண்டுபிடி.

4. தொடர்ச்சியான இரண்டு மிகை முழுக்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 365 ஆகு மெனில் எண்களைக் கண்டுபிடி.

5. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் குத்துயரம் அதன் அடிப்பக்கத்தை விட, 7செ.மீ குறைவு. அதனுடைய கர்ணப்பக்கம் 13 செ.மீ எனில் மற்ற இரண்டு பக்கங்களைக் கண்டு பிடி.

6. குடிசைத் தொழில் மூலம் ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை உள்ள மண் பானைப் பொருட்கள் தயாரித்தனர். அந்த குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருட்களின் ஒவ்வொன்றின் விலை, (ரூபாயில்) அந்த நாளில் தயாரிக்கப் பட்ட பொருள்களின் எண்ணிக்கையின் இரண்டுமடங்கை விட 3 அதிகம் (இருமடங்குடன் 3 அதிகம்) உள்ளது. அந்த குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களின் மொத்த விலை ₹90 எனில், தயாரித்த பொருட்கள் எண்ணிக்கை மற்றும் ஒவ்வொன்றின் விலை கண்டுபிடி.

4.4 மூலங்களின் இயற்பண்பு (nature of roots)

$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ஆகும். $b^2-4ac>0$ என்றால் நாம் வெவ்வேறான இரண்டு மெய் மூலங்கள் பெறுகின்றோம். அல்லது நமக்கு கிடைக்கிறது. அவை,

$$\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2} \text{ மற்றும் } \frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac=0$, என்றால், $x=\frac{-b}{2a}\pm 0$

அதாவது $x=-\frac{b}{2a}$ அல்லது $x=-\frac{b}{2a}$

ஆகையால் $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் $-\frac{b}{2a}$ ஆக இருக்கும் ஆகையால், இந்த வகையில், $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டு சமமான மெய் எண்களாகும் அல்லது சம மெய் மூலங்கள்.

$b^2-4ac<0$ என்றால், b^2-4ac ஐ மெய் இருபடியாக கொண்ட மெய் எண்கள் எதுவுமே இல்லை ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட இருபடி சமன்பாட்டில், இந்த வகைக்கு மெய் மூலங்கள் அங்கு இல்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

b^2-4ac என்பதே $ax^2+bx+c=0$ இருபடிச்சமன்பாடுக்கு மெய் மூலங்கள் அல்லது மெய்யல்லாத மூலங்கள் (real roots or not) உடையவையாக இருப்பத்தை வறையறுக்கின்றன.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இந்த இருபடிச்சமன் பாட்டின் b^2-4ac ஐ பிரிப்பு எண் (discriminant) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகையால், $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு ஆனது,

1) $b^2-4ac>0$ வாக கொண்டிருப்பின் இரண்டு வெவ்வேறான மெய் மூலங்கள் உடையது.

2) $b^2-4ac=0$ இரண்டு சம மெய் மூலங்கள் உள்ளது.

3) $b^2-4ac<0$ மெய் மூலங்கள் இல்லை.

நாம் சில எடுத்துக் காட்டுகளை எடுத்துக் கொண்டு பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : $2x^2-4x+3=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் பிரிப்பு எண் (discriminant) கண்டுபிடி. எனவே மற்றும் அதனுடைய மூலங்களின் இயற்பண்பு கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது. இங்கு $a=2$, $b=-4$ மற்றும் $c=3$

ஆகையால் பிரிப்பு எண் $b^2-4ac=(-4)^2-(4\text{x}2\text{x}3)$

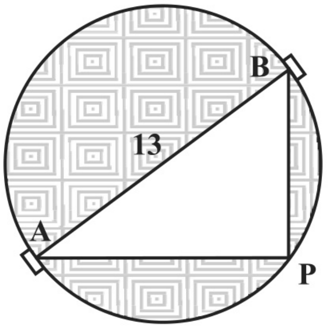
$$=16-24=-8<0$$

இது அதாவது $-8<0$ உள்ளது. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு மெய் மூலங்கள் உடையதாக இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8 : விட்டம் 13 மீ உள்ள ஒரு வட்டமான பூங்காவின் எல்லையின் மேல் ஒரு புள்ளியில் ஒரு கம்பம் நடப்பட்டு இருக்கிறது. வட்டத்தின் விட்டத்தின் இரண்டு முனைகளிலும் பூங்காவின் எல்லையின் மீது A மற்றும் B என்ற இடங்களில் நுழைவாயில் (gate) பொருந்தப்பட்டுள்ளது. இரண்டு நுழை வாயிலிருந்து கம்பத்திற்கு இடையேயுள்ள தொலைவுகளுக்கு உள்ள வேறுபாடு 7 மீட்டர். அவ்வாறு செய்வது சாத்தியமாகுமா? ஆம் என்றால் இரண்டு நுழைவாய்களில் இருந்து கம்பம் எவ்வளவு தொலைவில் நடப்பட்டு இருக்க வேண்டும்?

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

தீர்வு : முதலில் படம் வரையவும் (படம் 4.2)ஐ பார் கம்பம் நடப்படும் இடம் (தேவையான புள்ளி) P என எடுத்துக்கொள். B நுழைவாயில் இருந்து கம்பத்தின் தூரம் x மீ என எடுத்து கொள்க அதாவது BP = x மீ இப்போது இரண்டு நுழைவாயிலிருந்து கம்பத்தின் தொலைவுக்கு உள்ள வேறுபாடு = AP − BP அல்லது (BP−AP) = **7** மீ, ஆகையால் AP = (x + 7) மீ.



படம் 4.2

இப்போது, AB =13 மீ மற்றும் ABவிட்டம் $\angle APB=90^0$ (ஏன் ?)

ஆகையால், $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (பித்தாகோரசு தேற்ற படி)

அதாவது, $(x+7)^2+x^2=13^2$

$x^2+14x+49+x^2-169$

அதாவது, $2x^2+14x-120=0$

ஆகையால், $x^2+7x-60=0$ என்ற சமன்பாட்டை x இன் மதிப்பு நிறைவடையச் செய்யும் போது B நுழைவாயிலிருந்து கம்பத்தின் தூரம் xஆக இருக்கும். இது அவ்வாறு (அப்படி) உள்ளதா அல்லது இல்லையா என பார்க்க அதனுடைய பிரிப்புயெண் எடுத்துக்கொண்டு கவனிக்கவும், பிரிப்புயெண் = $b^2-4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$.

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச்சமன் பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் மெய் மூலங்களை பெற்றுள்ளது மற்றும் அது பூங்காவின் எல்லையின் மீது கம்பம் நடுவதற்கு தேவையான சாத்திய கூறாகும். இந்த சமன்பாட்டை $x^2 + 7x - 60 = 0$ ஐ சூத்திர முறையால் தீர்க்கும் போது நமக்கு கிடைப்பவை.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

அதாவது $x = 5$ அல்லது -12

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கம்பத்திற்கும் நுழைவாயில் Bக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் x ஆக இருக்கிறது. அது மிகைமதிப்பாக கண்டிப்பாக இருக்க வேண்டும். ஆகையால், $x=-12$ விட்டுவிடு, ஆகையால் $x=5$

ஆதலால் B நுழைவாயிலிருந்து 5 மீ தூரத்தில் பூங்காவின் எல்லை மீது கம்பம் நடப்பட்டு இருக்கிறது. மற்றும் A இருந்து (நுழைவாயில்) 12 மீட்டரில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$ என்ற சமன்பாட்டின் பிரிப்பு எண் கண்டுபிடி. மற்றும் அதனுடைய மூலங்களின் இயற்பண்பு கண்டுபிடி. அவை மெய் எண்களாக இருக்கிறதா? என்பதை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு $a=3$, $b=-2$, மற்றும் $c=\frac{1}{3}$

ஆகையால் பிரிப்பு எண் $b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times\frac{1}{3}$

$$=4-4=0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் சம மெய் எண்களாகும்.

மூலங்கள் முறையே $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ அதாவது

ஆதலால் $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ ஆதலால் $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்களின் இயற்பண்பு கண்டுபிடி. மெய் மூலங்களாக இருந்தால் அவைகளையும் கண்டுபிடி.

   (i) $2x^2-3x+5=0$ (ii) $3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$

   (iii) $2x^2-6x+3=0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. பின்வரும் இரு படிசமன்பாட்டின் ஒவ்வொன்றிலும் இரண்டும் சமமூலங்களாக உடையனவாக இருக்குமாறு kயின் மதிப்பு கண்டுபிடி.

(i) $2x^2+kx+3=0$ (ii) $kx(x-2)+6=0$

3. ஒரு செவ்வக வடிவமான மாந்தோப்பின் அதன்னுடைய நீளம் அதனுடைய அகலத்தைப்போல இரண்டு மடங்கு உள்ளது அதை வடிவமைக்க உங்களால் முடியுமா? மற்றும் அதனுடைய பரப்பளவு 800 மீ^{2} ? அப்படியானால் அதனுடைய நீளம் மற்றும் அகலத்தைக் கண்டுபிடி?

4. பின்வரும்சூழ்நிலைகள்சாத்தியகூறாகஉள்ளதா.அப்படியானால் அவர்களுடைய வயதுகளை கண்டறிக. இரண்டு நண்பர்களின் வயதுகளின் கூட்டுத்தொகை 20 ஆண்டுகள். 4 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு அவர்களுடைய வயதுகளின் பெருக்கல் தொகை 48 ஆகும்.

5 சுற்றளவு 80 மீ^{2} பரப்பளவு 400 மீ^{2} உள்ள செவ்வக வடிவமான பூங்கா ஒன்றினை. வடிவமைப்பது சாத்தியமா? அப்படியானால் அதனுடைய நீளம் மற்றும் அகலம் கண்டுபிடி?

4.5 பாடத்தொகுப்பு :

இந்தபாடத்தின் பின்வரும் கருத்துக்களை படித்திருப்பீர்கள்.

1. $ax^2+bx+c=0$ என்ற வடிவத்தின் x என்பது ஒரு மாறியாக உள்ள அல்லது ஒரு மாறியில் இருக்கும் இருபடி சமன்பாடு ஆகும். இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள் மற்றும் $a\neq0$.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. $a\alpha^2+b\alpha+c=0$. எனில் α என்பது $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மெய் மூலமாக இருக்கும். ax^2+bx+c என்ற இருபடி பல்லுறுப்பு கோவையின் பூஜ்ஜியம் மற்றும் ax^2+bx+c என்ற ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகியன சமம்.

3. ax^2+bx+c இங்கு $a \neq 0$ வை காரணிப் படுத்தப்பட்டால், இரண்டு ஒருபடி காரணிகள் பெருக்கல் முறைக்கு மாற்றப்படுகிறது. ஒவ்வொரு காரணியையும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக்கும்போது $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கண்டு பிடிக்க முடிகிறது.

4. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், இருபடி சூத்திரத்தால் கொடுக்கப் பட்டுகிறது.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, இங்கு $b^2-4ac \geq 0$ இவற்றையும் அளிக்கிறது.

5. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின்

   1. $b^2-4ac \geq 0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறு மெய் மூலங்கள்.
   2. $b^2-4ac=0$ எனில் இரண்டு சம மெய் மூலங்கள்.
   3. $b^2-4ac<0$ எனில் மெய் மூலங்கள் இருப்பதில்லை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கூட்டுத் தொடர் வரிசைகள்
(ARITHMATIC PROGRESSION)

A4N3G5

5

5.1 அறிமுகம்

இயற்கையில் நீங்கள் குறிப்பாக பல வழிமுறைகளைக் கவனித்திருப்பீர்கள். அவைகள் ஒரு சூரியகாந்தி பூவின் இதழ்கள், ஒரு தேன்கூட்டின் தேனடை, மக்காச்சோளத்தின் மேல் உள்ள விதைகள், அன்னாசி பழத்திநுடைய கூம்பு வடிவ வளைவுப்பகுதி போன்றவை.

அன்றாட நம்முடைய நடைமுறை வாழ்க்கையில் நிகழக்கூடிய சில நிகழ்வுகளை நாம் இப்பொழுது பார்கிறோம் அவைகளில் சில உதாரணங்கள்:

i) ரீனா ஒரு வேலைக்கு போட்ட மனுவினால் தேர்வானார். அவள் அந்த வேலைக்காக மாதச் சம்பளம் ₹ 8000 துடன் வருடாந்திர ஊதிய உயர்வு ₹ 500. அவளுடைய சம்பளம் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் ஆண்டுகளில் முறையே 8000, 8500, 9000.

படம் 5.1

ii) ஓர் ஏணியின் இரண்டு சட்டங்களுக்கு கிடையேயுள்ள படிகளின் நீளம் ஒரே மாதிரியாக, ஒவ்வொரு படியிலும் 2 செ.மீ. குறைந்து கொண்டே கீழ்படியில் இருந்து மேல் அல்லது உச்சி படிகள்வரை செல்கின்றன (படம் 1.1 பார்) கீழ் படியின் நீளம் 45 செ.மீ. நீளம் செ.மீ. இல் உள்ளது. இவ்வாறு 1 வது 2 வது 3 வது .... 8 வது படிகள் வரை கீழ்படியிலிருந்து உச்சி படிவரை பின்வருமாறு உள்ளது.

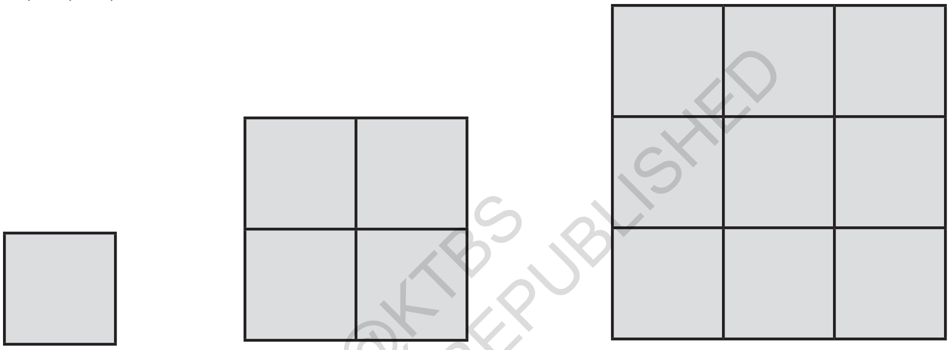
45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

iii) ஒரு சேமிப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு 3 வருடத்திற்கு பிறகு $\frac{5}{4}$ மடங்கு தொகை கிடைக்கிறது அதே சேமிப்புத்திட்டத்தில் முதிர்ச்சியடைந்த (அ) இறுதியில் சேமிப்பு கொகை ₹ 8000 எனில் 3, 6, 9 மற்றும் 12 வருடங்களுக்கு முறையே குறிக்கப்பட்டுள்ளன. (₹ பாயில் 10000₹, 12500, 15625, 19531.25)

iv) சதுரங்களின் பரப்பளவுகள் அலகுகளின் எண்ணிக்கையில் சதுரங்களின் பக்கம் 1, 2, 3 அலகுடன் குறிப்பிட்டுள்ளன. (படம் 1.2 பார்)

$1^2, 2^2, 3^2, ...$



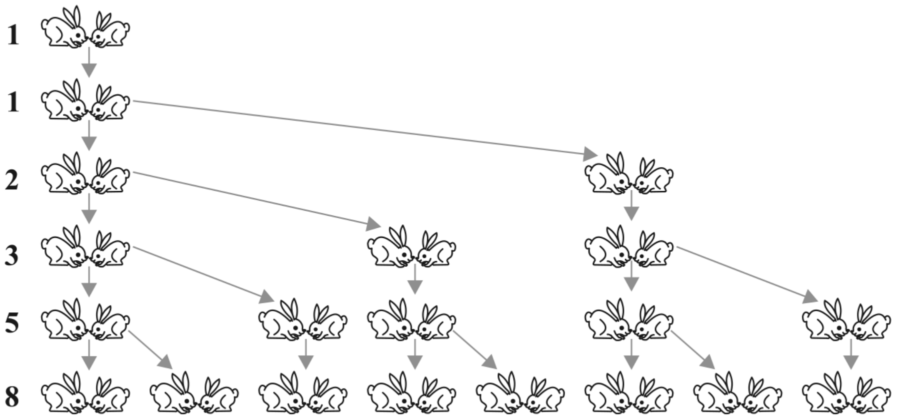
படம் 5.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

v) சகிலா அவள் மகளுடைய உண்டியலில் முதல் ஆண்டு பிறந்தநாளின் போது ₹100 யும் மற்றும் ஒவ்வொரு ஆண்டு பிறந்தநாளிலும் ₹ 50 அதிகரித்து கொண்டே, 1 வது, 2 வது, 3 வது, 4 வது .... இப்படி பிறந்தநாளின் போது பணத்தை உண்டியயில் போடுகின்றனர். (₹ இல்)

100, 150, 200, 250 .... முறையே

vi) முதல் மாதம் ஒரு சோடி இளம் முயல் குட்டிகள் பிறந்தன இரண்டாம் மற்றும் ஒவ்வொரு பிரதி மாதம் ஒரு புதிய சோடி பிறந்தன. ஒவ்வொரு புதிய சோடி முயல்களும், ஒரு புதிய சோடி முயல்களை இரண்டாம் மாதம், மற்றும் ஒவ்வொரு பிரதி மாதமும் (படம் பார் 1.3) உருவாகின. எந்தவொரு முயலும் இறக்கவில்லை எனக்கொள்ள வேண்டும், எனில் ஆரம்ப முதல் ஒவ்வொரு சோடி முயல்களின் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம், ... ஆறாம் மாதங்களின் எண்ணிக்க்க குறிக்கப்பட்டுள்ளன 1, 1, 2, 3 , 5, 8



படம் 5.3

5.2 கூட்டுத்தொடர் வரிசை (Arithmetic Progressions)

பின்வரும் பட்டிலிடப்பட்ட எண்களை கவனிக்க.

i) 1, 2, 3, 4, ...

ii) 100, 70, 40, 10, ...

iii) −3, −2, −1, 0 .....

iv) 3, 3, 3, 3, ...

v) −1, −1.5, −2.0, −2.5, ...

வரிசையில் (பட்டியல்) உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் ''உறுப்பு'' என்கிறோம்.

ஒவ்வொரு பட்டியிலும் அல்லது வரிசையிலும் ஒரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஓர் உறுப்புடனும் அடுத்த உறுப்பு உங்களால் எழுத முடியுமா? அப்படியிருந்தால் உங்களால் எவ்வளவு எழுதமுடியும். ஒரு வேளை விதி அல்லது வழிமுறையே கொண்டு எழுதப்படுமானால் கவனித்த வழிமுறைகளை நாம் எடுத்து கொள்வோம். அவை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

i) இல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முன் உறுப்பை விட 1 அதிகரித்துகொண்டே செல்கிறது.

ii) இல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதனுடைய முன் உறுப்பை விட 30 குறைந்து கொண்டே செல்கிறது.

iii) இல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதனுடைய முன் உறுப்புடன் 1 ஐ கூட்டிக் கிடைக்க பெற்றவை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

iv) இல் உள்ள வரிசையில் கொடுத்துள்ள படி எல்லா எண்களும் 3 ஆக உள்ளது அதாவது அந்த வரிசையில் ஒவ்வொரு எண்ணும் கிடைக்க வேண்டுமானால் அதற்கு முன்னால் உள்ள எண்ணுடன் 0 வைக் கூட்ட வேண்டும் அல்லது கழிக்க வேண்டும்.

v) இல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதனுடைய முன் உறுப்புடன் −0.5 ஐ கூட்ட (அல்லது 0.5 கழிக்க) நமக்கு உறுப்புகள் கிடைக்கும்.

மேற்கூறப்பட்ட எல்லா பட்டியல்களிலும் நாம் பார்க்கும் பொழுது வெற்றிகரமாக அடுத்தடுத்த எண் கிடைக்கவேண்டுமானால் முன்னால் வருகின்ற எண்ணுடன் குறிப்பிட்ட நிலையானதொரு எண்ணை கூட்ட வேண்டும். இப்படி பட்டியலிடப்பட்ட எண்களை உருவாக்குவதை **கூட்டுத்தொடர் வரிசை (Arithmetic Progression)** என்று அழைக்கிறோம். **அதனால் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்பது எண்களின் ஒரு பட்டியல் அல்லது வரிசை ஆகும். ஒவ்வொரு உறுப்பு எண்ணும் கிடைக்க வேண்டுமென்றால் முன்னால் வருகின்ற உறுப்புடன் குறிப்பிட்ட நிலையானதொரு எண்ணை (fixed number) கூட்டவேண்டும். முதல் உறுப்புத்தவிர.**

இந்த நிலையான அல்லது உட்படுத்தப்பட்ட எண்ணை ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையின்பொதுவானவேறுபாடுஎன்று அழைக்கிறோம், **மிகை, குறை அல்லது சுழி (பூஜியம்)** போன்றவை அந்த பொதுவான வேறுபாடாக இருக்ககூடும் என்று நினைவில் வைத்துக்கொள்.

தொடர் வரிசை எண்களில் முதல் எண்ணை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் a_1 ஆக குறிக்கலாம் இரண்டாம் எணணை a_2 ஆல் குறிக்கலாம் ...... n வது உறுப்பை a_n ஆல் குறிக்கலாம். பொது வித்தியாசத்தை d ஆல் குறிக்கலாம். எனவே இதனால் வருகின்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசை.

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ அகும்.

ஆகயால் $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_n - a_{n-1} = d$. கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் மேலும் பல எடுத்துக் காட்டுகளானவை.

a) காலை நேரத்தில் ஒரு பள்ளியில் இறைவணக்கத்திற்காக வரிசையாக நிற்கின்ற சில மாணவர்களின் உயரப்படி (செ.மீ.) முறையே ***147, 148, 149 .... 157***

b) ஒரு நகரத்தில், ஜனவரி மாதத்தில் ஒரு வாரத்திற்கான பதிவு செய்யப்பட்ட குறைந்தப்பட்ச வெப்பநிலை (செல்சியஸ் டிதிரி) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன இவை ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தப் பட்டுள்ளன.

–3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

c) மொத்த கடன் ₹ 1000 பெற்றபிறகு ஒவ்வொரு பிரதி மாதமும் கட்டிய தவணைக்கு பிறகு நிலுவைப்பணத்தை 5% சதவீதத்திற்கு கட்டுவோமேயானால் 950, 900, 850, 800, ... 50. (₹ இல்)

d) ஒரு பள்ளியில் ஒன்று முதல்₹, பன்னிரண்டு வகுப்பு வரை உள்ளது ஒவ்வொரு வகுப்பில் முதல் மாணவர்களுக்கு (₹ இல்) பரிசுத்தொகை வழங்குவது முறையே 200, 250, 300, 350, ... 750.

e) ஒவ்வொரு மாதத்தின் முடிவிலும் மாதத்திற்கு ₹ 50 யாக 10 மாதங்களில் ஆன மொத்த சேமிப்பு ₹ 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

மேற்கொண்ட கூட்டுந்தொடர் வரிசை பட்டியலில் உள்ளவற்றை ஒவ்வொன்றையும் ஏன் விளக்கவில்லை எனில் நீங்கள் பயிற்சி பெறுவதற்காக விட்டுயிருக்கிறோம்.

$$a, \ a + d, a + 2d, a + 3d, ...$$

என்பதை கவனிக்கக்கூடும். அதாவது இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் ‘a’ என்பது முதல் உறுப்பு. ‘d’ என்பது பொதுவேறுபாடு. இவ்வாறு இருப்பதை **கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம்** என்று அழைக்கிறோம்.

மேற்கொண்ட உதாரணங்களில் (a) முதல் (e) வரை முடிவுறு எண்களைக் கொண்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். அப்படிப்பட்ட ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை **முடிவுறு கூட்டுத்தொடர் வரிசை** என்கிறோம். அதாவது இந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ள எண்களைக் கவனத்தில் கொள்ளும் போது இறுதியில் வருகின்ற எண், கடைசி உறுப்பு ஆகும். இந்தப் பகுதி (i) முதல் (ii) எடுத்துக்காட்டுகளில் முடிவுறு இல்லாத கூட்டுத்தொடர் வரிசை மற்றும் இவைகளை **முடிவுறா கூட்டுத்தொடர் வரிசை** என்று அழைக்கிறோம். இப்படிப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் கடைசி உறுப்பு இருப்பதில்லை.

இப்பொழுது நாம் நன்றாக ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையைப்பற்றி தெரிந்துகொண்டோம். உங்களுக்கு குறைந்தபட்ச தகவலாக தேவைப்படுவது என்ன? இதில் முதல் உறுப்பு தெரிந்துக்கொண்டது போதுமானதா? அல்லது அதில் பொது வித்தியாசத்தை மட்டும் தெரிந்துகொண்டது போதுமா? முதல் உறுப்பு ‘a’ மற்றும் பொது வித்தியாசம் ‘d’ இவை இரண்டும் ஒரு தொடர் வரிசையை அமைக்க போதுமானதாக இருக்கக்கூடும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதாவது 'a' முதல் உறுப்பு 6 ஆகவும் மற்றும் அவற்றில் 'd' பொதுவித்தியாசம் 3 ஆகவும் இருந்தால் அந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையானது. 6, 9, 12, 15 ...

மற்றும் 'a' யின் மதிப்பு 6 மற்றும் 'd' யின் மதிப்பு = −3 எனில் அந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையானது. 6, 3, 0, −3 ....

இதைப் போல், எப்பெழுதும்

$a = -7, d = -2$, இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையானது −7, −9, −11, −13 .....

$a = 1.0, d = 0.1$, இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையானது 1.0, 1.1, 1.2, 1.3.....

$a = 0, d = 1\frac{1}{2}$, இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையானது $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6$ ....

$a = 2, d = 0$, இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையானது 2, 2, 2, 2 ....

ஆகையால் நீங்கள் 'a' மற்றும் 'd' என்ன என்று தெரிந்து கொண்டு கூட்டுத் தொடர் வரிசையை உங்களால் பட்டியலிட முடியும். மற்ற வழிகளில் இதைப்பற்றிய மாற்று வழி ஏதேனும் உண்டா? பட்டியலிடப்பட்ட எண்களைக் கொடுக்கும் பொழுது உங்களால் அது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்று சொல்ல முடியும். மேற்படி a மற்றும் d யை க் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இதிலிருந்து முதல் உறுப்பு 'a', என்று எளிதாக எழுதலாம். ஒவ்வொரு தொடர் உறுப்பினுடைய அடுத்தடுத்த தொடர் எண்கள் கிடைக்க வேண்டுமானால் தொடரில் வருகின்ற முதல் எண்ணுடன் 'd'யைக் கூட்டினால் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகள் கிடைக்கும். ஆகையால் ஏதாவது ஒர் உறுப்பிலிருந்நது அதனுடைய முன் உறுப்பால் கழிக்கப்பட்டால் d கிடைக்கிறது. இவ்வாறு d சமமாக இருக்கும் இந்த உறுப்புகள் உடனடியாக கூட்டுத்தொடர் வரிசையாக மாறியிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக சில எண்களை பட்டியலில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

6, 9, 12, 15, ...

நாம் பெறுவது $a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இங்கே ஏதாவது இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்பு எண்களின் வித்தியாசம் 3 ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் இடையேயுள்ளது. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில் உள்ள AP யின் ‘a’ முதல் உறுப்பு 6 மற்றும் அதன் ‘d’ பொது வித்தியாசம் −3 வரிசையிலுள்ள எண்கள் :

$$6, 3, 0, -3, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

அதேப்போல் இதனுடன் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் இவற்றின் ‘6’ முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் - 3

பொதுவில், இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ நாம் பெறுபவை

$$d = a_{k+1} - a_k$$

இங்கே a_{k+1} மற்றும் a_k இவைகளில் (k+1) வது மற்றும் k வது உறுப்புகள் முறையே ஆகும்.

கொடுத்துள்ள AP கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் d கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க தேவையில்லை.

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_4 - a_3 \ldots.$$

இவைகளில் ஏதாவது ஒன்றை மட்டும் கண்டுபிடித்தால் போதும். பட்டியலிடப்பட்ட எண் களைக் குறிக்கவும் 1, 1, 2, 3, 5, ... இவைகளைக் கூர்ந்து கவனிக்கும் பொழுது இரண்டு அடுத்தடுத்த தொடர் வரிசை எண்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரே விதமாக இல்லை. ஆகையால் இது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையல்ல.

இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் d யைக் கண்டு பிடி? *6, 3, 0, -3,* நாம் *3* லிருந்து *6* ஐக் கழிக்கப்பட்டால் நாம் பெறுவது *6* லிருந்து *3* ஐ கழிப்பதை போன்று அல்ல, அதாவது நாம் (k+*1*) வது உறுப்பிலிருந்து k வது உறுப்யை கழிக்கவேண்டும். இந்த நிகழ்வில் (k+*1*) வது உறுப்பு என்பது சிறியதாக இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு மூலம் தெளிவாக இந்த கருத்தை புரிந்துக் கொள்ளாலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 1 : இந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ ... முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாச உறுப்பு d ஆகியவற்றை கண்டுப்பிடிக்கவும்.

தீர்வு : இங்கு $a = \frac{3}{2}$ $d = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} = -1$

நாம் நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டியவை இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் d யைக் கண்டுபிடித்து, அதை பயன்படுத்தி அந்த தொடரை கண்டுபிடிக்க முடியும். ஒருமுறை நம்மால் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட அந்த தொடரை, கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது என அறிந்துகொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பட்டியலிடப்பட்ட எண்களில் எவை கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். அவைகளில் ஒரு கூட்டுத்த தொடர் வரிசை எனில் அடுந்து வருகின்ற தொடரின் இரண்டு உறுப்புகளை எழுதுக ?

i) 4, 10, 16, 22, ...

ii) 1, –1, –3, –5, ...

iii) –2, 2, –2, 2, –2 ....

vi) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 ....

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தீர்வு : i) நமக்கு கிடைப்பவை $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

அதாவது ஒவ்வொரு முறையும் $a_{k+1} - a_k$ என்பது சமமாக கிடைக்கும். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியல் எண்களில் பொது வித்தியாசம் 6 சமமாக இருப்பதால் இது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாக உருவாகியிருக்கிறது. அடுத்த இரண்டு தொடர் உறுப்புகள் முறையை 22 + 6 = 28 மற்றும் 28 + 6 = 34

ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$

$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது சமமாக கிடைக்கும். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியல் எண்களில் பொது. வித்தியாசம் –2 சமமாக இருப்பதால் இது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாக உருவாகியிருக்கிறது.

அடுத்த இரண்டு தொடர் உறுப்புகள் முறையே :

$5 + (2) = 7$ மற்றும் $7 + (2) = 9$

iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

$\therefore$ ஆகிய $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ கொடுக்கப்பட்ட எண் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிகையாக அமையவில்லை.

iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0.$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0.$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

இங்கே $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ என்பதால் கொடுக்கப்பட்ட எண் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாக அமையவில்லை.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி 5.1

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் எந்த சூழ்நிலையில் கூட்டுத் தொடர் வரிசையாக உருவாக்கலாம் ஏன்?

   i) ஒரு மகிழுந்தின் (car) முதல் கிலோமீட்டர்கான வாடகை கட்டணம் ₹ 15 மற்றும் அதை தொடர்ந்து ஒவ்வொரு கிலோமீட்டருக்கும் ₹ 8.

   ii) வாயுக்கள் நிரப்பட்ட ஒரு முழு சிலிண்டரில் ஒரு காற்றை உறிஞ்சும் குழாயின் (pumb) வழியாக அந்த சிலிண்டரிலிருந்து $\frac{1}{4}$ பாகத்தை உறிஞ்சு எடுக்கப்பட்டால் மீதம் சிலிண்டரில் உள்ள வாயு.

   iii) ஆண்டிற்கு 8% கூட்டுவட்டி வீதத்தில் ₹ 10,000 தை ஒரு கணக்கில் வைக்கும் பொழுது ஒவ்வொரு ஆண்டு முடிவிலும் அந்த கணக்கில் உள்ள தொகை.

   iv) ஒரு கிணறு தோண்ட முதல் தொடக்க ஒரு மிட்டருக்கு ₹ 150 எனில் ஒவ்வொரு மீட்டரும் தோண்டிய பிறகு ₹ 50 அதிகரிக்குமானால் ஒவ்வொரு மீட்டரும் தேவையான அளவு தோண்டிய பிறகு அந்த கிணற்றை தோன்ற ஆகும் மொத்த செலவு.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d ஆக இருக்கும் பொழுது கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக :

i) $a = 10, d = 10$ ii) $a = -2, d = 0$
iii) $a = 4, d = -3$ iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$
v) $a = -1.25, d = 0.25$

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுத் தொடர் வரிசையில், முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

i) 3, 1, -1, -3..... ii) -5, -1, 3, 7, ...
ii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$..... iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9 ....

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைகளில் எவை கூட்டுத் தொடர் வரிசை? இவைகளில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை எனில் பொது வித்தியாசம் d யைக் கண்டுபிடித்து மற்றும் தொடர்ந்து மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

i) 2, 4, 8, 16 .... ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$ ....
iii) $-1, 2, -3.2, -5.2, -7.2$ ..... iv) $-10, -6, -2, 2$ ......
v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}$ .... vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222 ....
vii) $0, -4, -8, -12$ .... viii) $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$, ...
ix) 1, 3, 9, 27 .... x) a, 2a, 3a, 4a ....
xi) a, a^2, a^3, a^4 .... xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$ ....
xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$ xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$ ....
xiv) $1^1, 5^2, 7^2, 7^3$, ...

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.3 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு

பகுதி 5.1 ல் உள்ள சூழ்நிலையை மீண்டும் எடுத்துக்கொள்வோம். அதில் ரீனா ஒரு வேலைக்கு போட்ட மனுவினால் தேர்வானார். அவள் அந்த வேலைக்காக மாதச் சம்பளம் ₹ 8000. உடன் ஆண்டுத் தோரும் ஊதிய உயர்வு ₹ 500. ஐந்தாவது வருடத்தில் அவள் பெறும் மாதச் சம்பளம் எவ்வளவு?

இதற்கான விடை, முதலில் கவனிக்க வேண்டியது, இரண்டாம் ஆண்டில் எவ்வளவு சம்பளம்?

இது ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500. இதே வழியில், நாம் மூன்றாவது, நான்காவது மற்றும் ஐந்தாவது ஆண்டிற்கான சம்பளத்தை ₹ 500 உடன் அதற்கு முன்பு உள்ள ஆண்டு சம்பளத்துடன் கூட்ட வேண்டும்.

ஆகையால், 3 வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹÷ (8000 + 2 × 500)

= ₹(8000 + (3 1) × 500) [3ஆம் ஆண்டில்]

= ₹ 9000

4வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ (8000+(41)×500) [4ஆம் ஆண்டில்]

= ₹ 9500

5வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 ×500)

= ₹ (8000+(51) × 500) [5ஆம் ஆண்டில்]

= ₹ 10000

அந்த பட்டியலை நாம் கவனிக்கும் பொழுது கிடைத்தவை

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, ...

இவைகள் எல்லாம் கூட்டுத் தொடர் வரிசை (ஏன்?). இப்பொழுது மேலே உள்ள முறையை பார்க்கும் போது அவளுடைய 6 வது ஆண்டு மாதச் சம்பளத்தைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? 15 வது ஆண்டுக்கு? மற்றும் தொடர்ந்து அவள் இன்னும் பணியில் இருப்பதாக எடுத்துக்கொண்டால் 25 வது வருடத்தில் பிரதி மாதச் சம்பளம்? நீங்கள் கணக்கிடும் போது ₹500 ஒவ்வொரு நேரமும் கடந்த வருட சம்பளத்துடன் கூட்டும் பொழுது பதில் கிடைக்கும். இதை நம்மால் சுருக்கு முடியுமா? அதைப் பார்ப்போம். உங்களுக்கு ஏற்கனவே சில யோசனைத் தோன்றியிருக்கும் மேற்கூறிய வழியில் சம்பளத்தைப் பெறுவதற்கு.

15 வது ஆண்டு சம்பளம்

= 14 வது ஆண்டு சம்பளம் + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \frac{500 + 500 + ... + 500}{13 \text{ வது முறை}}\right] + ₹\ 500$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹ [8000 + (15-1) \times 500] = ₹ 15000$

அதாவது முதல் சம்பளம் + (151) x ஆண்டிற்கான ஊதிய உயர்வு இதே வழியில் அவளுடைய மாதச் சம்பளம் 25 வது வருடத்தில்.

$= [8000 + (25-1) \times 500] = ₹ 20000$

= முதல் சம்பளம் + (25–1) x ஆண்டிற்கான உயர்வு

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் உங்களுக்கு சில யோசனை தோன்றுவதன் மூலம் மேற்குறிப்பிட்ட 15 வது உறுப்பை அல்லது 25 வது உறுப்பு எப்படி எழுதுவது.

மற்றும் பெரும்பாலும் உறுப்பு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு ஆனது,

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை a_1, a_2, a_3 என எடுத்துக்கொண்டால் அதனுடைய a_1 ஐ a என்றும் பொது வேறுபாட்டை d என்றும் கொண்டு அதன்பிறகு,

இரண்டாம் உறுப்பு $a_2 = a + d = a + (2-1)\ d$

மூன்றாம் உறுப்பு $a_3 = a_2 + d = a+d+d = a+2d = a + (3-1)\ d$

நான்காம் உறுப்பு $a_4 = a_3 + d = (a+2d)+d = a+3d = a + (4-1)\ d$

....

....

இந்த வடிவத்தை கவனிக்கும் பொழுது, நம்மால் n வது உறுப்பை எழுதமுடியும் $a_n = a + (n - 1)\ d$.

ஆகையால், கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொதுவித்தியாசம் d இவற்றை கொண்டு n **வது உறுப்பை** $\mathbf{a_n = a + (n-1)d}$ இவ்வாறு குறிப்பிடலலாம்.

a_n ஐ **கூட்டுத் தொடர் வரிசையினுடைய** பொது உறுப்பாக கூறலாம்.

கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் m உறுப்புகள் இருக்குமாயின் கடைசி உறுப்பை $\boldsymbol{l}$ என்று குறிப்பிடலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

சில எடுத்துகாட்டுகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை கவனிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : 2, 7, 12, ... எண்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 வது உறுப்பு கண்டுபிடி?

தீர்வு : இங்கு $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ மற்றும் $n = 10$

நமக்கு வேண்டியது $a_n = a + (n - 1)d$

ஆகையால் $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5$

$= 2 + 45$

$= 47$

ஆதலால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூ. தொ. வ இல் 10 வது உறுப்பு 47.

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு கூ. தொ. வரிசை 21, 18, 15 ..... எனில் எந்த உறுப்பு –81 ஐ கொண்டிருக்கும்? அத்துடன் எந்தொரு உறுப்பாவது 0 ஐ கொண்டிருக்குமா? உங்களுடைய விடைக்கு காரணம் தருக.

தீரவு : இங்கு $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ மற்றும் $a_n = -81$ எனில் நாம் n வது உறுப்பு பெறுவது $a_n = a + (n - 1)d$ போன்று நமக்கு தேவை.

$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

$-81 = 24 - 3n$

$-105 = -3n$

$n = 35$ என்பதை நாம் அடைகிறோம்.

ஆகையால் n = 35, ஆதலால் கூ. தொ. வ. யில் 35 வது உறுப்பு –81 அகும்.

அடுத்ததாக, எதாவது n வது உறுப்பு $a_n = 0$ ஆக இருக்கும் போது எந்த உறுப்பு என தெரிந்து கொள்ள நாம்.

$21 + (n - 1)(-3) = 0$

$3(n - 1) = 21$

$n = \frac{24}{3}$

அதாவது $n = 8$

ஆகையால் எட்டாவது உறுப்பு '0' வாக இருக்கிறது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு கூ.தொ.வ. இல் 3 வது உறுப்பு 5 மற்றும் 7 வது உறுப்பு 9. அந்த கூட்டுத் தொடரை வருவி.

தீர்வு : நாம் பெறுபவை $a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2 = 5$ .... *(1)*

மற்றும் $a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9$ .... *(2)*

(1) மற்றும் *(2)* ஒருபடிச் (நேரிய) சமன் பாட்டிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பவை $a = 3, d = 1$

எனவே தேவையான கூட்டுத் தொடர்

3, 4, 5, 6, 7 .... ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : *5, 11, 17, 23* .... வரிசையில் (பட்டியல்) இடப்பட்ட உறுப்புகளில் *301* என்பது ஓர் உறுப்பா என சோதிக்கவும்?

தீர்வு : நமக்கு கிடைப்பவை

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6,$$

$$a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6,$$

$$a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

இவ்வாறாக $a_{K+1} - a_K$, K=1, 2, 3, இன்னும் பல.

வரிசைப் படுத்தப்பட்ட எண் ஒரு கூ. தொ. வ. தருகின்றன.

இப்பொழுது $a=5$ மற்றும் $d=6$

301 என்பது ஒருறுப்பு என நாம் எடுத்துக்கொள்வோ மானால். கூ.தொ. வரிசையில் n வது உறுப்பு, இது நமக்கு தெரிந்தவை.

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

ஆகையால், $301 = 6n - 1$

ஆகையால், $n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$ ஆகையால், ...

ஆனால் n ஆனது மிகை முழுவாக இருக்கவேண்டும் (ஏன்?), ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் எண்களில் இது ஓர் உறுப்பு இல்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 7 : 3 ஆல் வகுப்படும் ஈ.ரிலக்க எண்கள், எத்தனை உள்ளது?

தீர்வு : 3 ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க என்களின் வரிசை

12, 15, 18 99

இது ஒரு கூ. தொ (AP) ? ஆம்,

இங்குள்ளது போல, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$

இதுபோல, $a_n = a + (n - 1)d$

நமக்கு கிடைப்பது $99 = 12 + (n - 1) \times 3$

அதாவது $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

$n = 29 + 1 = 30$

ஆகையால், ஈரிலக்க எண்களில் *3* ஆல் வகுப்படும் எண்கள் மொத்தம் *30* உள்ளது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 8 : கூ. தொ. இல் (AP) கடைசி உறுப்பிலிருந்து *11*வது உறுப்பு (முதல் உறுப்பு நோக்கி) கண்டுபிடி.

∴ கூ தொ : *10, 7, 4, ..., -62*

தீர்வு : இங்கு, $a = 10$,

$d = 7 - 10 = -3$

$l = -62$

அங்கு $l = a + (n - 1)d$

கடைசி உறுப்பிலிருந்து *11* வது உறுப்பு நாம் கண்டறிய, அந்த கூ.தொ. யில் உள்ள மொத்த உறுப்பு களை நாம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

ஆகையால் $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

அதாவது $-72 = (n - 1)(-3)$

அதாவது $n - 1 = 24$

(அல்லது) $n = 25$

ஆகையால், அந்த கூ. தொ. வரிசையில் *25* உறுப்புகள் உள்ளது. கடைசி உறுப்பிலிருந்து *11* வது உறுப்பு ஆனது *15* வது உறுப்பாக (இடத்தில் உள்ளதாக) இருக்கக்கூடும் (குறிப்பு அது *14* வது உறுப்பாக இருக்கமுடியாது. ஏன்?)

ஆகையால் $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3)$

$= 10 + 14 \times (-3)$

$= 10 - 42 = -32$

ஆதலால் அந்த கூ. தொ. ரில் கடைசி உறுப்பிலிருந்து **11** வது உறுப்பு **−32** ஆக இருக்கின்றன.

மாற்று வழி (முறை) யில் தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூ. தொ. வரிசையை (AP) திருப்பி அல்லது பின்னோக்கி (Reverse Order) நம்மால் எழுதப்படுமானால்.

அடுத்ததாக, $a = -62$ மற்றும் $d = 3$ (ஏன்?) ஆகையால், a மற்றும் d இருப்பதால் **11** வது உறுப்பு கண்டுபிடிக்க, இந்த வினா (கேள்வி) இப்போது இவ்வாறாக மாறுகிறது.

ஆகையால், $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3$

$= -62 + 30$

$= -32$

ஆகையால், **11** வது உறுப்பானது, அதாவது எந்த உறுப்பு தேவைப்படுமோ அந்த உறுப்பு **−32** ஆக இருக்கிறது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்தக்காட்டு 9 : ஆண்டுக்கு 8% தனிவட்டி விதத்தில் ₹**1000** தொகை முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு ஆண்டு முடிவிலும் கிடைக்கக் கூடிய வட்டியைக் கணக்கிடுக. வட்டியை கூ. தொ. வரிசை வடிவில் எழுதமுடிமா? அப்படியானால், **30** ஆண்டுகள் முடியும் வரை, இவ்வாறு அதாவது இந்த வழிமுறையை பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்க முடியுமா?

தீர்வு : கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளவாறு, தனிவட்டி கணக்கிடும் சூத்திரம், நமக்குத் தெரியும்.

தனிவட்டி $= \frac{P \times R \times T}{100}$ அல்லது $\frac{\text{அ} \times \text{வ} \times \text{கா}}{100}$

ஆகையால் **1** வது ஆண்டு. முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி $= \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\ 80$

2 ஆம் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் வட்டி $= \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\ 160$

3 ஆம் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் வட்டி $= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} =$ ₹ 240

இதேபோல், 4 ஆம், 5 ஆம் ஆண்டு முடிவில் தொடர்ந்து செல்லும். ஆகையால் 1 வது, 2 வது, 3 வது .... ஆண்டுகளின் முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி முறையே

80,160,240................இந்தகூ.தொ.ரில்.வரிசையிலிடப்பட்டதில், தொடர்ச்சியான உறுப்பு அதாவது $d = 80$ அத்துடன் $a = 80$ ஆகையால், 30 ஆண்டுகளின் முடிவில் வட்டி கண்டுபிடிக்க, a_{30} ஐ நம்மால் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இப்பொழுது, $a_{30} = a + (30-1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

ஆகையால், 30 ஆண்டின் முடிவில்

வட்டி ₹ 2400 ஆக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஒரு பூந்தோட்டத்தில், முதல் வரிசையில் 23 ரோசா செடிகளும், இரண்டாம் வரிசையில் 21, மூன்றாம் வரிசையில் 19 செடிகளும் மற்றும் இவ்வாறு தொடர்கிறது. கடைசி வரிசையில் 5 ரோசா பூச்செடிகளும் உள்ளது அந்த பூந்தோட்டத்தில் எத்தனை வரிசைகள் உள்ளன?

தீர்வு : 1 வது, 2 வது, 3 வது .... வரிசைகளில் உள்ள ரோசா செடிகளின் எண்ணிக்கை 23, 21, 19, ... 5.

இது ஒரு கூ. தொ. வரிசை (AP) ஆகும் (ஏன் ?) பூந்தோட்டத்தில் உள்ள வரிசைகள் எண்ணிக்கை n என எடுத்துக்கொள்க.

அடுத்தது, $a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

இவ்வாறாக, $a_n = a + (n-1)d$

நாம் பெறுவது $5 = 23 + (n-1)(-2)$

அதாவது, $-18 = (n-1)(-2)$

அதாவது, $n = 10$

ஆகையால், பூந்தோட்டத்தில் 10 வரிசைகள் உள்ளன.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி : 5.2

1. பின் வரும் அட்டவணையில் உள்ள காலி இடங்களை நிரப்பு, a முதல் உறுப்பு, d பொதுவேறுபாடு மற்றும் கூ. தொ. வரிசையில் n வது உறுப்பு ஆகியவை முறையே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	....
(ii)	–18	....	10	0
(iii)	.....	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	......	3.6
(v)	3.5	0	105	.....

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. பின் வருபவைகளில் சரியான வாய்ப்பை அல்லது பொருந்தமானதை தேர்ந்தெடு மற்றும் நியாப்படுத்துக.

(i) **10, 7, 4 ....** என்ற ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் **30** வது உறுப்பு.

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2,$ என்ற ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் **11** வது உறுப்பு

(A) 28 (B)22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

(iii) பின்வரும் கூ. தொ. வரிசைகளில் (APs)ா கட்டத்தில் விடுபட்ட உறுப்பு களைக் கண்டுபிடி.

(i) 2, ☐ , 26

(ii) ☐ , 13, ☐ , 3

(iii) 5 ☐ , ☐ , $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , 6

(v) ☐ , 38, ☐ , ☐ , ☐ , –22

4. **3, 8, 13, 18 ....** என்ற கூ. தொ. வரிசையில் **78** என்பது எந்த (எத்தனாவது) உறுப்பாக இருக்கும் ?

5. பின்வரும் கூ. தொ. வரிசைகளின் (APs) ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை (எத்தனை உறுப்புகள் உண்டு) கண்டுபிடி ?

(i) 7, 13, 19 .... 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13 .... −47

6. 11, 8, 5, 2, ... என்ற கூ. தொ. வரிசையில் −150 என்பது ஓர் உறுப்பாகுமா, சரிப்பார்க்கவும்.

7. 11 வது உறுப்பு 38 மற்றும் 16 வது உறுப்பு 73 உடைய ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் 31 வது உறுப்புக்கண்டுபிடி.

8. 50 உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு கூ.தொ. வரிசையின் 3வது உறுப்பு 12 மற்றும் கடைசி உறுப்பு 106. அந்த கூ. தொ. வரிசையின் 29 வது உறுப்பு கண்டுபிடி ?

9. ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் 3வது மற்றும் 9வது உறுப்புக்கள் முறையே 4 மற்றும் −8 எனில் எந்த உறுப்பு (எத்தனையாவது) கூ.தொ. வரிசையில் சுழி (பூஜ்ஜியம்) ஆக உள்ளது ?

10. ஒரு கூ. தொ வரிசையின் 17 வது உறுப்பு, அதனுடைய 10 வது உறுப்பைவிட 7 அதிகம் எனில் பொதுவேறுபாடு (d) கண்டுபிடி.

11. 3, 15, 27, 39 .... என்ற ஒரு கூ.தொ. வரிசையில் எந்த உறுப்பு அதனுடைய 54 வது உறுப்பைவிட 132 அகிகமாக இருக்கும்.

12. ஒரே மாதிரியான (சமமான) பொது வேறு பாடு உடைய இரண்டு கூ.தொ. வரிசைகள் உள்ளது. அவற்றின் 100 வது உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு 100 எனில் அவற்றின் 1000 வது உறுப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு என்னவாக இருக்கும் ?

13. 7 ஆல் வகுப்படகூடிய மூன்றிலக்க எண்கள் எத்தனை ?

14. 10 மற்றும் 250 க்கும் இடையில் 4 இன் மடங்குகள் எத்தனை உள்ளது ?

15. 63, 65, 67 .... மற்றும் 3, 10, 17....... என்ற இரண்டு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளின் n வது உறுப்புகள் சமம். எனில் n இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கிறது ?

16. மூன்றாம் உறுப்பு 16 மற்றும் 7 வது உறுப்பு ஆனது 5 வது உறுப்புடன் 12 அதிகமாக உடைய அந்த கூ. தொ. வரிசை கண்டறியவும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

17. 3, 8, 13 ...... 253 என்ற கூ. தொ. வரிசையின் கடைசி உறுப்பிலிருந்து 20 வது உறுப்பு கண்டுபிடி ?

18. ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் 4 வது மற்றும் 8 வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 24 மற்றும் 6 வது மற்றும் 10 வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 44 ஆகும். அந்த கூ.தொ. வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை கண்டுபிடி.

19. சுப்பாராவ் ₹ 5000க்கு. ஆண்டு சம்பளத்தில் 1995 இல் வேலையை தொடங்கினார். ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் ஊதிய உயர்வு ₹ 200 பெற்று வந்தார். எந்த ஆண்டில் அவருடைய வருவாய் ₹ 7000 தை அடைந்திருந்தது ?

20. இராமகலி ஒராண்டின் முதல் வாரத்தில் ₹ 5 சேமித்தாள் பிறகு அவளுடைய சேமிப்பு வாரந்தோறும் ₹ 1.75 ஐ அதிகபடுத்தி வருகிறாள். n வது வாரத்தில் அவளுடைய வாரந்தோறும் சேமிப்பு ₹ 20.75 ஆக ஆனது எனில் n ஐ கண்டுபிடி.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.4 ஒரு. கூ.தொ. வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் வரையின் கூடுதல்

(sum of first n Terms of an AP)

பகுதி 5.1 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலையை மீண்டும் நாம் எடுத்துக் கொண்டு கவனிப்போம் சகிலா அவளுடைய மகளின் வயது ஓர் ஆண்டு இருக்கும் போது அவளுடைய உண்டியலில் ₹ 100 போடுகிறாள் அவளுடைய இரண்டாம் ஆண்டு பிறந்த நாளில் ₹ 150, அவளுடைய மூன்றாம் ஆண்டு பிறந்த நாளில் ₹ 200 மற்றும் இதே வழியில் தொடர்ந்து உண்டியலில் போட்டு வருகிறாள். அவளுடைய மகளின் வயது 21 ஆண்டாக அடையும் போது உண்டியலில் சேகரிக்கப்பட்ட மொத்தத் தொகை எவ்வளவு.

இங்கு, அவளுடைய முதல், இரண்டாம்......... பிறந்த நாள்களில் உண்டியலில் போடப்பட்டத்தொகை (பணம் ₹ இல்) முறையே 100, 150, 200, 250 .... அவளுடைய 21 வது பிறந்தநாள் வரையில்.

21 வது பிறந்த நாள் வரையிலும் உண்டியலில் போடபட்ட மொத்தத் தொகை கண்டறிய மேலுள்ள வரிசையில் (பட்டியலில்) 21 எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் எழுதி வைக்கவும் மற்றும் அவற்றை ஒன்றுடன் ஒன்றை கூட்டவும்.

இது மிக கடின மானதாக நீங்கள் எண்ணக்கூடியது மற்றும் செயலுக்காக நேரம் அதிகமாக எடுத்துக் கொள்கிறதா? நம்மால் நேரத்தை குறைத்து (குறைந்தநேரத்தால்) இச்செயலை செய்யமுடியுமா? இந்த கூட்டுத்தொகையை பெறப்படுவதற்காக ஒரு வழி முறை நம்மால் கண்டுபிடிக்க முடியுமானால் இச்செயல் எளிதான வழியாக இருக்க முடியும். நம்மால் அதை எடுத்துக் கொண்டு பார்க்கலாம்.

நாம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கை ஊகிக்க (to Gauss) கவனிக்கவும். (பாடம் 8 இல் நீங்கள் படிக்கப் பட்டவைப் பற்றி) சற்று முன் அவன் வயது 10 ஆண்டுகள் இருந்த போது தீர்க்க, ஊகித்து சொல்ல முடியும், அவன் 1 முதல் 100 வறை மிகை முழுக்களின் கூடடுத்தொதாகை கண்டுபிடிக்க கேட்கப் பட்டிருந்தால் அவன் உடனடியாக அதன் கூட்டுத் 5050 என பதிலளித்து இருப்பான். அவன் எப்படி செய்து இருப்பான் என உங்களால் ஊகித்து கூறமுடியுமா?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அவன் எழுதியாவை :

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$

மற்றும் அதன் பிறகு, எண்களை பின்னோக்கி எழுதுக.

$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$

இவை இரண்டையும் கூட்டப்பட்டால், அவன் பெறுவது

$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$

$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$ (100 முறைகள்) அல்லது 100

ஆகையால், $S = \dfrac{100 \times 101}{100} = 5050$ அதாவது

கூட்டுத்தொகை = 5050

நாம் இப்போது, ஒரு கூ.தொ. வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை கண்டுபிடிக்க அதேமாதிரியான நுணுக்கத்தை கையாளுவோமாக.

$$a, a + d, a + 2d \ldots\ldots..$$

கூட்டுத்தொடம் வரிசையின் n வது உறுப்பு $a + (n - 1)d$

கூ. தொ. வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலை S ஆல் குறிப்பிடப்படுகிறது.

நமக்கு கிடைப்பவை.

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots. [a + (n - 1)d] \qquad (1)$$

பின்னோக்கில் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தி எழுதப்படுகிறது, எனில், நமக்கு கிடைப்பவை.

$$S = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \ldots\ldots. + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1) மற்றும் *(2)* கூட்ட உறுப்புகளோட உறுப்பு, நாம் பெறக்கூடியவை

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+ \ldots\ldots+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{n \text{ முறைகள்}}$$

அல்லது $2S = n\,[2a + (n - 1)d]$

(இங்கு n உறுப்புகள் இருப்பதாக)

அல்லது $\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)d]}$

ஆகையால், கூ. தொ. வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)d]$$

இவ்றறை நாம் இவ்வாறு கூட எழுதமுடியும்.

$$S = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)d]$$

அதாவது $S = \frac{n}{2}\,[a + a_n] \qquad (3)$

இப்போது, *(3)* இருந்து, கடைசி உறுப்பு $a_n = l$ எனில்

கூ. தொ. வரிசையில் n உறுப்பு மட்டும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், நாம் இதை கவனிக்கலாம்.

$$S = \frac{n}{2}\,[a + l] \qquad (4)$$

ஒரு கூ. தொ. வரிசையில் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும் போது இம்மாதிரியான வடிவத்தை பயன்படுத்தி விடை காணப்படுகிறது. மற்றும் பொதுவேறுபாடு கொடுக்கப்பட வில்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது, நாம், தொடக்கத்தில் நிறுத்திவைக்கப்பட்ட அந்த வினாவுக்கு உங்களைதிரும்பவும் தொடக்கத்திற்கு எடுத்து செல்லுவோம்.

சகிலாவினுடைய மகளின் *1* வது, *2* வது, *3* வது, *4* வது, பிறந்தநாளின் உண்டில் போடப்பட்ட மொத்த தொகை (₹ இல்) முறையே *100, 150, 200, 250*............ என இருக்கிறது இது ஒரு கூ. தொ (AP) வரிசையாகும் நாம் அவளுடைய *21* வது பிறந்தநாள் வரை உண்டியலில் சேகரிக்கப்பட்ட (அ) சேர்த்து வைக்கப்பட்டதைக்கண்டு பிடிக்க அதாவது இந்த கூ. கொ. வரிசையின் முதல் *21* உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை.

இங்கு a=100, d=50 மற்றும் n=21

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

நமக்கு கிடைப்பவை

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21 - 1) \times 50]$$

$$= [200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2}[1200]$$

$$= 12600$$

ஆகையால், அவளுடைய *21* பிறந்த நாள் வரை சேர்த்து வைக்கப்பட்ட தொகை மொத்தம் ₹ *12600* ஆகும்.

இந்த சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாமல் மிக எளியதாக இந்த கணக்கை தீர்க்க முடியுமா? (செய்யமுடியுமா?)

நாம் கூ.தொ. வரிசையில் முதல் n வறையுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதலை (எழுலாம்) s என்ற இடத்தில் உள்ளதை, S_n என பயன் படுத்திகூட குறிப்பிடலாம். நாம் ஒரு கூ. தொ. வரிசையில் முதல் *20* உறுப்புகளின் கூட்டுதெகையை குறிக்க S_{20} என எழுதப்படுகிறது.

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலுக்கான சூத்திரத்தில் நான்கு அளவுகள் s, a, d மற்றும் n உள்ளடக்கியவை. அவைகளில் ஏதாவது மூன்று அளவுகள் நமக்கு தெரிந்திருந்தால், நான்காவது அளவை நம்மால் கண்டுபிடிக்கமுடியும்.

குறிப்பு : ஒரு கூ. தொ. வரிசையில் n வது உறுப்பு என்பது, முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை மற்றும் முதல் (n-1) உறுப்புகளிள் கூட்டுத்தொகை ஆகியவற்றின் வித்தியாசமேயாகும். அதாவது $a_n = S_n - S_{n-1}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நாம்மேலும் சில எடுத்துக்காடடுகளை எடுத்துக்கொண்டு பார்ப்போம். **எடுத்துக்காட்டு 11,** கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு.கூ. தொ. வரிசையின் 22 உறுப்பு களின் கூடுகல் கண்டிபிடி 8, 3, -2 ....

தீர்வு : இங்கு a = 8, b = 3 − 8 = −5, n = 22 நமக்குக் தெரிந்தவை.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ஆகையால் $= \frac{22}{2}[16+21(-5)]$

$= 11(16 - 105)$

$= 11(-89) = -979$

ஆகையால், கூ. தொ. வரிசையின் 22 உறுப்புகளின் கூடுதல் - 979.

எடுத்துக்காட்டு 12 : கூ. தொ. வரிசையின் முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதல் 1050 மற்றும் முதல் உறுப்பு 10 எனில் 20 வது உறுப்பு கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு, $S_{14} = 1050, n=14, a=10$

இவ்வாறு $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

ஆகையால், $1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d]$

$1050 = 140 + 91d$

அதாவது $910 = 91d$

அல்லது $\therefore d = 10$

$S_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$

அதாவது, 20 வது உறுப்பு 200

எடுத்துக்காட்டு 13 : 24, 21, 18 .... என்ற கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகள் கூட்டினால் 78 கிடைக்கும் அல்லது 78 கிடைக்க எத்தனை உறுப்புகளை கூட்ட எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

தீர்வு : இங்கு $a = 24, d = 21-24 = -3, S_n = 78$, n கண்டுபிடிக்க நமக்கு தேவையானது.

நமக்கு தெரிந்தவை $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ஆகையால் $78 = \frac{n}{2}[48 + (n - 1)(-3)]$

$$78 = \frac{n}{2}(51 - 3n)$$

ஆகையால் $3n^2 - 51n + 156 = 0$

அல்லது $n^2 - 17 + 52 = 0$

அல்லது $(n - 4)(n - 13) = 0$

அல்லது $n = 4$ அல்லது 13

இரண்டு மதிப்புகளையும் n இன் மதிப்புகளாக எடுத்துக்கொள்ளப்படு கிறது. ஆகையால் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை *4* அல்லது *13* இவற்றில் ஒன்றாகும்.

குறிப்பு (Remarks) :

1) இந்த வகையில், முதல் *4* உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை = முதல் *13* உறுப் புகளின் கூட்டுத்தொகை = *78*

2) இரண்டு விடைகளும் சரியானதாக இருக்கிறது ஏன்னென்றால் *5* வது உறுப்பிலிருந்து *13* வது உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை சுழி (பூஜ்ஜியம்) யாக இருக்கும், a மிகையாகவும் மற்றும் d குறையாகவும் உள்ளது இந்த காரணத்தால், சில உறுப்புகள் மிகை மதிப்பு மற்றும் மற்ற உறுப்புகள் குறை மதிப்பு உடையவையாக இருப்பதாலும் ஒன்றுக்கு மற்றொன்று மதிப்பற்று போய்விடும் (cancel ஆகிவிடும்).

எடுத்துக்காட்டு *14* :

(i) முதல் *1000* மிகை முழுக்கள்

(ii) முதல் n மிகை முழுக்கள்.

இவற்றின் கூட்டுத்தொகைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : (i) $S = 1+2+3+ \ldots\ldots + 1000$ எனக்கொள்க (என்க), கூட்டுத் தொகைக்கான சூத்திரம் $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ ஐ பயன் படுத்தினால்.

நமக்கு கிடைப்பது $S_{1000} = \frac{1000}{2}[1 + 1000]$

$$S = 500 \times 1001 = 500500$$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ஆகையால், முதல் **1000** மிகை முழுக்களின் கூட்டுத் தொகை **500500** ஆகும்.

(ii) S_n = **1+2+3+ ....** + n என எடுத்துக்கொள்க.

இங்கு a =**1** மற்றும் கடைசி உறுப்பு l என்பது n ஆக இருக்கும்.

ஆகையால் $S_n = S_n = \frac{n(l+n)}{2}$ அல்லது $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ஆகையால், முதல் n மிகை முழுக்களின் கூட்டுத் தொகை (sum) காட்டபட்டுள்ள படி இருக்கிறது.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள n ஆவது உறுப்பு $a_n = 3 + 2n$ என்ற பட்டியலின் முதல் **24** உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $a_n = 3 + 2n$

ஆகையால் $a_1 = 3 + 2 \times 1 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$

. . . .

. . . .

எண்களின் பட்டியல் (List) 5, 7, 9, 11 .... எனவாகும். இங்கு d = 7 – 5 = 9 – 7 = 11 – 9 = 2 ..... மற்றும் தொடர்ந்துசெல்லும். ஆகையால், பொதுவேறுபாடு d = 2 உடைய அந்த வடிவம் கூ.தொ. வ. ஆகும். S_{24} உடைய அந்த வடிவம் கூ.தொ. வரிசையாகும். S_{24} ஐ கண்டுபிடிக்க, நமக்கு கிடைத்திருப்பவை n = 24, a = 5, d = 2 ஆகையால் $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12\,[10 + 46] = 672$

ஆகையால், பட்டியலில் உள்ள எண்களின் முதல் **24** உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை **672** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 : தொலைக்காட்சியின் (TV set) தொகுப்பு (அ) ஒட்டு மொத்தப் பாகங்களையும் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம் மூன்றாவது ஆண்டில் **600** தொ. கா. தொகுப்புகளையும், ஏழாவது ஆண்டில்

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

700 தொ.கா. தொகுப்புகளையும் தயாரித்தன. ஒவ்வொரு ஆண்டும் தயாரிக்கப்பட்டவை ஒரே சீராக அதிகத்துக் கொண்டே செல்கின்றன எனஊகிக்கவும். அவை ஒரு நிலையான எண்ணால் குறிக்கப் படுகிறது.

i) *1*வது ஆண்டில் தயாரித்தவை.

ii) *10* வது ஆண்டில் தயாரித்தவை.

iii) முதல் *7* ஆண்டுகளில் தயாரித்தவை மொத்தம்.

ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

தீர்வு : (i) ஒவ்வொரு ஆண்டும் தயாரிக்கப்பட்டவை, சீராக அதிகரித்துக்கொண்டு செல்லக்கூடியவையை, ஒரு நிலையான எண்ணாக உள்ளது இதிலிருந்து *1* வது, *2* வது, *3* வது ..... ஆண்டுகளில் TV செட்கள் தயாரித்தவையின் எண்ணிக்கை ஒரு கூ.தொ. வரிசையை உருவாக்கும் (கூ. தொ. வடிவமாக அமையும்) n வது ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட T.V. தொகுப்புகளின் எண்க்கையை a_n ஆல் குறிப்பாதாக நாம் எடுத்துக்கொள்வோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதன்பிறகு $a_3 = 600$ மற்றும் $a_7 = 700$

அல்லது $a + 2d = 600$

மற்றும் $a + 6d = 700$

இந்த சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதால் நமக்கு கிடைப்பவை (நாம்பெறுவது) $d = 25$ மற்றும் $a = 550$ ஆகையால், முதல் ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட TV செட்களின் எண்ணிக்கை *550*.

(ii) இப்பொழுது, $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$ ஆகையால் *10* வது ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட T.V. தொகுப்புகளின் எண்ணிக்கை *775* ஆகும்.

(iii) அத்துடன், $S_7 = \frac{7}{2} = [2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2} = [1100 + 150] = 4375$$

எனவே, முதல் *7* ஆண்டுகளில் தயாரிக்கப்பட்ட T.V. தொகுப்புகளின் மொத்தம் *4375*. ஆகும்.

பயிற்சி 5.3

1. பின்வரும் கூ. தொ. வரிசைகளின் (APs) கூட்டுத்தொகையைக் கண்டுபிடி.

i) 2, 7, 12 .... என்ற **10** உறுப்புகளுக்கு

ii) –37, –33, –29 ...... என்ற **12** உறுப்புகளுக்கு

iii) 0.6, 1.7, 2.8 .... என்ற **100** உறுப்புகளுக்கு

iv) $\frac{7}{15}, \frac{7}{12}, \frac{7}{10}$ .... என்ற **11** உறுப்புகளுக்கு

2. கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள கணக்குகளுக்கு கூட்டுத்தொகை கண்டுபிடி

i) $7 + 10\frac{7}{2} + 10 + ... + 84$

ii) $34 + 32 + 30 + ... + 10$

iii) $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

3. ஒரு கூ.தொ. வரிசையில் (AP)

i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில், n மற்றும் S_n கண்டுபிடி.

ii) $a = 7$, $a_{13} = 75$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை, d மற்றும் S_{13} கண்டுபிடி.

iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில் a மற்றும் S_{12} கண்டுபிடி.

iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில் d மற்றும் a_{10} கண்டுபிடி.

v) $d = 5$, $S_9 = 75$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில் a மற்றும் a_9 கண்டுபிடி.

vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைஎனில் n மற்றும a_n கண்டுபிடி.

vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில் n மற்றும d கண்டுபிடி.

viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எனில் n மற்றும a கண்டுபிடி.

ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது d ஐ கண்டுபிடி.

x) $l = 28$, $S = 144$ மற்றும் $n = 9$ உறுப்புகள் உள்ளது எனில் a வை கண்டுபிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 9,17,25....... என்ற கூ. தொ. வரிசையில் 636 கூட்டுத்தொகை பெறுவதற்கு எத்தனை உறுப்புகள் வேண்டும்?

5. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் முதல் உறுப்பு 5, கடைசி உறுப்பு 45, மற்றும் கூடுதல் 400 உள்ளது அதன் பொதுவேறுபாடு மற்றும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கண்டுபிடி.

6. ஒரு கூ.தொ. வரிசையின் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் முறையே 17 மற்றும் 350. பொதுவேறுபாடு 9 எனில், அவற்றில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளது? மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் (sum) என்ன?

7. ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் d=7 மற்றும் 22 வது உறுப்பு 149 இருக்கிறது. 22 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

8. இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது உறுப்புகள் முறையே 14 மற்றும் 18 உடைய கூ.தொ. வரிசையின் முதல் 51 உறுப்புகளின் கூடுதல் கண்டுபிடி.

9. கூ.தொ. வரிசையின் 7 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 49 மற்றும் அத்தொடரில் 17 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 289 எனில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

10. a_1, a_2, a_3 ..... a_n வை பதிலிட்டு, a_n என்பது ஒரு கூ.தொ. வரிசையை உறுவாக்கிறது என காட்டுக₹₹, a_n கீழே உள்ளவாறாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) i) $a_n = 3 + 4n$ ii) $a_n = 9 - 5n$

11. ஒரு கூ.தொ. வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $4n-n^2$ ஆக உள்ளதெனில் முதல் உறுப்பு (அதாவது S_1) என்ன? முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் எவ்வளவு ? இரண்டாம் உறுப்பு என்ன? இதேபோல, 3வது, 10வது மற்றும் n வது உறுப்புகளை கண்டுபிடி?

12. 6 ஆல் வகுபடும் முதல் 40 மிகை முழுக்களின் கூட்டுத்தொகைக் காண்க.

13. 8 இன் மடங்குகளில் முதல் பதினைந்து உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை கண்டுபிடி.

14. 0 மற்றும் 50 க்கு இடைப்பட்ட ஒற்றை படை (odd numbers) எண்களின் கூட்டுத்தொகைக் கண்டுபிடி.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. ஓர் ஒப்பந்ததார், ஒப்பந்தபடி குறிப்பிட்ட பணியை முடித்துதருவதற்கு காலதாமதம் ஆனதற்காக ஒரு குறிப்பிட்ட தேதிக்கு பிறகு அதற்கான தண்டனை தொகை பின்வருமாறு, முதல் நாளுக்காக ₹ 200, இரண்டாம் நாளுக்காக ₹ 250, மூன்றம் நாளுக்காக ₹ 300, மற்றும் தொடர்ந்து அந்த பணியை முழுமையாக முடிக்கும் நாள் வரையிலும், அடுத்தடுத்து நாட்களுக்காக, முந்திய நாளை விட ₹ 50 அதிகமாக தண்டனைத் தொகை செலுத்துகிறார். அந்த பணியை (வேலையை) அவர் முடிக்க 30 நாட்கள் காலதாமதமானதால் அந்த ஒப்பந்ததார் தண்டனையாக எவ்வளவு தொகை (பணம்) செலுத்துகிறார்?

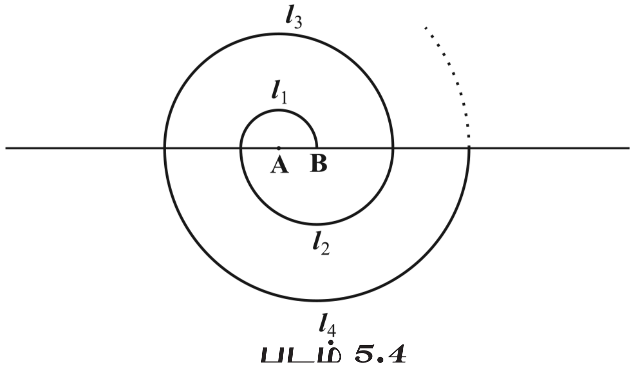
16. ஒருபள்ளிக்கூடத்தின்மாணாக்கர்களுக்குகல்வியாண்டுமுழுமையிலும் எல்லாவற்றின் செயல் முன்னேற்றத் திற்காக (performance) ஏழு பணத்தொகை பரிசு (cash prize) க்கு மொத்தம் ₹ 700 ஐ பயன் படுத்தப்பட்டு இருக்கின்றனர். ஒவ்வொரு பரிசுத்தொகையும் அதனுடைய முந்திய (முந்தைய) பரிசு காட்டிலும் (விட) ₹ 20 குறைவு என்றால் ஒவ்வொரு பரிசுகளின் மதிப்பு (தொகை) கண்டுபிடி.

17. ஒரு பள்ளியில், காற்று மாசுவடைதலை குறைக்க அந்த பள்ளியின் உள்ளேயும் மற்றும் சுற்று புறங்களிலும் மரங்களை (Tress) நடவுதற்கு மாணாக்கர்கள் ஆசைப்பட்டனர். அவை ஒவ்வொரு வகுப்பின் (each class) ஒவ்வொரு பிரிவிலும் (each section) நடுவதற்கு, மரங்களின் எண்ணிக்கை தீர்மானிக்கப்பட்டது, அந்த வகுப்பிலுள்ளது போல அதே மாதிரியாக இருக்கும், அவர்கள் அதில் படித்துக்கொண்டு இருப்பவர்களாவர் எடுத்துக்காட்டாக (e.g.), I வது வகுப்பின் ஒரு பிரிவு 1 மரம், II ஆம் வகுப்பின் ஒரு பிரிவு 2 மரங்கள் மற்றும் இதேபோல தொடர்ந்து IX வகுப்பு வரை மரங்கள் நடப்படும். அங்கு ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் மூன்று பிரிவுகள் இருக்கின்றன அங்கு மாணாக்கர் களால் நடப்பட்டிருக்கும் மரங்கள் எத்தனை?

18. ஒரு ஸ்பைரல் (spiral) சுழற்சி மூலம் A மற்றும் B இடங்களில் மாறிமாறி மையங்களுடன் அடுத்தடுத்து அரைவட்டங்களாக செய்யப்பட்டுள்ளது. A மையத்துடன் தொடங்கி 0.5 செ.மீ., 1.5 செ.மீ., 2.0 செ.மீ..... படம் 1.4 இல் காட்டியுள்ளதுபோல ஆரங்களைக் கொண்டு உள்ளன. ஒரு ஸ்பைரலால் உருவாக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான பதிமூன்று அரைவட்டங்களின் மொத்த நீளம்

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

எவ்வளவு ? ($\pi = \frac{22}{7}$ என எடுத்துக்கொள்க)

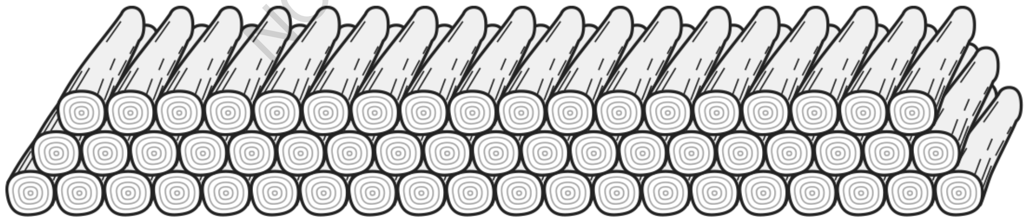


படம் 5.4

(குறிப்பு : (Hint) A,B, A,B .... என்ற மையங்களுடன் அடுத்தடுத்து அரைவட்டங்களின் நீளங்கள் முறையே l_1, l_2, l_3, l_4 .....)

19. 200 மரக்கட்டை (திண்மை) கள் பின் வருமாதிரியில் குவிக்கப் பட்டுள்ளன, 20 திண்மைகள் அடிப்பாக வரிசையிலும், அதற்கடுத்த மேல்வரிசையில் 19 தும், அதற்கும் அடுத்த மேல்வரிசையில் 18டும் மற்றும் இவ்வாறு தொடர்ந்துள்ளது.

(படம் 5.5 ஐ பார்). 200 திண்மை களையும் எத்தனை வரிசை களில் வைக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் உச்சி (Top) பாகம் வரிசையில் (Row-நிரை) எத்தனை திண்மைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளது ?

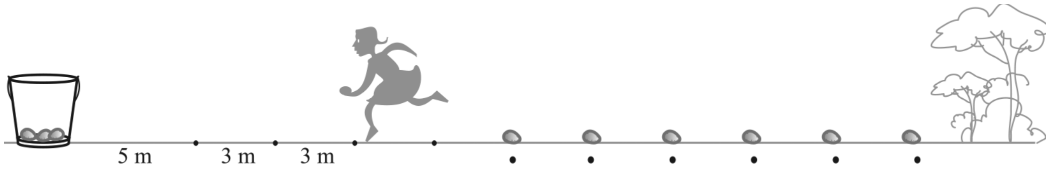


படம் 5.5

20. உருளைக்கிழங்கு பந்தையம் ஒன்றில் ஒரு வாளி தொடங்கும் (இடமான) புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து 5 மீ. தூரத்தில் முதல் உருளைக்கிழங்கும் மற்றும் மற்ற உருளைக்கிழங்குகளை ஒரு நேர்க் கோட்டின்மேல் 3 மீ இடைவெளிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இவ்வாறு பத்து உருளைக்கிழங்குகள் அந்த கோட்டில் ஒவ்வொன்றாக வைக்கப்படுள்ளது (படம் 5.6 ஐ பார்)



படம் 5.6

ஒரு போட்டியாளர், வாளி இருக்கும் இடமிருந்து தொடங்கி, மிக அருகாமையில் உள்ள உருளைக்கிழங்கு (potato) கையில் எடுத்துக் கொண்டு, அந்தகிழங்கோட திரும்ப ஓடிவந்து அக்கிழங்கை வாளியில் போடவேண்டும். அடுத்த உருளைக்கிழங்கு எடுப்பதற்கு மீண்டும் திரும்ப ஓடி, கிழங்கை எடுத்துக் கொண்டு. வாளியில் போடுவதற்கு திரும்பம் ஓடி வந்து அதைப்போடவேண்டும் மற்றும் அவள் இதே வழிமுறையில் எல்லா உருளைக்கிழங்குகளையும் வாளியில் போட்டு முடிக்கும்வரை தொடர்ந்து செய்யவேண்டும்.

போட்டியாளர் ஓடவேண்டிய மொத்தம் தூரம் எவ்வளவு ?

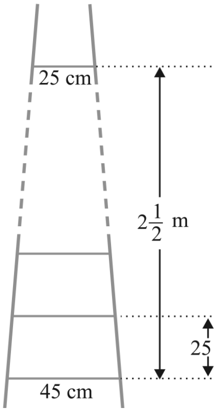
(குறிப்பு : முதல் உருளைக்கிழங்கு மற்றும் இரண்டாவது உருளைக்கிழங்கு எடுத்துவர போட்டியாளர் ஓடிய மொத்த தூரம் [(மீட்டரில்) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி 5.4 (விருப்புரிமை கொண்டவை)*

1. *121, 117, 113.......* என்ற ஒரு கூ.தொ. வரிசையின் முதல் குறையெண் உறுப்பு எது? (First negative term). குறிப்பு : n, $a_n < 0$ வாகும்.

2. ஒரு கூ. தொ. வரிசையின் மூன்றாம் மற்றும் ஏழாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 6 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கல் தொகை 8, கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் பதினாறு உறுப்புகளின் கூடுதல் கண்டுபிடி.



படம் 5.7

---

* தேர்வு கண்ணோட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டவை அல்ல.

3. ஓர் ஏணியின், ஏணி படிகள் 25 செ.மீ. இடைவெளியில் தனித்தனியாக ஏணிபடிகள் உள்ளது (படம் 5.7ஐ பார்) ஏணிப்படிகள்

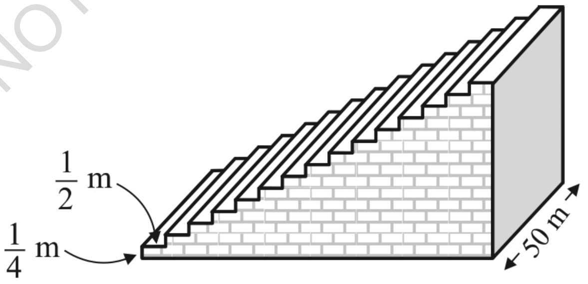
அடிப்பாகத்தில் 45 செ. மீ. இருந்து மேல் பாகத்தில் 25 செ.மீ. வரை படியின் நீளத்தில் சீராக குறைந்துக்கொண்டே செல்கிறது. $2\frac{1}{2}$ மீட்டர் இடைவெளியில் ஏணியின் அடி மற்றும் உச்சி (மேல்) படிகள் இருந்தால் அந்த படிகளுக்காக எவ்வளவு நீளமுள்ள மரம் (சட்டம்) தேவை?

குறிப்பு : ஏணிப்படிகளின் (எண்ணிக்கை $\frac{250}{25} + 1$)

4. 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியான எண்ணிக்கை உடைய ஒரு வரிசையில் விடுகள் உள்ளன. x என்ற வீட்டை குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் முந்தைய வீடுகளின் எண்ணிக்கைகளின் கூட்டுத்தொகையானது அதனுடைய பிந்திய வீடுககளின் எண்ணிகைகளின் கூட்டுத் தொகைக்கு சமமாக x ன் மதிப்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. x ன் மதிப்பு கண்டுபிடி. (குறிப்பு : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. கால்பந்தாட்ட மைதானத்தில் விளையாட்டை உட்கார்ந்து கண்டு களிக்க கூடிய ஒன்று, 15 படிகளை கொண்டு சிமெண்ட் காங்ரேட்டால் கெட்டியாக இணைந்து கட்டபட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு படியும் 50 மீ. நீளமும் $\frac{1}{2}$ மீ. அகலமும் $\frac{1}{4}$ மீ. உயரமும் உடையது. (படம் 5.8 பார்) அந்த மேல் தளத்தை அமைக்க காங்ரேட்டின் கன அளவு (volume) கணக்கிடுக.



படம் 5.8

(**குறிப்பு :** முதல் படி அமைக்க தேவையான காங்ரேட்டின் கன அளவு $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$)

5.5 தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில் பின்வரும் கருத்துகளை நாம் படிக்கிறோம்.

i) **கூ.தொ. வரிசை** (AP) என்பது எண்களைக் கொண்டு பட்டியலிடப்பட்ட வரிசை ஆகும். அல்லது பட்டியலிடப்பட்ட எண்களின் வரிசை ஆகும். எந்த ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் அதாவது முதல் உறுப்பை தவிர்த்து அதன் முந்திய உறுப்புடன் நிலையான எண் d சேர்பதால் பெறப்பட்டவை ஆகும். அந்த நிலையான எண் **dயை பொது வேறுபாடு** என்று அழைக்கிறோம்.

ii) கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம் **a, a+d, a+2d, a+3d** .....

iii) ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் a_1, a_2, a_3 ..... என்பவை எண்களை குறிக்கிறது. மேலும் $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$... , ஒரே மாதிரி மதிப்புகளை இவை கொடுத்தால் அந்த வேறுபாடுகளானது சமம். அதாவது $a_{k+1} - a_k$ இருந்தால் K யின் பொது வேறுபாட்டிற்கான மதிப்பு ஒரே மாதிரியாக உள்ளது.

iv) கூட்டு தொடரில் பொது வேறுபாடு d மற்றும் முதல் உறுப்பு a இருக்கும் போது, n வது உறுப்பு (அல்லது பொதுவடிவம்). $a_n = a + (n - 1)d$ ஆல் கொடுக்கப்படுகின்றன.

v) ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ ஆல் தரப்பட்டுள்ளது.

vi) முடியும் கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் கடைசி உறுப்பு l எனில் இதை 'n' வது உறுப்பு என்றும் சொல்லப்படுகிறது. அப்படியானால் அந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் எல்லா உறுப்புகலின் கூடுதல் $S = \frac{n}{2}(a + l)$ ஆல் தரப்பட்டுள்ளது.

படிப்பவர்களுக்கான ஒரு குறிப்பு :

படிப்பவர்கள் கவனிக்க : கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் (AP) a, b, c எனில் $b = \frac{a + c}{2}$ எனவும் மற்றும் இங்கு b என்பது a மற்றும் c யின்
கூட்டு சராசரி என அழைக்கபடுகிறது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முக்கோணங்கள்

TRINGLES

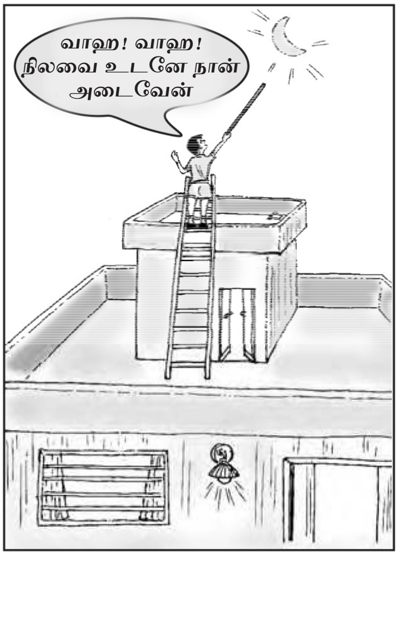
F7E1M5

6

6.1 அறிமுகம் :

முந்தைய வகுப்புகளிலிருந்து முக்கோணங்களின் அதிகமான தன்மைகளைப் பற்றி நீ நன்றாக தெரிந்து கொண்டிருப்பாய். 9 ஆம் வகுப்பில், முழுது மொத்த முக்கோணங்களைப் பற்றி நீ விவரமாக படித்திருப்பாய். இரண்டு படங்கள் முழுது மொத்தவைப்பற்றி நினைவிக் கொண்டு வரவும், அவைகள் ஒரே வடிவம் மற்றும் ஒரே அளவு இருக்கு மாயின் (மற்றும் ஒரே அளவில் இருக்க தேவையில்லை) அதை நாம் வடிவொத்த படங்கள் என அழைக்கலாம் மற்றும் குறிப்பிடும் படி, முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை நாம் கலந்துரையாடலாம். மற்றும் முந்தைய தேற்றமான பைதாகோரஸின் எளிமையான நிருபணத்தில் கொடுக்கப்பட்டதில் உன் அறிவை பிரயோகிக்கவும்.

மலைகளின் உயரங்கள் எவ்வளவு என்பதைப்பற்றி நீ யூகிக்கவும் (எவரெஸ்ட் மலை எனக்கூறு) அல்லது சில நீளமான தூரத்தின் உருவங்களின் தூரம் (நிலா எனக்கூறு) பற்றி கண்டு பிடித்திருப்பாயா?

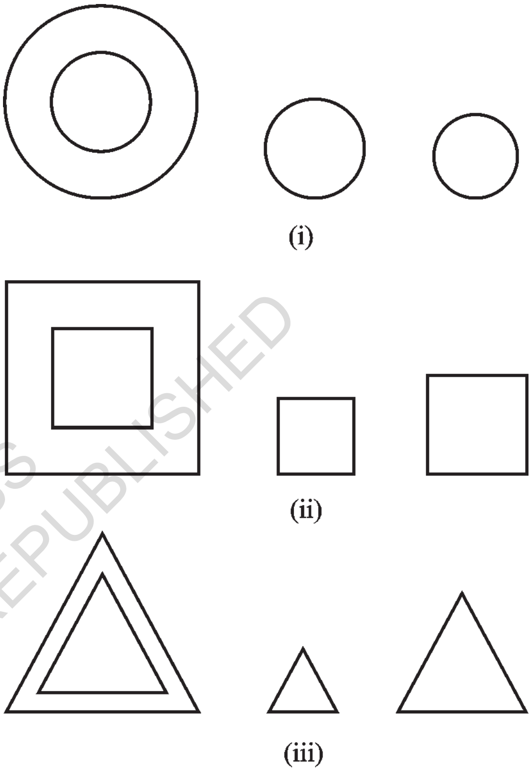


©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முக்கோணத்தின் வடிவொப்புமை கொள்கையின் பயன் படுத்தி எல்லா உயரங்கள் மற்றும் தூரங்களான இவைகளின் அளவுகளை கண்டுபிடிக்க முடிந்தது. (எடுத்துக்காட்டு 7, பயிற்சி 6.3 இல் கேள்வி 15 மற்றும் அதோடு இந்த புத்தக பாடங்களான 8 மற்றும் 9 ஐ பார்)

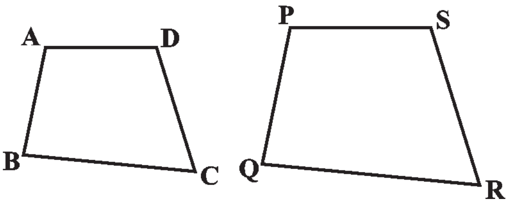
6.2 வடிவொத்த படங்கள் :

9 ஆம் வகுப்பில், ஒன்றேயான ஆரங்களைக் கொண்ட எல்லா வட்டங்களும் முழுது மொத்தவை மற்றும் ஒன்றேயான பக்க நீளங்களைக் கொண்ட சம பக்க முக்கோணம் முழுது மொத்தவையாகும்.



படம் 6.1

இப்பொழுது இரண்டு (அல்லது அதிகமான) வட்டங்கள் உள்ளன என கருது (படம் 6.1 (i) ஐ பார்) இவைகள் முழு மொத்தவையா? அவைகள் எல்லாம் ஒரே ஆரங்களாக இல்லை, ஆதலால் அவை ஒன்றுக்கொன்று முழு மொத்தமையல்ல. சில முழுமொத்தமையாகவும் மற்றும் முழுமொத்தமையாக இருப்பதில்லை என குறித்துக் கொள்ளவும், ஆனால், அவைகள் யாவும் ஒரே வடிவத்தில் இருக்கும். ஆதலால் எல்லாவற்றையும் வடிவொத்தமை என்று நாம் அழைக்கலாம். ஒரே வடிவமுள்ள இரண்டு வடிவொத்த படங்கள் இருக்கலாம் ஆனால் ஒரே அளவில் இருக்க தேவையில்லை. ஆதலால் எல்லா வட்டங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும் இரண்டு (அல்லது அதிகமான) சதுரங்கள் அல்லது இரண்டு (அல்லது அதிகமான) சமபக்க முக்கோணங்கள் என்னவாக இருக்கும் ? (படம் 6.1 (ii) மற்றும் (iii) ஐ பார்), வட்டங்களின் வகையை கவனிக்கும் போது, இங்கே எல்லா



படம் 6.2

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

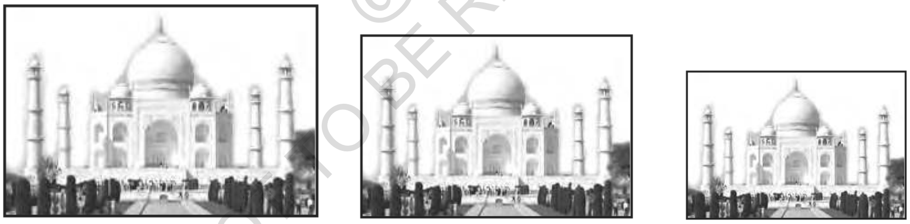
சதுரங்கள் மற்றும் சம பக்க முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவைகளாகும்.

மேலேயுள்ள படி முழுதுமொத்த (அல்லது சர்வசம) படங்கள் எல்லாம் வடிவொத்தமாகும் ஆனால் வடிவொத்த படங்கள் முழுது மொத்தவையாக இருக்க தேவையில்லை.

ஒரு வட்டமும் மற்றும் ஒரு சதுரம் வடிவொத்தவைகளாகுமா? ஒரு முக்கோணம் மற்றும் ஒரு சதுரம் வடிவொத்தவைகளாகுமா? (படம் 6.1 பார்) படங்களை பார்த்தவுடன் உன்னால் இந்த கேள்விகளுக்கு வடிவொத்தம் அல்ல என்பது சாத்தியமாகும் (ஏன் ?)

(படம் 6.2 பார்) இரண்டு நாற்கரங்களான ABCD மற்றும் PQRS பற்றி என்ன கூறமுடியும் ? அவையாவும் வடிவொத்தவைகளாகுமா? படங்களான இவைகள் தோற்றத்தில் வடிவொத்தமாக இருக்கலாம் ஆனால் நிச்சயமாக சாத்தியமா என கூறமுடியாது. ஆதலால், வடிவொத்த படங்களுக்கு சில விவரணம் கட்டாயம் உண்டு மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு படங்கள் வடிவொத்த படங்கள் அல்லது இல்லையா என்பதை எதுவாகிலும் நிர்ணயிக்க நமக்கு ஆதாரம் இருக்க வேண்டும். இதற்க்காக, படம் 6.3 இல் கொடுக்கப்பட்ட புகைப்படத்தை பார்க்கவும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 6.3

ஒரே மாதிரியான புகைப்படங்களைக் கொண்ட ஞாபக சின்னமான ஒரே ஒரு முறை பார்த்தவுடன் (தாஜ்மஹால்) என கூறலாம் ஆனால் அவைகள் அளவில் வித்தியசமாகும், இந்த மூன்று புகைப்படங்கள் வடிவொத்தமானதா? ஆம், அவைகள் தான்.

ஒரே நபரை சார்ந்த ஒன்றேயான அளவைக் கொண்ட இரண்டு புகைப்படங்களில், ஒரு புகைப்படத்தில் அவரது வயது 10 வருடங்கள் மற்றும் மற்றொன்றில் வயது 40 வருடங்கள் உடைய புகைபடங்களை என்னவென்று கூற முடியுமா? ஒன்றேயான அளவைக் கொண்ட இரண்டு

புகைப்படங்கள் ஆனால் அவை நிச்சயமாக ஒரே வடிவத்தில் இருக்காது ஆதலால் அவை வடிவொத்தவைகளாக இருக்காது.

ஒன்றேயான படச்சுருளிலிருந்து வெவ்வேறு அளவுகளில் புகைப்படங்கள் அச்சடிக்கும் போது புகைப்படக்காரி என்னச்செய்வாள்? தபால் வில்லை பாஸ்போர்ட் மற்றும் அஞ்சல் அட்டை ஆகிய அளவுகளைப் பற்றி நீ கட்டாயம் கேள்வி பட்டிருப்பாய், பொதுவாக 35mm அளவு, சிறிய அளவைக் கொண்ட படச்சருளை எடுத்துக்கொண்டு அகில் படம் எடுத்து, பிரகு அதை 45mm (அல்லது 55mm) என்ற அளவுக்கு பெரிதாக்கப்படுகிறது என கூறு.

இவ்வாறாக, சிறிய புகைப்படத்தில் உள்ள எந்த ஒரு கோட்டுதுண்டைக் கருதினாலும், பெரிய புகைப்படத்தில் அதன் ஒத்த கோட்டுதுண்டானது அதனுடைய $\left(\frac{45}{35}\right)$ (அல்லது $\left(\frac{55}{35}\right)$) என்ற அளவிறக்கு பெரிதாக்கபட்டிருக்கும். இது, சிறிய புகைப்படத்தில் இருக்கும் ஒவ்வொரு கோட்டுத்துண்டுமே *35:45* (அல்லது *35:55*) என்ற விகிதத்தில் பெரிதுப்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்று பொருள்படும். இதையே பெரிய புகைப்படத்தில் இருக்கும் ஒவ்வொரு கோட்டுத்துண்டுமே *45:35* (அல்லது *55:35*) என்ற விகிதத்தில் சிறியதாக்கப்பட்டுள்ளது எனவும் கூறலாம். மேலும், வெவ்வேறு அளவுள்ள இரண்டு புகைப்படங்களில் உள்ள துண்டுக்கோடுகள் சோடியின் நடுவில் உள்ள சாய்வைக் (அல்லது கோணங்கள்) கருகும்போது சாய்வுகள் (அல்லது கோணங்கள்) எப்பொழுதுமே சமம் என்பதை நீ பார்க்கலாம். குறிப்பிட்ட இரண்டு பலகோணங்கள் மற்றும் இது இரண்டு படங்களின் வடிவொத்தமையின் சாரமாகுமென, நாம் இதனை கூறலாம்.

ஒரே எண்ணிக்கையில் பக்கங்களை உடைய இரண்டு பல கோணங்கள் ஆனவை,

(i) அவற்றின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாக இருக்குமாயின் மற்றும் (ii) அவற்றின ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் (விகிதசமம்) இருக்கு மாகில், அவை வடிவொத்தவைகள் ஆகும்.

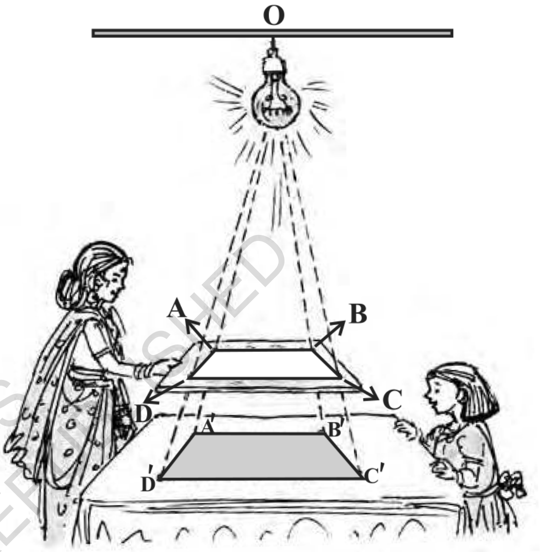
ஒத்தினசவுப் பக்கங்களின் இவ்விகிதசமமானது, 'அளவுக்காரணி' (Scale Factor அல்லது குறியிட்டு பின்னம்) என்று அழைக்கப்படுகிறது என்பதைக் குறித்துக்கொள். உலகப்படங்கள் (World Maps) மற்றும் கட்டிடங்கள் கட்ட

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேவையான வரைபடங்கள் முதலியன தகுந்த அளவுக்காரணிகளின் உதவியைகொண்டும் மற்றும் சில குரிப்பிட்ட மரபுகளைக் கையாண்டும் தயாரிக்கப்படுகின்றன என்பதை நீ கட்டாயம் கேள்விபட்டிருப்பாய்.

படங்களின் வடிவொத்தமையை தெளிவாக புரிந்துகொள்ள, பின் வரும் செயல் பாடுகளை செய்யலாம்.

செயல்பாடு 1: கூரையின் உட்புறத்தின் மேல் O என்ற புள்ளியில் வைக்கவும் மற்றும் அது உன்னுடைய வகுப்பறையில் உள்ள மேஜைக்கு நேராக கீழே இருக்க வேண்டும்.



படம் 6.4

ஒரு சமத்தள அட்டை பலகைக் கொண்டு, ஒரு பல கோணத்தை வெட்டவும், அதனை நாற்கரம் ABCD என கூறு, ஒரு சமத்தள அட்டை பலகைக் கொண்டு மற்றும் மேஜைக்கும் எரியும் மின் விளக்கிற்க்கு நடுவில் தரைக்கு அதை இணையாக இருக்கும்படி வைக்கவும். அடுத்தார் போல், மேஜையின் மீது நிழலான ABCD இன் உருவம் தோன்றும். (படம் 6.4 ஐ பார்) அதே மாதிரியான நிழலின் எல்லைக் கோட்டையை குறிக்கவும். பெரிதாக்கப்பட்ட (அல்லது மிகைப்படுத்திய) நாற்கரமானA′B′C′D′ என்பதை குறித்துக்கொள். ஒளியானது ஒரு நேர்க்கோட்டில் பரவச்செய்யும் ஏன் எனில் அது ஒளியின் தன்மையாகும். கதிர் OA மீது A′ இருக்கும், கதிர் OB மீது B′ இருக்கும், கதிர் OC மீது C′ இருக்கும் மற்றும் கதிர் OD மீது D′ இருக்கும் என்பதை குறித்துக் கொள்.

ஆதலின், நாற்கரமான A′B′C′D′க்கு நாற்கரமான ABCD வடிவொத்ததாகும். தவிர நாற்கரமான ABCD க்கு நாற்கரமான A′B′C′D′ வடிவொத்ததாகும் என நாம் கூறலாம்.

இங்கே, உச்சியானA, ஆனது உச்சியானA′ க்கு ஒத்திருக்கும், உச்சியான B, ஆனது உச்சியான B′ க்கு ஒத்திருக்கும், உச்சியான C ஆனது உச்சியான

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

C′ க்கு ஒத்திருக்கும், உச்சியான D ஆனது உச்சியான D′ க்கு ஒத்திருக்கும். அறிகுறியாக, இந்த ஒத்திருப்புகளை இதைப்போல குறிக்கலாம் $A' \longleftrightarrow A$, $B' \longleftrightarrow B$, $C' \longleftrightarrow C$ மற்றும் $D' \longleftrightarrow D$, கோணங்கள் மற்றும் இரண்டு நாற்கரங்களின் பக்கங்கள் உண்மையாக அளக்கவும், நீ அதனை பரிசோதிக்கலாம்.

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ மற்றும்

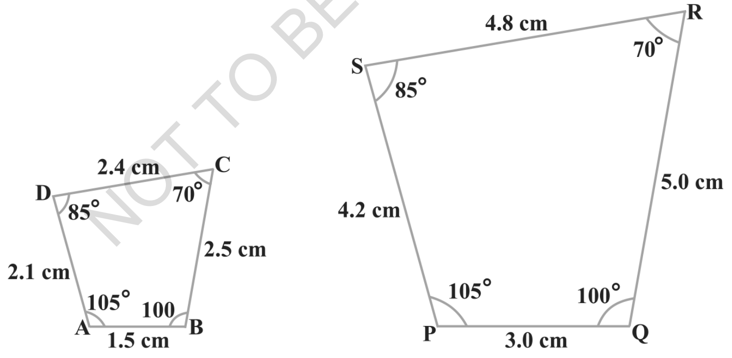
(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

ஒன்றேயான எண்ணிக்கையில் பக்கங்களை கொண்ட இரண்டு பல கோணங்கள் ஆனவை,

(i) எல்லா ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாயின் மற்றும்

(ii) எல்லா ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் (அல்லது விகித சமத்தில்) இருக்குமாகில், வடிவொத்தவைகளாகும் என்பதை இது வலியுறுத்துகிறது.

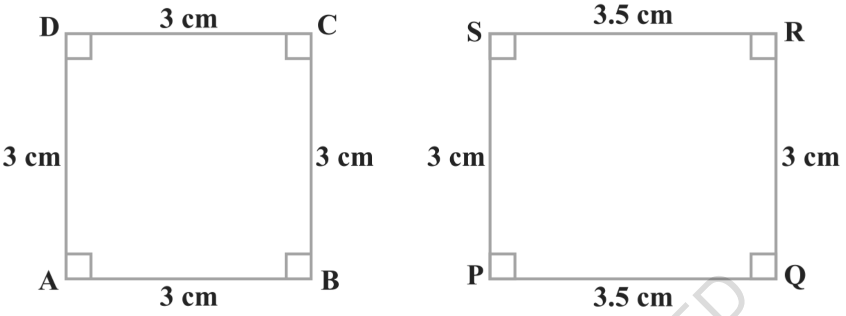
மேலேயுள்ள படி, படம் 6.5 இல் நாற்கரங்களான ABCD மற்றும் PQRS வடிவொத்தமானவை என நீ சுலபமாக கூறலாம்.



படம் 6.5

குறிப்பு : ஒரு பலகோணம் மற்றொரு பலகோணத்திற்க்கு வடிவொத்தமையாகில் மற்றும் இரண்டாம் பல கோணத்திற்கு மூன்றாம் பல கோணம் வடிவொத்தமாகின், அடுத்தார் போல் முதலாம் பல கோணம் மூன்றாம் பல கோணத்திற்கு வடிவொத்தமாகும்.

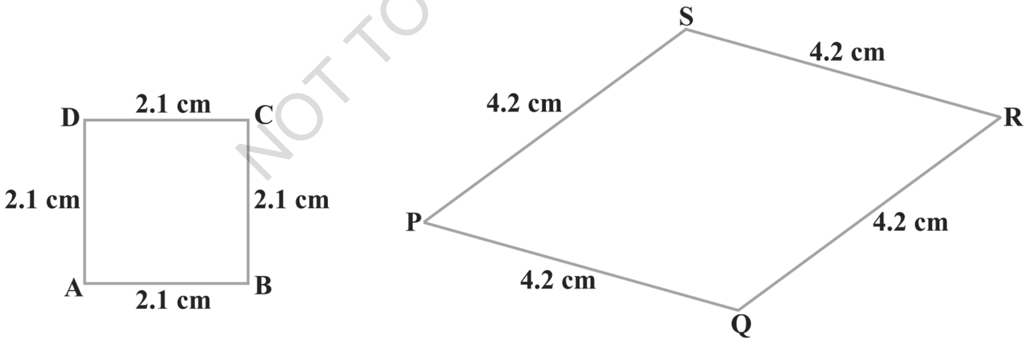
படம் 6.6 இல் இரண்டு நாற்கரங்களான (ஒரு சதுரம் மற்றும் ஒரு செவ்வகம்) அவைகளின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமம் என்பதை குறித்துக் கொள், ஆனால் அதன் ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் இல்லை.



படம் 6.6

ஆகையால், இவ்விரண்டு நாற்கரங்கள் வடிவொத்தவை இல்லை, ஒன்றேயான படம் 6.7 இல் இரண்டு நாற்கரங்களின் (ஒரு சதுரம் மற்றும் ஒரு சாய் சதுரம்) ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் உள்ளது, ஆனால் அவற்றின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாக இல்லை என்பதை குறித்துக்கொள் மறுபடியும், இவ்விரண்டு பல கோணங்கள் (நாற்கரங்கள்) வடிவொத்தமாக இல்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 6.7

இவ்வாறாக மேலேயுள்ள இரண்டு நிபந்தனைகள் (i) மற்றும் (ii) இல் ஏதேனுமொன்று மட்டுமே இரண்டு பல கோணங்களின் வடிவொத்தமத்திற்க்கு போதுமானதாக இல்லை.

பயிற்ச்சி 6.1

1) கொடுக்கப்பட்ட அடைப்புகுறியில் சரியான சொற்களை பயன்படுத்தி கோடிட்ட இடங்களை நிரப்பவும்.

(i) எல்லா வட்டங்களும் __________ (சர்வசமம், வடிவொத்தவை)

(ii) எல்லா சதுரங்களும் __________ (வடிவொத்தவை, சர்வசமம்)

(iii) எல்லா__________ முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும். (இருசமபக்க, சமபக்க)

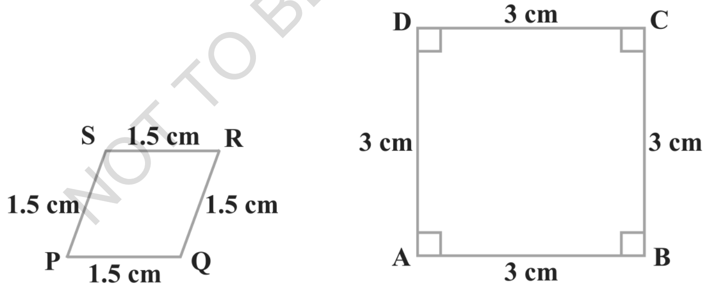
(iv) ஒன்றேயான எண்ணிக்கையில் பக்கங்களைகொண்ட இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவையாகில், (a) அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் __________ மற்றும் (b) அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் __________(சமம், சமவிகிதமாகும்)

2. கீழ்வருவனவற்றிற்கு வெவ்வேறு எடுத்துக்காட்டுகளை தருக.

(i) ஜோடிவடிவொத்த படங்கள்

(ii) ஜோடிவடிவொத்தமில்லாத படங்கள்.

3. பின் வரும் நாற்கரங்கள் வடிவொத்தவையா அல்லது இல்லையா என விவரி.



படம் 6.8

6.3 முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமை

இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை பற்றி உன்னால் என்ன கூறமுடியும்?

ஒரு முக்கோணம் என்பதும் ஒரு பலகோணமாகும் என்பதை நினைவுக்கூறுக, ஆதலின் இரண்டு முக்கோணங்களானவை (i) அவற்றின் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமமாக இருந்தால் மற்றும் (ii) அவற்றின்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் (அல்லது விகித சமம்) இருந்தால் மட்டுமே வடிவொத்தவைகளாகும்.

இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமம் எனில், அவற்றை சம கோண முக்கோணங்கள் எனலாம் என்பதை குறித்துக் கொள். இரண்டு சம கோண முக்கோணங்களை சம்பந்தப் படுத்தி ஒரு முக்கியமான உண்மையை புகழ்வாய்ந்த ஒரு கிரேக்க கணிதமேதையான தேல்ஸ் என்பவர் பின்வருமாறு கொடுத்துள்ளார்.

Thales
(640 – 546 B.C.)

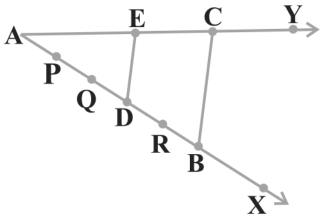
இரண்டு சமகோண முக்கோணங்களின் ஏதேனும் இரண்டு ஒத்திசை பக்கங்களின் விகிதங்கள் எப்பொழுதும் ஒன்றேயாக இருக்கும்.

இதற்க்கு அவர் அடிப்படை விகித சம தேற்றத்தின் (இப்பொழுது இது தேல்ஸ் தேற்றமென அழைக்கப்படும்) முடிவை பயன்படுத்தியதாக நம்பப்படுகிறது.

அடிப்படை விகித சமத்தேற்றத்தை புரிந்துக்கொள்ள, பின் வரும் செயல் பாடுகளை செய்வோம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

செயல்பாடு 2 : ஏதேனும் கோணம் XAY ஐ வரைக மற்றும் அதனுள் ஒரு பக்கமான AX, AP = PQ = QD = DR = RB இருக்குமாறு P, Q, D, மற்றும் B (புள்ளிகள் 5 என கூறு) புள்ளிகளை குறிக்கவும்.



படம் 6.9

இப்பொழுது, B இன் வழியாக (படம் 6.9 ஐ பார்) AY ஐ C இல் வெட்டும்படி கோடு ஒன்றை வரையவும்.

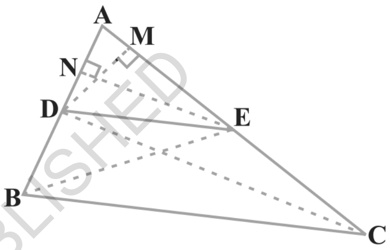
அதோடு, D புள்ளியின் வழியாக, E இல் AC ஐ வெட்டும்படி BC க்கு ஒரு இணைக்கோடு ஒன்றை வரைக. $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$ கான வரைமுறையிலிருந்து நீ கவனிக்க முடியுமா? AE மற்றும் EC ஐ அளக்கவும். $\frac{AE}{EC}$ என்னவாக இருக்கும் ? அதோடு $\frac{AE}{EC}$ ஆனது $\frac{3}{2}$ கு சமம் என்பதை கவனிக்கவும்.

ஆகையால், முக்கோணம் ABC இல் DE || BC மற்றும் $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. என்பதை நீ பார்க்கலாம். இது தற்செயலாக நடந்த ஒன்றா?

இருக்காது, ஏன் எனில் இது பின்வரும் தேற்றத்தின் (அடிப்படை விகித சமத்தேற்றமென அழைக்கப்படும்) காரணமாக நிகழ்ந்ததே ஆகும்.

தேற்றம் 2.1 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு நேர் கோட்டை வரைந்தால் மற்ற இரண்டு பக்கங்களை வெவ்வேறான புள்ளிகளில் அது வெட்டும்போது, மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் சம விகிதத்தில் பிரிக்கபடுகின்றன.

நீருபணம் : ஒரு முக்கோணம் ABC நமக்கு கொடுக்கப்பட்டது (படம் 6.10 ஐ பார்), முறையே D மற்றும் E இல் மற்ற இரண்டு பக்கங்களான AB மற்றும் AC ஐ பக்கம் BC க்கு இணையாக ஒரு கோடு வெட்டட்டும்.



படம் 6.10

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

BE மற்றும் CD ஐ சேர்க்கவும் DM⊥AC

மற்றும் EN ⊥ AB என வரைக.

இப்பொழுது ΔADE யின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}$ அடித்தளம் × உயரம்

= $\frac{1}{2}$ AD × EN

முக்கோணம் ADE இன் பரப்பளவை பர (ADE) என IX ம் வகுப்பில் இருந்து நினைவுக் கூறக,

ஆதலின், பர (ADE) = $\frac{1}{2}$AD × EN

பர (BDE) = $\frac{1}{2}$DB × EN

பர ADE = $\frac{1}{2}$ AE × DM மற்றும் பர (DEC) = $\frac{1}{2}$ EC × DM

ஆதலால், $$\frac{(ADE)}{(BDE)}=\frac{\frac{1}{2}AD\times EN}{\frac{1}{2}DB\times EN}=\frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மற்றும் $\frac{(ADE)}{(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$ (2)

ஒன்றேயான DE அடித்தளத்தின் மீது ΔBDE மற்றும் ΔDEC மற்றும் BC மற்றும் DE ஆகிய ஒன்றேயான இணைகளின் நடுவில் இருக்கும்.

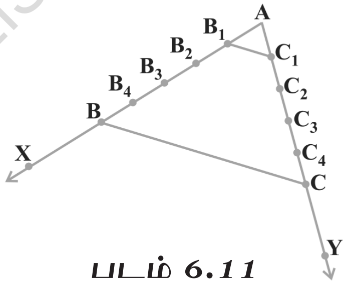
ஆதலால், பர (BDE) = பர (DEC) (3)

ஆதலால், (1), (2) மற்றும் (3) இல் இருந்து நாம் பெறுவது.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

அதோடு இதன் மறுதலை தேற்றமும் உண்மையா? (மறுதலையின் அர்த்தத்தை, பிர்சேர்க்கை 1 பார்) இதனை சோதிக்க, பின் வரும் செயல்பாட்டை செய்யவும் :

செயல்பாடு 3 : உன்னுடைய நோட்டுப்புத்தகத்தின் மேல் $\angle XAY$ வரைக. மற்றும் கதிர் AX இன் மீது $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ இருக்குமாறு புள்ளிகளான B_1, B_2, B_3, B_4 மற்றும் B ஐ குறிக்கவும். அதே போல், கதிர் AY இன் மேல், $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ இருக்குமாறு புள்ளிகளான C_1, C_2, C_3, C_4 மற்றும் C ஐ குறிக்கவும். அப்புறம் B_1C_1 மற்றும் BC ஐ இணைக்கவும். (படம் 6.11 ஐ பார்)



படம் 6.11

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC}{C_1C}$ என்பதைக் குறித்துக் கொள் (ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{4}$ கு சமம்)

அதோடு கோடுகளான B_1C_1 மற்றும் BC ஒன்று மற்றொன்றிர்க்கு இணைக் கோடுகளாக இருப்பதை நீ பார்க்கலாம்.

அதாவது, $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

ஒன்றேயான, B_2C_2, B_3C_3 மற்றும் B_4C_4 இணைக்கும் போது இதனை பார்க்கலாம்.

$\frac{AB_2}{BB_2} = \frac{AC_2}{C_2C} = \left[\frac{2}{3}\right]$ மற்றும் $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

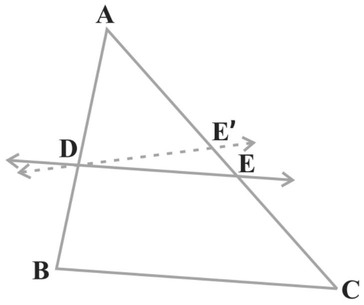
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \left[\frac{2}{3}\right] \text{ மற்றும் } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \left[\frac{4}{1}\right] \text{ மற்றும் } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1), *(2)*, *(3)* மற்றும் *(4)* இல் இருந்து. ஒன்றேயான விகிதத்தில் ஒரு முக்கோணத்தை இரண்டு பக்கங்களை பிரிக்கும் ஒரு கோடு என்பதை இதில் கவனிக்கவும், அப்படியெனில் மூன்றாவது பக்கத்திற்க்கு அந்த கோடு இணையாக இருக்கும்.

வெவ்வேறு அளவுகளில் ஏதேனும் கோணமாகிய XAY வரைந்து இந்த செயல்பாட்டை திரும்ப செய்யவும் மற்றும் எண்ணிக்கையில் ஏதேனும் ஒன்று சம பகுதிகளை AX மற்றும் AY இன் மேல் எடுத்துக்கொள். ஒவ்வொரு முறையும், ஒரே முடிவை நீ சேருவாய், இவ்வாறு, பின் வரும் தேற்றத்தை நாம் அடைவோம், அது *6.1* தேற்றத்தின் மறுதலையாகும்.

தேற்றம் 6.2 : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரு நேர்கோடு சம விகிதத்தில் பிரித்தால், அந்த நேர்கோடு மூன்றாம் பக்கத்திற்கு இருக்கும்.



படம் *6.12*

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ போன்ற ஒரு கோடு DE ஐ எடுத்துக்கொண்டு இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம் மற்றும் BC க்கு DE இணையாக இருக்காது என நினைத்துக்கொள் (படம் *6.12* ஐ பார்)

BCக்கு DE இணையாக இல்லையாகில், BCக்கு இணையாக ஒரு கோடான DE′ வரைக.

ஆகையால் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன்?)

ஆதலால் $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன்?)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

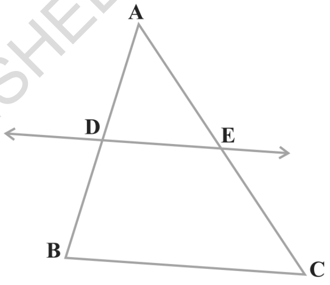
மேலேயுள்ள இரண்டு பக்கங்களுக்கு 1 ஐ கூட்டவும். E மற்றும் E′ கட்டாயமாக ஒன்று சேரும் என்பதை நீ பார்க்கலாம் (ஏன்?)

மேலேயுள்ள தேற்றங்களை பயன்படுத்தி படங்களை சில உதாரணங்களை எடுத்து காட்டலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : D மற்றும் E இல் முறையே ஒரு ΔABC இல் பக்கங்களான AB மற்றும் AC ஐ ஒரு கோடு வெட்டும் மற்றும் அக்கோடு BC க்கு இணையாக இருக்கும் எனில், $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ என நிரூபிக்கவும் (படம் 6.13 ஐ பார்)

தீர்வு : $DE \parallel BC$

ஆகையால், $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ...... (தேற்றம் 6.1)



படம் 6.13

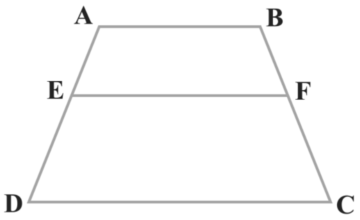
அல்லது $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$

அல்லது $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$

அல்லது $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

ஆகையால் $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒரு சரிவகம் ABCD இல் $AB \parallel DC$. ABக்கு EFஇணையாக இருக்குமாறு, இணையாக இல்லாத பக்கங்களான AD மற்றும் BC இன் மேல் முறையே உள்ள புள்ளிகள் E மற்றும் F ஆகும்.

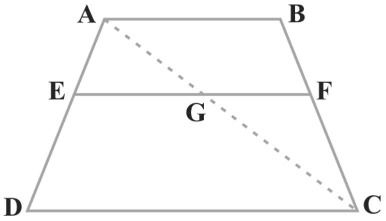


படம் 6.14

$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ எனக் காட்டு

தீர்வு : G இல் EF ஐ வெட்டும் படி AC ஐ இணைக்கவும் (படம் 6.15 ஐ பார்)

$AB \parallel DC$ மற்றும் $EF \parallel AB$ (கொடுக்கப்பட்டவை) ஆகையால், $EF \parallel DC$ (ஒரு கோட்டுக்கு இணையானகோடுகள் ஒன்ற மற்றொன்றிற்கு இணையாக இருக்கும்)



படம் 6.15

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பொழுது, ΔADC இல் $EF \parallel DC$ ($EF \parallel DC$ என்பதால்)

ஆகையால் $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (தேற்றம் 6.1) (1)

அதேபோல, ΔCAB இல் இருந்து

$\frac{CG}{AG}=\frac{CF}{BF}$ i.e. $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ (2)

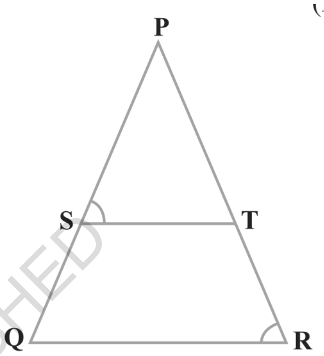
ஆதலால் (1) மற்றும்(2) இல் இருந்து

$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$

எடுத்துக்காட்டு 3 : படம் 6.16 இல் $\frac{PS}{SQ}=\frac{PT}{TR}$

மற்றும் $\angle PST = \angle PRQ$.

PQR ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் என நிரூபி.



படம் 6.16

தீர்வு : $\frac{PS}{SQ}=\frac{PT}{TR}$ (இது கொடுக்கப்பட்டது)

ஆகையால் $ST \parallel QR$ (தேற்றம் 6.2)

ஆதலால், $\angle PST = \angle PQR$ (ஒத்திசைவுக் கோணங்கள்) (1)

அதோடு, இது கொடுக்கபட்டது

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

ஆகையால், $\angle PRQ = \angle PQR$ ((1) மற்றும் (2) லிருந்து)

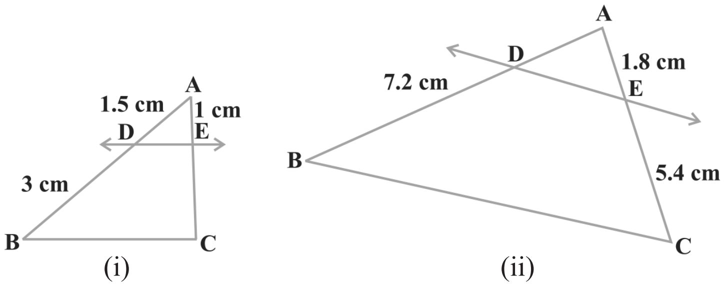
ஆதலால் $PQ = PR$ (சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள்)

அதாவது, ΔPQR ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 6.2

1. படம் 6.17 இல் (i) மற்றும் (ii) $DE \parallel BC$, (1) இல் EC ஐ மற்றும் (ii) இல் AD ஐ கண்டு பிடி.



படம் : 6.17

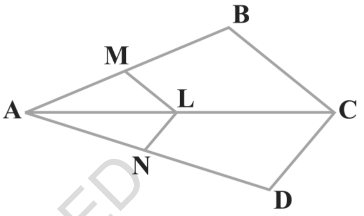
2. ஒரு முக்கோணம் PQR இல் முறையே PQ மற்றும் PR பக்கங்களின் மேல் புள்ளிகளான E மற்றும் F உள்ளன. பின் வரும் வகைகளில் ஒவ்வொன்றிலும், EF || QR ஆக உள்ளதா?

(i) PE = 3.9 செ.மீ., EQ = 3செ.மீ., PF = 3.6 செ.மீ. மற்றும் FR = 2.4 செ.மீ.

(ii) PE = 4 செ.மீ., QE = 4.5 செ.மீ., PF = 8 செ.மீ. மற்றும் RF = 9 செ.மீ.

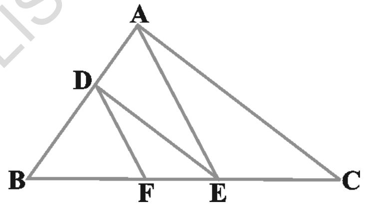
(iii) PQ = 1.28 செ.மீ., PR = 2.56 செ.மீ., PE = 0.18 செ.மீ. மற்றும் PF = 0.36 செ.மீ.

3. படம் 6.18 இல், LM || CB மற்றும் LN || CD, யாக இருக்கு மாயின் $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$ என நிரூபி.



படம் 6.18

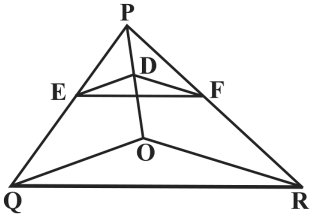
4. படம் 6.19 இல், DE || AC மற்றும் DF || AE, எனில் $\frac{BF}{FE}=\frac{BE}{EC}$ என நிரூபி.



படம் 6.19

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

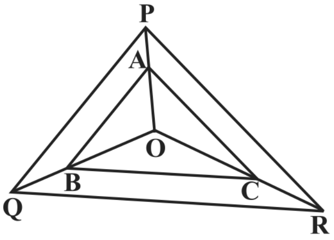
5. படம் 6.20 இல், DE || OQ மற்றும் DF || OR எனில் EF || QR என காட்டுக.



படம் 6.20

6. படம் 6.21 இல், AB || PQ மற்றும் AC || PR என்றமைந்தவகையில், OP, OQ மற்றும் OR மீதான புள்ளிகள் முறையே A, B மற்றும் C ஆகும். BC || QR என காட்டுக.

7. தேற்றம் 6.1ஐ பயன் படுத்தி, ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளியில் இருந்து இரண்டாம் பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட நேர்கோடானது, முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தை இருசமக் கூறிடும் (9ம் வகுப்பில் மெய்பித்ததை நினைவுக்கூறு) என நிரூபி.



படம் : 6.21

8. தேற்றம் 6.2ஐ பயன் படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோடானது, முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகும் என நிரூபி. (இதை நீ 9ம் வகுப்பில் செய்துள்ளாய் என நினைவுக் கூறு)

9. ஒரு சரிவகமான ABCD இல் AB || DC மற்றும் O புள்ளியில் அதன் மூலை விட்டங்கள் ஒன்று மற்றொன்றை வெட்டும் எனில் $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ என காட்டுக.

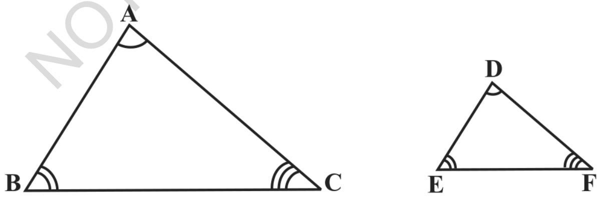
10. $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ என்றமைந்த வகையில் O என்ற புள்ளியில் ஒரு நாற்கரமான ABCD இன் மூலை விட்டங்கள் ஒன்று மற்றொன்றை வெட்டுகின்றன எனில், ABCD ஒரு சரிவகம் என காட்டு.

6.4. முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமைக்கான நிபந்தனைகள்.

முன்னால் பிரிவுப்படி, இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமை நாம் விவரிப்போம் (i) அதன் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாகில் (ii) அதன் ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் இருக்கு மாயின் (சமவிகிதத்தில்) அதாவது, ΔABC மற்றும் ΔDEF,

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ மற்றும்

(ii) $\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ ஆகில், இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தமாகும் (படம் 6.22 ஐ பார்)



படம் 6.22

இங்கே, D, இன் ஒத்திசைவுகோணம் A, E இன் ஒத்திசைவுகோணம் B மற்றும் F இன் ஒத்திசைவுகோணம் C ஆகும். அறிகுறியாக இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையை இப்படியும் நாம் எழுதலாம். ΔABC ~ ΔDEF மற்றும் இதை இதன்போல் படிக்கலாம். முக்கோணம் ABC என்பது முக்கோணம் DEF க்கு வடிவொத்ததாகும். இதன் அறிகுறி ~ இது

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

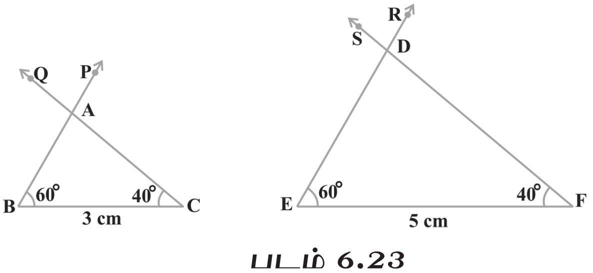
'வடிவொத்தம்' என நிறுத்தும். 9ஆம் வகுப்பில் முழுதுமொத்தத்திற்கு (சர்வசமத்திற்கு) '≅' என்ற அறிகுறியை நினைவுக்கூறவும்.

> இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசமத்தை குறித்தது போலவே, வடிவொத்த இரு முக்கோணங்களை குறிப்பிடும்போது, ஒத்திசைவான உச்சி களைப் பயன்படுத்தியே குறியீடுசெய்தல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, படம் 6.22 இல் $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ அல்லது $\Delta ABC \sim \Delta FED$ என நாம் எழுதக்கூடாது. இருப்பினும், $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ என எழுதலாம்.

இப்பொழுது இயற்க்கையாக ஒரு கேள்வி எழும்; இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமை சரிபார்க்கும் போது, ABC மற்றும் DEF என கூறு, ஒத்திசைவு கோணங்களான ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) அதன் சம்பந்தகளை சமத்துவ படுத்தி எல்லா வற்றையும் நாம் பார்க்க வேண்டும். மற்றும் ஒத்திசைவு பக்கங்களான $\left(\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}\right)$ அதன் விகிதங்களை சம்பந்தப்படுத்தி எல்லாவற்றையும் சமமாகுமா என்பதை பரிசோதித்து இருப்பாய். இரண்டு முக்கோணங்களின் மூன்று சோடிகள் மட்டும் ஒத்திசை பகுதிகளை (அல்லது உறுப்பு) உட்படுத்தி இரண்டு முக்கோணங்களின் முழுது மொத்தவை சில நிபந்தனைகளால் உனக்கு கிடைத்திருக்கும். இங்கேயும் கூட, இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்திருக்கும் பகுதிகளான சோடிகள் எண்ணிக்கையில் குறைவான சம்மந்தத்தின் நடுவே உட்படுத்தி நிபந்தனையை அடைய நிச்சயமாக முயற்சியை செய்யவும், அதற்கு பதிலாக ஆறு சோடிகளின் ஒத்திசை பகுதிகளாகும். இதற்க்காக, பின் வரும் செயல் பாட்டை செய்யவும்.

செயல்பாடு 4 : இரண்டு வெவ்வேறு அளவுகளைக் கொண்ட இரண்டு துண்டுக்கோடுகளானBC மற்றும்EFஐவரைக. அடுத்தார்போல், புள்ளிகளான B மற்றும் C முறையே, சில அளவுகளைக் கொண்டு கோணங்களான PBC மற்றும் QCB ஐ அமைக்கவும். 60^0 மற்றும் 40^0 என கூறு, அதோடு, E மற்றும் F புள்ளிகளில், 60^0 மற்றும் 40^0 முறையே கோணங்களான $\angle REF$ மற்றும் $\angle SPF$ இல் அமைக்கவும். (படம் 6.23 ஐ பார்)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 6.23

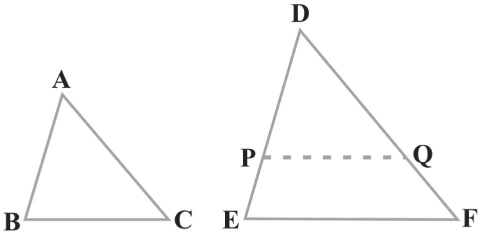
A என்ற இடத்தில் கதிர்களான BP மற்றும் CQ ஒன்று மற்றொன்றை வெட்டி கொள்ளும் மற்றும் D இடத்தில் கதிர்களான ER மற்றும் FS ஒன்று மற்றொன்றை வெட்டும். முக்கொணங்களான ABC மற்றும் DEF இல் $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ மற்றும் $\angle A = \angle D$ என்பனை நீ பார்க்கலாம், அதாவது, இரண்டு முக்கோணமான இவைகளில் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமம்.

ஒத்திசைவு பக்கங்களான அதைபற்றி என்ன கூற முடியும் ?

$\frac{BC}{EF}=\frac{3}{5}=0.6$ ஐ குறித்துக் கொள். $\frac{AB}{DE}$ மற்றும் $\frac{CA}{FD}$ என்னவாகும்? AB, DE, CA மற்றும்FDஐமேல்அளக்கும்போது, $\frac{AB}{DE}$ மற்றும் $\frac{CA}{FD}$ யும்கூட 0.6க்குசமமாக இருப்பதை நாம் கண்டுபிடிக்க முடியும் (அளக்கும் பொழுது ஏற்படும் சில தவறுகள்இருந்தாலும்0.6க்குகிட்டத்தட்டசமமாகஇருக்கும்.)இவ்வாறாக, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$. முக்கோண சோடிகள் இரண்டுக்கு மேற்பட்டவைகளில் அமைக்கும் படியான செயல்பாட்டை நீ திரும்ப செய் ஒவ்வொரு நேரத்திலும், அதன் ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் இருக்கும்போது (அல்லது சம விகிதம்) ஒத்திவை கோணங்கள் சமமாக இருப்பதை நீ கண்டு பிடிக்கலாம். இச் செயல்பாடானது, இரண்டு முக்கோணங்ளின் வடிவொத்தமைக்கான கீழவரும் நிபந்தனைக்கு கொண்டு செல்கிறது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 6.3 : இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமமெனில், அதன் அதனுடை ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் (அல்லது சம விகிதம்) இருக்கும் மற்றும் இதனால் இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவைகளாகும்.



படம் 6.24

இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையின் நிபந்தனையை (கோணம்-கோணம்-கோணம்) கோ.கோ.கோ. நிபந்தனை என இதை குறிக்கலாம்.

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ இருக்குமாறு இரண்டு முக்கோணங்களை எடுத்துக் கொண்டு இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம். (படம் 6.24ஐ பார்)

DP = AB மற்றும் DQ = AC ஐ வெட்டு மற்றும் PQ ஐ இணை.

ஆகையால், $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ஏன்?)

இது கொடுக்கும் $\angle B = \angle P = \angle E$ மற்றும் $PQ \parallel EF$ (எப்படி?)

$$\therefore \quad \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \quad \text{(ஏன்?)}$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(ஏன்?)}$$

வடிவொத்தமாக, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ மற்றும் ஆகையால் $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

குறிப்பு : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக் சமமாகில் அவற்றின் முன்றாவது கோணமும் முக்கோணத்தின் கோண கூடுதல் தன்மையினால் சமம் ஆகும். ஆதலால், பின் வருவனற்றுள் கோ.கோ.கோ. வடிவொப்புமை கட்டளை விதியை இவ்வாறு விவரிக்கலாம்.

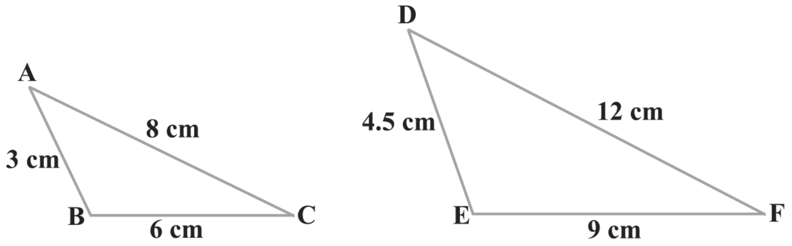
ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே இரண்டு கோணங்களான மற்றொரு முக்கோணத்திற்க்கு சமமாகில், ஆகவே இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும்.

இரண்டு முக்கோணங்களான வடிவொத்தமைகான நிபந்தனையான கோ.கோ. போல இதனை குறிக்கலாம்.

மேலேயுள்ளதைநீபார்த்தால், ஒருமுக்கோணத்தின்மூன்றுகோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தினில் மூன்று கோணங்களுக்கு சமமாகில், அவற்றினுடைய ஒத்திசை பக்கங்கள் சமவிகிதத்தில் (அதாவது ஒன்றேயான விகிதங்கள்) இருக்கும். இந்த விவரணத்தினுடைய மறுதலை என்னவாக இருக்கும்? இதன் மறுதலை உண்மையாக இருக்குமா? மற்றொரு சொற்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமவிகிதமாகில், அதனுடைய ஒத்திசைக் கோணங்கள் சமம் என்பது உண்மையா? செயல்பாடு வழியாக இதனை சோதிக்கலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

செயல்பாடு 5 : AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm மற்றும் FD = 12 cm (படம் 6.25 ஐ பார்) இருக்குமாறு இரண்டு முக்கோணங்களான ABC மற்றும் ΔDEF ஐ வரைக.



படம் 6.25

ஆகையால், உன்னிடம் : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ஒவ்வொன்றும் $\frac{2}{3}$ கு சமம்)

∠A, ∠B, ∠C, ∠D, ∠E மற்றும் ∠F ஐ இப்பொழுது அளக்கவும், ∠A = ∠D, ∠B = ∠E மற்றும் ∠C = ∠F என்பதை நீ கவனி, அதாவது, இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்.

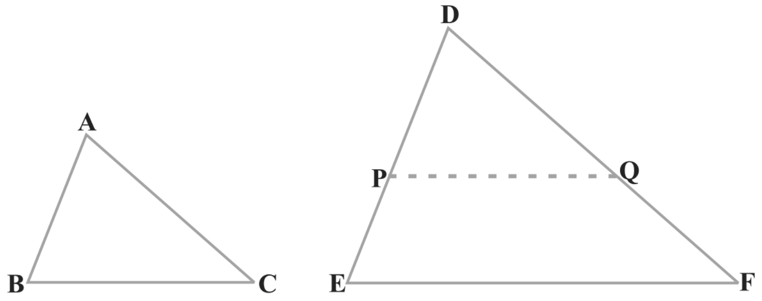
இதுப்போன்ற முக்கோணங்களை கணிசமான எண்ணிக்கையில் வரைந்து இந்த செயல் பாட்டினை நீ திரும்ப செய்யவும் (அதன் பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் இருக்க வேண்டும்). ஒவ்வொரு நேரத்திலும் அதன் ஒத்திசை கோணங்கள் சமமாக இருக்குகிறதா என பார்த்துக் கொள். ஏன் எனில் இது பின் வரும் இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தத்தின் நிபந்தனையாகும்.

தேற்றம் 6.4: இரண்டு முக்கோணங்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு, சம விகிதமாகில் (அதாவது ஒன்றேயான விகிதம்) அதன் ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமமாகும் மற்றும் ஆகையால் இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவைகளாகும்.

இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையின் நிபந்தனையாக ப.ப.ப (பக்கம்-பக்கம்-பக்கம்) என இந்த நிபந்தனையை குறிக்கலாம்.

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1)(படம் 6.26 ஐ பார்) ஆக இருக்குமாறு இரண்டு முக்கோணங்களான ABC மற்றும் DEF ஐ எடுத்து கொண்டு இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 6.26

DP = AB மற்றும் DQ = AC இருக்குமாறு வெட்டு மற்றும் PQ ஐ இணை.

$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ மற்றும் PQ || EF (எப்படி ?) ஆக இருப்பதை பார்கலாம்

ஆகையால், $\angle P = \angle E$ மற்றும் $\angle Q = \angle F$

ஆதலால், $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

ஆகையால், $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ஏன் ?)

ஆகையால், BC = PQ (ஏன் ?)

இவ்வாறு, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ஏன் ?)

ஆகையால், $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ (எப்படி ?)

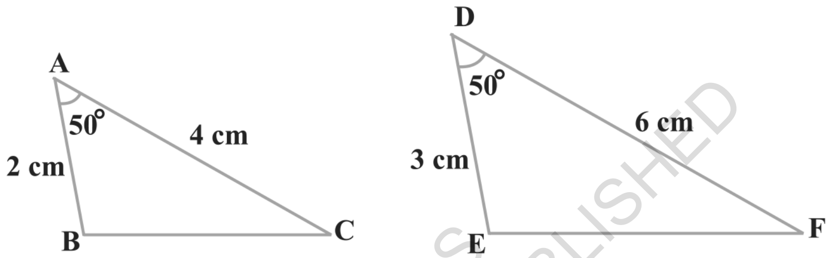
குறிப்பு : இரண்டு நிபந்தனைகளான (i) ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமம் (ii) ஒத்திசைவு பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதம் ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று மட்டுமே, இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவை என்று நிருபிக்க போதுமானதல்ல. இருப்பினும், தேற்றம் 6.3 மற்றும் 6.4 ஆதாரத்தின் மேல், இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமைக்கு, இரண்டு நிபந்தனைகளுக்கும் நாம் சரிபார்க்க தேவையில்லை. ஏனெனில், ஒன்று மற்றொன்றை உணர்த்துகிறது.

9 ஆம் வகுப்பில் இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசமமாக இருப்பகான வெவ்வேறு நிபந்தனைகளை இப்பொழுது நினைவுக் கூறுக. வடிவொத்தமையின் நிபந்தனையான ப.ப.ப வை முழுதுமொத்த

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிபந்தனையான ப.ப.ப த்திற்கு ஒப்பிடுவதை நீ கவனிக்கலாம். முக்கோணங்களின் SAS முழுதுமொத்த நிபந்தனையை ஒப்பிடுவதற்கான தொரு வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான நிபந்தனையை தேடச்செய்கிறது. ஒரு செயல்பாட்டை செய்க.

செயல்பாடு 6 : AB = 2 cm $\angle A = 50^0$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50^0$ மற்றும் DF = 6 cm (படம் **6.27** ஐ பார்) முக்கோணங்களான இருக்குமாறு இரண்டு முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DEF ஐ வரைக.



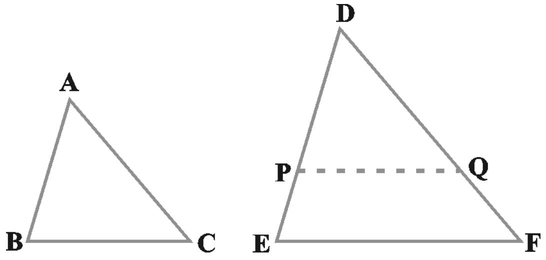
படம் **6.27**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இங்கே, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ஒவ்வொன்றும் $\frac{2}{3}$ க்கு சமம்) ஆக இருப்பதை நீ கவனி. $\angle A$ (பக்கங்களான DE மற்றும் DF இடையே உள்ளமைந்தது) $= \angle D$ அதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்கு சமமெனில் மற்றும் இக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் (சம விகிதத்தில்) இருக்கும். இப்பொழுது $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ மற்றும் $\angle F$ ஆகியவற்றை அளக்கவும்.

$\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ என்பதை நீ கண்டுபிடிக்கலாம் அதாவது, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ ஆகையால், வடிவொத்த நிபந்தனையான AAA இன் படி, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணமானது மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்கு சமமாகவும், இக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங்கள் சமவிகிதங்களில் இருக்கும் மாறும் ஜோடி முக்கோணங்களை கணிசமான எண்ணிக்கையில் வரைந்து செயல்பாட்டினை நீ திரும்ப செய்யலாம். ஒவ்வொரு நேரத்திலும், முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையை நீ கண்டு பிடிக்கலாம். ஏன் எனில் இது பின் வரும் முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையாக்கான நிபந்தனையின் காரணத்தாலே.

தேற்றம் 6.5 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்க்கு சமமெனில் மற்றும் இக் கோணங்களை உள்ளடங்கிய பக்கங்கள் சம விகிதத்தில் இருப்பின் இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும்.



படம் 6.28

இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமைத்தான நிபந்தனையை SAS (பக்கம் - கோணம்-பக்கம்) எனக் குறிக்கலாம்.

முன்பு போல, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) மற்றும் $\angle A = \angle D$ ஆக இருக்குமாறு

இரண்டு முக்கோணங்களான ABC மற்றும் DEF எடுத்து தேற்றமான இதனைக் நிருபிக்கலாம் (படம் 6.28 ஐ பார்). DP = AB, DQ = AC இருக்குமாறு வெட்டு மற்றும் PQ ஐ இணை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

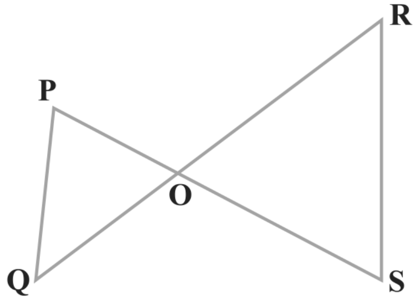
இப்பொழுது, $PQ \parallel EF$ மற்றும் $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (எப்படி ?)

ஆகையால், $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ மற்றும் $\angle C = Q$

ஆதலால், $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ஏன்?)

நிபந்தனைகளான இவைகளின் பயன்பாட்டை சில எடுத்துகாட்டுகளை கொண்டு இப்பொழுது நாம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக் காட்டு 4 : படம் 6.29 இல், $PQ \parallel RS$ ஆகில், $\Delta PQR \sim \Delta SQR$ என நிருபி.



படம் 6.29

தீர்வு : PQ || RS (கொடுக்கப்பட்டது)

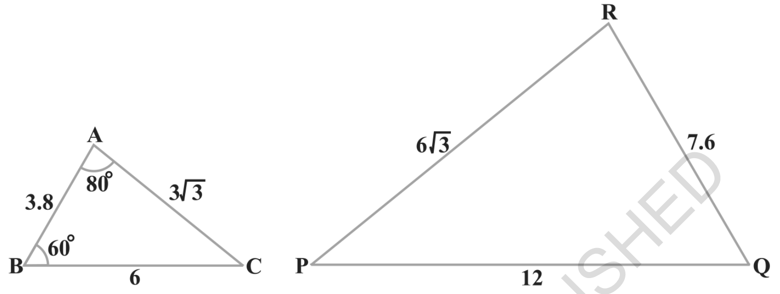
ஆகையால், $\angle P = \angle S$

மற்றும் $\angle Q = \angle R$

அதோடு $\angle POQ = \angle SOR$

$\therefore \Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA வடிவொத்த மைக்கான நிபந்தனை)

எடுத்துக் காட்டு 5 : படம் 6.30 ஐ கவனி மற்றும் $\angle P$ ஐ கண்டுபிடி.



படம் 6.30

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தீர்வு : ΔABC மற்றும் ΔPQR இல்,

$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, மற்றும் $\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

ஆகையால், $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

ஆகையால், $\Delta ABC \sim \Delta RQP$(வடிவொத்தமைக்கான SSS)

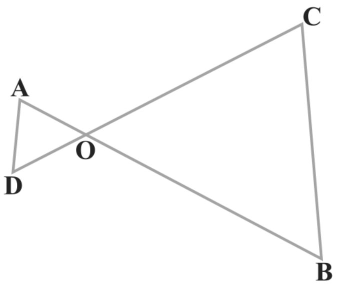
$\therefore$ $\angle C = \angle P$ (வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள்)

ஆனால் $\angle C = 180^0 - \angle A - \angle B$ (கோணங்களின் கூட்டு தன்மை)

$= 180^0 - 80^0 - 60^0 = 40^0$

$\therefore$ $\angle P = 40^0$

எடுத்துக் காட்டு 6 : படம் 6.31 இல், OA . OB = OC . OD, எனில் $\angle A = \angle C$ மற்றும் $\angle B = \angle D$ என காட்டு.



படம் 6.31

தீர்வு : OA . OB = OC . OD (கொடுக்கப்பட்டது) (1)

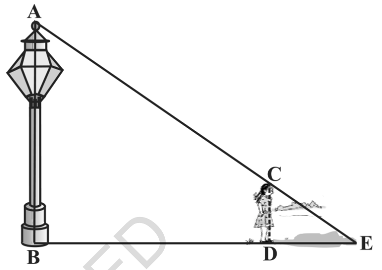
$\therefore$ $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

அதனுடன், நமக்கு $\angle AOD = \angle COB$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்) (2)

ஆதலால், (1) மற்றும் (2) இல் இருந்து, $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (வடிவொத்தமைக்கான SAS நிபந்தனை)

$\therefore \angle A = \angle C$ மற்றும் $\angle D = \angle B$ (வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள்)

எடுத்துக் காட்டு 7 : வினாடி ஒன்றிற்க்கு **1.2** மீ வேகத்தில் விளக்கு தூண் அடித்தளத்திலிருந்து 90 cm உயரம் கொண்ட ஒரு பெண் புறப்பட்டாள். நிலத்தின் மேலிருந்து 3.6 m இல் விளக்கு இருக்குமாயின், **4** வினாடிகளுக்கு பிறகு அவனுடைய நிழலின் நீளத்தை கண்டுபிடி.



படம் 6.32

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு : AB என்பது ஒளிக்கம்பம் மற்றும் ஒளிகம்பத்திலிருந்து (படம் 6.32 ஐ பார்) 4 வினாடிகள் பிறகு நடந்து சென்ற பிறகு சிறுமியை CD என்பது குறிக்கும் என்க. படத்திலிருந்து, DE என்பது அந்த சிறுமியின் நிழலாகும் என்பதை நீ பார்.

DE ஐ x மீ. என கருது.

இப்பொழுது $BD = 1.2$ மீ $\times 4 = 4.8$ மீ.

ΔABE மற்றும் ΔCDE இல் அதனை

$\angle B = \angle D$ (ஒவ்வொன்றும் 90^0, ஏன் எனில் ஒளிக்கம்பம் மற்றும் அந்த சிறுமி தரையின் மீது செங்குத்தமாக நிற்கின்றனர்)

மற்றும் $\angle E = \angle E$ (ஒன்றேயான கோணம்)

ஆகைலால், $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA இன் வடிவொத்தமைக்கான நிபந்தனை)

$$\therefore \quad \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

அதாவது, $$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} \qquad \left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100}\ 0.9 \text{ m}\right)$$

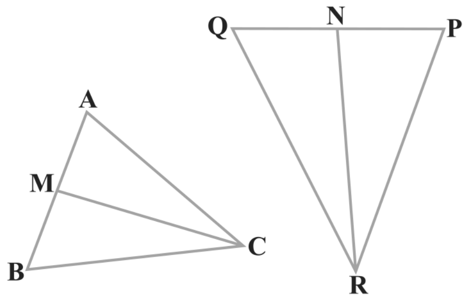
அதாவது, $4.8 + x = 4x$

அதாவது, $3x = 4.8$

அதாவது, $x = 1.6$

ஆகையால், **4** நிமிடங்கள் நடந்த பிறகு சிறுமியின் நிழலின் நீளம் 1.6 m ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : படம் 6.33 இல், ΔABC மற்றும் ΔPQR ஆகியனவற்றின் நடுக்கோடுகள் முறையே CM மற்றும் RN ஆகும். $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆகில், கீழ்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :



படம் 6.33

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$

தீர்வு : (i) $\Delta AMC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \qquad (1)$$

மற்றும் $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ மற்றும் $\angle C = \angle R$ (2)

ஆனால் AB = 2AM மற்றும் PQ = 2PN (CM மற்றும் RN என்பன நடுக்கோடுகள் ஆதலால்).

$\therefore$ (1) இல் இருந்து $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

அதாவது $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

$\angle MAC = \angle NPR$ [(2) இல் இருந்து] (4)

ஆகையால், (3) மற்றும் (4) இல், இருந்து

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS இன் வடிவொத்தமை) (5)

(ii) (5) இல் இருந்து $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

ஆனால் $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ (1) இல் இருந்து (7)

$\therefore \frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ (6) மற்றும் (7) இல் இருந்து (8)

(iii) மறுபடியும் $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (1 இல் இருந்து)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore \quad \frac{CM}{RN}=\frac{BC}{QR}$ (8 இல் இருந்து) (9)

$\frac{CM}{RN}=\frac{AB}{PQ}=\frac{2BM}{2QN}$

அதாவது $\frac{CM}{RN}=\frac{BM}{QN}$ (10)

அதாவது $\frac{CM}{RN}=\frac{BC}{QR}=\frac{BM}{QN}$ [(9) மற்றும் (10) இல் இருந்து]

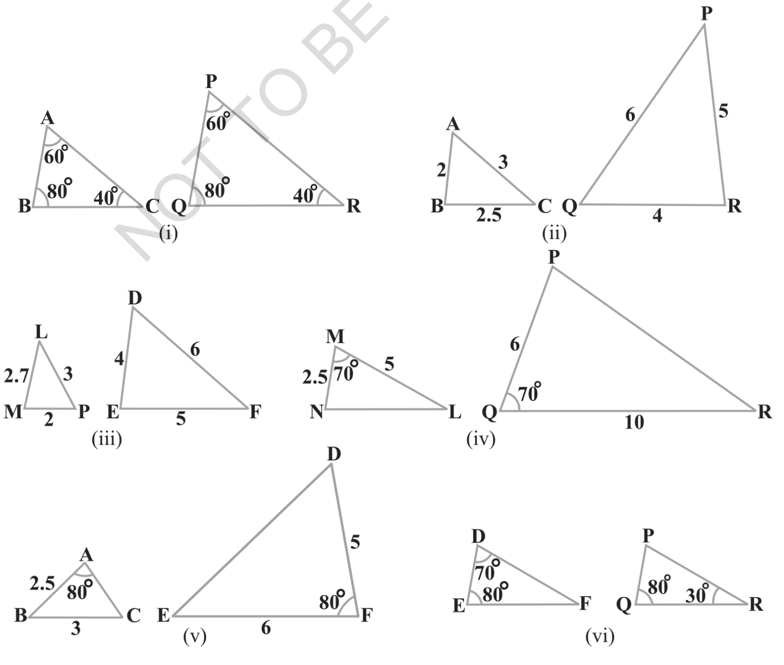
$\therefore \quad \Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS இன் வடிவொத்தமை)

(குறிப்பு : பகுதி (iii) இன் நிரூபணத்தை₹ பகுதி (i) இல் பயன் படுத்திய அதே முறையைக் கொண்டு கூட நீ நிரூபிக்கலாம்)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

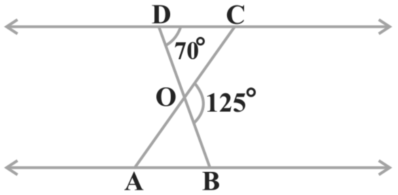
பயிற்சி 6.3

1. படம் 6.34 இல் வடிவொத்த சோடி முக்கோணங்கள் எவை என்று கூறுக. விடை அளிப்பதற்கு நீ பயன் படுத்திய வடிவொத்த நிபந்தனைகளை எழுதவும் மற்றும் அதோடு வடிவொத்த சோடி முக்கோணங்களை குறியீட்டின் வடிவில் எழுதவும்.



படம் 6.34

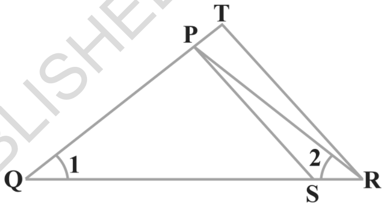
2. படம் 6.35 இல், $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^0$ மற்றும் $\angle CDO = 70^0$, எனில் $\angle DOC, \angle DCO$ மற்றும் $\angle OAB$ ஐ கண்டு பிடி.



படம் 6.35

3. ஒரு சரிவகம் ABCD இன் முலைவிட்டங்களான AC மற்றும் BD புள்ளி O இல் ஒன்று மற்றொன்றை வெட்டும். மற்றும் $AB \parallel DC$ யாக இருப்பின் இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொத்தமையின் நிபந்தனையை பயன்படுத்தி, $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ எனகாட்டு.

4. படம் 6.36 இல், $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 2$. எனில் $\Delta POS \sim \Delta TQR$ என காட்டு.

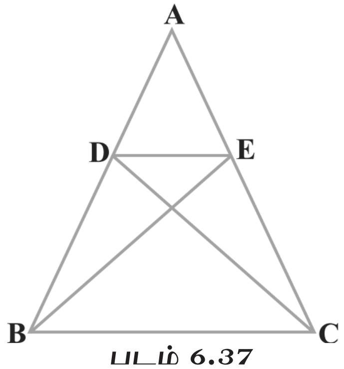


படம் 6.36

5. $\angle P = \angle RTS$ என்று இருக்குமாறு ΔPQR இன் பக்கங்களான PR மற்றும் QR மேல் உள்ள புள்ளிகள் S மற்றும் T ஆகியன உள்ளன. $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ என காட்டு.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. படம் 6.37 இல், $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ஆகில், $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ என காட்டு.



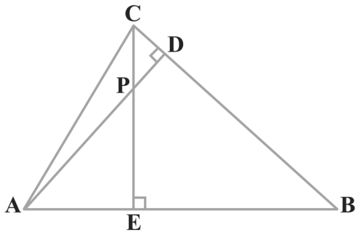
படம் 6.37

7. படம் 6.38 இல், ΔABC இன் செங்குத்தமான AD மற்றும் CE ஒன்று மற்றென்றை P என்ற புள்ளியில் வெட்டும்.

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$ என காட்டு.

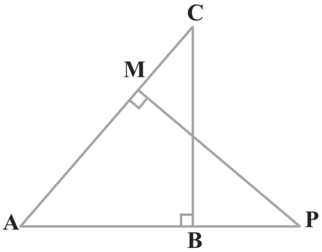


படம் 6.38

8. ஒரு இணைகரமான ABCD நீட்டிய பக்கமான AD இன் மேல் புள்ளி E உள்ளது மற்றும் BE யானது CD ஐ F இல் வெட்டும் $\Delta ABE \sim \Delta CFB$, என காட்டு.

9. படம் 6.39 இல், ΔABC மற்றும் ΔAMP இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களாகும், B மற்றும் M முறையே செங்கோணங்களாகும்.

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ (ii) $\frac{CA}{PA}=\frac{BC}{MP}$ என்பதை நிரூபி.



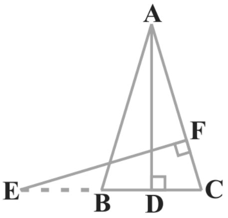
படம் 6.39

10. ΔABC மற்றும் ΔEFG இல், புள்ளிகள் D மற்றும் H ஆகியன முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் FE மீது அமைந்தவாறு, CD மற்றும் GH என்பன முறையே $\angle ACB$ மற்றும் $\angle EGF$ ஆகியவற்றின் கோண இருசமவெட்டிகளாகும். $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ ஆகில்,

(i) $\frac{CD}{GH}=\frac{AC}{FG}$

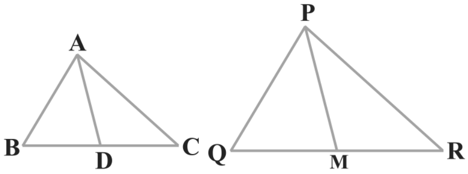
(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$ என காட்டு

11. படம் 6.40 இல், இருசமபக்கமுக்கோணமான ABC யில் AB = AC. பக்கமான CB ஐ புள்ளியான E வரை நீட்டு, $AD \perp BC$ ஆகில் மற்றும் $EF \perp AC$, எனில் $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ என நிரூபி.



படம் 6.40

12. ΔABC யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் BC மற்றும் நடுக்கோடு AD ஆகியன முறையே ΔPQR இன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR மற்றும் நடுக்கோடுகள் PM ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமத்தில் உள்ளன $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ என காட்டு. (படம் 6.41 ஐப்பார்)



படம் 6.41

13. $\angle ADC = \angle BAC$ இருக்கு மாறு ஒரு முக்கோணம் ABC இல் பக்கமான BC இன் மேல் D என புள்ளி இருக்கும். $CA^2 = CB.CD$ என காட்டு.

14. ΔABC யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC மற்றும் நடுக்கோடு AD ஆகியன முறையே மற்றொரு ΔPQR இன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR மற்றும் நடுக்கோடுகள் PM ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமத்தில் உள்ளன $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ என காட்டு.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. 6 மீ நீளமுள்ள ஒரு செங்குத்த கம்பம் 4 மீ நீளமுள்ள நிழல் தரையில் ஏற்படுகிறது மற்றும் அதே நேரத்தில் ஒரு கோபுரத்தின் நிழல் 28 மீ நீளமுள்ளதாகும். கோபுரத்தின் உயரத்தை கண்டுபிடி.

16. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ அங்கே முறையாக, முக்கோணங்களான ABC மற்றும் PQR ஆகியவற்றின் நடுக்கோடுகள் AD மற்றும் PM ஆகில், $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ என நிரூபி.

6.5 பாடத் தொகுப்பு : (Summary)

பின் வரும் குறிப்புகளை இந்த பாடத்தில் நீ படித்திருப்பாய்.

1. ஒரே வடிமான இரண்டு படங்கள் ஆனால் அவைகள் ஒன்றேயான அளவில் இல்லாமல் இருக்கும் போதும் அவை வடிவொத்த படங்கள் என அழைக்கபடுகின்றன.
2. சர்வசமமான எல்லா படங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும் ஆனால் அதன் மறுதலை உண்மையாகாது.
3. ஒரே எண்ணிக்கையில் பக்கங்களைக் கொண்ட இரண்டு பலகோணம் ஆனவை

   (i) அவற்றின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாகில் (ii) அவற்றின் ஒத்திசைவுப் பக்கங்களின் விகிதம் ஒன்றேயாகில் (அதாவது சமவிகிதம்) வடிவொத்தவையாகும்.
4. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு நேர் கோட்டை வரைந்தால் அது மற்ற இரண்டு பக்கங்களில் வெவ்வேறான புள்ளிககளை வெட்டுமெனில், அது மற்ற இரண்டு பக்கங்களை ஒன்றேயான விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
5. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரு நேர்கோடு விகித சமத்தில் பிரித்தால் அந்த நேர்கோடு மூன்றாம் பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.
6. இரண்டு முக்கோணங்களில், ஒத்திசைவு கோணங்கள் சமமெனில், அவற்றின் அதன் ஒத்திசைவுப் பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இருக்கும் மற்றும் ஆகையால் இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும். (AAA வடிவொப்பமை நிபந்தனை)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. இரண்டு முக்கோணங்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமமெனில், இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும். (AA வடிவொப்பமை நிபந்தனை)

8. இரண்டு முக்கோணங்களில், ஒத்திசைவுப் பக்கங்கள் ஒன்றேயான விகிதத்தில் இருக்குமெனில் அதன் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாகும் மற்றும் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவைகளாகும். (SSS வடிவொப்பமை நிபந்தனை)

9. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணமானது மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்கு சமமாகில் மற்றும் இக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங்களானவை ஒன்றேயான விகிதத்தில் இருக்குமெனில் (சம விகதம்) முக்கோணங்கள் வடிவொத்தமாகும். (SAS வடிவொப்பமை நிபந்தனை)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படிப்பவர்களுக்கான ஒரு குறிப்பு

இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் மற்றும் கர்ணமானது மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம், மற்றும் கர்ணத்திற்கு சம விகிதமாக இருப்பின் இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும்.

RHS வடிவொத்தமை நிபந்தனை என இதனை குறிப்பிடலாம்.

இந்த நிபந்தனையை பாடம் 8, எ.கா. 2 இல் பயன்படுத்தினால், நிரூபணம் எளிதாகிவிடும்.

ஆயத்தொலை வடிவியல்

CO-ORDINATE GEOMETRY

J1C2U4

7

7.1 அறிமுகம்

9 ஆம் வகுப்பில், ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலையை இடங்காணலை ஏற்கனவே படித்திருப்பாய், நமக்கு தேவையான ஒரு சோடி ஆயத்தொலைஅச்சுகள். y- அச்சிலிருந்து அப்புள்ளியின்தூரமே, அதன் x - அச்சுத் தொலைவு, அல்லது abscissa. x- அச்சிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரமே, அதன் y-அச்சுத்தொலைவு, அல்லது ordinate எனப்படும். x - அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவை (x, o) என்ற வடிவில் இருக்கும், மற்றும் y அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவை (o, y) என்ற வடிவில் இருக்கும்.

இங்கே ஒரு ஆட்டம் உனக்குள்ளது. ஒரு வரைப்பட தாளின் மீது ஒரு கணத்தின் ஒரு சோடி செங்குத்த அச்சுகளை வரைக. இப்பொழுது பின் வரும் புள்ளிக்கான படம் வரை. மற்றும் வழி காட்டின்படி இணைக்கவும்: A(4,8) வரை B(3,9) வரை C(3,8) வரை D(1,6) வரை D(1,6) வரை E(1,5) வரை F(3,3) வரை G(6,3) வரை H(8,5) வரை I (8,6) வரை J (6,8), வரை K (6,9), வரை L (5,8) வரை A புள்ளிகளை இணைக்கவும். அடுத்தார்போல் ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்க P (3.5, 7), Q (3, 6) மற்றும் R(4,6) வரையான புள்ளிகளை இணைக்கவும். ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்க S (4, 5), T (4.5, 4) மற்றும் R (4, 6) வரையான புள்ளிகளை இணைக்கவும். ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்க S (4, 6), T (4.5, 6) மற்றும் U (5, 5) இப்பொழுது இணைக்கவும். கடைசியாக S யுடன் இணைக்கும் புள்ளிகளான (0, 5) மற்றும் (0, 6) மற்றும் U வுடன் இணைக்கும் புள்ளிகளான (9, 5) மற்றும் (9, 6) ஆகுமெனில் என்ன படம் உனக்கு கிடைக்கும்?

அதோடு, $ax+by+c=0$, வடிவமான இரண்டு மாறிகளின் ஒரு படிச்சமன் பாடுகளை நீ பார்த்திருப்பாய், (இருமாறிகளின் குணகங்கள் ஒரே சமயத்தில் a, b பூஜ்யமாக இருக்காது) வரைப்படங்களை பிரதியிடும்போது, ஒரு

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

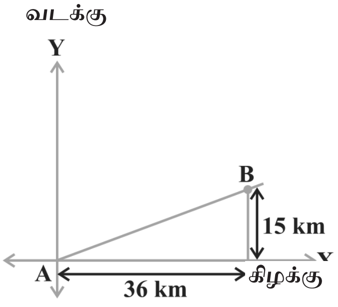
நேர்க்கோட்டை கொடுக்கும், மேலும், பாடம் 9 இல், $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ ஆன வரைபடத்தை நீ பார்த்திருப்பாய், ஒரு பரவலயம் ஆகும். உண்மையில், வடிவியல் படங்களை படிப்பதற்கு இயற்கணிதத்தை கருவியாக கொண்டு ஆயத்தொலையை விருத்திசெய்தனர். இயற் கணிதத்தை பயன் படுத்தி வடிவியலை படிக்க நமக்கு உதவியது. இது ஏனெனில், பௌதீகம், கட்டடக்கலை, கப்பலை செலுத்துதல், பூகம்பம், மலை பற்றிய அறிவியல் பகுதி மற்றும் கலைப்போன்ற வெவ்வேறு துறைகளில் ஆயத்தொலை வடிவியலை பரந்த அளவில் உபயோகித்துள்ளனர்.

இந்த பாடத்தில், கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு ஆயத்தொலை புள்ளிகளின் இடையேயான தூரத்தை எப்படி கண்டுபிடிப்பது என நீ கற்றுக்கொண்டிருப்பாய். ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு துண்டுக்கோடானது ஆயத்தொலை புள்ளிகளை பிரிப்பது எப்படி என கண்டுப்பிடித்திருப்பாய் என்பதைப் பற்றியும் நீ படித்திருப்பாய்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.2 புள்ளிகளின் இடைப்பட்டத்தொலைவு காணும் சூத்திரம் (Distance Formula)

பின் வரும் நிலைமையை கருது: சிறிய பட்டணமான A இன் வடக்கில் 15 km மற்றும் கிழக்கில் 36 km இல் சிறிய பட்டணமான B ஆனது நிறுவப்பட்டுள்ளது. இதனை நிஜமாக அளக்காமல் சிறிய பட்டணமான A இல் இருந்து சிறிய பட்டணமான B வரையில் உள்ள தூரத்தை நீ எப்படி கண்டுபிடிப்பாய்? இதனை பார். படம் 7.1 இல் காட்டியதுப் போல் வரைப்படத்தினால் இந்த நிலைமையை குறிக்கலாம். இதன் தூரத்தை கணக்கிட பைத்தா கோரஸ் தேற்றம் பயன்படலாம்.



படம் 7.1

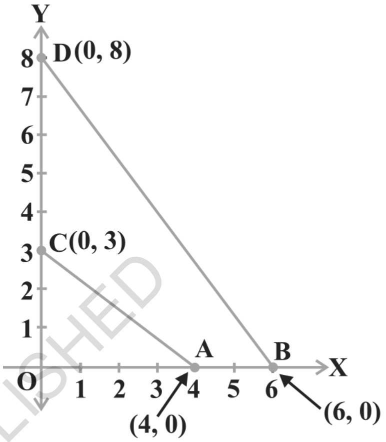
இப்பொழுது, x - அச்சின் மீது இரண்டு புள்ளிகள் இருந்தது என எண்ணிக்கொள். இதன் இடையே உள்ள தூரத்தை கண்டுபிடிக்கலாமா? எடுத்துக்காட்டிற்கு, படம் 7.2 இல் இரண்டு புள்ளிகள் A (4, 0) மற்றும் B(6, 0) என கருது. x - அச்சின்மீது புள்ளிகள் A மற்றும் B இருக்கும்.

OA=4 அலகுகள் மற்றும் OB=6 அலகுகளான இதனை படத்திலிருந்து பார்கலாம்.

ஆதலால் A யிலிருந்து B இன் தூரம், அதாவது AB = OB - OA = 6-4=2 அலகுகள்.

ஆகையினால், x - அச்சு மீது இரண்டு புள்ளிகளாயின், நாம் சுலபமாக அதன் இடையேயுள்ள தூரத்தை கண்டுபிடிக்க முடியும்.

இப்பொழுது, y - அச்சு மீது இரண்டு புள்ளிகள், இருப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். நாம் அதன் இடையேயுள்ள தூரத்தை நீ கண்டுபிடிக்க முடியுமா. y - அச்சு மீது இரண்டு C (0, 3) மற்றும் D (0, 8) புள்ளிகளாயின், ஒன்றேயான CD =8-3=5 என நாம் அதை கண்டுபிடிக்கலாம் (படம் 7.2 ஐ பார்)



படம் 7.2

அடுத்து, C யிலிருந்து A வரை உள்ள தூரத்தை நீ கண்டுபிடிக்க முடியும். (படம் 7.2 ஐ பார்) இடையே OA=4 அலகுகள் மற்றும் OC=3 அலகுகள், C யிலிருந்து A வரை உள்ள தூரத்தை நீ கண்டுபிடிக்க முடியும் அதாவது, AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5 அலகுகள். ஒன்றேயான, BD=10 அலகுகள் = D யிலிருந்து. B வரை உள்ள தூரத்தை நீ கண்டுபிடிக்க முடியும்.

இப்பொழுது, ஆயத்தொலை அச்சுமீது அமையாத இரண்டு புள்ளிகள் என நினைத்து கொள்வதாகில், அதன் இடையே உள்ள தூரத்தை கண்டுபிடிக்கமுடியுமா? ஆம்! ஆகையால் இதனை செய்ய பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை நாம் பயன்படுத்தலாம் என ஒரு எடுத்துக்காட்டை பார்க்கலாம்.

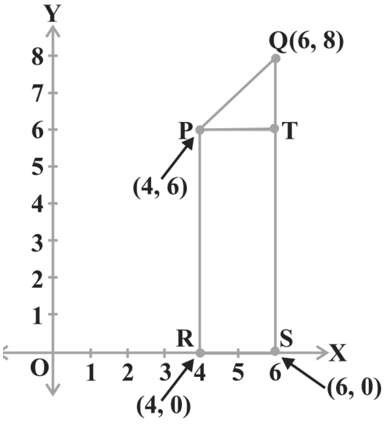
படம் 7.3 இல், முதல் கட்டத்தில் புள்ளிகள் P (4,6) மற்றும் Q (6,8) அமைந்திருக்கும். அவைகளின் இடையே உள்ள தூரத்தை கண்டுபிடிக்க பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி செய்யவேண்டியது எப்படி? P மற்றும் Q வின் முறையே X - அச்சுக்கு செங்குத்தமாக PR மற்றும் QS ஐ என வரைக. அதோடு, P யிலிருந்து செங்குத்தம் ஒன்று QS ஐ இணைக்கவும். ஆகவே (4, 0) மற்றும் (6, 0) முறையே R மற்றும் S இன் ஆயுத்தொலையாகும். ஆகையால், QS=8 அலகுகள் மற்றும் TS=PR=6 அலகுகள் ஆதலால், QT=2 அலகுகள் மற்றும் PT=RS=2 அலகுகள்

இப்பொழுது, பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை பயன் படுத்தி நாம் பெறுவது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

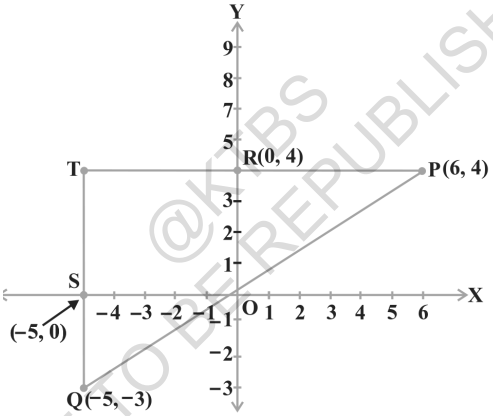
$PQ^2 = PT^2 + QT^2$
$= 2^2 + 2^2 = 8$

$\therefore$ PQ = $2\sqrt{2}$ அலகுகள். இரண்டு வெவ்வேறு கட்டங்களில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை எப்படி கண்டுபிடிக்க முடியும்?



படம் 7.3

(படம் 7.4 ஐ பார்) புள்ளிகளான P (6, 4) மற்றும் Q (-5, -3) என கருது. x - அச்சுக்கு செங்குத்தமாக QS ஐ வரைக. அதோடு QS மீதுதானபுள்ளி P இலிருந்து செங்குத்தமான QS ஐ வரைக அதை (நீட்டும்போது) y - அச்சில் உள்ள புள்ளி R ஐ சந்திக்கும்.



படம் 7.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அப்படியெனில் PT =11 அலகுகள் மற்றும் QT = 7 அலகுகள் (ஏன் ?)

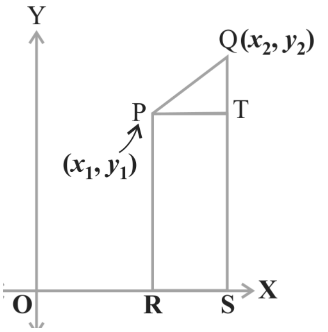
செங்குத்த முக்கோணமான PTQ இல் பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது PQ = $\sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ அலகுகள்.

இரண்டு புள்ளிகளான, $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_1, y_2)$ இன் இடையில் உள்ள தூரத்தை இப்பொழுது கண்டுபிடி. X-அச்சுவிற்க்கு செங்குத்தமாக PR மற்றும் QS ஐ வரைக. QS மீதுள்ள புள்ளி P இலிருந்து ஒரு செங்குத்தும் வரைந்தால் அது புள்ளி T யை சந்திக்கும் (படம் 7.5 ஐ பார்)

அப்படியெனில், $OR = x_1$, $OS = x_2$, ஆகையால் $RS = x_2 - x_1 = PT$. அதோடு, $SQ = y_2$, $ST = PR = y$, ஆகையால் $QT = y_2 - y_1$ இப்பொழுது, Δ PTQ, இல் பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை செலுத்துவதில் நாம் பெறுவது.

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ஆதலால், $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



படம் 7.5

அப்பொழுதிலிருந்து தூரத்தை எப்பொழுதும் குறை அல்லாத ஒன்று என குறித்துகொள். வர்க்க மூலத்திற்கு நாம் எடுத்துக்கொள்வது மிகை மட்டும்தான், ஆகையால், புள்ளிகளான P (x_1, y_1) மற்றும் Q (x_2, y_2) இடைப்பட்ட தூரத்தை

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

அதனை நாம் புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட **தொலைவை காணும் சூத்திரம்** என அழைப்போம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

குறிப்புகள் :

1. குறிப்பாக ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து 0(0, 0) யிலிருந்து ஒரு புள்ளியான P(x, y) யான தூரத்தை கொடுத்துள்ளார்கள் $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. அதோடு நாம் இப்படியும் எழுதலாம்

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ 00$$ (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு 1 : புள்ளிகளான (3,2), (-2,-3) மற்றும் (2,3) இவைகளை கொண்டு ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்க முடியுமா? அப்படியெனில் உருவாகும் முக்கோணத்தின் வகையை பெயரிடவும்.

தீர்வு : இரண்டு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலைவை காணும் சூத்திரத்தை செலுத்தி தூரங்களான PQ, QR மற்றும் PR ஐ கண்டுபிடி. அங்கே P (3, 2), Q (-2, -3) மற்றும் R (2, 3) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளாகும். நாம் பெறுவது,

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07$$ (தோராயமாக)

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$$ (தோராயமாக)

$$PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$ (தோராயமாக)

அதன்பிறகு மூன்றாவது தூரமானது எதேனும் இரண்டு தூரங்கள் ஆன இவைகளின் கூடுதலை விட அதிக மாக இருக்கும், ஆதலால் புள்ளிகளான P, Q மற்றும் R ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கும். அதொடு, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையால் நாம் அடைவது

$\angle P = 90^{O}$, அதலால், PQR ஒரு செங்குத்த முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: புள்ளிகள் (1, 7), (4, 2), (-1, -1) மற்றும் D (-4, 4) ஆகியன ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் எனக்காட்டு.

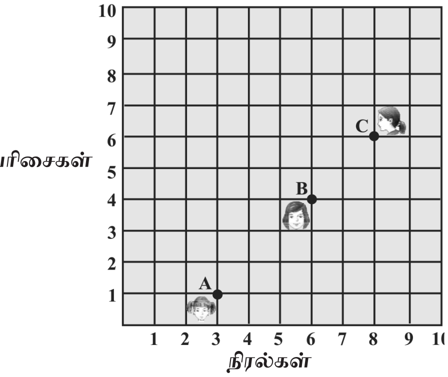
தீர்வு : புள்ளிகளான A (1, 7), B (4, 2), C (-1, -1) மற்றும் D (-4, 4) என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லா பக்கங்கள் சமம் மற்றும் இரண்டு மூலை விட்டங்கள் சமம் என்ற தன்மையை பயன் படுத்தி ஒரு வழியாக ABCD ஒரு சதுரம் என காட்டலாம். இப்பொழுது,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$
$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$
$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$
$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$
$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

அதன்பிறகு AB = BC = CD = DA மற்றும் AC = BD, நாற்கரமான ACBD இன் நான்கு பக்கங்களும் சமம் மற்றும் அதோடு மூலைவிட்டங்களான AC மற்றும் BD சமம். ஆதலால் ACBD ஒரு சதுரமாகும்.

வேறுவழியான தீர்வு : நாம் நான்கு பக்கங்களை மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டத்தை கண்டுபிடித்தோம், என கூறு மேலே AC யுள்ளது இங்கே $AC^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$, ஆதலால், பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி $\angle D = 90^{O}$ எல்லா நான்கு பக்கங்களும் சமம் மற்றும் ஒரு கோணம் 90^{0}யின் கூடிய ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் எனலாம், ஆகையினால் ABCD ஒரு சதுரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு வகுப்பறையில் சாய்வு மேஜைகளை வரிசை படுத்தி உள்ளதை படம் 7.6 இல் காண்பிக்க பட்டுள்ளது A (3, 1), B (6, 4) மற்றும் C (8, 6) முறையை அஸிமா, பாரதி மற்றும் கெமெல்லா உட்கார வைக்கப்பட்டுள்ளார்கள். அவர்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமர்ந்து இருப்பார்களா என நீ யோசிக்க முடியுமா? காரணம் கொடு.



படம் 7.6

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

தீர்வு : இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்டத் தொலைவு காணும் சூத்திரம் பயன்படுத்தி, நாம் பெறுவது.

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

அதன்பிறகு, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, புள்ளிகளான A, B மற்றும் C ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருக்கும் என நாம் கூறலாம் ஆதலால், அவர்கள் ஒரே கோட்டில் அமர்த்திருப்பார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 4: புள்ளிகளான A(7, 1) மற்றும் B(3, 5) யிலிருந்து சமதூரத்தில் புள்ளியான (x, y) இருக்குமாறு x மற்றும் y இன் நடுவே ஒரு சம்பந்தத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : புள்ளிகளான A (7, 1) மற்றும் B (3, 5) யிலிருந்து சமதூரத்தில் $P(x, y)$ என இருக்கும். நமக்கு கொடுக்கப்பட்டது அதுவானது, AP = BP ஆகையால் $AP^2 = BP^2$

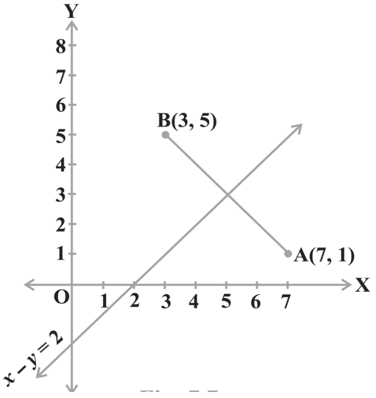
அதாவது, $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

அதாவது, $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

அதாவது, $x - y = 2$

தேவையான சம்பந்தம் இது வாகும்

குறிப்பு : $x - y = 2$ என்பது ஒரு கோடுகான சமன்பாட்டின் வரைப்படம் என்பதை குறித்துக்கொள். உன்னுடைய முந்தையபடிப்பிலிருந்து, AB இன் இருசமவெட்டி செங்குத்தம் மீது அமைந்திருக்கும் A மற்றும் B யிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளியானது என உனக்கு தெரியும். ஆதலால் AB இன் இருசமவெட்டி செங்குத்தம் $x - y = 2$ இன் வரைப்படத்திற்கு சமம் (படம் 7.7 ஐ பார்)



படம் 7.7

எடுத்துக்காட்டு 5: புள்ளிகளான A (6, 5) மற்றும் B (-4, 3) யிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும் அது y - அச்சு மீதான ஒரு புள்ளியை கண்டுபிடி.

தீர்வு: (0, y)வடிவத்திற்கு y - அச்சு மீது உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு சமமாகும் என நமக்கு தெரியும். ஆகையால், A மற்றும் B யிலிருந்து சமதூரத்தில்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

புள்ளி P (0, y) என இருக்கும்.

$(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (-4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

அதாவது, $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

அதாவது, $4y = 36$ $\therefore y = 9$

ஆகையால் (0, 9) தேவையான புள்ளிகள் ஆகும்.

நமது தீர்வை சரிபார்க்கலாம் : $AP = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

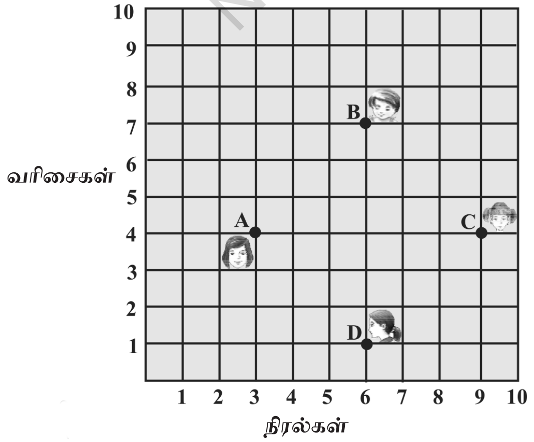
$BP = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

கவனிக்க: மேலேயுள்ள குறிப்பை பயன் படுத்தி, வெட்டப்பட்ட y - அச்சு ஆனது (0, 9) க்கு சமம் ஆவதை நாம் பார்க்கலம் மற்றும் AB இன் இருசமவெட்டியான செங்குத்தமாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 7.1

1. பின் வரும் சோடிகளான புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை கண்டுபிடி.
   i) (2, 3), (4, 1) ii) (-5, 7), (-1, 3) iii) (a, b), (-a, -b)
2. (0, 0) மற்றும் (36, 15) புள்ளிகளுக்கான இடை தூரத்தை கண்டுபிடி. பிரிவான 7.2 இல் கலந்துரையாடலில் சிறிய பட்டணமான A மற்றும் B இன் இடை தூரத்தை இப்பொழது கண்டுபிடித்தது உனக்கு தெரியும்.
3. புள்ளிகளான (1, 5) (2, 3) மற்றும் (-2, 11) யாவும்' ஒரே நேர் கோட்டில் இருக்குமா என தீர்மானி.
4. இருசம முக்கோணத்தின் உச்சிகளான (5, -1), (b, 4) மற்றும் (7, -2) இதுவோ என சரிப்பார்.
5. ஒரு வகுப்பறையில் படம் 7.8 இல் காட்டியதுப்போல் A, B, C மற்றும் D புள்ளிகளில் 4 நண்பர்கள் அமர்ந்திருப்பார்கள். சம்பா மற்றும் செமெலி உகுப்பறையில் நடந்தனர் மற்றும் ஒரு சில நிமிடங்கள் கவனித்த பிறகு சம்பா செமெலியை கேட்டாள் ABCD ஒரு சதுரம் என நீ யோசி க்கிறாயா? செமிலி ஒத்துக் கொள்ள வில்லை. இரு



படம் 7.8

புள்ளிகளின் இடைப்பட்டத் தொலைவு காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி. இதனுள் எது சரியானது என்று கண்டுபிடிக்கவும்?

6. உருவான நாற்கரத்தின், வகைக்கு பெயரிடு, ஏதேனு மாகில், பின் வரும் புள்ளிகளில், மற்றும் உன்னுடைய விடைக்கு காரணங்களை கூறு.

   i) (-1, 2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0) ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)

   iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

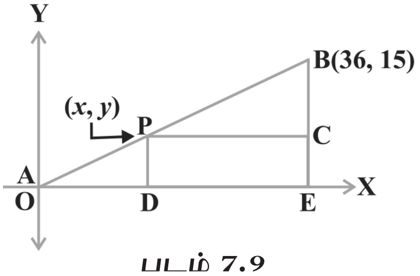
7. (2, -5) மற்றும் (-2, 9) சமதூரத்திலிருந்து இருக்கும் x - அச்சு மீதான புள்ளியை கண்டுபிடி.

8. புள்ளிகளான P (-2, 3) மற்றும் Q (10, y) யின் இடை தூரம் 10 அலகுகளுக்கு சம மெனில் அதற்க்கான 'y' மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

9. P (5, -3) மற்றும் R (x, 6) யிலிருந்து சமதூரத்தில் Q (0, 1) இருக்குமாகில், x இன் மதிப்பை கண்டுபிடி, அதோடு QR மற்றும் PR இன் தூரங்களை கண்டுபிடி.

10. புள்ளிகளான (3, 6) மற்றும் (3, 4) யிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியான (x, y) இருக்கும்படி x மற்றும் y இன் இடையேயுள்ள ஒரு சம்பந்தத்தை கண்டுபிடி.

7.3 பிரிவு சூத்திரம் (**Section Formula**)



படம் 7.9

7.2 பிரிவில் உள்ள நிலமையை நாம் நினைவு கூறலாம். ஒரு தொலைத்தொடர்பு நிறுவனமானது, தனது Tower ரை (கோபுரத்தை) A மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையே P என்ற புள்ளியில், B யில் இருந்து டவர் இருக்கும் தூரமானது A யில் இருந்து டவர் இருக்கும் தூரத்தின் இருமடங்காக இருக்கும் வகையில் வைத்தது எனக்கொள்க. AB இன் மீது P அமையுமாயின், 1:2 விகிதத்தில் AB ஐ அது பிரிக்கும் (படம் 7.9 ஐ பார்) ஆதிபுள்ளியான 'O' ஐ நாம் A என எடுத்துக் கொள்ளலாம் மற்றும் இரண்டு அச்சுகளின் மீது ஒரு அலகானது 1 Km போலவும், (36, 15) என்பது B இன் ஆயத்தொலைவு ஆகும். சரியாக கோபுரத்தின் இடத்தை தெரிந்துக்கொள்ள, P இன் ஆயத்தொலைவை நாம் எப்படி கண்டு பிடிப்பது?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

'P' இன் ஆயத்தொலைவு (x, y) என்க. x அச்சு மீது P மற்றும் B யிலிருந்து செங்குத்தங்களை வரைக, முறையே D மற்றும் E இல் சந்திக்கும். BE க்கு செங்குத்தமாக PC ஐ வரைக. அப்படியெனில், AA வடிவொத்த கட்டளையின் படி, பாடம் 2 இல் படித்திருப்பீர், ΔPOD மற்றும் ΔBPC வடிவொத்தமானவை.

$$\text{ஆதலால்,}\quad \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2},\ \text{அட்நிக்}\ \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

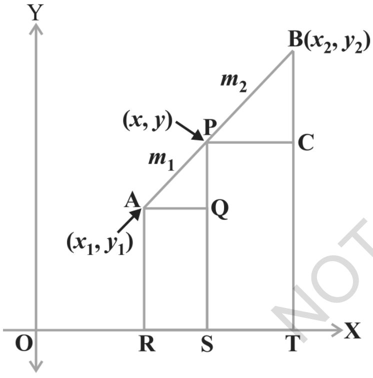
$$\text{ஆகையால்,}\quad \frac{x}{36 - x} = \frac{1}{2}\ \text{அட்நிக்}\ \frac{y}{15 - y} = \frac{1}{2}$$

சமன்பாடுகளான இவைகள் கொடுக்கும் $x = 12$ மற்றும் $y = 5$

OP : PB = 1:2 நிபந்தனையானது P (12, 5) இல் சந்திக்கும் என்பதை நீ சரிபார்க்கவும்.

இப்பொழுது பொதுவான சூத்திரம் அடைய இந்த எடுத்துக்காட்டின் வழியாக விரிவாக்கம் பெற அதனை நீ புரிந்துக்கொள்ள பயன் படுத்திக்கொள்.

A (x_1, y_1) மற்றும் B (x_2, y_2) ஆன இரண்டு புள்ளிகள் என கருது மற்றும் $m_1 : m_2$ விகிதத்தில் உட்புறமாக AB ஐ P (x, y) ஆனது பிரிக்கும் என நினைத்துக் கொள். அதாவது



படம் 7.10

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$ (படம் 7.10 ஐ பார்)

x அச்சுற்க்கு செங்குத்தமாக AR, PS மற்றும் BT வரைக. x அச்சிக்கு இணையாக AQ மற்றும் PC க்கு வரைக. அப்படியாயின், கோ. கோ. AA யின் வடிவொத்த கட்டளையின்படி.

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ஆதலால்,
$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

இப்பொழுது,
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

மதிப்புகளில் (1) ஆன இவைகளை பிரதிநிதியாக்கும் போது, நமக்கு கிடைக்கும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

எடுத்துக்கொண்டு $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, நாம் பெறுவது $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

அதேமாதிரியாக எடுத்துகொண்டு,

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, நாம் பெறுவது $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

ஆகையால், புள்ளிகளான ஆகியவற்றை A (x_1, y_1) மற்றும் B (x_2, y_2) இணைக்கும் துண்டுக்கோடை, உட்புறமாக, $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியான P (x, y) யின் ஆயத்தொலைவுகள்.

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ ஆகும்.} \qquad (2)$$

இதுவே **பிரிவு சூத்திரம்** எனப்படும் புள்ளி இதையே புள்ளிகள் A, P, மற்றும் B களில் இருந்து, Y - அச்சின்மீது செங்குத்தங்கள் வரைந்து மேலே கூறியபடியே தொடர்ந்து செய்வதாலும் பெறலாம் புள்ளி Pயானது k:1 என்ற விகிதத்தில் AB யை பிரித்தால், P இன் ஆயத்தொலை வானது

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{k_1y_2 + y_1}{k + 1}\right) \text{ ஆகும்}$$

சிறப்பு வகை : 1:1 விகிதத்தில் துண்டுக்கோட்டைப் பிரிக்கும் புள்ளி ஒரு துண்டுக்கோட்டின் மையப்புள்ளி ஆகும். ஆதலால், புள்ளிகளான A (x_1, y_1) மற்றும் B (x_2, y_2) இணைக்கும் கோட்டுதுண்டின் மையப்புள்ளி P யின் ஆயத்தொலைவானது

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1 + 1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1 + 1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

பிரிவு சூத்திரத்தை ஆதாரித்து மேல் ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளை தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : உட்புறமாக 3:1 விகிதத்தில புள்ளி களான (4, -3) மற்றும் (8, 5) இணைக்கும் துண்டு கோட்டை பிரிகக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : தேவைப்படும் புள்ளி $P(x, y)$ என்க. பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி நாம் ெறுவது,

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \; y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

ஆதலால், தேவையான புள்ளி (7, 3) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : புள்ளி (-4, 6) ஆனது A (-6, 10) மற்றும் B (3, -8) இணைக்கும் துண்டுக் கோட்டை எவ்விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது?

தீர்வு: (-4, 6) ஆனது $m_1 : m_2$ விகிதத்தில் உட்புறமாக AB ஐ பிரிக்கும் என்க. பிரிவு சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி, நமக்கு கிடைக்கும்.

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 + 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 6m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

அதுவாகில் நினைவு கூறுக $(x, y) = (a, b)$ அதுவாகில் $x = a$ மற்றும் $y = b$

ஆகையால், $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ மற்றும் $6 = \dfrac{-8m_1 + 6m_2}{m_1 + m_2}$

$-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ நமக்கு கொடுக்கும்

$-4m_1 \;\; -4m_2 = 3m_1 \; -6m_2$

அதாவது, $7m_1 = 2m_2$

அதாவது, $m_1 : m_2 = 2 : 7$

இந்த விகிதமானது y - அச்சுத்தொலைவுக்கும் திருப்தி படுத்துகிறதா என நீ சோதிக்கவும்

இப்பொழுது, $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ (முற்றிலும் m_2 ஆல்வகு)

$$= \frac{-8\times\frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

ஆதலால், புள்ளி (-4, 6) ஆனது புள்ளிகளான A (-6, 10) மற்றும் B (3, -8) இணைக்கும் துண்டு கோட்டினை 2:7 விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

மாற்றுமுறையில்: விகிதம் $m_1 : m_2$ என்பதை $\dfrac{m_1}{m_2}$ *: 1* அல்லது K:1 என்றும் எழுதலாம்.

(-4, 6) என்ற புள்ளி K:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக AB ஐ பிரிக்கும் என்க. பிரிவு சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி, நாம் அடைவது,

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k+6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \quad (2)$$

$$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$

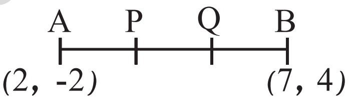
$$7k = 2 \qquad \therefore K : 1 = 2 : 7$$

y - இன் ஆயத்தொலைவுக்குகூட இதை நீ சரிபார்க்கலாம்.

ஆகையால், புள்ளி (-4, 6) ஆனது புள்ளிகளான A (6, 10) மற்றும் B (3, 8) இணைக்கும் கோட்டு துண்டினை 2:7 விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

குறிப்பு : PA மற்றும் PB இன் தூரத்தை கணக்கிட்டு இதன் விகிதத்தை நீ கூட கண்டு பிடிக்கலாம். ஆனால் A, P மற்றும் B ஆகியன ஒரே நேர் கோட்டில் இருக்கிறனவா என்பது தெரிந்தால் மட்டுமே இது சாத்தியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு *8*: புள்ளிகளான A(2, -2) மற்றும் B(-7, 4) இணைக்கும் துண்டுகோடினுடைய முப்பிரிவுகளான (அதாவது, மூன்று சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகள்) புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவை கண்டுபிடி.



படம் *7.11*

தீர்வு : AB இன் முப்பிரிவு புள்ளிகள் P மற்றும் Q என்க, அதாவது AP = PQ = QB (படம் 7.11 ஐ பார்)

ஆதலால், 1:2 விகிதத்தில் உட்புறமாக AB ஐ P பிரிக்கும். ஆதலால், P இன் ஆயத்தொலைவை, பிரிவு சூத்திரத்தை செலுத்துவதால்,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) \text{ அதாவது } (-1, 0)$$

இப்பொழுது, 2:1 விகிதத்தில உட்புறமாக AB ஐ Q யும் கூட பிரிக்கும். ஆகையால், Q வின் ஆயத்தொலைவு ஆனது

$$\therefore \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) \text{ அதாவது } (-4, 2)$$

ஆதலால், (-1, 0) மற்றும் (-4, 2) ஆன A மற்றும் B ஐ இணைக்கும் துண்டு கோட்டை முப்பிரிவுகளாக பிரிக்கும் புள்ளிகளாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

குறிப்பு : Q ஆனது PB இன் மையப்புள்ளியானதை கவனித்தால் கூட நாம் மையப்புள்ளி சூத்திரத்தை பயன் படுத்தி அதன் ஆயத்தொலைவுகளை நாம் பெறமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : புள்ளிகளான (5, -6) மற்றும் (-1,- 4) இனைக்கும் துண்டுக்கோட்டினை Y - அச்சு பிரிக்கும் விகிதத்தை கண்டுபிடி. அதோடு குறுக்கே வெட்டும் புள்ளியை கண்டுபிடி.

தீர்வு : k:1 விகிதம் என்க அப்புறம் பிரிவு சூத்திரத்தினால், k:1 விகிதத்தில் அது AB ஐ பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தெலைவானது $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$ இந்த புள்ளி Y- அச்சு மீது இருக்கும், மற்றும் *y* அச்சுமீதான இடைதூரம் '0' விற்கு சமம் என நமக்கு தெரியும்.

ஆதலால, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

ஆகையால் , $k = 5$

அதாவது, விகிதமானது 5:1 ஆகும் K இன் மதிப்யை போடுவதால் இது 5 ற்கு சமமாகும். $(0, \frac{-13}{3})$ என்ற வெட்டுபுள்ளி நமக்கு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளான A (6,1), B(8,2), C (9,4) மற்றும் D (p, 3) புள்ளிகளை வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள், p இன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஒரு இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று இருசமகூறிடும் என நமக்கு தெரியும்.

ஆசையால், AC இன் மையப்புள்ளியான ஆயத்தொலை = BD இன் மையப்புள்ளியான ஆயத்தொலைவாகும்

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{15}{2} = \left(\frac{8+p}{2}\right)$$

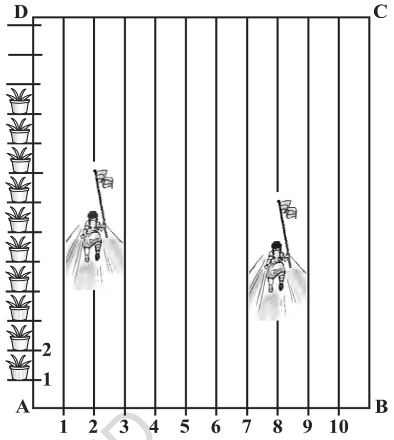
$$\therefore p = 7$$

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

பயிற்சி 7.2

1. (-1,7) மற்றும் (4, -3) இன் இணைப்பானதை 2:3 விதிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவை கண்டுபிடி.

2. (4, 1) மற்றும் (-2, -3) இணைக்கும் துண்டுக் கோட்டின் முப்பிரிவு புள்ளிகளின் ஆயத்தொலவை கண்டுபிடி.



படம் 7.12

3. விளையாட்டுப்போட்டி தினத்திற்கான செயல்பாடுகளை நடத்த உன்னுடைய செவ்வக வடிவான பள்ளிக்கூட மைதானத்தில், ஒவ்வொன்றும் 1 மீ. தூரத்திற்கு சுண்ணாம்பு தூளைக்கொண்டு கோடுகளை வரைந்தனர். படம் 7.12 இல் நீள வாட்டத்தில் AD ஐ காட்டியதுப்போல் ஒன்று மற்றொன்றிலிருந்து 1மீ. தொலைவிற்க்கு 100 பூ தொட்டிகள் வைக்கப்பட்டுள்ளது, 2 வது கோட்டின் மீது தூராமான AD இல் $\frac{1}{4}$ பாகம் வரை நிஹாரிக்கா ஒடினாள். மற்றும் ஒரு பச்சை கொடியை நிறுவினாள். எட்டாவது கோட்டின் மீது தூரமான AD இல் $\frac{1}{5}$ பாகம் வரை பிரீத் ஒடினாள், மற்றும் ஒரு சிவப்பு கொடியை நிறுவினாள். இரண்டு கொடிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என்னவாக இருக்கும்? இரண்டு கொடிகளை இணைக்கும் துண்டுக்கோட்டிற்கு இடையே சரியாக உள்ள பாதி வழியில் நீல கொடியை ரேஷ்மீ நிறு வினாளாகில், அவளுடைய கொடியை எங்கே இவள் நிறுவியிருப்பாள்?

4. புள்ளி (-1, 6) ஆனது புள்ளிகளான (-3, 10) மற்றும் (6, -2) இவற்றை இணைக்கும் துண்டு கோட்டை எவ்விகதத்தில் பிரிக்கின்றன ?

5. x - அச்சினல் பிரிக்கப்பட்ட A (1, -5) மற்றும் B (-4, 5) இணைக்கும் துண்டுக் கோட்டினை எவ்விகதத்தில் பிரிக்கின்றன? அதோடு பிரிவு புள்ளிகளின் ஆயத்தொலையை கண்டுபிடி.

6. ஒரு இணைகரத்தில் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொண்ட உச்சிகளான (1,2), (4, y), (x, 6) மற்றும் (3,5) ஆகில், x மற்றும் y ஐ கண்டுபிடி.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

7. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும், அவ்வட்டத்தின் மையம் (2, -3) மற்றும் B (1,4) ஆகும். புள்ளி A இன் ஆயத்தொலைவை கண்டுபிடி.

8. A மற்றும் B ஆனது முறையே (-2, -2) மற்றும் (2, -4) மற்றும் துண்டுக் கோடான AB யின் மீது P இருக்கும், $AP = \frac{3}{7}AB$ யாக இருக்கு மாறு P யின் ஆயத்தொலை ஐ கண்டுபிடி.

9. A (-2, 2) மற்றும் B(2, 8) இவற்றை இணைக்கும் துண்டுக்கோட்டினை நான்கு சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவை கண்டுபிடி.

10. வரிசையில் எடுத்துக்கொண்ட (3, 0), (4, 5) (-1, 4) மற்றும் (-2, 1) புள்ளிகல் சாய்வுசதுரத்தின் உச்சிகள் எனில் அதன் பாப்பளவை கண்டுபிடி (குறிப்பு : சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}$ (மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கல் தொகை)

7.4 பாடத்தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில், பின்வருவனவற்றை- நீ கற்றுக் கொண்டிருப்பாய் :

1. $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ வின் இடையே உள்ள தூரம் $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ஆகும்.

2. ஒரு புள்ளி P (x, y) இன் தூரம் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{x^2 + y^2}$ ஆக இருக்கும்.

3. புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் ஒரு புள்ளி P (x, y) இன் ஆயத்தொலைவானது $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$ ஆகும்.

4. புள்ளிகள் $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ ஐ இணைக்கும் துண்டுக்கோட்டின் மையப்புள்ளியானது $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ என்பதாகும்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படிப்பவர்கள் கவனிக்க

A (x_1, y_1) மற்றும் B (x_2, y_2) புள்ளிகளான இவற்றை இணைக்கும் துண்டுக்கோட்டை P(x, y) என்ற புள்ளி, $m_1 : m_2$விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் எனில் 7.3 பிரிவில் கலந்துரையாடலில் பிரிவு சூத்திரத்தின் படி அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகள் பின் வருமாறு இருக்கும்.

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2},\ y = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

இங்கே, அதை கவனிக்க, PA : PB = $m_1 : m_2$

இருப்பினும், A மற்றும் B க்கு நடுவே P இருக்காமல், ஆனால் நேர்கோடான AB இன் மீது, AB இன் துண்டு கோட்டிற்கு வெளிபுறமாக இருக்குமாயின் மற்றும் PA : PB = $m_1 : m_2$, எனில் புள்ளிகள் A மற்றும் B ஐ இணைக்கும் துண்டுக்கோட்டை P வெளிபுறமாக பிரிக்கும் என நாம் கூறலாம். உயர் வகுப்புகளில் இவ்வகையான பிரிவு சூத்திரத்தை நீ படிக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கணிதத்தில் நிரூபணங்கள்
PROOFS IN MATHEMATICS

A1

A1.1 அறிமுகம்

பகுத்தறியும் திறன் மற்றும் தெளிவான சிந்தனை ஆகியன நம் அன்றாட வாழ்வில் மிகவும் பயன்படுபவை. எடுத்துக்காட்டாக, அரசியல்வாதி ஒருவர் உங்களிடம், 'உங்களுக்கு மாசில்லாத அரச ாங்கத்தில் நாட்டம் இருப்பின் , நீங்கள் எனக்கு ஓட்டு போட வேண்டும்' என்று கூறுகிறார் என வைத்துக்கொள்வோம். அவர் உண்மையில், நீங்கள் அவருக்கு ஒட்டுப் போடாவிடில், உங்களுக்கு மாசில்லாத அரசாங்கம் கிடைக்காது என உங்களை நம்பவைக்கிறார். அரசாங்கம் கிடைக்காது என உங்களுக்கு மாசில்லாத அரசாங்கம் கிடைக்காது என உங்களை நம்பவைக்கிறார். அதேபோல, 'புத்திசாலிகள் XYZ காலணிகளை அணிவர்' என்ற விளம்பரத்தின் மூலமாக, அந்த கம்பெனியானது, நீங்கள் XYZ காலணிகளை அணியாதவர் என்றால் நீங்கள் போதுமான அளவு புத்தி சாலி அல்ல என உங்களை முடிவு செய்ய தூண்டுகிறது. மேலே கூறப்பட்ட இரு வாக்கியங்களுமே பொது மக்களை திசைதிருப்புகிறது என்பதை நீங்களே கவனிக்கலாம். ஆகவே, நாம் பகுத்தறியும் செயல் முறையை சரியாகப் புரிந்து கொண்டால், இத்தகைய பொறிகளில் நாம் தெரியாமல் விழவேண்டியது இல்லை.

பகுத்தறிதலின் சரியான பயனானது கணித்ததின் மையத்தில் உள்ளது, அதிலும் குறிப்பாக நிருபணங்களின் அமைப்பில். 9 ஆம் வகுப்பில், நீங்கள் நிருபணம் என்ற கருத்திற்கு அறிமுகப்படுத்தப் பட்டீர்கள் மேலும் நீங்கள் பல கூற்றுகளை, குறிப்பாக வடிவியலில் நிரூபணம் செய்தீர்கள். நீருபணம் என்பது பல கணிதக் கூறுகளால் ஆனது என்பதை நினைவுகூர்க. அவற்றில் ஒவ்வொன்றும் அதற்கு முந்தய கூற்றிலிருந்தோ அல்லது முன்மைமே நிரூப்பிக்கப்பட்ட தேற்றம் அல்லது எடுகோள் அல்லது கற்பிதக்கொள்கையில் இருந்தோ, தர்க்க ரீதியாக

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிரூபிக்கப்படுகிறது. ஒரு நிரூபணத்தில் முக்கியமான கருவியானது, உயத்துணர்வு பகுத்தறிதல் முறை (deductive reasoning) ஆகும்.

கணிதக் கூற்று என்பது என்ன என்பதை ஒரு மறுபார்வை இட்டு இப்பாடப்பகுதியைத் தொடங்கலாம். பிறகு, பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு நமது உயர்த்துணர்வு பகுத்தறிதல் திறனை கூர்மையாக்கிக் கொள்ள முற்படலாம். மேலும் நாம் மறுத்தல் என்ற கருத்தையும் பார்க்கலாம். மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் மறுப்பையும் (negation) கண்டு பிடிக்கலாம். பிறகு நாம் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுக்கான மறுதலையை (converse) கண்டுபிடித்தல் என்பதன் பொருளையும் கற்கலாம். முடிவில், நாம் 9 ஆம் வகுப்பில் படித்த பல தேற்றங்களின் நிருபணங்களை அலசி ஆராய்வதின் மூலம், நிரூபணங்களின் ஆக்கக் கூறுகளை மறுபார்வை இடுவோம். இங்கு நாம் நீங்கள் 9 ஆம் வகுப்பிலே படித்த ‘முரண்பாடு மூலம் நிரூபணம் (Proof by contradiction) என்ற கருத்தையும் ஆராயலாம். இதை நீங்கள இப்புத்தகத்தின் பல பாடங்களிலும் பார்த்திருப்பீர்கள்.

A1.2 கணிதக் கூற்றுகளின் மறுபரிசீலனை

‘கூற்று’ என்பது ஆணையாகவோ ஆச்சரியமாகவோ அல்லது கேள்வியாகவோ இல்லாத பொருள் கொண்ட வாக்கியம் என்பதை நீனைவு கூர்க. எடுத்துக்காட்டுக, ‘கிரிக்கெட் உலககோப்பை இறுதியாட்டத்தில் எந்த இரு குழுக்கள் (teams) விளையாடுகின்றன?’ என்பது ஒரு கேள்வி, அது கூற்று அல்ல, ‘சென்று உனது வீட்டுப்பாடத்தை முடி’ என்பது ஒரு ஆணை, கூற்று அல்ல. ‘என்ன ஒரு அற்புதமான இலக்கு (goal)!’ என்பது ஒரு ஆச்சரியவாக்கியம், கூற்று அல்ல.

பொதுவாக, கூற்றுகள் கீழ்வரும் இவற்றில் ஏதேனும் ஒருவாரு இருக்கலாம்.

* எப்பொழுதுமே உண்மை
* எப்பொழுதுமே பொய்
* தெளிவற்றது.

மேலும், கணக்கில் ஒரு கூற்றானது எப்பொழுதும் உண்மையாகவோ அல்லது எப்பொழுதும் பொய்யாகவோ இருந்தால் மட்டுமே ஏற்றுக் கொள்ளப்படும், என்பதை நீங்கள் 9 ஆம் வகுப்பிலேயே கற்றுள்ளீர்கள். ஆகவே தெளிவற்றவை கணக்கியல் கூற்றுகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப் படாது.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நாம் புரிந்து கொண்டவற்றை சில எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு மறுபார்வையிடலாம்.

எ.கா 1: கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் உண்மையா, எப்பொழுதும் பொய்யா அல்லது தெளிவற்றவையா என கூறுக. உனது பதிலை நியாயப் படுத்துக.

1. சூரியன் பூமியைச் சுற்றுகிறது.
2. வாகனங்கள் நான்கு சக்கிரங்கள் உடையவை.
3. ஒளியின் வேகம் தோராயமாக 3×10^5km/s ஆகும்.
4. நவம்பர் முதல் மார்ச் வரையில் கல்கத்தாவிற்கு செல்லும் சாலை ஒன்று முடப்பட்டிருக்கும்.
5. எல்லா மனிதரும் இறப்புள்ளவரே.

தீர்வு :

1. இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதுமே பொய், ஏனெனில், வானவியல் வல்லுநர்கள் பூமி சூரியனைச் சுற்றுகிறது என்பதை நிலைநாட்டியுள்ளனர்.
2. இவ்வாக்கியம் தெளிவற்றது ஏனெனில், இது எப்பொழுதுமே மெய்யா அல்லது எப்பொழுதுமே பொய்யா என்று முடிவு செய்ய முடியாது, இது வாகனம் எவ்வாகையானது என்பதைப் பொருத்தது- வாகனங்கள் *2, 3, 4, 6, 10, ...* ஆகிய இன்னும் பல எண்ணிக்கையில் சக்கரங்களைக் கொண்டிருக்கலாம்.
3. இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதுமே உண்மை, இயர்பியல் நிபுணர்களால் சரிபார்க்கப்பட்டது.
4. இவ்வாக்கியம் தெளிவற்றது ஏனெனில், எந்த சாலை இங்கு கருதப்படுகிறது என்பது தெளிவாக இல்லை.
5. இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதும் உண்மை ஏனெனில், ஒவ்வொரு மனிதனும் என்றாவது ஒரு நாள் இறந்தே ஆக வேண்டும்.

எ.கா 2: கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் மெய்யா பொய்யா எனக் கூறுக மற்றும் உங்கள் விடையை நியாயப்படுத்துக.

1. எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் இருசம பக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2. சில இருசமபக்க முக்கோணங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.
3. எல்லா இருசமபக்க முக்கோணங்களும் சமபக்க முக்கோணங்களே.
4. சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும்.
5. சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் அல்ல.
6. எல்லா முழுக்களும் விகிதமுறு எண்கள் அல்ல.
7. ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே எந்த விகிதமுறு எண்ணும் இல்லை.

தீர்வு :

1. இக்கூற்று உண்மையே, ஏனெனில் சமபக்க முக்கோணங்கள் சமமான பக்கங்களைப் கொண்டவை, ஆகவே அவை இருசமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.
2. இக்கூற்று உண்மையே, ஏனெனில் அடித்தளக் கோணங்கள் 60^0 ஆக அமைந்த இருசமபக்க முக்கோணங்களாவை சமபக்க முக்கோணங்களே ஆகும்.
3. இக்கூற்று பொய்யானது, இதற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டை கொடுக்கவும்.
4. இக்கூற்று உண்மையே, ஏனெனில் விகிதமுறு எண்கள் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவம் கொண்டவை, இதில் p என்பது ஒரு முழு மற்றும் $q = 1$. இவை முழுக்களே (எடுத்துக்காட்டாக $3 = \frac{3}{1}$)
5. இக்கூற்று உண்மையே, ஏனெனில் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் உள்ள விகிதமுறு என்களில் p, q ஆகியவை முழுக்கள் மற்றும் q வானது p-ஐ வகுக்காதவை. (எடுத்துக்காட்டாக $\frac{3}{2}$).
6. இக்கூற்றானது, ‘விகிதமுறு எண் அல்லாத முழு ஒன்று உள்ளது’ என்று கூறுவதைப் போலவே பொருள்படும். இது பொய், ஏனெனில் எல்லா முழுக்களும் விகிதமுறு எண்களே ஆகும்.
7. இக்கூற்று பொய். r மற்றும் s ஆகிய இரண்டு விகிதமுறு என்களுக்கு இடையே $\frac{r+s}{2}$ என்ற விகிதமுறு எண் உள்ளது என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 3: $x < 4$ எனில், கீழ்வரும் வாக்கியங்களில் எவை உண்மை? உங்கள் விடைகளை நியாயப்படுத்து.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

தீர்வு :

(i) இக்கூற்று பொய் ஏனெனில் எடுத்துக்காட்டுக. $x = 3 < 4$, என்பது $2x > 8$ என்பதை உண்மையாக்குவதில்லை.

(ii) இக்கூற்று பொய், ஏனெனில் எடுத்துக்காட்டாக, $x = 3.5 < 4$, என்பது $2x > 6$ என்பதை உண்மையாக்குவதில்லை.

(ii) இக்கூற்று உண்மை, ஏனெனில் இது $x < 4$ என்பதற்கு சமம்.

எ.கா 4: கீழ்வரும் கூற்றுகளுக்கு தகுந்த நிபந்தனைகளைக் கொடுத்து அவற்றை உண்மையான கூற்றுகளாக மாற்றி எழுதவும்.

(i) நாற்கரம் ஒன்றின் மூலை விட்டங்கள் சமமாக இருப்பின் அது ஒரு செவ்வகம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மீதமைந்த இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

(iii) $\sqrt{p}$ என்பது எல்லா மிகை முழுவான p க்கும் விகிதமுறா எண் ஆகும்.

(iv) எல்லா இருபடிச்சமன்பாடுகளும் இரண்டு மெய்ம்மூலங்களை கொண்டுள்ளன.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு :

1. ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் எனில், அது ஒரு செவ்வகம்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

3. $\sqrt{p}$ என்பது எல்லா பகா எண்கள் p க்கும் விகிதமுறா எண் ஆகும்.

4. எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளும் அதிக பட்சமாக இரண்டு மெய்மூலங்கள் கொண்டுள்ளன.

குறிப்பு :

மேலே உள்ள கூற்றுகளை வேறுவிதமாகவும் மாற்றி எழுதலாம். எடுத்துக்கட்டாக (iii)-ஐ '$\sqrt{p}$ என்பது எல்லா மிகை முழு p க்கும் விகிதமுறா எண் ஆவது நிறைவர்க்கமாக இல்லாத பொழுது மட்டுமே' என்றும் மாற்றி எழுதலாம்.

பயிற்சி A1.1

1. கீழ்வரும் கூற்றுகள் (வாக்கியங்கள்) எப்பொழுதுமே உண்மையா, எப்பொழுதுமே பொய்யா அல்லது தெளிவற்றவையா என்று கூறுக. உங்கள் விடைகளை நியாயப் படுத்துக.
   (i) எல்லா கணித பாடப்புத்தகங்களும் சுவாரிஸ்யமானவை (ஆர்வம் தூண்டுபவை).
   (ii) பூமியில் இருந்து சூரியனின் தூரம் தோராயமாக $15 \times 10^8\ km$ ஆகும்.
   (iii) எல்லா மனிதர்களும் மூதடைவர்.
   (iv) உத்தாகாசியில் இருந்து ஹர்சில்க்கு செல்லும் பயணம் சோர்வளிப்பது ஆகும்.
   (v) அப்பெண் தொலை நோக்கியின் (Binoculars) வழியே ஒரு யானையைப் பார்த்தாள்.
2. கீழ்வருவன சரியா, தவறா என்று கூறுக. விடையை நியாயப் படுத்துக.
   (i) எல்லா அறுகோணங்களும் பலகோணமுகிகள் ஆகும்.
   (ii) சில பலகோணமுகிகள் ஐங்கோணங்களாகும்.
   (iii) எல்லா இரட்டை எண்களுமே 2 ஆல் வகுபடும் என்று சொல்ல முடியாது.
   (iv) சில மெய் எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.
   (v) எல்லா மெய்எண்களுமே விகிதமுறு எண்களாக இருக்காது.
3. a மற்றும் b என்பவை $ab \neq 0$ என்றமைந்த வகையில் உள்ள மெய் எண்கள் என்க. அப்படியெனில், கீழ்வருவன வற்றில் எக்கூற்றுகள் உண்மையானவை? விடைகளை நியாயப்படுத்து.
   (i) a மற்றும் b இவை இரண்டுமே சுழி ஆக இருக்க வேண்டும்.
   (ii) a மற்றும் b இவை இரண்டுமே சுழி அல்லாதவைகளாக இருக்க வேண்டும்.
   (iii) a மற்றும் b இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று சுழி அல்லாததாக இருக்க வேண்டும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

4. தகுந்த நிபந்தனைகளைக் கொண்டு கீழ்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாகுமாறு மாற்றி எழுதவும்.

(i) $a^2 > b^2$ எனில் $a > b$ ஆகும்.

(ii) $x^2 = y^2$ எனில் $x = y$ ஆகும்.

(iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, எனில் $x = 0$ ஆகும்.

(iv) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை மற்றொன்று இருசமக் கூறிடும் (இரு சமமாக வெட்டும்).

A1.3 உய்த்தறிவு பகுத்தறிதல்

9 ஆம் வகுப்பில் **உய்த்தறிவு பகுத்தறிதல் (deductive reasoning)** என்பதற்கு அறிமுகப்படுத்தப்பட்டீர்கள். இங்கு, நாம் பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு, உண்மை என்று நாம் ஊகிக்கும் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளில் இருந்து முடிவுகளை உய்த்துக் கொண்டு நாம் எவ்வாறு உய்த்தறிவு பகுத்தறிதலை பயன்படுத்தலாம் என்பதைக் காட்டுவோம். கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளானவை 'கற்பிதக்கொள்கை' (premises or hypothesis) எனப்படும். சில எடுத்துக்காட்டுகளுடன் தொடங்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 05 : விஜயபுர கருநாடக மாநிலத்தில் உள்ளது என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் ஷபானா விஜயபுரத்தில் வசிக்கிறாள் என்க. ஷபானா எந்த மாநிலத்தில் வசிக்கிறாள்?

தீர்வு :

இங்கு இரு கற்பிதக்கொள்கைகள் உள்ளன :

(i) விஜயபுர கருநாடக மாநிலத்தில் உள்ளது.

(ii) ஷபானா விஜயபுரத்தில் வசிக்கிறாள்.

இவ்விரு கற்பிதக் கொள்கைகளில் இருந்தும் நாம் ஷபானா கருநாடக மாநிலத்தில் வசிக்கிறாள் என்று ஊகித்து உணர்ந்து கொள்ளலாம்.

எ.கா 06: எல்லா கணிதப் பாடப் புத்தகங்களும் சுவாரிஸ்யமானவை என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் நீங்கள் ஒரு கணித பாடப்புத்தகத்தை படிக்கிறீர்கள் என்று கொள்வோம். நீங்கள் படிக்கும் பாடப்புத்தகத்தைப் பற்றி நாம் என்ன முடிவுக்கு வரலாம்?

தீர்வு :

இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட கற்பிதக் கொள்கைகளைக் கொண்டு, நீங்கள் ஒரு சுவாரிஸ்யமான பாடப்புத்தகத்தை படித்துக் கொண்டு இருக்கிரீர்கள் என்று ஊகித்து உணர்ந்து கொள்ளலாம்.

எ.கா 07: $y = -6x + 5$ என்பது கொடுப்பப்பட்டது மற்றும் $x = 3$ எனக் கொள்க. y யின் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கற்பிதக் கொள்கைகளைக் கொண்டு,

$y = -6 \times (3) + 5 = -18 + 5 = -13$ என்பதை நாம் பெறலாம்.

எ.கா 8: ABCD ஒரு இணைகரம் என்பது கொடுக்கப் பட்டுள்ளது மற்றும் AD = 5cm, AB = 7cm. BC மற்றும் DC இவற்றின் நீளங்களைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவுக்கு வர முடியும்?

படம் A 1.1

தீர்வு :

ABCD ஒரு இணைகரம் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, ஒரு இணைகரத்திற்கு பொருந்தும் எல்லா பண்புகளும் ABCD க்கும் பொருந்தும் என்று நாம் உணரலாம். அதிலும் குறிப்பாக, 'இணைகரத்தின் எதிரெதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் என்ற பண்பு இங்கு பொருந்தும். AD = 5cm என்பதைக் கொண்டு, BC = 5cm என்பதை ஊகிக்கலாம். அதேபோல, DC = 7cm என்பதையும் ஊகித்து உணரலாம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

குறிப்பு

இந்த எடுத்துக்காட்டில், கொடுக்கப்பட்ட கற்பிதக் கொள்கையில் மறைந்திருக்கும் பண்புகளை தேடிக்கண்டுபிடித்து அவற்றை எப்படி அடிக்கடி பயன்படுத்த வேண்டி இருக்கும் என்பதை நாம் பார்த்தோம்.

எ.கா09 : $\sqrt{p}$ என்பது எல்லா பகா எண் P-களுக்கும் விகிதமுறா எண் என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் 19423 ஒரு பகா எண் என்க. $\sqrt{19423}$ ஐ ப் பற்றி என்ன முடிவு செய்வாய்?

தீர்வு :

$\sqrt{19423}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்று நாம் முடிவு செய்யலாம்.

மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில், கற்பிதக் கொள்கைகள் உண்மையா இல்லையா என்பதை நாம் அறிவோம் என்பதை நீங்கள் கவனித்திருக்கலாம். நாம் அவை உண்மை என்று கருதிக்கொண்டு, பிறகு

அதைஉய்த்தறிவுபகுத்திறிதலில்பயன்படுத்துகிறோம்.எடுத்துக்காட்டாக, எடுத்துக்காட்டு *9* இல், ***19423*** என்து ஒரு பகா எண்ணா இல்லையா என்பதை நாம் சரிபார்க்கவில்லை. நமது வாதத்திற்காக வேண்டி நாம் அதை பகா எண் என்று கருதிக் கொண்டோம். கொடுக்கப்பட்ட குறிப்பிட்ட கூற்றைக்கொண்டு எவ்வாறு நாம் உய்த்தறிவு பகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி ஒரு முடிவுக்கு வருகிறோம் என்பதன் மீது மட்டுமே நாம் இப்பாடத்தில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கிறோம். இங்கு, முக்கியமாகக் கருதுவது பகுத்தறிதலின் சரியான செயல்முறை பயன்படுத்தும் விதம் மட்டுமே. மேலும் இப்பகுத்தறியும் செயல் முறையானது, கற்பிதக் கொள்கையின் உண்மையின் மீதோ, பொய்யின் மீதோ சார்ந்திருப்பது இல்லை. இவ்வாறு இருந்தபோதிலும் நாம் ஒரு விஷயத்தைத் கருத்தில் கொள்ள வேண்டியது என்ன வென்றால், தவறான (பொய்யான) கற்பிதக் கொள்கையைக் கொண்டு தொடங்குவோமேயாயின் நாம் தவறான முடிவுக்கே வருவோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி A1.2

1. எல்லா பெண்களும் இறப்பற்றவர்கள் எனக் கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் A என்பது ஒரு பெண் எனக் கொள்க. A வைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்யலாம்?

2. இரு விகிதமுறு எண்களின் பெருக்குத்தொகை ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் a மற்றும் b ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் எனக் கொள்க. ab-ஐப் பற்றி நாம் என்ன முடிவு செய்யலாம்?

3. விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவாக்கமானது முடிவற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றும் $\sqrt{17}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக் கொள்க. $\sqrt{17}$ இன் தசம விரிவாக்கத்தைப்பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்ய முடியும்?

4. $y = x^2 + 6$ மற்றும் $x = -1$ எனக் கொடுத்தால், y இன் மதிப்பைப் பற்றி என்ன முடிவு செய்வாய்?

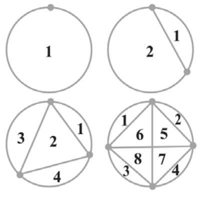
5. ABCD ஒரு இணைகரம் என்று கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle B = 80^0$ இணைகரத்தின் மற்ற கோணங்களைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்வீர்கள்?

6. PQRS என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம் மற்றும் அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை மற்றொன்று இருசமமாக வெட்டும். நாற்கரத்தைப்பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவுக்கு வரமுடியும்?

7. $\sqrt{p}$ என்பது எல்லா பகா எண்கள் p க்கும் விகுதமுறா எண் ஆகும் எனக் கொடுக்கப்படுள்ளது மற்றும் 3721 என்பது ஒரு பகா எண் எனக் கொள்க. $\sqrt{3721}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்று உன்னால் முடிவு செய்ய முடியுமா? உனது முடிவு சரியானது தானா? ஏன் அல்லது ஏனில்லை?

A1.4 அனுமானங்கள், தேற்றங்கள், நிருணங்கள் மற்றும் கணிதவியல் பகுத்தறிதல்.

படம் A 1.2 ஐக் கருதுக. முதல் வட்டத்தின் மீது ஒரு புள்ளியும், இரண்டாம் வட்டத்தின் மீது 2 புள்ளிகள், மூன்றாவதன் மீது 3 புள்ளிகள் இதுபோல பல உள்ளன. புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகளின் அனைத்து ச ாத்தியக் கூறுகளும் வெவ்வொன்றிலும் வரையப் பட்டுள்ளன.



படம் A 1.2

கோடுகள் வட்டத்தை வெவ்வேறான அதாவது ஒன்றைஒன்று விலக்கும் (mutually exclusive) பகுதிகளாகப் (பொதுவானவைகளாக எந்த பகுதியும் இல்லாதவாறு) பிரிக்கின்றன. இவற்றை நாம் எண்ணி கீழ்வருவாரு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	பகுதிகளின் எண்ணிக்கை
1	1
2	2
3	5
4	8
5	
6	
7	

புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு, பகுதிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடிக்கும் சூத்திரத்தைக் கூட உங்களில் சிலர் கண்டுபிடிக்கலாம். இவ்வகையான அறிவுபூர்வமான ஊகமே 'அனுமானம்' (Conjecture) எனப்படும் என்பதை 9 வகுப்பில் இருந்து நினைவுகூர்க.

ஒரு வட்டத்தின் மீது n புள்ளிகள் இருப்பின், அப்புள்ளிகளை எல்லா ச ாத்தியமான கோடுகளாலும் இணைப்பதால், 2^{n-1} ஒன்றை ஒன்று விலக்கும்

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பகுதிகள் கிடைக்கும் என்பதே உங்களது ‘அனுமானம்’ என்க. இது மிகச் சரியான பொருள்படும் ஊகமாகத் தோன்றுகிறது. இதை n = 5 எனக் கொண்டு 16 பகுதிகள் கிடைப்பதை வைத்து சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம். 5 புள்ளிகளைக் கொண்டு சூத்திரத்தைக் சரிபார்த்த பிறகு, n புள்ளிகளுக்கு 2^{n-1} பகுதிகள் கிடைக்கும் என்று திருப்தி அடைகிறாயா?திருப்தி அடைகிறாய் என்றால், யாரேனும் n = 25 க்கு இது பொருந்துமா என்று உன்னைக் கேட்டால் நீ என்ன பதில் சொல்வாய்? இத்தகைய கேள்விகளுக்கு பதில் சொல்ல உனக்கு, சந்தேகத்திற்கு இடமில்லாமல் இந்த முடிவு சரியே என்று காட்டும் அளவிற்கு ஒரு நிரூபணம் தேவை அல்லது n இன் ஏதோ ஒரு மதிப்பிற்கு இம்முடிவு தோல்வியடைகிறது என்பதைக் காட்ட ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டு தேவை. உண்மையில், நீ பொறுமையுடன் செய்து பாத்துக்கொண்தே வந்தால், n = 6 க்கு 31 பகுதிகளும், n = 7 க்கு 57 பகுதிகளும் வருகின்றன என்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகவே, n = 6 என்பதை மேற்கூறிய ஆனுமானத்திற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டாகும். நாம் 9 வகுப்பில் **‘கூற்றை பொய்யாக நிருபிக்க, ஒரே ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டே போதுமானது’** என்று கற்றதை நினைவு கூர்க.

n = 1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய வற்றிக்கான பகுதிகளின் எண்ணிக்கைகளை சரிபார்த்த பிறகும் நாம் நிரூபணத்தை வற்புறுத்திக் கொண்டே இருக்கிறோம். என்பதை நீங்கள் கவனித்திருக்கலாம். இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை கருதுவோம். பின் வரும் முடிவினை நீங்கள் நன்கு அறிவீர்கள் (பாடம் 1-இல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது)

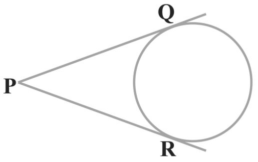
$$1+2+3+........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

இது செல்லுபடி ஆகிறது என்பதை நிலைநிறுத்த n = 1, 2, 3 இன்னும் பல வற்றை மட்டும் சரிபார்த்தல் போதுமானது அல்ல. ஏனேனில், (மேலே உள்ள எடுத்துக்காடில், முடிவு n = 6 என்பதற்கு தோல்வி அடைந்ததைப் போல) n இன் ஏதோ ஒரு மதிப்பிற்கு இந்த முடிவு பொய்யாக்கப்படலாம். ஆகவே நமக்கு தேவையானது என்னவென்றால், சந்தேகத்திற்கு இடமில்லாமல் அதன் உண்மையை நிலைநாட்டும் ஒரு நிரூபணமே. இதற்கான நிரூபணத்தை மேல் வகுப்புகளில் கற்பீர்கள்.

இனி படம் A 1.3 ஐக் கருதுக. இதில் PQ மற்றும் PR ஆகியவை புள்ளி P யில் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நீங்கள் (தேற்றம் 10.2) PQ=PR என்பதை முன்னமே நிரூபித்திருக்கிறீர்கள். நீங்கள் இத்தகைய பல படங்களை வரைந்து கொடுகோடுகளின் அளவுகளை அளந்து பார்த்து ஒவ்வொரு முறையும் முடிவு சரியே என்று பார்த்து அத்துடன் திருப்தி அடையவில்லை.



படம் **A 1.3**

நிரூபணத்தில் என்ன அடங்கி இருந்தது என்பது நினைவிருக்கிறதா? அதில் (**செல்லு படி ஆகும் வாதங்கள்** என்றழைக்கப்படும்) தொடர்ச்சியான கூற்றுகள் இருந்தன. ஒவ்வொரு கூற்றுகளும், அதற்கு முன்னே உள்ள நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றிலிருந்தோ, முன்னமை தெரிந்த முடிவுகளில் இருந்தோ (தற்போது நிரூபிக்கப்படுவது அல்லாமல்) எடுகோளில் இருந்தோ, வரையறைகளில் இருந்தோ, அல்லது நீங்கள் ஏற்கனவே கொண்டிருந்த ஊகங்களைக் கொண்டோ நிரூபிக்கப்பட்டவை. அதன்பிறகே, நீங்கள் உங்கள் நிரூபணத்தை PQ = PR என்ற வாக்கியத்துடன் முடித்தீர்கள். அதாவது எதை நிரூபிக்கவேண்டுமோ அதை கடைசியில் எழுதினீர்கள். எந்த ஒரு நிரூபணமும் இவ்வாறே அமைக்கப்படுகிறது.

இனி நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் மற்றும் தேற்றங்களையும் மற்றும் அவற்றின் நிரூபணங்களையும் ஆராய்வோம். நீருபணங்கள் எவ்வாறு அமைக்கப்படுகின்றன என்பதை நன்கு புரிந்து கொள்ள இது உதவும்.

'நேரடி அல்லது உய்வு' முறை நிரூபணங்களில் இருந்து நாம் தொடங்குவோம். இம்முறையில், நாம் பல கூற்றுகளை கூறுகிறோம். ஒவ்வென்றும் அதன் **முந்தைய கூற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும்.** ஒவ்வொரு கூற்றும் தர்க்க ரீதியாக சரியாயின் (அதாவது செல்லுபடி ஆகும் வாதம் எனில்), அது தர்க்கரீதியாய் சரியான விடைக்கே (முடிவுக்கே) சென்றடையும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 10: இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணே.

தீர்வு

வரிசை எண்	கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்புகள்
1.	x மற்றும் y என்பன விகிதமுறு எண்கள் என்க	முடிவானது விகிதமுறு எண்களைப் பற்றியது என்பதால், x மற்றும் y விகிதமுறு எண்களுடன் தொடங்கலாம்.
2.	$x=\frac{m}{n}$, இதில் $n \neq 0$ மற்றும் $y=\frac{p}{q}$ இதில் $q \neq 0$ என்க. இதில் m, n, p, q ஆகியன முழுக்கள்.	விகிதமுறு எண்களின் வரையறைகளை இடுதல்.
3.	$\therefore\ x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	முடிவானது, விகிதமுறு எண்களின் கூடுதலைப் பற்றியது, எனவே நாம் $x+y$ யை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.
4.	முழுக்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி, $mq+np$ மற்றும் nq ஆகியன முழுக்கள் எனக் காண்கிறோம்.	முழுக்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.
5	$n \neq 0$ மற்றும் $q \neq 0$ என்பதால், $nq \neq 0$ என்பது தொடர்கிறது.	முழுக்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.
6	ஆகவே, $x+y=\frac{mq+np}{nq}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.	விகிதமுறு எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

குறிப்பு : நிரூபணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கூற்றுமே முன்னமே நிலைநிறுத்தப்பட்ட உண்மை அல்லது வரையறையை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் கவனி.

எ.கா 11 : 3 ஐ விடப் பெரிய ஒவ்வொரு பகாஎண்ணும் 6k + 1 அல்லது 6k + 5 என்ற வடிவில் உள்ளது. இதில் k என்பது ஒரு முழு.

தீர்வு

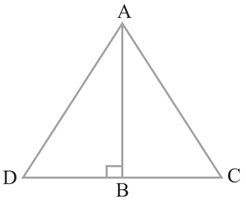
வரிசை எண்	கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்புகள்
1.	*p* என்பது 3 ஐவிடப் பெரிய பகா எண் என்க.	முடிவானது, 3-ஐ விடப் பெரியதொரு பகா எண்-ஐப் பற்றியது என்பதால், இத்தகையதொரு எண்ணுடன் தொடங்கலாம்.
2.	*p*-ஐ 6 ஆல் வகுத்தால், *p* ஆனது 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, ஆகிய வடிவத்தில் உள்ளது. இதில் k என்பது ஒரு முழு.	யூக்ளிட்-இன் வகுத்தல் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி.
3.	ஆனால், 6k = 2(3k), 6k + 2 = (3k+1), 6k + 4 = 2(3k + 2) மற்றும் 6k + 3 = 3(2k + 1) ஆகவே, இவை பகா எண்கள் அல்ல.	*p* என்பது பகா எண் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், நாம் மீதிகளை ஆராய்வோம்.
4.	ஆகவே *p* என்பது 6k + 1 அல்லது 6k + 5 ஆகிய வடிவத்தில் மட்டுமே இருப்பது சாத்தியப் படும், இதில் k என்து ஒரு முழு எண்.	மற்ற தேர்வுகளை எல்லாம் நீக்கிவிட்டு இந்த முடிவிற்கு நாம் வருகிறோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

குறிப்பு : மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டில் பல்வேறு தேர்வுகளை (options) நீக்குவதன் மூலம் நாம் தேவையான முடிவுக்கு வந்தோம். இந்த முறையை சிலசமயம் 'நீக்குதல் முறை நிரூபணம்' (Proof by Exhaustion) என்பர்.

தேற்றம் A1.1 (பிதகோரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்கங்களின் கூடுதலுக்கு சமமாக இருப்பின், முதல் பக்கத்திற்கு எதிரமைந்த கோணம் ஒரு செங்கோணம் ஆகும்.



வரிசை எண்	கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்புகள்
1.	Δ ABC யானது, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ என்ற கற்பிதன் கொள்கையை நிறைவு செய்வதாக இருக்கட்டும்.	இத்தகையதொரு முக்கோணத்தைப் பற்றிய கூற்றை நாம் நிரூபிக்க வேண்டும் என்பதால், இந்த முக்கோணத்தை நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.
2	BD = BC என்றமைந்த வகையில், AB க்கு செங்குத்தாக BD யை வரையவும். பிறகு A வை D யுடன் இணைக்கவும்.	இது நாம் தேற்றங்களை நிரூபிக்க முற்படும்போது எடுக்கும் உள்ளுணர்வு அடி ஆகும்.
3.	அமைப்பின் படி, Δ ABD ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். மேலும் பிதகோரஸ் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தி $AD^2 = AB^2 + BD^2$	முன்னமே நிரூபிக்கப் பட்ட பிதகோரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவோம்.
4.	அமைப்பில் இருந்து, BD = BC ஆகவே $AD^2 = AB^2 + BC^2$	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு
5.	ஆகவே, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ஊகம் மற்றும் முந்தய கூற்றைக் கொண்டு.
6.	AC மற்றுAD ஆகியன மிகை எண்கள் ஆதலால், AC = AD	எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைக் கொண்டு.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.	AC = AD என்பதைக் காட்டினோம். மேலும் அமைப்பினால் BC = BD மேலும் AB யானது பொது. ஆகவே SSS நிபந்தனையின் படி Δ ABC $\cong$ Δ ABD	முன்பே அறிந்தே தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி.
8.	Δ ABC $\cong$ Δ ABD ஆகையால், $\angle ABC = \angle ABD = 90^0$ ஒரு செங்கோணம்.	முன்னமே நிலை நிறுத்தப்பட்ட உண்மையை சார்ந்த தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு.

குறிப்பு : மேலேகூறப்பட்ட ஒவ்வொரு முடிவுகளும், ஒன்றோடு ஒன்று இணைந்து, தொடர்ச்சியானபடிநிலைகளைக்கொண்டுநிரூபிக்கப்படுகிறது. அவற்றின் வரிசையானது மிக முக்கியம். நிரூபணத்தில் ஒவ்வொரு படிநிலையும், அதற்கு முந்தைய படிநிலையை தொடர்ந்தே வரும் மற்றும் தெரிந்த முடிவுகளைக் கொண்டும் வரும் (தேற்றம் 2.9 ஐப் பார்)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1.3

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கேள்வியிலும் நாம் உங்களை ஒரு கூற்றை நிரூபிக்கச் சொல்கிறோம். ஒவ்வொரு நிரூபணத்திலும் உள்ள அனைத்து படிகளையும் வரிசைப் படுத்துக மற்றும் அவற்றில் ஒவ்வொன்றிற்கும் காரணத்தைக் கூறுக.

1. இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் *4* ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.
2. இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களை எடுத்துக்கொள். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுடன் *6*-ஐக் கூட்டுக. கிடைத்த புதிய எண் *8*-ஆல் எப்பொழுதுமே வகுபடும் என நிரூபி.
3. $p \geq 5$ என்பது ஒரு பகா எண் எனில், $p^2 + 2$ என்பது *3* ஆல் வகுபடும் எனகாட்டு. (குறிப்பு : எடுத்துக்காட்டு *11*ஐப் பயன்படுத்து)
4. x மற்றும் y விகிதமுறு எண்கள் என்க. xy என்பது விகிதமுறு எண் எனக்காட்டு.

5. a மற்றும் b ஆகியவை, மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r, o \leq r < b$ என்பது உனக்குத் தெரியும். இதில் q என்பது முழு எண், HCF (a, b) = HCF (b, r) என நிருபி.

6. முக்கோணம் ABC யில், பக்கம் BC க்கு இணையான கோடு, AB மற்றும் AC ஆகியவற்றை D மற்றும் E என்ற புள்ளிகளில் முறையே வெட்டுகிறது. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ என நிருபி.

A1.5 கூற்றின் மறுப்புக் கூற்று (Negation of a Statement)

இப்பாடப்பகுதியில் கூற்றின் 'மறுப்புக்கூற்று' என்றால் என்ன என்பதைப் பற்றி பார்ப்போம். அதைத் தொடங்குவதற்கு முன்பாக, சில குறியீடுகளை நாம் அறிமுகப் படுத்துவோம். இக்குறியீடுகளானவை, கருத்துக்களை நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கு உதவும். முதலில், நாம் ஒரு கூற்றை ஒரு தனி அலகாகப் பார்ப்போம். அதற்கு ஒரு பெயரை இடுவோம். எடுத்துக்காட்டாக. 'செப்டெம்பர் 1 - 2005 அன்று தில்லியில் மழைபெய்தது' என்ற வாக்கியத்தை p எனக்குறிப்போம். இதையே

p : 1- செப்டெம்பர் - 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்தது, என எழுதலாம். அதேபோல

q : எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள்.

r : மைக் என்பவரின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது.

s : $2 + 2 = 4$

t : Δ ABC சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

இக்குறியீடுகள் இப்போது நமக்கு வாக்கியங்களின் பண்புகளை ஆராய்வதில் உதவும். மேலும் அவற்றை எவ்வாறு இணைப்பது என்பதிலும் உதவும். முதலில் நாம் 'சரளமான' வாக்கியங்களுக்கு செயல்படுவோம். பிறகு 'கலவை' வாக்கியங்களுக்கு செல்லலாம். கீழ்வரும் அட்டவணையில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியங்களில் இருந்து புதிய வாக்கியங்களை அமைக்கலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

முதலில் கூறிய கூற்று/வாக்கியம்	புதிய வாக்கியம்
p: 1-செப்டெம்பர் 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்தது.	~ *p*: 1 தில்லியில் 1-செப்டெம்பர் 2005 இல் மழைபெய்தது என்பது தவறு.
q : எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள்	~ *q*: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள் என்பது தவறு.
r : மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது.	~ *r*: மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது என்பது தவறு.
s : 2 + 2 = 4	~ *s*: 2 + 2 = 4 என்பது தவறு.
t : Δ ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.	~ *t*: Δ ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என்பது தவறு.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அட்டவணையில் ஒவ்வொரு முதலில் கூறிய கூற்றிக்கு ஒத்த புதிய வாக்கியம், முதலில் கூறிய கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றாகும். அதாவது ~*p*, ~*q*, ~*r*, ~*s*, ~*t* ஆகியவை கூற்றுகள் *p, q, r, s, t* முறையே இவற்றின் மறுப்புக் கூற்றுகள் ஆகும். ~*p* கூற்றானது, கூற்று *p* என்ன வலியுறுத்துகிறதோ அதையே எதிர்க்கிறது. இங்கு ~*p* என்பதை '*p* க்கு எதிர்மறை' (not *p*) என்று படிக்க வேண்டும். அன்றாட வாழ்வில் நாம் பொதுப் படையாப் பேசும் போது, ~*p* என்பது, '1 செப்டெம்பர் 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்யவில்லை.' என்று பொருள் படுகிறது என்பதைக் கவனி. ஆகையால் நாம் இதில் மிகுந்த கவனம் செலுத்த வேண்டும். ஒரு கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றை பெற நாம், தகுந்த இடத்தில் இல்லை என்ற வாத்தையை பொறுத்தினால் போதும் என்று நினைக்கலாம். வாக்கியம் *p* யில் இது செல்லுபடி ஆகும். ஆனால், 'எல்லா' என்று தொடங்கும் வாக்கியங்களுக்கு இது செல்லுபடி ஆவது கடினம். *q* -வைக் கருதுக. *q*: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள். இதன் மறுப்புக் கூற்று ~*q* : எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள் என்பது தவறு. இக்கூற்று 'சில ஆண் ஆசிரியர்களும் இருக்கிறார்கள்' என்று பொருள் படும். இப்பொழுது 'இல்லை' என்ற வார்த்தையை *q* வில் பொருத்திப் பார்க்கலாம். அல்லது 'எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்களாக இருப்பதில்லை' போன்ற பல கூற்றுகள் நமக்குக் கிடைக்கலாம்.

முதலில் உள்ள வாக்கியம் குழப்புவதாக உள்ளது. (எல்லா என்ற வார்த்தை மீது மட்டும் கவனம் செலுத்துவோமாயின்) அது எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் என்று கூட பொருள்படலாம். அதனால் நாம் எதிர்மறையான 'மறுப்பு கூற்றை' எழுதும் போது மிகவும் கவனமாக இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, சரியான மறுப்பு கூற்று எது என்று எவ்வாறு முடிவு எவ்வாறு முடிவு செய்வது? கீழ்வரும் நிபந்தனையை நாம் பயன்படுத்துவோம்.

p என்பது கூற்று என்க மற்றும் $\sim p$ என்பது அதன் மறுப்புக் கூற்று என்க. இப்படியிருப்பின் p உண்மையாக இருக்கும் போது $\sim p$ என்பது பொய் ஆகும். மற்றும் p பொய்யாக இருக்கும் போது $\sim p$ உண்மையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்கட்டாக, மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது என்பது உண்மை எனில் மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை என்பது பொய். மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் உள்ளது என்பது பொய் எனில் மைக்கின் நாய்க்கு கருபபு வால் இல்லை என்பது உண்மை.

இதேபோல், s மற்றும் t ஆகிய கூற்றுகளின் மறுப்புக் கூற்றுகள் ஆனவை.

$s : 2 + 2 = 4$ மறுப்பு கூற்று, $\sim s : 2 + 2 \neq 4$

t : ΔABC சமபக்க முக்கோணம்; இதன் மறுப்புக்கூற்று, $\sim t$: Δ ABC சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

இனி $\sim(\sim s)$ என்வாக இருக்கும்? அது $2 + 2 = 4$ ஆகும். அதாவது s மேலும் $\sim(\sim t)$ என்னவாக இருக்கும்? அது Δ ABC சமபக்க முக்கோணம்' ஆகும். அதாவது, p என்ற எந்த ஒரு கூற்றுக்கும், $\sim(\sim p)$ என்பது p ஆகும்.

எ.கா 12 கீழ்வரும் வாக்கியங்களுக்கு மறுப்புக் கூற்றுகளை எழுதுக.

i) மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை.

ii) எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள்.

iii) $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண்.

iv) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும்.

v) எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் இல்லை.

vi) சில குதிரைகள் ப்ரைஎன் வண்ணம் இல்லை.

vii) $x^2 = -1$ என்ற வகையில் x என்ற மெய் எண் எதுவும் இல்லை.

தீர்வு :

i) மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை என்பது தவறு. அதாவது மைக்கின் நாய்க்கு கருப்புவால் உண்டு.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ii) எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள் என்பது தவறு, அதாவது, சில (குறைந்தது ஒரு) விகிதமுறா எண்கள் மெய் எண்கள் இல்லை. இதையே 'எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள் அல்ல' என்றும் கூறலாம்.

iii) $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்பது தவறு, அதாவது, $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் அல்ல.

iv) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும் என்பது தவறு அதாவது, எந்த விகிதமுறு எண்ணுமே முழுக்கள் அல்ல.

v) எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது, எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள்.

vi) சில குதிரைகள் ப்ரௌன் வண்ணம் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது, எல்லா குதிரைகளும் ப்ரௌன் வண்ணம் கொண்டவை.

vii) $x^2 = 1$ என்ற வகையில் x என்ற மெய் எண் எதுவும் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது, $x^2 = -1$ என்ற வகையில் குறைந்தது x என்ற ஒரு மெய் எண்ணாவது இருக்கிறது.

குறிப்பு : ஒரு கூற்றின் **மறுப்புக் கூற்றை (Working rule)** எழுதும் போது, கீழ்வரும் சில நடை முறை விதிகளை பின்பற்றலாம்

i) முதலில் 'இல்லை/அல்ல' என்ற வார்த்தையுடன் கூற்றை எழுதுக.

ii) இதில் குழப்பம் ஏதேனும் இருப்பின், தகுந்த மாற்றங்களை செய்க, (அதிலும் குறிப்பாக, 'எல்லா' அல்லது 'சில' போன்றவை உள்ள வாக்கியங்களில்).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1.4

1. கீழ்வரும் கூற்றுகளுக்கான மறுப்புக் கூற்றுகளை எழுதுக.

   (i) மனிதன் இறப்புள்ளவன்.

   (ii) நேர்கோடு l நேர்கோடு m இற்கு இணை.

   (iii) இப்பாடம் பல பயிற்சிகளை உடையது.

   (iv) எல்லா முழுக்களும் விகிதமுறு எண்கள்.

   (v) சில பகா எண்கள் ஒற்றை எண்கள்.

   (vi) எந்த மாணவனும் சோம்பேறி அல்ல.

   (vii) சில பூனைகள் கருபபு அல்ல.

   (viii) $\sqrt{x} = -1$ என்ற வகையில் x என்ற எந்த மெய் எண்ணும் இல்லை.

(ix) a என்ற மிகை முழுவை 2 வகுக்கிறது.

(x) a மற்றும் b ஆகிய முழுக்கள் (1-ஐத் தவிர வேறு எந்த) பொதுக்காரணி (யும்) அற்றவை co pirme.

2. கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கேள்வியிலும் இரண்டு வாக்கியங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டாவது வாக்கியங்கள் முதல் வாக்கியத்தின் மறுப்புக் கூற்றா இல்லையா என்று கூறுக.

(i) மும்தாஜூக்கு பசிக்கிறது
மும்தாஜூக்கு பசிக்கவில்லை.

(ii) சில பூனைகள் கருப்பாக உள்ளன.
சில பூனைகள் ப்ரௌன் ஆக உள்ளன.

(iii) எல்லா யானைகளும் பெரிய உருவம் உள்ளவை.
ஒரு யானை பெரிய உருவம் இல்லாதது.

(iv) எல்லா தீயணைப்பு வண்டிகளும் சிகப்பு.
எல்லா தீயணைப்பு வண்டிகளும் சிகப்பு அல்ல.

(v) எந்த மனிதனும் பசு அல்ல.
சில மனிதர்கள் பசுக்கள்.

A1.6 ஒரு கூற்றின் மறுதலை (Converse of a Statement)

ஒரு கூற்றின் மறுதலை என்ற கருத்தை நாம் இனி துப்பறியலாம். இதற்கு நமக்கு 'கலவை' வாக்கியம் என்ற கருத்து தேவைப்படுகிறது, அதாவது, ஒன்றோ அல்லது அதைவிட அதிகமாக 'சரளமான' வாக்கியங்களின் கலவையான வாக்கியம். கலவை வாக்கியங்களை உண்டாக்கு வதற்கு பல வழிகள் உள்ளன. ஆனால் நாம் இங்கு, 'எனில்' மற்றும் 'ஆகும்' என்ற இரு வார்த்தைகளைக் கொண்டு இரு சரளமான வாக்கியங்களை இணைப்பதன் மூலம் உருவாகும் கலவை வாக்கியங்களை மட்டும் கவனிப்போம். எடுத்துக் காட்டாக, 'மழை பெய்கிறது எனில், சைக்கிள் மீது செல்வது கடினம் ஆகும்' என்ற வாக்கியம் இரண்டு வாக்கியங்களால் ஆனது :

p : மழை பெய்கிறது.

q : கைக்கிள் மீது செல்லவது கடினம்.

முந்தைய குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி, நாம் p, எனில் q, ஆகும். என்று கூறலாம். 'p யானது q வை உணர்த்துகிறது (p implies q)' என்றும் கூறலாம் மற்றும் இதை $p \Rightarrow q$ என்னும் குறிக்கிறோம்.

இனி, 'நீர்த்தொட்டி கருப்பு நிறம் எனில் அதில் குடிநீர் உள்ளது' என்ற வாக்கியத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $p \Rightarrow q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இதில் p என்பது கற்பிதக் கொள்கை (நீர்த்தொட்டி கருப்பு நிறம்) மற்றும் q என்பது முடிவு (அதில் குடிநீர் உள்ளது). கற்பிதக் கொள்கையையும் முடிவையும் இடம் மாற்றி எழுதினால் என்ன கிடைக்கும்? $q \Rightarrow p$ என்பது கிடைக்கும் அதாவது, தொட்டியில் உள்ளது குடிநீர் எனில், தொட்டி கருப்பு நிறத்தில் இருக்க வேண்டும். இந்த வாக்கியமே, $p \Rightarrow q$ என்ற வாக்கியத்தின் **மறுதலைக் கூற்றாகும்.**

பொதுவாக, $p \Rightarrow q$ என்ற கூற்றின் **மறுதலையானது** $q \Rightarrow p$ என்பதாகும். இதில் p மற்றும் q ஆகியன கூற்றுகள் ஆகும். $p \Rightarrow q$ மற்றும் $q \Rightarrow p$ என்பன ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலைகள் ஆகும்.

எ.கா 13: கீழ்வரும் வாக்கியங்களின் மறுதலைக்கூற்றுகளை எழுதுக.

1. ஜமிலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள் எனில், ஆகஸ்டு 17 ஞாயிற்றுகிழமையில் வருகிறது.
2. ஆகஸ்டு 17 ஞாயிறு எனில் ஜமீலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள்.
3. பாலீன் கோபப்படுகிறாள் எனில் அவனது முகம் சிவக்கிறது.
4. ஒருவரிடம் கல்வியியலில் பட்டம் (degree) இருப்பின், அவள் கல்விகற்பிக்க அனுமதிக்கப்படுகிறார்.
5. ஒருவருக்கு வைரல் நோய் (viral infection) இருக்கிறது எனில் அவருக்கு காய்ச்சல் இருக்கிறது.
6. அகமது மும்பையில் இருக்கிறார் எனில் அவர் இந்தியாவில் இருக்கிறார்.
7. ΔABC சமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் எல்லா உட்கோணங்களும் சமம்.
8. x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $x-$ இன் தசம விரிவாக்கமானது முடிவற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது.
9. x - a என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் காரணி எனில் $p(a) = 0$ ஆகும்.

தீர்வு :

மேலே கூறப்பட்ட ஒவ்வொரு கூற்றும் $p \Rightarrow q$ என்றவாறு உள்ளன. ஆகவே, மறுதலையைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு, முதலில் p மற்றும் q ஆகியவற்றை அடையாளங்களை கண்டு, பிறகு $q \Rightarrow p$ என்று எழுத வேண்டும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

i) p: ஜமீலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள். மற்றும் q : 17 ஆகஸ்டு ஒரு ஞயிற்றுக்கிழமையில் வருகிறது.

ஆகவே, மறுதலையானவை : 17 ஆகஸ்டு ஞயிற்றுக்கிழமை எனில், ஜமீலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள்.

ii) இது கூற்று (i) இன் மறுதலை ஆகவே, அதன் மறுதலையானது மேலே கண்ட (i) ஆகும்.

iii) பாலீனின் முகம் சிவந்தால் அவள் கோபத்துடன் இருக்கிறாள்.

iv) ஒருவர் கற்பிக்க அனுமதிக்கப் படுகிறார் எனில் அவரிடம் கல்வியியலில் பட்டம் உள்ளது.

v) ஒருவருக்கு காய்ச்சல் இருக்கிறது எனில் அவருக்கு வைரல் நோய் இருக்கிறது.

vi) அகமது இந்தியாவில் இருக்கிறார் எனில் அவர் மும்மையில் இருக்கிறார்.

vii) ΔABC யின் எல்லா உட்கோணங்களும் சமம் எனில் அது சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

viii) x இன் தசம விரிவாக்கம் முடிவற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது எனில் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

ix) $p(a) = 0$, எனில், $(x - a)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் காரணி ஆகும்.

மேற்கூறிய ஒவ்வொரு கூற்றுகளுக்கும் அவற்றின் மறுதலையை, அவை உண்மையா பொய்யா என்று பார்க்காமலேயே நாம் எழுதி வருகிறோம் என்பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துக் காட்டாக, கீழ்வரும் வாக்கியத்தை கவனி : அகமது மும்மையில் இருக்கிறார் எனில், அவர் இந்தியாவில் இருக்கிறார் எனில் அவர் மும்மையில் இருக்கிறார்.இது எப்பொழுதுமே உண்மையாக இருக்க வேண்டியது அவசியம் இல்லை. அவர் இந்தியாவின் எப்பகுதியில் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

கணிதத்தில், குறிப்பாக வடிவியலில், $p \Rightarrow q$ என்பது உண்மையாகவும் அதன் மறுதலையான $q \Rightarrow p$ என்பதும் உண்மையா இல்லையா என்று முடிவு செய்ய வேண்டிய பல சந்தர்பங்களை எதிர் கொள்வீர்கள்.

எ.கா 14: கீழ்வரும் வாக்கியங்களின் மறுதலைகளை எழுதுக. ஒவ்வொன்றின் மறுதலையும் உண்மையா பொய்யா என்று முடிவு செய்யுங்கள்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

i) n என்பது இரட்டை முழு எனில், $2n + 1$ என்பது ஒரு ஒற்றை முழு எண் ஆகும்.

ii) ஒரு மெய் எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுள்ளது எனில் அந்த எண் விகிதமுறு எண் ஆகும்.

iii) இரு இணை கோடுகளை ஒரு ஊடுறுவி (transversal) வெட்டுகிறது எனில், ஒவ்வொரு ஜோடி ஒத்த கோணங்களும் சமம்.

iv) ஒரு நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்பக்கங்களும் சமமாக இருப்பின், அந்த நாற்கரமானது ஒரு இணைகரம் ஆகும்.

v) இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம் எனில், அவற்றின் ஒத்த கோணங்களும் சமம்.

தீர்வு :

i) மறுதலைக் கூற்று, '$2n$ +1 என்பது ஒற்றை முழு எனில் n என்பது ஒரு இரட்டை முழு எண் ஆகும்' என்பது ஒரு தவறான கூற்றாகும். (எடுத்துக் காட்டாக, 15=2(7)+1 மற்றும் 7 என்பது ஒற்றை எண்)

ii) 'ஒரு மெய் எண்ணானது விகிதமுறு எண் எனில் அதன் தசம விரிவாக்கம் முடிவு கொண்டது' என்பதே மறுதலையாகும். இது தவரான கூற்றாகும். ஏனெனில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணானது, முடிவற்ற திரும்ப திரும்ப வரும் தசம வரிவாக்கத்தை கொண்டதாகவும் இருக்கலாம்.

iii) 'ஒரு ஊடுறுவி இரு கோடுகளை, ஒவ்வொரு ஜோடி ஒத்த கோணங்களும் சமமாக இருக்கும் வகையில் வெட்டுமே யாயின், அவ்விறு கோடுகளும் இணை கோடுகள் ஆகும்' என்பதே மறுதலை ஆகும். 9 ஆம் வகுப்பு பாடப்புத்தகத்தில், எடுகோள் 3.4 இன்படி, இக்கூற்று உண்மையே என்று ஊகித்துள்ளோம்.

iv) 'ஒரு நாற்கரமானது இணைகரம் எனில், ஒவ்வொறு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம், என்பதே மறுதலையாகும். இது உண்மையான கூற்றாகும் (தேற்றம் 7.1 வகுப்பு 9).

v) இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அவை ச ர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும்' என்பதே மறுதலையாகும். இக்கூற்று பொய்யானது. இதற்கான தக்க எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டை நீங்களே கண்டு பிடியுங்கள்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1.5

1. கீழ்வரும் கூற்றுகளின் மறுதலையை எழுதுக.
   (i) டோக்யோ வில் வெப்பம் அதிகமாக இருந்தால் ஷரண் அதிகமாக வியர்வை விடுவான்.
   (ii) ஷாலினிக்கு பசித்தால் அவள் வயிறு முணுமுணுக்கும்.
   (iii) ஜஸ்வன்த்திற்கு உதவித்தொகை கிடைக்குமேயாயின் அவள் பட்டம் பெறலாம்.
   (iv) ஒரு செடியில் மலர்கள் உள்ளன என்றால், அது உயிருடன் உள்ளது என்று பொருள்.
   (v) ஒரு விலங்கு பூனையாக இருக்க மேயாயின், அதற்கு வால் உண்டு.

2. பின் வரும் கூற்றுகளின் மறுதலைகளை எழுதுக. மேலும் அவை ஒவ்வொன்றிலும் மறுதலையானது உண்மையா பொய்யா என்று முடிவு செய்க.
   (i) ΔABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் அடித்தளக் கோணங்கள் சமம்.
   (ii) ஒரு முழுவானது ஒற்றை எண்ணாக இருந்தால், அதன் வர்க்கமானது ஒரு ஒற்றை முழு ஆகும்.
   (iii) $x^2 = 1$ எனில் $x = 1$
   (iv) ABCD என்பது இணைகரம் எனில், AC மற்றும் BD, ஒன்றை மற்றொன்று இருசமக் கூறிடும்.
   (v) a, b, c என்பன முழு எண்கள் (whole numbers) எனில், $a + (b + c) = (a + b) + c$ ஆகும்
   (vi) x மற்றும் y இரு ஒற்றை எண்கள் எனில், $x + y$ என்பது ஒரு இரட்டை எண் ஆகும்.
   (vii) ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருப்பின், அது ஒரு செவ்வகம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.7 முரண்பாடால் நிரூபணம் (Proof by Contradiction)

இது வரையில், நமது எல்லா எடுத்துக்காட்டுகளிலும் நாம், முடிவுகளின் உண்மையை நிலை நிறுத்த, நேரடி வாதங்களையே பயன்படுத்தினோம். இனி நாம், 'மறைமுகமான' வாதங்களை குறிப்பாக, கணிதத்தில் ஒரு சக்திவாய்ந்த கருவியான 'முரண்பாடால் நிரூபணம்' என்பதைப் பற்றி

ஆராய்வோம். இதைநாம்பாடம் 8-இல்பலஎண்களின்விகிதமுறாத்தன்மையை நிலைநாட்ட பயன்படுத்தியுள்ளோம். மேலும் வேறு சில பாடங்களில், தேற்றங்களை நிரூபிக்கவும் பயன்படுத்தியுள்ளோம். இங்கு, இக்கருத்தை எடுத்துரைக்க பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகளை செய்வோம்.

முதலில் முரண்பாடு (Contradiction) என்றால் என்ன என்பதை விவரிப்போம். கணிதவியலில், p என்ற கூற்று உண்மை யாகவும் மற்றும் அதன் மறுப்புக் கூற்று $\sim p$ என்பதும் உண்மையாவும் அமையும் போது, முரண்பாடு என்பது வருகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

p: $x=\frac{a}{b}$ இதில் a மற்றும் b ஆகியவை coprime, அதாவது a மற்றும் b இவற்றிற்கு 1ஐத் தவிர வேறு எந்த பொதுக்காரணியும் கிடையாது.

q: a மற்றும் b -ஐ 2 என்ற எண் வகுக்கிறது.

p என்பது உண்மை என்று நாம் ஊகிக்கிறோம் மற்றும் எவ்வாறேனும் q என்பதும் உண்மை என நாம் காட்டுவோமேயானால் நாம் ஒரு முரண்பாட்டை வந்தடைந்து இருக்கிறோம் என்று பொருள். ஏனெனில் p யின் மறுப்புக்கூற்றான q என்பதும் உண்மை என உணர்த்துகிறது. நாம் $\sqrt{2}$ வை விகிதமுறா எண் எனக் காட்ட முயலும் போது, மிகச் சரியாக இதுவே நடக்கிறது என்பதை நினைவுக் கூறுக. (பாடம் 8 இல்)

முரண்பாட்டிலால் நிரூபணம் என்பது எவ்வாறு செயல்படுகிறது? குறிப்பிட்ட தொரு எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு இதைப் பார்க்கலாம்.

கீழ்வருவனவை கொடுக்கப்பட்டுளன என்க :

எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள். A என்பது ஒரு பெண். A இறப்புள்ளவள் ஆவாள் என நிரூபி.

- கூற்று p யின் உண்மையை நிலைநாட்ட வேண்டும் என நாம் ஊகித்துக் கொள்ளலாம் (இங்கு நாம் p: 'A இறப்புள்ளவள் ஆவாள்' என்பது உண்மை என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்).
- ஆகவே நாம் கூற்று உண்மை இல்லை என்று ஊகித்துக் கொண்டு தொடங்குவோம். அதாவது p யின் மறுப்புக் கூற்று உண்மை என்று ஊகிப்போம். (அதாவது A இறப்பற்றவள்)
- p யின் மறுப்புக் கூற்று உண்மை என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரிசையாக தர்க்கரீதியான சில உய்ப்புகளை மேற்கொள்ளுகிறோம். (A இறப்பற்றவள் என்பதால், நமக்கு 'எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ள வர்கள்' என்பதற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டு

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கிடைத்துள்ளது. ஆகவே, எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள் என்பது பொய்யாகிறது).

- இது முன்னுக்கு பின் முரணாக அமைந்துள்ளது. இந்த முரண்பாடு வந்ததன் காரணம், p என்பது உண்மை அல்ல என்ற நமது தவறான ஊகமே.

  (இதில் முரண்பாடு என்னவென்றால், நாம் இங்கே, 'எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள்' மற்றும் அதன் மறுப்புக் கூற்றான 'பெண்களில் எல்லோருமே இறப்புள்ளவர்கள் அல்ல' என்ற இரண்டையுமே ஒரே சமயத்தில் உண்மை எனக் காட்டியுள்ளோம். இம்முரண்பாடானது வந்ததன் காரணம், A என்பவர் இறப்பற்றவள் என்ற ஊகித்ததே).

- ஆகவே, நமது ஊகமே தவறானது. அதாவது p என்பது உண்மையாக இருந்தே ஆக வேண்டும் (ஆக, A இறப்புள்ளவள் ஆவாள்).

  இனி நாம் கணிதத்தில் இருந்து எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்போம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எ.கா 15: ஒரு சுழி அல்லாத விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகியவற்றின் பெருக்கல் தொகையியானது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

தீர்வு:

கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்பு
நாம் முரண்பாட்டினால் நிரூபணத்தைப் பயன்படுத்தலாம். r என்பது சுழி அல்லாத விகிதமுறு எண் மற்றும் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்க. $r = \frac{m}{n}$ என்க. இதில் m, n என்பன முழுக்கள், $m \neq 0$, $n \neq 0$, rx என்பது விகிதமுறா எண் என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.	
rx என்பது விகிதமுறு எண் என ஊகிப்போம்.	இங்கு நாம், நிரூபிக்க பட வேண்டிய கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றை ஊகிக்கிறோம்.

அப்படியெனில், $rx = \frac{p}{q}$ இதில் $q \neq 0$ இதில் p மற்றும் q ஆகியன முழுக்கள்.	இது முந்தைய கூற்றில் இருந்து தொடர்கிறது. மற்றும் விகிதமுறு எண்களின் வறையறை.
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ மற்றும் என்பதைப் பயன்படுத்தி $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$	
np மற்றும் mq என்பன முழுக்கள், $mq \neq 0$ ஆகவே x என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.	முழுக்களின் பண்புகள் மற்றும் விகிதமுறு எண்களின் வரையறை இவற்றைப் பயன்படுத்தி.
இது ஒரு முரண்பாடு, ஏனெனில் x என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என்று நாம் காட்டியுள்ளோம். ஆனால் நமது கற்பிதன் கொள்கையின் படி x என்பது விகிதமுறா எண்.	இதைத்தான் நாம் எதிர் பார்க்கிறோம் - ஒரு முரண்பாடு.
இந்த முரண்பாடு வந்ததன் காரணம் நமது தவறான ஊகமான rx என்பது விகிதமுறு எண் என்பதே ஆகவே, rx என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இனி நாம் எடுத்துக்காட்டு 11 - ஐ முரண்பாட்டினால் நிரூபிக்கலாம். நிரூபணம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்பு
கூற்றானது உண்மை அல்ல என்று ஊகிப்போம்.	நாம் முன்னமே கற்றவாறு, முரண்பாட்டினால் நிரூபணத்திற்கு இதுவே முதல் வாதம்.
எனவே, $6n + 1$ அல்லது $6n + 5$ என்ற வடிவில் இல்லாதவாறு 3 ஐ விட அதகமான ஒரு பகா எண் $p > 3$ இருக்கிறது என்று கொள்க.	இது முடிவு கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றாகும்.

யூக்லிட்-இன் வகுத்தல் கோட்பாட்டை (lemma) கொண்டு, (6-ஆல் வகுப்பதன் மீது) மற்றும் p என்பது $6n+1$ அல்லது $6n+5$ ஆகிய வடிவில் இல்லை என்பதைக் கொண்டும், நமக்கு $p = 6n$ அல்லது $6n+2$ அல்லது $6n+3$ அல்லது $6n+4$ என்பது கிடைக்கிறது.	முன்னமே நிரூபிக்கப்பட்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி.
ஆகவே p என்பது 2 அல்லது 3 ஆல் வகுபடுகிறது.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு
ஆக p என்பது பகா எண் அல்ல.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு
இது ஒரு முரண்பாடு. காரணம் நமது கற்பிதக் கொள்கையான p ஒரு பகா எண் என்பதால்.	இதுவே நமக்குத் தேவைப் பட்டது.
இம் முரண்பாடு எழுவதற்கான காரணம், நாம் $6n+1$ அல்லது $6n+5$ ஆகிய வடிவில் இல்லாத 3-ஐ விடப் பெரிய பகா எண் $p > 3$ ஒன்று இருக்கிறது என்று ஊகித்ததே.	
ஆகவே, 3-ஐ விடப் பெரிய ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் $6n+1$ அல்லது $6n+5$ ஆகிய வடிவில் உள்ளது.	நாம் சரியான முடிவிற்கு வந்தடைந்தோம்.

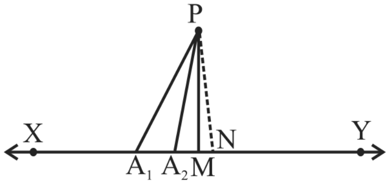
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

குறிப்பு : மேலே உள்ள நிரூபணத்தின் எடுத்துக்காட்டானது, திரும்பதிரும்ப, ஒரு முடிவை பல வழிகளில் நிரூபிக்கப் படலாம் என்பதையே காட்டுகிறது.

தேற்றம் A1.2 :

ஒரு புள்ளியில் இருந்து, அதன் வழியே செல்லாத நேர்கோட்டின் மீதமைந்த புள்ளிகளுக்கு வரையப்படும் எல்லா கோட்டுதுண்களிலும், மிகச் சிறியதானது, அக்கோட்டிற்குகான செங்குத்துக் கோடே.

நிரூபணம் :



படம் **A 1.5**

கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்பு
XY என்பது கொடுக்கப்பட்ட நேர் கோடு என்க. P என்ற புள்ளி XY கோட்டின் மீது அமையாத ஒரு புள்ளி மற்றும் PM, PA_1, PA_2,... ஆகியன புள்ளி P யில் இருந்து கோடு XY மீதமைந்த புள்ளிகளுக்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டுகள். இவற்றில் PM என்பதே மிகச் சிறியது.	PM, PA_1, PA_2,... ஆகிய பலவற்றில் XY க்கான குத்துக்கோடே மிகச் சிறியது என்று நிரூபிக்கப்பட வேண்டியதால், நாம் இக் கோட்டுத்துண்டுகளை எடுத்துக் கொண்டு தொடங்குகிறோம்.
PM என்பது XY க்கு செங்குத்தாக இல்லை எனக் கொள்வோம்.	முரண்பாடு முறையினால் நிரூபிக்கப்பட வேண்டிய கூற்றுக்கு இது மறுப்புக் கூற்று ஆகும்.
படம் **A 1.5**-ஐல் காட்டியவாறு, கோடு XY க்கு PN என்ற (dotted) செங்குத்துக் கோடு ஒன்றை வரைக.	நமது முடிவுகளை நிரூபிக்க நாம் அடிக்கடி சில அமைப்புகளை செய்யவேண்டி உள்ளது.
(PM, PN, PA_1, PA_2, PA_3) ஆகிய பலவற்றில் PN என்பதே மிகசிறிய கோடு ஆகும். அதாவது $PN < PM$	செங்கோண, முக்கோணத்தில் பக்க அளவானது கர்ணத்தைவிட சிறியது மற்றும் எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்தி.
இது நமது கற்பிதக் கொள்கையான PM என்பதே எல்லாவற்றையும் விடச் சிறிய கோடு என்பதற்கு முரண்படுகிறது.	இதுவே நமக்கு தேவை!
ஆகவே, கோட்டுத் துண்டு PM என்பதே XY க்கான செங்குத்துக் கோடாகும்.	நாம் முடிவை வந்தடைந்தோம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1.6

1. $a+b=c+d$ மற்றும் $a<c$ என்க. முரண்பாட்டால் நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி $b>d$ என்று நிரூபி.

2. r என்பது விகிதமுறு எண் மற்றும் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்க. $r+x$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்று முரண்பாட்டால் நிரூபிக்கும் முறையைக் கொண்டு நிரூபி.

3. முரண்பாடால் நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி, a என்ற முழுவிற்கு a^2 என்பது இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் a என்பதும் இரட்டை எண்ணே என்று நிரூபி.

   (குறிப்பு : a என்பது இரட்டை எண் அல்ல என்று ஊகி, அதாவது, அது n என்ற ஏதேனும் ஒரு முழுவிற்கு $2n+1$ என்ற வடிவில் இருப்பதாகவும் ஊகித்துக் கொண்டு நீருபிக்க முற்படவும்.)

4. முரண்பாட்டினால் நிரூபண முறையைப் பயன்படுத்தி, a என்ற முழுவிற்கு, a^2 என்பது 3 ஆல் வகுபடுமேயாயின் a என்பதும் 3 ஆல் வகுபடும் என்று நிரூபி.

5. முரண்பாட்டினால் நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி, n இன் எந்த மதிப்பிற்கும் 6^n என்பதன் முடிவு இலக்கம் சுழியாக இருக்க முடியாது எனக் காட்டு.

6. ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகளானவை, ஒன்றைவிட அதிகமான புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்வது சாத்தியமில்லை என்பதை முரண்பாட்டினால் நிரூபிக்கும் முறையினால் நிரூபி.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

A1.8 தொகுப்பு

இப்பிற்சேர்க்கையில், நீங்கள் கீழ்வருவன வற்றை கற்றீர்கள் :

1. ஒரு நிரூபணத்தின் பல்வேறு உறுப்புகள் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய 9 ஆம் வகுப்பில் கற்ற சில கருத்துக்கள்.
2. கூற்றின் மறுப்புக் கூற்று.
3. கூற்றின் மறுதலை.
4. முரண்பாட்டினால் நிரூபணம்.

விடைகள்

ANSWERS

மெய் எண்கள் :
பயிற்சி 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) அ. பொ. ம = 182 ; உ. பொ. கா = 13
(ii) அ. பொ. ம = 23460; உ. பொ. கா = 2
(iii) அ. பொ. ம = 3024; உ. பொ. கா = 6

3. (i) அ. பொ. ம = 420; உ. பொ. கா = 3
(ii) அ. பொ. ம. = 11339; உ. பொ. கா. = 1
(iii) அ. பொ. ம = 1800; உ. பொ. கா. = 1

4. 22338 **5.** 36 நிமிடங்கள்

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : பயிற்சி 2.1

1. (i) பூச்சியங்கள் இல்லை (ii) 1 (iii) 3
(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

பயிற்சி 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சோடி

பயிற்சி 3.1

1. i) x பெண்கள் மற்றும் y ஆண்களின் எண்ணிக்கையாக எடுத்துக்கொள்டால் சமன்பாடுகள் $x + y = 10$, $x - y = 4$ என கிடைக்கும். ஒரே வரைப்படத்தாளில், ஒரே அச்சுகளில் வரைந்து தீர்வு காணவும். பெண்கள் = **7**, ஆண்கள் = **3**.

(ii) தேவையான சமன்பாடுகள் :$5x + 7y = 50$, $7x + 5y = 46$. x மற்றும் y என்பன கரிக்கோல் மற்றும் பேனாக்களின் விலையை (₹ யில்) குறிக்கும். ஒரே வரைப்படத்தாளில் வரைந்து தீர்வு காணவும். ஒரு கரிக்கோல் விலை. ₹ **3**, ஒரு பேனாவின் விலை ₹ **5**.

2. (i) ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன

(ii) ஒன்றின் மீது ஒன்று ஒத்துப்போகின்றன

(iii) இணையாக உள்ளன.

3. (iv) நிலைத்தன்மை (ii) நிலைத்தன்மையற்றது

(iii) நிலைத்தன்மை (iv) நிலைத்தன்மை (v) நிலைத்தன்மை

4. (i) நிலைத்தன்மை (ii) நிலைத்தன்மையற்றது

(iii) நிலைத்தன்மை (iv) நிலைத்தன்மையற்றது

மேலை உள்ள தீர்வு (i) ல் $y = 5 - x$ சமன்பாட்டில் x க்கு எந்தமதிப்பு வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்கொன்டால் எல்லையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன.

தீர்வு (iii) ல் $x = 2, y = 2$ ஒரே தனித்துவம் வாய்த்த கிடைத்துள்ளன.

5. நீளம் = 20மீ மற்றும் அகலம் = 16மீ.

6. மூன்றிற்கும் ஒரு இயன்ற விடை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகள் $(-1,0)$, $(4, 0)$ மற்றும் $(2, 3)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 3.2

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $s = 9, t = 5$ (iii) $y = 3x - 3$
x க்கு எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். அநேக தீர்வுகள் கிடைக்கும்.
(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0,$ (vi) $x = 2, y = 3$
2. $x = -2, y = 5; m = -1$
3. (i) x மற்றும் y இரண்டு என்கள் $x > y$ ஆக உள்ளபோது, $x - y = 26$, $x = 3y$; $x = 39$ மற்றும் $y = 13$ ஆகும்
(ii) x மற்றும் y ஆகிய இரண்டும் டிகிரிகளில் கோணங்களின் அளவுகள். $x - y = 18, x + y = 180$. $x = 99$ மற்றும் $y = 81$ ஆகும்.
(iii) $7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750$, இதில் x மற்றும் y என்பன முறையே ஒரு மட்டை மற்றும் ஒரு பந்தின் விலை (₹ பாயில்). $x = 500$, $y = 50$ ஆகும்.
(iv) $x + 10y = 105, 6x - 5y = 155$, இதில் x என்பது நிலையான கட்டணம் (₹ பாயில்), மற்றும் y என்பது கி.மீ.க்கு ₹ பாயில் வாடகை கட்டணம் ; $x = 5, y = 10$, ₹ 255.
v) x பகுதி, y தொகுதி ஆக உள்ளபோது $11x - 9y + 4 = 0, 6x - 5y + 3 = 0$; பின்னம் $\frac{7}{9}$, மற்றும் $y = 0$ ஆகும்.
vi) x யாக்கோப்பின் வயது, y அவருடைய மகள் வயதாகவும் உள்ளபோது, $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0; x = 40, y = 10$ ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 3.3

1. i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$ ii) $x = 2, y = 1$ iii) $x = \frac{9}{13}, y = \frac{5}{13}$ iv) $x = 2, y = -3$
2. i) x தொகுதியாகவும், y பகுதியாகவும் உள்ளபொது $x - y + 2 = 0$,
$2x - y - 1 = 0$; பின்னம் $\frac{3}{5}$ ஆகும்.
ii) நூரி வயது x மற்றும் சோனு வயது y எனில் $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$; $x = 50, y = 20$ வருடங்கள் ஆகும்.
iii) x பத்தாம் ஸ்தான இலக்கமாகவும், y ஒன்றாம் ஸ்தான இலக்கமாகவும் எடுத்துக்கொண்டால் $x + y = 9, 8x - y = 0$; 18

iv) $x + 2y = 40, x + y = 25$, இதில் x மற்றும் y என்பன முறையே ₹ 50 நோட்டு மற்றும் ₹ 100 நோட்டு இவற்றின் எண்ணிகை ; $x = 10$, $y = 3$ ரூ ஆகும்.

v) x நிலையான கட்டணமாகவும் (₹ பாயில்), y ஒரு நாளைக்கு கூடுதல் கட்டணம் (₹ பாயில்) எனில் $x + 4y = 27, x + 2y = 21; x = 15$, $y = 3$ ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாடுகள்

பயிற்சி 4.1

1. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) இல்லை (iv) ஆம்

(v) ஆம் (vi) இல்லை (vii) இல்லை (viii) ஆம்

2. i) $2x^2 + x - 528 = 0$, இதில் மனையின் அகலம் x ஆகும் (மீட்டரில்)

ii) $x^2 + x - 306 = 0$, இதில் x என்பது சிறிய முழுக்கள்

iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, இதில் x (ஆண்டில்) என்பது ரோகனின் தற்போதய வயது.

iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, இதில் u என்பது [கி.மீ/மணி] தொடர் வண்டியின் வேகம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

பயிற்சி 4.2

1. i) $-2, 5$ ii) $-2, \frac{3}{2}$ iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. i) 9, 36 ii) 25, 30

3. எண்கள் **13** மற்றும் **14** ஆகும்

4. மிகை முழுகள் **13** மற்றும் **14** ஆகும்

5. 5 செ.மீ. மற்றும் 12செ.மீ.

6. பொருள்களின் எண்ணிக்கை 6, ஒவ்வொரு பொருளின் விலை ₹15.

பயிற்சி 4.3

1. i) மெய் மூலங்கள் கிடையாது

ii) சமமான மூலங்கள் ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

iii) வெவ்வேறு மூலங்கள் ; $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

2. i) $k=\pm 2\sqrt{6}$ ii) $k=6$ **3.** ஆம், 40மீ., 20மீ.

4. இல்லை **5.** ஆம், 20மீ., 20மீ.

கூட்டுத் தொடர் வரிசைகள் : பயிற்சி 5.1

1. (i) ஆம், ஒவ்வொரு முந்தைய உறுப்புடன் 8 ஐ கூட்டினால் தொடர்ச்சியான அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் கூட்டுதொடரில் 15, 23, 31, ... உருவாகிறது.

(ii) இல்லை, கன அளவு V, $\frac{3V}{4},\left(\frac{3}{4}\right)^2$ V,.....

(iii) ஆம், 150, 200, 250.......... என்ற கூ.தொ. உருவாகிறது.

(iv) இல்லை, தொகை 10000 $\left[1+\frac{8}{100}\right],10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^2,10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^3,\ldots\ldots$

2. i) 10, 20, 30, 40 ii) −2, −2, −2, −2 iii) 4, 1, −2, −5

iv) $-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$ v) −1.25, −1.50, −1.75, −2.0

3. i) $a=3, d=-2$ ii) $a=-5, d=4$ iii) $a=\frac{1}{3}, d=\frac{4}{3}$ iv) $a=0.6, d=1.1$

4. i) இல்லை ii) ஆம் $d=\frac{1}{2};4,\frac{9}{2},5$ iii) ஆம். $d=-2; -9.2,-11.2,-13.2$

iv) ஆம். $d=4$; 6, 10, 14 v) ஆம். $d=\sqrt{2};3+4\sqrt{2},3+5\sqrt{2},3+6\sqrt{2}$

vi) இல்லை vii) ஆம். $d=-4$; −16, −20, −24

viii) ஆம். $d=0;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ ix) இல்லை

x) ஆம். $d=a$; $5a$, $6a$, $7a$ xi) இல்லை

xii) ஆம். $d=\sqrt{2};\sqrt{50},\sqrt{72},\sqrt{98}$ xiii) இல்லை

xiv) இல்லை xv) ஆம், $d=24$; 97, 121, 145

பயிற்சி 5.2

1. i) $a_n=28$ ii) $d=2$ iii) $a=46$ iv) $n=10$ v) $a_n=3.5$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2. i) C ii) B

3. i) $\boxed{14}$ ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$ iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4. 16 வது உறுப்பு

5. i) 34 ii) 27 **6.** இல்லை **7.** 178

8. 64 **9.** 5 வது உறுப்பு **10.** 1

11. 65 வது உறுப்பு **12.** 100 **13.** 128

14. 60 **15.** 13 **16.** 4, 10, 16, 22,...

17. கடைசி உறுப்பிலிருந்து 20 வது உறுப்பு 158

18. −13, −8, −3 **19.** 11 வது ஆண்டு **20.** 10

பயிற்சி 5.3

1. i) 245 ii) −180 iii) 5505 iv) $\frac{33}{20}$

2. i) $1046\frac{1}{2}$ ii) 286 iii) −8930

3. i) $n = 16, S_n = 440$ ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ iii) $a = 4, S_{12} = 246$

iv) $d = -1, a_{10} = 8$ v) $a\frac{-35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ vi) $n = 5, a_n = 34$

vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ viii) $n = 7, a = -8$ ix) $d = 6$ x) $a = 4$

4. 12. $S = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$ என்ற சூத்திரத்தில் $a = 9$, $d = 8$, S = 636 பதிலீடு செய்தால் நாம் பெறுவது $4n^2 + 5n - 636 = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாடு. இதன் தீர்வு, நாம் பெறுவது $n = -\frac{53}{4}, 12$. இந்த இரண்டு மூலங்களில் 12 என்ற ஒரு மூலத்தை மட்டும் எடுத்துக்கொள்கின்றோம்.

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, S = 6973 **7.** கூட்டுத்தொகை = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1.$

$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹27750

16. பரிசுகளின் மதிப்பு (₹ இல்) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

17. 234 **18.** 143 செ.மீ.

19. 16 நிரைகள். மேல் நிரையில் 5 திண்மைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளது $S = 200, a = 20, d = -1$ ஐ $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ என்ற சூத்திரத்தில் பதிலீடு செய்யும்போது நமக்கு கிடைப்பது $41n - n^2 = 400$. இதனை தீர்க்கும்போது $n = 16, 25$. கிடைக்கும். ஆகையால் நிரை (Row) யில் வைக்கப்பட்டுள்ள எண்ணிக்கை 16 அல்லது 25. $a_{25} = a + 24\,d = -4$ அதாவது 25 வது நிரலில் - 4 நிண்மைகள் இருக்கவேண்டும் ஆனால் இது சாத்தியமல்ல. ஆகையால் $n = 25$ என்பது சாத்தியமல்ல, $n = 16$, ஆக இருக்கையில் $a_{16} = 5$, அதில் 16 நிரைகள் உண்டு. மேலுள்ள நிரையில் 5 திண்மைகள் இருக்கும்.

20. 370மீ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 5.4 (விருப்புரிமை கொண்டவை)*

1. (i) 32 வது உறுப்பு **2.** $S_{16} = 20,76$ **3.** 385 செ.மீ.

4. 35 **5.** 750மீ³.

முக்கோணங்கள் : பயிற்சி 6.1

1. (i) வடிவொத்தவை (ii) வடிவொத்தவை (iii) சமபக்க
(iv) சமம், விகித சமமாகும் **3.** இல்லை

பயிற்சி 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) இல்லை (ii) சரி (iii) சரி

9. 'O' யின் வழியாக, DC கு இணையாக E மற்றும் F ஆகிய புள்ளிகளில் முறையே AD மற்றும் BC யை வெட்டும்மாறு ஒரு கோட்டை வரைக.

பயிற்சி 6.3

1. (i) ஆம். AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) ஆம். SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
(iii) இல்லை (iv) சரி SSS, , $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
(v) இல்லை (vi) சரி, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. $55^0, 55^0, 55^0$

14. AD = DE ஆக இருக்குமாறு AD ஐ புள்ளி E வரை நீட்டவும் மற்றும் PM = MN இருக்குமாறு PM ஐ புள்ளி N வரை நீட்டவும். EC மற்றும் NR ஐ இணைக்கவும்

15. 42 மீ

ஆயத்தொலை வடிவியல் : பயிற்சி 7.1

1. i) $2\sqrt{2}$ ii) $4\sqrt{2}$ iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km **3.** இல்லை **4.** சரி **5.** சம்பாதான் சரி

6. i) வர்க்கம் ii) நாற்கரம் அல்ல iii) இணைகரம்

7. i) (−7,0) **8.** −9,3

9. ±4, $QR=\sqrt{41}, PR=\sqrt{82}, 9\sqrt{2}$ $QR=\sqrt{41}, PR=\sqrt{82}, 9\sqrt{2}$ **10.** $3x + y - 5 = 0$

பயிற்சி 7.2

1. i) (1, 3) **2.** $\left(2,-\frac{5}{3}\right);\left(0,-\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}m$; 5 வது கோட்டின்மீது 22.5 மீ. தூரத்தில்

4. 2 : 7 **5.** $1:1;\left(-\frac{3}{2},0\right)$ **6.** $x = 6, y = 3$

7. (3, −10) **8.** $\left(-\frac{2}{7},-\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1,\frac{7}{2}\right),(0,5),\left(1,\frac{13}{2}\right)$

10. 24 சதுர அலகுகள்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1 கணிதத்தில் நிருபணங்கள் : பயிற்சி A1.1

1. i) தெளிவற்றது ii) உண்மை iii) உண்மை
iv) தெளிவற்றது v) தெளிவற்றது

2. i) உண்மை ii) உண்மை iii) பொய்
iv) உண்மை v) உண்மை

3. (ii) மட்டுமே உண்மை

4. i) $a > 0$ மற்றும் $a^2 > b^2$ எனில், $a > b$ (ii) $xy \geq 0$ மற்றும் $x^2 = y^2$, எனில், $x = y$

iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ மற்றும் $y \neq 0$, எனில், $x = 0$ ஆகும்.

iv) இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை மற்றொன்று இருசமக்கூறிடும்.

பயிற்சி A1.2

1. A இறப்பற்றவன்

2. *ab* என்பது விகிதமுறு எண்

3. $\sqrt{17}$ இன் தசம விரிவாக்கமானது முடிவற்றது மற்றும் திரும்பதிரும்ப வராதது.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100^0, \angle C = 100^0, \angle D = 180^0$ **6.** PQRS ஒரு செவ்வகம்

7. ஆம், கொடுக்கப்பட்ட இடம் காரணமாக இல்லை, எனெனில் $\sqrt{3761} = 61$ என்பது விகிதமுறா எண் அல்ல. கொடுக்கப்பட்ட இடம் தவறானதாகையால், முடிவும் தவறு ஆகும்.

பயிற்சி A 1.3

1. ஏதேனும் ஒரு முழு *'n'* க்கு, இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களாக $2n + 1$ மற்றும் $2n + 3$ ஆக எடுத்துக்கொள்ளவும்.

பயிற்சி A 1.4

1. i) மனிதன் இறப்பற்றவன்.

ii) நேர்கோடு *l* என்பது நேர்கோடு *m* க்கு இணைகோடு அல்ல.

iii) பாடம் பல பயிற்ச்சிகளைக் கொண்டதாக இலைை.

iv) எல்லா முழுக்களுமே விதிதமுறு எண்களாக இருக்க வேண்டியது இல்லை.

v) எல்லா பகா எண்களும் ஒற்றை எண்களாகவே இருப்பதில்லை.

vi) சில மாணவர்கள் சோம்பேறிகள்.

vii) எல்லா பூனைகளும் கரிய நிறத்தவை.

viii) $\sqrt{x} = -1$ என்றமைந்தவகையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு மெய் எண் x ஆவது உள்ளது.

ix) மிகை முழு a^2 ஐ 2 - ஆனது வகுப்பதில்லை.

x) முழுக்கள் *a* மற்றும் *b* ஆனவை Co prime (அதாவது 1 ஐத்தவிர வேறு என்த பொதுக்காரணிகளையும் கொண்டவை) அல்ல.

2. i) ஆம் ii) இல்லை iii) இல்லை iv) இல்லை v) ஆம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A 1.5

1. i) சரண் மிகவும் வியர்த்துக் கொண்டு இருக்கிறான் என்றால் டோக்யோவில் வெப்பம் அதிகம் ஆகும்.

ii) ஷாலினியின் வயிறு முணுமுணுக்கிறது எனில் அவள் பசியுடன் இருக்கிறாள்.

iii) ஜஸ்வன்த்திற்கு பட்டம் கிடைக்குமேயாயின், அவளிடம் படிப்புதவித் தொகை உண்டு.

iv) ஒரு செடி உயிருடன் இருக்கிறது எனில், அது மலர்களைக் கொண்டுள்ளது.

v) ஒரு விலங்கு வாலைக் கொண்டதாயின் அது ஒரு பூனை ஆகும்.

2. i) முக்கோணம் ABC - யின் அடித்தளக் கோணங்கள் சமம் எனில், அது ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகும். உண்மையே.

ii) ஒரு முழுவின் வர்க்கம் ஒற்றை எண் எனில், அந்த முழுவும் ஒற்றை எண்ணே ஆகும். உண்மை.

iii) $x = 1$ எனில் $x^2 = 1$ ஆகும், உண்மை

iv) AC மற்றும் BD ஒன்றை மற்றொன்று இரு சமக்கூறிடுமாயின் ABCD யானது ஒரு இணைகரம் ஆகும். உண்மை.

v) $a + (b + c) = (a + b) + c$, எனில், a, b, c ஆகியன முழு எண்கள் (whole numbers) ஆகும். பொய்.

vi) $x + y$ என்பது ஒரு இரட்டை எண் எனில், x மற்றும் y என்பன ஒற்றை எண்கள் ஆகும். பொய்.

vii) ஒரு இணைகரரமானது செவ்வகமாக இருப்பின், அதன் உச்சிகள் ஒரு வட்டதத்தின் மீது அமைந்திருக்கும். உண்மை.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1.6

1. மாறாக $b \leq d$ எனக் கொள்க

3. பாடம் 1 இன் எடுத்துக்காட்டு 10 - ஐப் பார்க்கவும்.

6. IX ஆம் வகுப்பின் கணிதப்பாடப்புத்தகத்தின் தேற்றம் 5.1 ஐப் பார்க்கவும்.

Note

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED