ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

9

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೨

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಮಂಡಳಿ
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
6ನೇ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆ, ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 003.

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ – ೨

3HSEMU

ಪುಟಸಂಖ್ಯೆ

7. ತ್ರಿಭುಜಗಳು 1 – 20

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

7.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ

7.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳು:

7.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

7.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಬಂಧನೆಗಳು

7.6 ಸಾರಾಂಶ

8. ಚತುರ್ಭುಜಗಳು 21 – 32

8.1 ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

8.2 ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ

8.3 ಸಾರಾಂಶ

9. ವೃತ್ತಗಳು 33 – 47

9.1 ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ

9.2 ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ

9.3 ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ

9.4 ವೃತ್ತದ ಕಂಸದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ

9.5 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

9.6 ಸಾರಾಂಶ

10. ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ 48 – 53

10.1 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

10.2 ಸಾರಾಂಶ

11. ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು 54 – 68

11.1 ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

11.2 ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

11.3 ಒಂದು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

11.4 ಗೋಳದ ಘನಫಲ

11.5 ಸಾರಾಂಶ

12. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ 69 – 84

12.1 ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

12.2 ಸಾರಾಂಶ :

ಅನುಬಂಧ – 2 85 – 101

A 2.1 ಪೀಠಿಕೆ

A 2.2 ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ

A 2.3 ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳು

A 2.4 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಇತಿಮಿತಿಗಳು.

A 2.5 ಸಾರಾಂಶ

ಉತ್ತರಗಳು / ಸುಳಿವು 102 – 110

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3GZRHH

ಅಧ್ಯಾಯ – 7

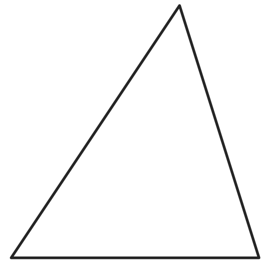
ತ್ರಿಭುಜಗಳು

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿವಿಧ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಮೂರು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ('ತ್ರಿ' ಎಂದರೆ ಮೂರು). ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು, ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ΔABC ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Δ ABC ಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.1 ಗಮನಿಸಿ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CA, ಮೂರು ಕೋನಗಳು $\angle A, \angle B, \angle C$ ಮತ್ತು A, B, C ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ, ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮಗಳು, ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಸವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಬಹುತೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈಗ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 7.1

7.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ

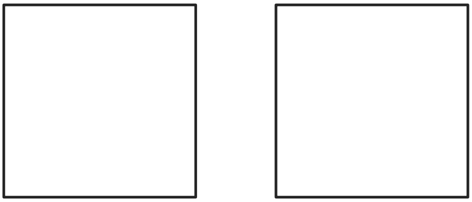
ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ನಿಮ್ಮ ಭಾವಚಿತ್ರದ ಎರಡು ಪ್ರತಿಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ಎರಡೂ ಬಳೆಗಳು, ಒಂದೇ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ನೀಡಿರುವ ಎರಡು ATM ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಇಸವಿಯಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಣವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಒಂದು ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟಾಗ ಎರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ರೀತಿಯಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಸರ್ವಸಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಅಥವಾ ಆಕೃತಿ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಎಂದರ್ಥ).

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಈಗ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಅಂತಹ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದೇ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.2 ಗಮನಿಸಿ). ಅಥವಾ ಸಮಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ವರ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.



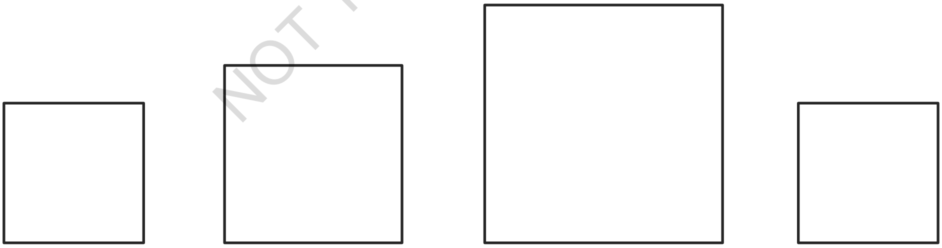
ಚಿತ್ರ 7.2

ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವೆವು? ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸಬಹುದು. ರೆಫ್ರಿಜರೇಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ಯೂಬ್‌ಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಬಳಸುವ ತಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ನೀವೆಲ್ಲಾ ನೋಡಿರಬಹುದು. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾದ ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ (ಆಯತಾಕಾರ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಅಥವಾ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವಾಗಿರಬಹುದು). ಆದುದರಿಂದ ತದ್ರೂಪಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ಬಳಸುವ ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್(ಟ್ಯೂಬ್) ತೆಗೆದು ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್‌ನ ಅಳತೆಯಷ್ಟೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನೀವು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಕಷ್ಟಪಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ರೀಫಿಲ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಪೆನ್‌ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮತೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದಾದ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಯೋಚಿಸುವಿರಾ? ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 7.3(i) ರ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳು ಯಾವುವು?



ಚಿತ್ರ 7.3

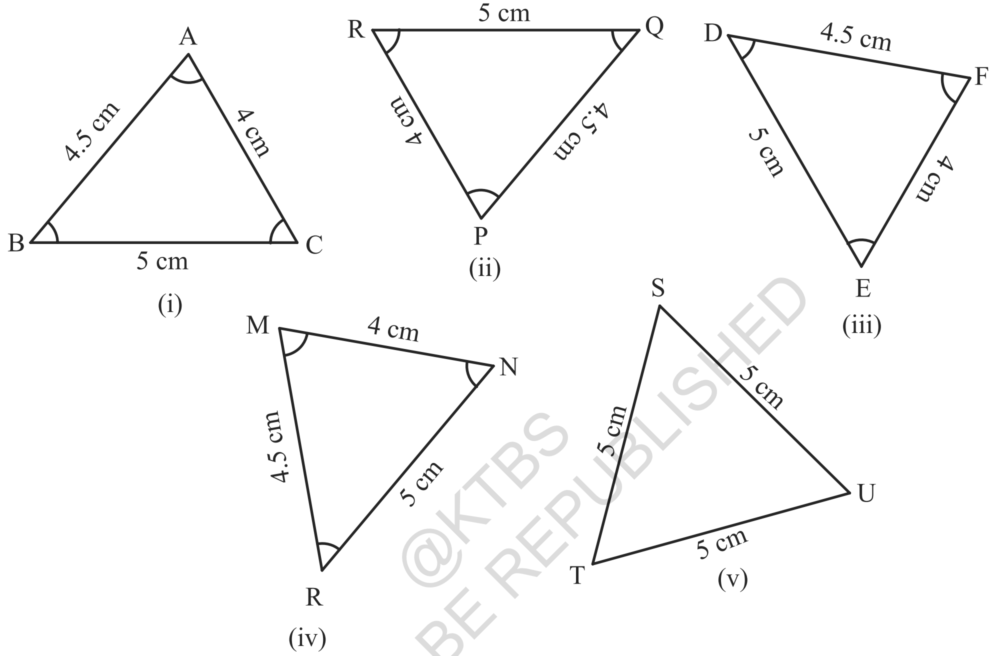
ಚಿತ್ರ 7.3 (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ವರ್ಗಗಳು ಚಿತ್ರ 7.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 7.3 (iv) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗವು ಚಿತ್ರ 7.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತ್ರಿಭುಜವು ಚಿತ್ರ 7.4 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಚಿತ್ರ 7.4

ಚಿತ್ರ 7.4 ರಲ್ಲಿರುವ (ii) ರಿಂದ (v) ರ ವರೆಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ΔABC ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಚಿತ್ರ 7.4 ರ (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 7.4 (v) ರ Δ TSU, Δ ABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ΔPQR, ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನಾವು $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆದಾಗ, ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ΔABC ಯ ಸಮವಾದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಂದರೆ PQ ಜೊತೆ AB, QR ಜೊತೆ BC ಮತ್ತು CA ಜೊತೆ RP ಹಾಗೂ $\angle P$ ಜೊತೆ $\angle A$, $\angle Q$ ಜೊತೆ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle R$ ಜೊತೆ $\angle C$ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಇದೆ. ಅದು P ಯಿಂದ A, Q ಯಿಂದ B, R ಯಿಂದ C ಹಾಗೆಯೇ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ಈ ರೀತಿಯ ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇರೀತಿ ಚಿತ್ರ 7.4 (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC, EF \leftrightarrow CA$

ಮತ್ತು $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B,$ ಮತ್ತು $E \leftrightarrow C$

ಅಂದರೆ $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. ಆದರೆ $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ΔABC ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 7.4 (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜದ ನಡುವಿನ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

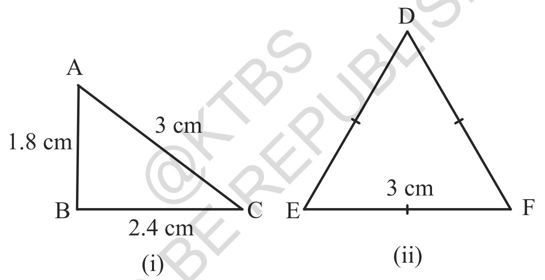
ಗಮನಿಸಿ: ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಿರುವ ಬಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ **'ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ'** ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ.

7.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳು:

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

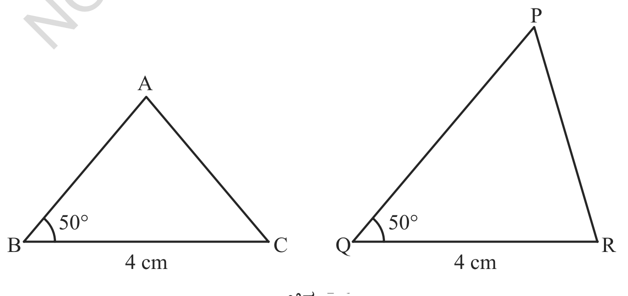
ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 3cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.5 ಗಮನಿಸಿ).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ಚಿತ್ರ 7.5

ಈಗ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ 50° ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.6 ನೋಡಿ). ಅವು ಸರ್ವಸಮವೇ?



ಚಿತ್ರ 7.6

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

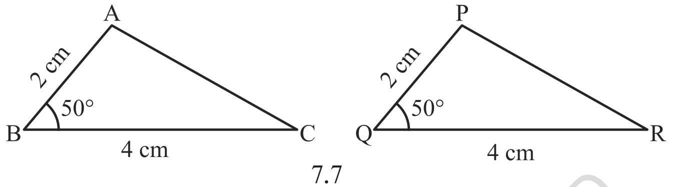
ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಮ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾದಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು?

ಚಿತ್ರ 7.7 ರಲ್ಲಿ $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ ಹಾಗೂ $AB = PQ$ ಆಗಿದೆ. ಈಗ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 7.7 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗೆ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಸಮತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಸಮವಿರುವುದು, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೇ? ಹೌದು, ಇದು ಸಾಕು.



7.7

ಇದೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೊದಲನೇ ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 7.1 : ಬಾಹು, ಕೋನ, ಬಾಹು(ಬಾ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ.

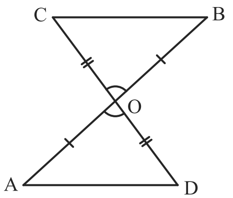
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಂತೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. (ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಚಿತ್ರ 7.8 ರಲ್ಲಿ $OA = OB$ ಮತ್ತು $OD = OC$.

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ ಮತ್ತು (ii) $AD \parallel BC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

ಪರಿಹಾರ: (i) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\} \quad \text{(ದತ್ತ)}$$

ಹಾಗೆಯೇ $\angle AOD$ ಮತ್ತು $\angle BOC$ ಗಳು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು.

ಆದುದರಿಂದ $\angle AOD = \angle BOC$

$\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(ii) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

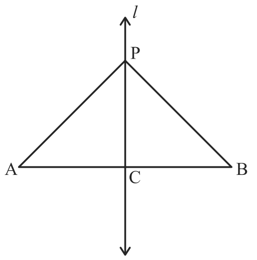
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OAD = \angle OBC$. ಇವು AD ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $AD \parallel BC$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಉದಾಹರಣೆ 2 : AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ರೇಖೆ l ಅದರ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ, P ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: l ರೇಖೆಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಇದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.9 ಗಮನಿಸಿ). PA = PB ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬೇಕು. Δ PCA ಮತ್ತು Δ PCB ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.9

AC = BC (C ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

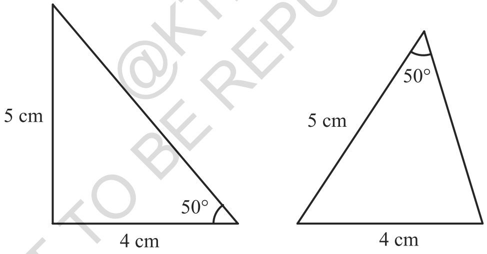
$\angle PCA = \angle PCB = 90^o$ (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

ಹಾಗೆಯೇ PA = PB, ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು.

ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು 5cm ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು 50° ಇರುವಂತೆ ನಾವು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ರಚಿಸುವಾಗ 50° ಕೋನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಬರದಂತೆ ರಚಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 7.10 ಗಮನಿಸಿ). ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ?



ಚಿತ್ರ 7.10

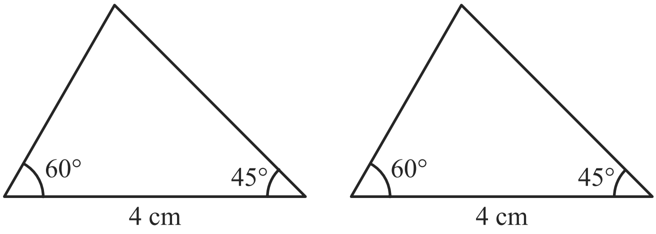
ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಬಹುಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಕೋನಗಳು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು ಕೋ ಬಾ ಬಾ ಅಥವಾ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮವಲ್ಲ.

ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ 60° ಮತ್ತು 45° ಹಾಗೂ ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.11 ಗಮನಿಸಿ).

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



ಚಿತ್ರ 7.11

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ಸಮ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹು ಸಮವಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ **ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ** ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಕೋ ಬಾ ಕೋ** ನಿಬಂಧನೆ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಆದರೆ ನಾವು ಈಗ ಇದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.1: (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

ಮತ್ತು $BC = EF$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೂರು ಪ್ರಕರಣಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

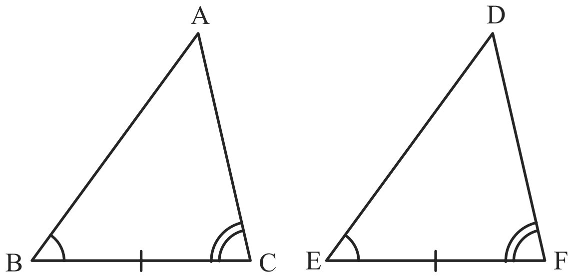
ಪ್ರಕರಣ (i) $AB = DE$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.12 ಗಮನಿಸಿ)

ಈಗ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ನೀವು ಈ ಮುಂದಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$AB = DE$	(ಊಹಿಸಿರುವುದು)
$\angle B = \angle E$	(ದತ್ತ)
$BC = EF$	(ದತ್ತ)

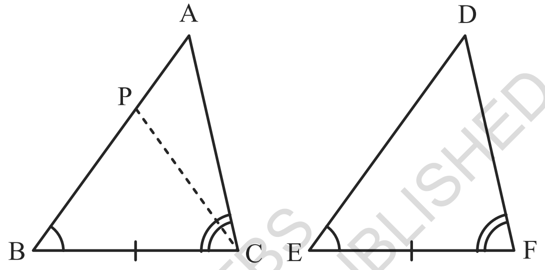
ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ನಿಯಮ)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ಚಿತ್ರ 7.12

ಪ್ರಕರಣ (ii): ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ $AB > DE$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದುದರಿಂದ $PB = DE$ ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.13 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.13

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

$PB = DE$ (ರಚನೆಯಿಂದ)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

$BC = EF$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು, ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle PCB = \angle DFE$

ಆದರೆ $\angle ACB = \angle DFE$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle ACB = \angle PCB$

ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

P ಯು A ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಥವಾ $BA = ED$

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ)

ಪ್ರಕರಣ (iii): AB < DE ಆದರೆ ME = AB ಆಗುವಂತೆ DE ಯ ಮೇಲೆ M ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರಕರಣ (ii) ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. AB = DE ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

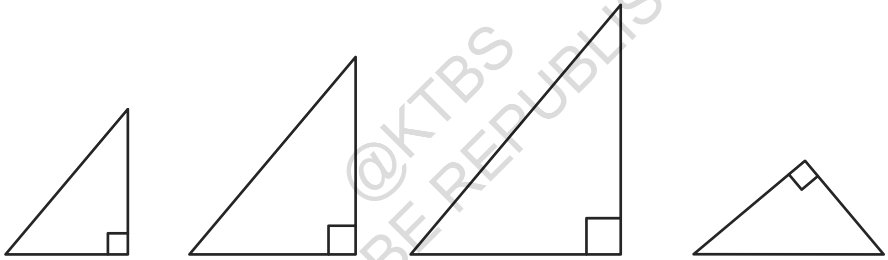
ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಬಾಹುವು ಅನುರೂಪ ಸಮಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಆಗಿರದಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಏಕೆ ಎಂದು ಕಾರಣ ನೀಡುವಿರಾ?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^o ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಜೊತೆ ಕೋನಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (180^o – ಸಮಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಕೋನ, ಕೋನ, ಬಾಹು **(ಕೋ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಕೋನಗಳು, 40^o, 50^o ಮತ್ತು 90^o ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು? ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವಂತೆ ಬಹಳಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 7.14 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.14

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಆಗದಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹು ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : AB ರೇಖಾಖಂಡವು CD ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.15 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೂ ಸಹ 'O' ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

(i) Δ AOB ಮತ್ತು Δ DOC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\angle ABO = \angle DCO$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು, ಕಾರಣ $AB \parallel CD$ ಮತ್ತು BC ಛೇದಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

$\angle AOB = \angle DOC$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

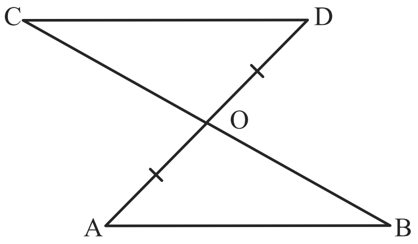
$OA = OD$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$

(ಕೋ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

(ii) OB = OC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

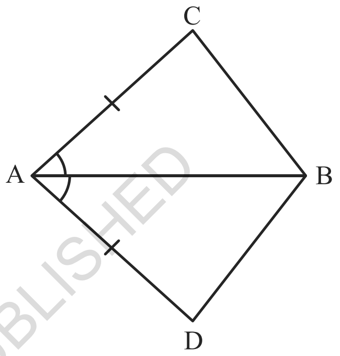
ಆದುದರಿಂದ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'O' ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.15

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

(1) ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AC = AD ಮತ್ತು AB ಯು $\angle A$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.16 ಗಮನಿಸಿ). $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. BC ಮತ್ತು BD ಗಳಿಗೆ ಸಂಭಂದಿಸಿದಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



ಚಿತ್ರ 7.16

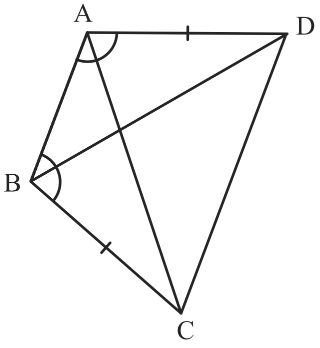
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

(2) ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. AD = BC ಮತ್ತು $\angle DAB = \angle CBA$ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.17 ಗಮನಿಸಿ).

(1) Δ ABD $\cong \Delta$ BAC

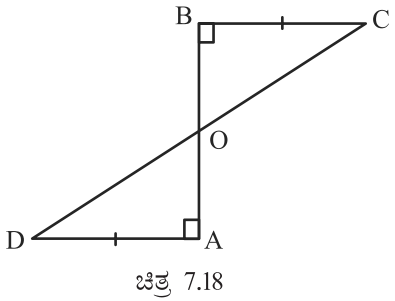
(2) BD = AC

(3) $\angle ABD = \angle BAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



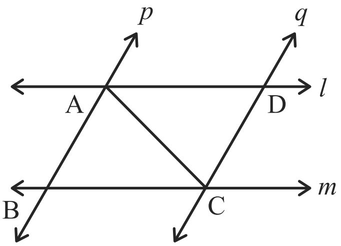
ಚಿತ್ರ 7.17

(3) AD ಮತ್ತು BC ಗಳು AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಮ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.18 ಗಮನಿಸಿ). CD ಯು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.18

(4) l ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು. ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ p ಮತ್ತು q ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.19 ಗಮನಿಸಿ) ಹಾಗಾದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

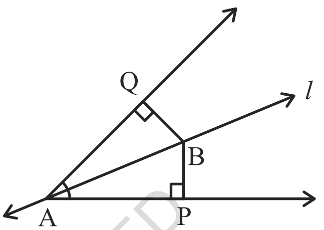


ಚಿತ್ರ 7.19

(5) $\angle A$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ l ಆಗಿದೆ. B ಯು l ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. BP ಮತ್ತು BQ ಗಳು B ಯಿಂದ $\angle A$ ನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.20 ಗಮನಿಸಿ).

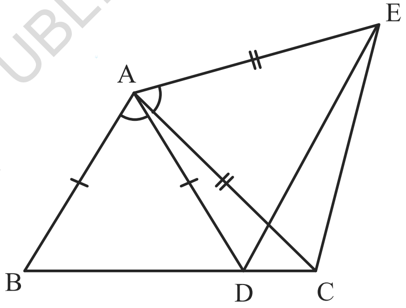
(i) Δ APB $\cong \Delta$ AQB

(ii) BP = BQ ಅಥವಾ B ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.20

(6) ಚಿತ್ರ 7.21 ರಲ್ಲಿ AC = AE, AB = AD ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle EAC$ ಆದರೆ BC = DE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

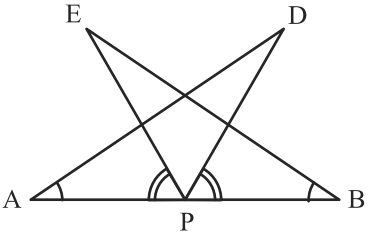


ಚಿತ್ರ 7.21

(7) AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು P ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. $\angle BAD = \angle ABE$ ಮತ್ತು $\angle EPA = \angle DPB$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು AB ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.22 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) AD = BE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.22

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

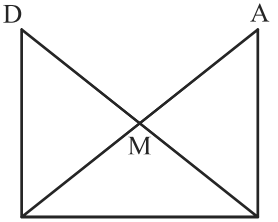
(8) ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $\angle C$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. ವಿಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ. C ನ್ನು M ಗೆ ಸೇರಿಸಿ DM = CM ಆಗುವಂತೆ D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. D ಮತ್ತು B ಸೇರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.23 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.23

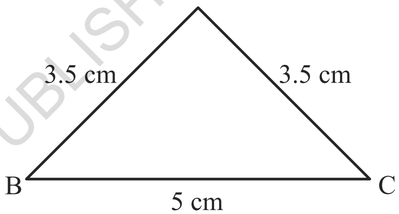
7.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಎರಡು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ

ಎರಡು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 3.5cm ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5cm ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.24 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ರೀತಿಯ ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ?



ಚಿತ್ರ 7.24

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 7.24 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಇಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ.

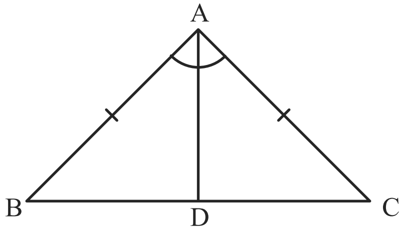
ಈಗ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯಿರುವ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

ಅಂತಹ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಇದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.2 : ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಅನೇಕ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.25

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಸಾಧನೆ : ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಇದರಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ.

∠B = ∠C ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

∠A ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯೋಣ. ಅದು BC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಚಿತ್ರ 7.25 ಗಮನಿಸಿ).

ΔBAD ಮತ್ತು ΔCAD ಗಳಲ್ಲಿ

AB = AC (ದತ್ತ)

∠BAD = ∠CAD (ರಚನೆಯಿಂದ)

AD = AD (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ ΔBAD ≅ ΔCAD (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

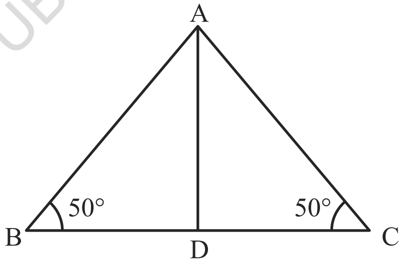
ಹಾಗಾಗಿ ∠ABD = ∠ACD (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ ∠B = ∠C

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯೇ? ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೇ?

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.

BC ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯಿದ್ದು ∠B = ∠C = 50° ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ರಚಿಸಿ. ∠A ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಎಳೆಯಿರಿ ಅದು BC ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.26 ಗಮನಿಸಿ). Δ ABC ಯನ್ನು ಹಾಳೆಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಶೃಂಗ C ಯು ಶೃಂಗ B ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ AD ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಮಡಚಿ.



ಚಿತ್ರ 7.26

AC ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? AC ಯು AB ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ AC = AB

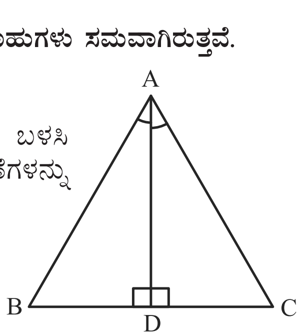
ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶವು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.3: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 7.2 ರ ವಿಲೋಮ

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AD ಯು ∠A ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.27 ಗಮನಿಸಿ). AB = AC ಮತ್ತು ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.27

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪರಿಹಾರ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACD ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle BAD = \angle CAD$ (ದತ್ತ)

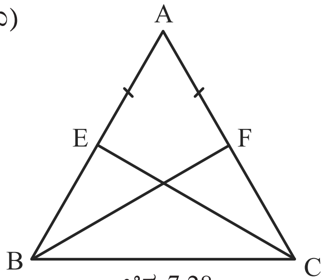
$AD = AD$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^{o}$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

$AB = AC$ (ಸ. ತ್ರಿ. ಅ. ಭಾ.)

ಅಥವಾ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.



ಚಿತ್ರ 7.28

ಉದಾಹರಣೆ 5: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು AC ಸಮಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.28 ಗಮನಿಸಿ). $BF = CE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ : Δ ABF ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = AC$ (ದತ್ತ)

$\angle A = \angle A$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$AF = AE$ (ಸಮಬಾಹುಗಳ ಅರ್ಧಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

$BF = CE$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$. BC ಯ ಮೇಲೆ $BE = CD$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.29 ನೋಡಿ). $AD = AE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

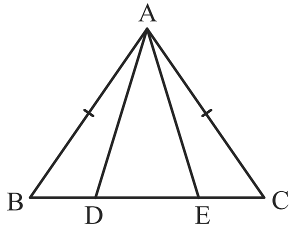
$AB = AC$ (ದತ್ತ) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು) .... (2)

ಹಾಗೂ $BE = CD$

ಆದುದರಿಂದ, $BE - DE = CD - DE$

ಅಂದರೆ $BD = CE$ .... (3)



ಚಿತ್ರ 7.29

ಆದುದರಿಂದ, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) ಮತ್ತು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ)

$AD = AE$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

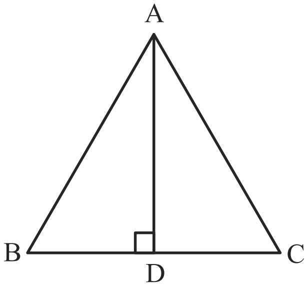
ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

(1) ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB = AC. ∠B ಮತ್ತು ∠C ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ 'O' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. A ಮತ್ತು O ಸೇರಿಸಿ.

(i) OB = OC

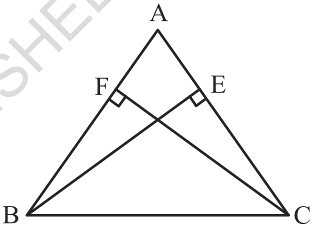
(ii) ∠A ನ್ನು AO ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

(2) ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು AD ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.30 ಗಮನಿಸಿ). AB = AC ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.30

(3) ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಸಮಬಾಹುಗಳಾದ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು CF ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.31 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

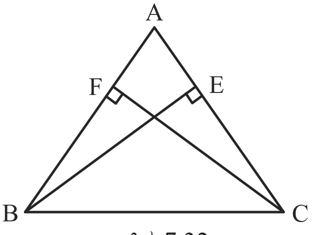


ಚಿತ್ರ 7.31

(4) ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು BF ಆಗಿದ್ದು ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.32 ಗಮನಿಸಿ).

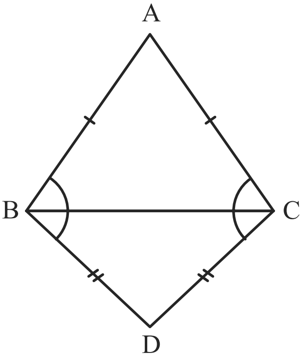
(i) ΔABE ≅ ΔACF

(ii) AB = AC ಅಂದರೆ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.32

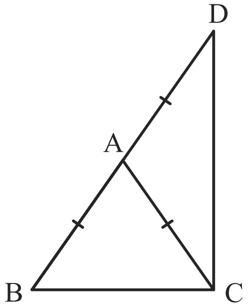
5) ABC ಮತ್ತು DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.33 ಗಮನಿಸಿ) ∠ABD =∠ACD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.33

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(6) Δ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. AB = AC ಆಗಿದೆ. AD = AB ಆಗುವಂತೆ BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.34 ಗಮನಿಸಿ). ∠BCD ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.34

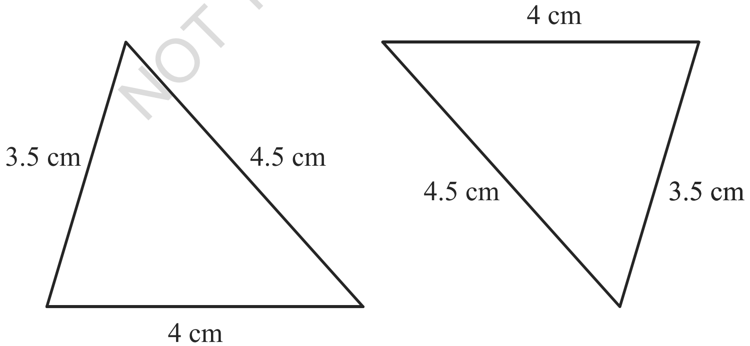
(7) ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. $\angle A = 90^o$ ಮತ್ತು AB = AC. ಆದರೆ ∠B ಮತ್ತು ∠C ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60^o ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಬಂಧನೆಗಳು

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಇದು ಸತ್ಯ.

ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 4cm, 3.5cm ಮತ್ತು 4.5cm ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 7.35ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ (ಮುಚ್ಚುತ್ತವೆ) ಆದುದರಿಂದ ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.35

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಮಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಯಮ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

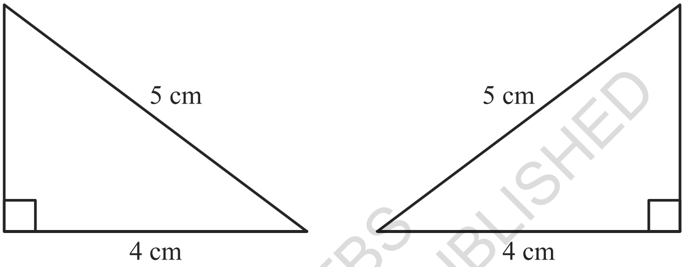
ಪ್ರಮೇಯ 7.4 : ಬಾಹು, ಬಾಹು, ಬಾಹು (ಬಾ ಬಾ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಂದು ಸೂಕ್ತ ರಚನೆ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನುರೂಪ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ.

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ :

ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.36 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.36

ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಸಮಬಾಹುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಬೇರೆ ಜೊತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಬರುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.5 : ಲಂಬಕೋನ, ವಿಕರ್ಣ, ಬಾಹು (ಲಂ. ವಿ. ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಲಂ. ವಿ. ಬಾ ಎಂದರೆ ಲಂಬಕೋನ, ವಿಕರ್ಣ, ಬಾಹು ಎಂದರ್ಥ. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

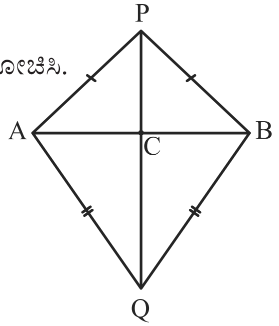
ಉದಾಹರಣೆ 7: AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ. AB ಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.37 ಗಮನಿಸಿ). PQ ವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : PA = PB ಮತ್ತು QA = QB ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.

PQ ⊥ AB ಮತ್ತು PQ ವು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

PQ ವು AB ಯನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಇರಬಹುದೇ? ಯೋಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.37

Δ PAQ ಮತ್ತು Δ PBQ ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

AQ = BQ (ದತ್ತ)

PQ = PQ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ, Δ PAQ $\cong \Delta$ PBQ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ನಿಯಮ)

$\angle$APQ = $\angle$BPQ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈಗ Δ PAC ಮತ್ತು Δ PBC ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

$\angle$APC = $\angle$BPC ($\angle$APQ = $\angle$BPQ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ Δ PAC $\cong \Delta$ PBC (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

AC = BC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ) .... (1)

ಮತ್ತು $\angle$ACP = $\angle$BCP (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಹಾಗೂ $\angle$ACP + $\angle$BCP = 180° (ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ 2$\angle$ACP = 180°

$\angle$ACP = 90° .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ PQ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

AP = BP (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

$\angle$PAC = $\angle$PBC (ΔAPB ಯಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

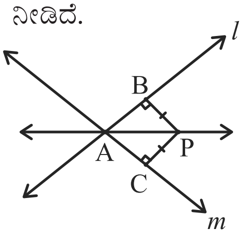
ಹೀಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ΔPAQ ಮತ್ತು ΔPBQ ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸದೇ ΔPAC $\cong$ ΔPBC ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಲ್ಲದೇ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಕೋನವು ಸಹ ಇಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಉದಾಹರಣೆ 8 : P ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ l ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.38 ಗಮನಿಸಿ). AP ಯು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪರಿಹಾರ : l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.38

$PB \perp l$, $PC \perp m$ ಆಗಿರಲಿ.

$PB = PC$ (ದತ್ತ)

$\angle PAB = \angle PAC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

Δ PAB ಮತ್ತು Δ PAC ಗಳಲ್ಲಿ

$PB = PC$ (ದತ್ತ)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^o$ (ದತ್ತ)

$PA = PA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (ಲಂ.ವಿ.ಬಾ ನಿಯಮ)

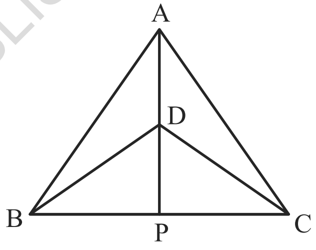
$\angle PAB = \angle PAC$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅಭ್ಯಾಸ 7.1 ಪ್ರಶ್ನೆ 5 ರ ಸಾಧಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶದ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ನಿಂತಿವೆ. A ಮತ್ತು D ಶೃಂಗಗಳು BC ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.39 ಗಮನಿಸಿ). AD ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅದು BC ಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.39

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

   (iii) $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle D$ ನ್ನು AP ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

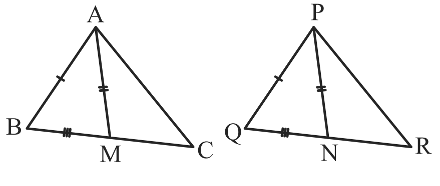
   (iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ AP ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. AB=AC ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಯು ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

   (i) BC ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

   (ii) $\angle A$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ AD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. Δ ABC ಯ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AM ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δ PQR ನ PQ ಮತ್ತು QR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PN ಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.40 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.40

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. BE ಮತ್ತು CF ಗಳು ΔABC ಯ ಸಮ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿವೆ. ಲಂ.ವಿ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು $AP \perp BC$ ಎಳೆಯಿರಿ.

7.6 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

(1) ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ವರ್ಗಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(4) $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ ಮತ್ತು $C \leftrightarrow R$ ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ PQR ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅದನ್ನು $\Delta\ ABC \cong \Delta\ PQR$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(5) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(6) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(7) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(8) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(9) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(10) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60°.

(11) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(12) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಲಂ. ವಿ. ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

3HIIL7

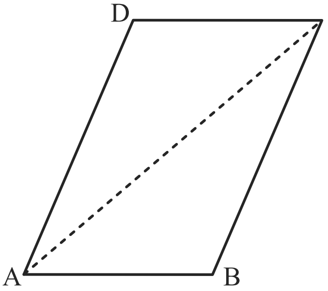
ಅಧ್ಯಾಯ – 8

ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

8.1. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಚತುರ್ಭುಜವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು, ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ,

ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಒಂದು ಹಾಳೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಕತ್ತರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 8.1 ಗಮನಿಸಿ). ನಿಮಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



ಚಿತ್ರ 8.1

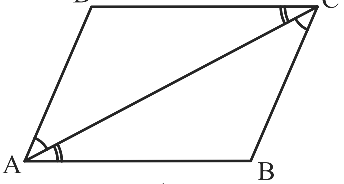
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ಬೇಕಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಸುತ್ತು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿಬಾರಿಯೂ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಈಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.1 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು AC ಅದರ ಕರ್ಣವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8.2 ಗಮನಿಸಿ). ಕರ್ಣ AC ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು Δ ABC ಮತ್ತು ΔCDA ಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.2

Δ ABC ಮತ್ತು Δ CDA ಗಳಲ್ಲಿ BC || AD ಮತ್ತು AC

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಛೇದಕ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BCA = \angle DAC$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ)

ಹಾಗೂ $AB \parallel DC$ ಮತ್ತು AC ಛೇದಕ.

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BAC = \angle DCA$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ)

ಮತ್ತು $AC = CA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta\ ABC \cong \Delta\ CDA$ (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta\ ABC \cong \Delta\ CDA$ (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

ಅಥವಾ ಕರ್ಣ AC ಯು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು Δ ABC ಮತ್ತು Δ CDA ಎಂಬ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

$AB = DC$ ಮತ್ತು $AD = BC$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ.

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ಗುಣಲಕ್ಷಣ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 8.2 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರ. ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? ಅವುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $AB = DC$ ಮತ್ತು $AD = BC$

ಈಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ವಿಲೋಮವೇನು? ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಅದರ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರುವುದು ಅದರ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯ 8.2 ನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೆ, ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ವಿಲೋಮವು:

ಪ್ರಮೇಯ 8.3 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

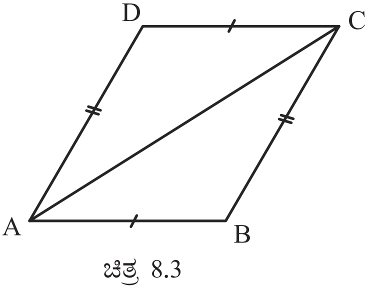
ಏಕೆಂದು ನೀವು ಕಾರಣ ನೀಡುವಿರಾ?

ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ $AB = CD$ ಮತ್ತು $AD = BC$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8.3 ಗಮನಿಸಿ). ಕರ್ಣ AC ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ CDA$ (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BAC = \angle DCA$

ಮತ್ತು $\angle BCA = \angle DAC$ (ಏಕೆ?)



ಚಿತ್ರ 8.3

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಈಗ ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಏಕೆ?

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದೇ? ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಾವು ಫಲಿತಾಂಶ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.4 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಈಗ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿಯೇ? ಹೌದು. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿ ಎಂದು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.5 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೊನಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಗುಣಲಕ್ಷಣವಿದೆ. ಅದನ್ನೇ ನಾವು ಈಗ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

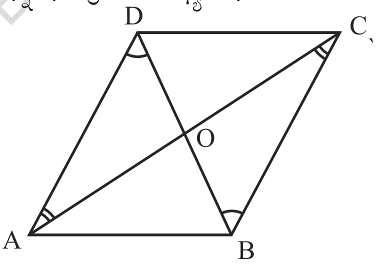
ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳು O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 8.4 ಗಮನಿಸಿ).

OA, OB, OC ಮತ್ತು OD ಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

OA = OC ಮತ್ತು OB = OD ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳಿಗೆ 'O' ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.4

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು–ಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿಯೂ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'O' ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ.

ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.6 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುವುದು? ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುವುದೇ? ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇದು ಸತ್ಯ.

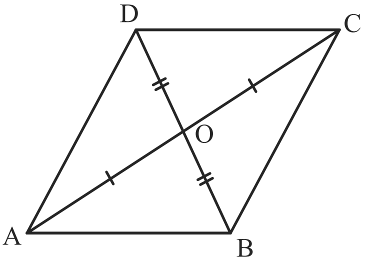
ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪ್ರಮೇಯ 8.6 ರ ವಿಲೋಮ. ಅದು ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪ್ರಮೇಯ 8.7 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಕೆಳಕಂಡ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀವು ನೀಡಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 8.5 ರಲ್ಲಿ OA = OC ಮತ್ತು OB = OD ದತ್ತವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 8.5

ಆದುದರಿಂದ, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ಏಕೆ?)

$\angle ABO = \angle CDO$ (ಏಕೆ?)

ಇದರಿಂದ $AB \parallel CD$ ಎಂದು ಆಗುತ್ತದೆ.

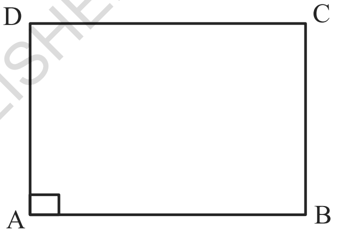
ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $BC \parallel AD$

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಆಯತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಆಯತ ಎಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಯತವು, ಒಂದು ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ಆಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.



ಚಿತ್ರ 8.6

ABCD ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿದ್ದು $\angle A = 90^0$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$AD \parallel BC$ ಮತ್ತು AB ಯು ಛೇದಕ (ಚಿತ್ರ 8.6 ಗಮನಿಸಿ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle A + \angle B = 180^0$ (ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದರೆ $\angle A = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ, $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

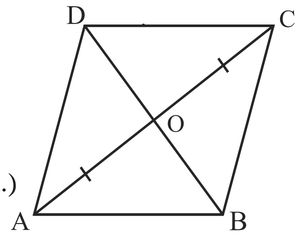
ಈಗ $\angle C = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle D = \angle B$ [ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

ಆದುದರಿಂದ $\angle C = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle D = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ ಆಯತದ ಪ್ರತಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 8.7 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 8.7

AB = BC = CD = DA ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. (ಏಕೆ?)

ಈಗ ΔAOD ಮತ್ತು ΔCOD ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OC (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.)

OD = OD (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

AD = CD

ಆದುದರಿಂದ $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

$\angle AOD = \angle COD$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಆದರೆ $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದುದರಿಂದ, $2 \angle AOD = 180^0$

$\angle AOD = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ. ಬಾಹ್ಯಕೋನ PAC ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು CD || AB (ಚಿತ್ರ 8.8 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ ಮತ್ತು (ii) ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಆದರಿಂದ, AB = AC (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle ABC = \angle ACB$ (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಹಾಗೂ $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ)

ಅಥವಾ $\angle PAC = 2 \angle ACB$ .... (1)

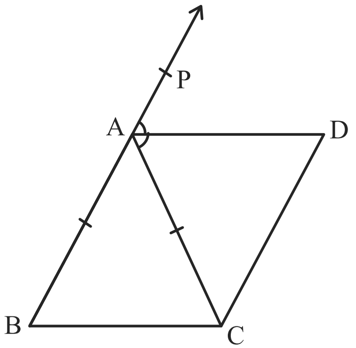
ಈಗ $\angle PAC$ ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle PAC = 2 \angle DAC$ .... (2)

ಆಗ $2 \angle DAC = 2 \angle ACB$ ((1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ)

ಅಥವಾ $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) ಈಗ ಸಮಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ BC ಮತ್ತು AD ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು AC ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.8

ಆದುದರಿಂದ BC || AD

ಹಾಗೂ BA || CD (ದತ್ತ)

ಈಗ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ : 4 ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ l ಮತ್ತು m ನ್ನು ಛೇದಕ p ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 8.9ಗಮನಿಸಿ).

ಈಗ ಒಳಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

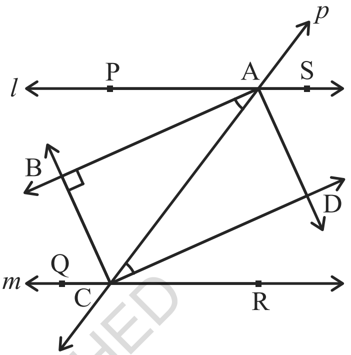
ಪರಿಹಾರ : PS || QR ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ಛೇದಕ p ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

$\angle$ PAC ಮತ್ತು $\angle$ ACQ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು B ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

$\angle$ ACR ಮತ್ತು $\angle$ SAC ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

ABCD ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈಗ $\angle$ PAC = $\angle$ ACR (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು $l \parallel m$ ಮತ್ತು p ಛೇದಕ)



ಚಿತ್ರ 8.9

ಆದುದರಿಂದ $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

ಅಂದರೆ $\angle BAC = \angle ACD$

ಇವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು. ಇಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು DC ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು AC ಛೇದಕ. ಹಾಗೂ ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ AB || DC

ಅದೇ ರೀತಿ BC || AD (∠ ACB ಮತ್ತು ∠ CAD ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ)

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಹಾಗೂ $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದುದರಿಂದ, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$

ಅಥವಾ $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

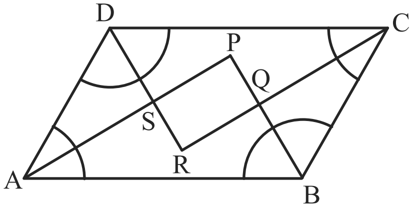
ಅಥವಾ $\angle BAD = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಯು ಒಂದು ಕೋನ 90^0 ಇರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಆದುದರಿಂದ, ABCD ಒಂದು ಆಯತ.

ಉದಾಹರಣೆ : 5 ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle$A ಮತ್ತು $\angle$ B , $\angle$ B ಮತ್ತು $\angle$ C, $\angle$ C ಮತ್ತು $\angle$ D, $\angle$ D ಮತ್ತು $\angle$ A ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R, ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ (ಚಿತ್ರ 8.10 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 8.10

Δ ASD ಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

$\angle$D ಯನ್ನು DS ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\angle$ A ಯನ್ನು

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

AS ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ,

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180^0$ ($\angle A$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳು ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು)

$= 90^0$

ಹಾಗೂ $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

ಅಥವಾ $90^0 + \angle DSA = 180^0$

ಅಥವಾ $\angle DSA = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ $\angle PSR = 90^0$ ($\angle DSA$ ಮತ್ತು $\angle PSR$ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle APB = 90^0$ ಅಥವಾ $\angle SPQ = 90^0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ($\angle DSA$ ಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ)

ಹಾಗೆಯೇ $\angle PQR = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle SRQ = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

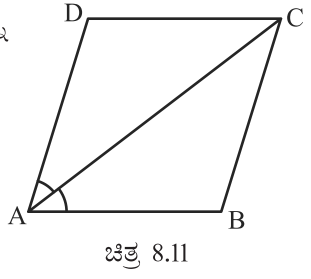
ಇದನ್ನು ಆಯತ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೇ? ಅದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. $\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ (ಎಲ್ಲಾ ಕೋನವೂ) 90^0 ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಆಯತ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ ಅದು ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಕರ್ಣ AC ಯು $\angle A$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 8.11 ಗಮನಿಸಿ).
   (i) ಅದು $\angle C$ ಯನ್ನೂ ಸಹ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ
   (ii) ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 8.11

4. ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ. AC ಕರ್ಣವು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣವು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ DP = BQ ಆಗುವಂತೆ ಕರ್ಣ BD ಯ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.12 ಗಮನಿಸಿ).

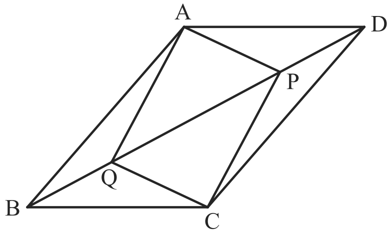
(i) Δ APD $\cong \Delta$ CQB

(ii) AP = CQ

(iii) Δ AQB $\cong \Delta$ CPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

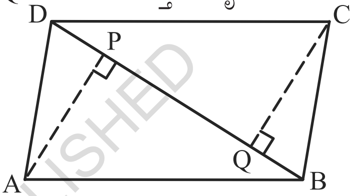


ಚಿತ್ರ 8.12

6. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AP ಮತ್ತು CQ ಗಳು A ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳಿಂದ BD ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ. ((ಚಿತ್ರ 8.13 ಗಮನಿಸಿ).

(i) Δ APB $\cong \Delta$ CQD

(ii) AP = CQ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 8.13

7. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB||CD ಮತ್ತು AD = BC ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.14 ಗಮನಿಸಿ).

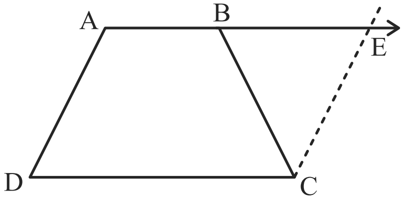
(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) Δ ABC $\cong \Delta$ BAD

(iv) ಕರ್ಣ AC = ಕರ್ಣ BD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[**ಸುಳಿವು** : AB ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. C ಮೂಲಕ DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ರೇಖೆ AB ಯಿಂದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ]

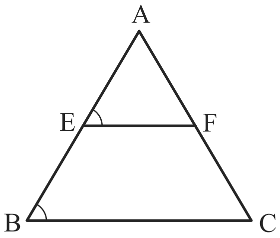


ಚಿತ್ರ 8.14

8.2 ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ

ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈಗ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.

ABC ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ. E ಮತ್ತು F ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. E ಮತ್ತು F ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 8.15 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 8.15

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

EF ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\angle$ AEF ಮತ್ತು $\angle$ ABC ಯನ್ನೂ ಸಹ ಅಳೆಯಿರಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

$EF = \frac{1}{2}BC$ ಮತ್ತು $\angle AEF = \angle ABC$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

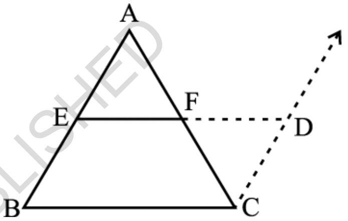
ಆದುದರಿಂದ EF || BC

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆ ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.8 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸುಳಿವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ8.16 ಗಮನಿಸಿ. ABಮತ್ತು ACಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು CD || BA



ಚಿತ್ರ 8.16

Δ AEF $\cong$ Δ CDF (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

ಆದುದರಿಂದ, EF = DF ಮತ್ತು BE = AE = DC (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, BCDE ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ (ಏಕೆ?)

ಇದರಿಂದ EF || BC

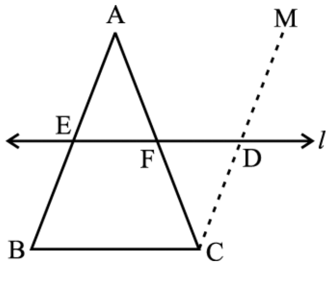
ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$. ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.8 ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನೀವು ನಿರೂಪಿಸುವಿರಾ? ವಿಲೋಮವು ಸರಿಯೇ?

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿ. ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 8.9 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 8.17 ರಲ್ಲಿ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. l ರೇಖೆಯು E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು CM || BA .



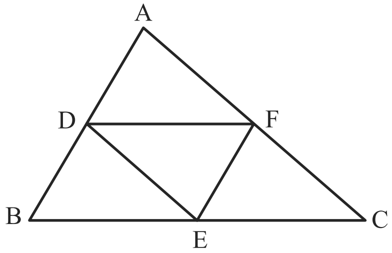
ಚಿತ್ರ 8.17

Δ AEF ಮತ್ತು Δ CDF ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ AF = CF ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಉದಾಹರಣೆ : 6

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB, BC ಮತ್ತು CA ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.18 ಗಮನಿಸಿ). D, E ಮತ್ತು F ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, Δ ABC ಯು ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 8.18

ಪರಿಹಾರ : Δ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು D ಮತ್ತು E ಆಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 8.8 ರಿಂದ DE || AC

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ DF || BC ಮತ್ತು EF || AB.

ಆದುದರಿಂದ ADEF, BDFE ಮತ್ತು DFCE ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

ಈಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ BDFE ಯ ಕರ್ಣ DE ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\Delta BDE \cong \Delta FED$

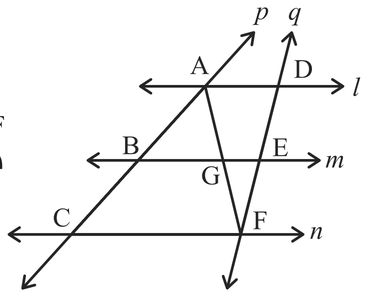
ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\Delta DAF \cong \Delta FED$

ಮತ್ತು $\Delta EFC \cong \Delta FED$

ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : 7 : *l*, *m* ಮತ್ತು *n* ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು *p* ಮತ್ತು *q* ಛೇದಕಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. *p* ಮೇಲೆ *l*, *m* ಮತ್ತು *n* ಗಳು AB ಮತ್ತು BC ಸಮಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿವೆ (ಚಿತ್ರ 8.19 ನೋಡಿ).

l, m ಮತ್ತು *n* ಗಳು *q* ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಸಮಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 8.19

ಪರಿಹಾರ : AB = BC ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ನಾವು DE = EF ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

m ರೇಖೆಯನ್ನು G ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ A ಮತ್ತುF ಗಳುನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ACFD ಯು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ Δ ACF ಮತ್ತು Δ AFD

Δ ACF ನಲ್ಲಿ AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು B ಆಗಿದೆ. (AB = BC)

ಮತ್ತು BG || CF (m || n ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

ಆದುದರಿಂದ, AF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು G ಆಗಿದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ 8.9 ಯನ್ನು ಬಳಸಿದೆ)

ಈಗ Δ AFD ಯಲ್ಲಿ AF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು G ಎಂದು ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. GE||AD ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 8.9 ಯಿಂದ DF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ DE = EF

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ l, m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳು q ರೇಖೆಯು ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಸಮಭೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

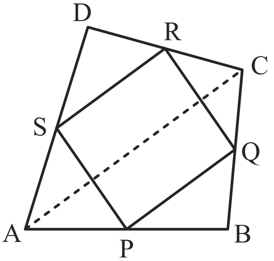
ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 8.20 ಗಮನಿಸಿ). AC ಕರ್ಣ ಆದರೆ,

   (i) SR || AC ಮತ್ತು $SR = \frac{1}{2}AC$

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

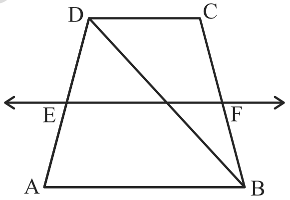


ಚಿತ್ರ 8.20

2. ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ. PQRS ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. ABCD ಒಂದು ಆಯತ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ. PQRS ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

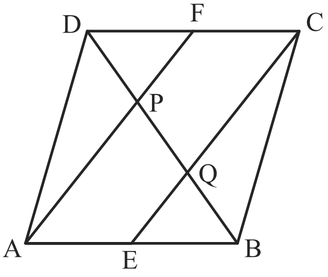
4. ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ. AB || DC, BD ಕರ್ಣ ಮತ್ತು AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿದೆ. E ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BC ಯನ್ನು F ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 8.21 ಗಮನಿಸಿ). BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು F ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 8.21

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

5. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.22 ಗಮನಿಸಿ). AF ಮತ್ತು EC ರೇಖಾಖಂಡಗಳು BD ಕರ್ಣವನ್ನು ತ್ರಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



8.22

6. ABC ಯು $\angle C$ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. ವಿಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ರೇಖೆ–ಯು AC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

   (i) AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D

   (ii) $MD \perp AC$

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

8.3 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

2. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ,

   (i) ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.

   (ii) ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

   (iii) ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

3. ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

4. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

5. ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

6. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದು.

7. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

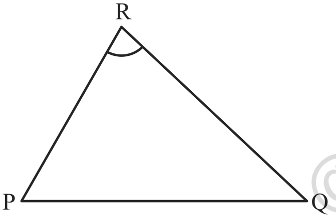
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಧ್ಯಾಯ –9

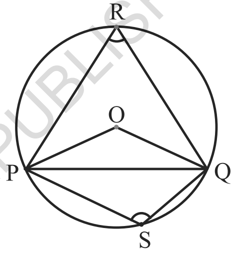
ವೃತ್ತಗಳು

9.1 ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ

ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ PQ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದು R ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. PR ಮತ್ತು QR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 9.1 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 9.1

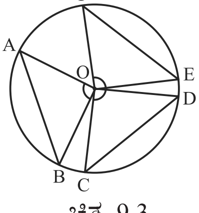


ಚಿತ್ರ 9.2

$\angle PRQ$ ಕೋನವನ್ನು PQ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಚಿತ್ರ 9.2 ರಲ್ಲಿ $\angle POQ$, $\angle PRQ$ ಮತ್ತು $\angle PSQ$ ಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? $\angle POQ$ ಇದು PQ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ 'O' ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವಾಗಿದೆ. $\angle PRQ$ ಮತ್ತು $\angle PSQ$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ PQ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ R ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕಕಂಸ ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದಾಗ ಜ್ಯಾದ ಅಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕೂಡಾ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು? ಆಗ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ?

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 9.3 ಗಮನಿಸಿ). ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಆ ಜ್ಯಾಗಳಿಂದಾಗಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಈಗ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ.



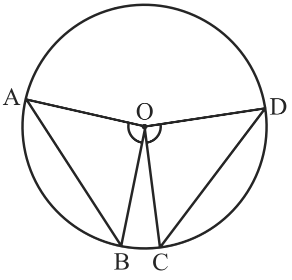
ಚಿತ್ರ 9.3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಪ್ರಮೇಯ 9.1: ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : AB ಮತ್ತು CD ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು (ಚಿತ್ರ 9.4 ಗಮನಿಸಿ)

ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು. $\angle AOB = \angle COD$



ಚಿತ್ರ 9.4

Δ AOB ಮತ್ತು Δ COD ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OC (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

OB = OD (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

AB = CD (ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta COD$

(ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

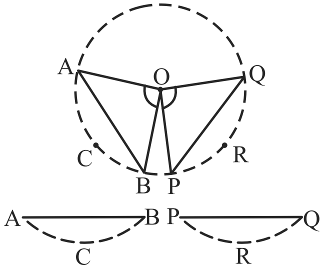
ಇದರಿಂದ $\angle AOB = \angle COD$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

ಗಮನಿಸಿ: ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ "**ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು**" ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಲು **ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ. (CPCT)** ಎಂಬ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಹೇಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳುತ್ತೀರಿ? ಅವುಗಳು ಸಮನಾಗಿವೆಯೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಪೇಪರ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಡಿಸ್ಕ್ (Disk) ನ ಆಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರ A ಮತ್ತು B ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವಂತೆ 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle AOB$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. O ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $\angle AOB$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು $\angle POQ$ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ. AB ಮತ್ತು PQ ಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಈ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 9.5 ಗಮನಿಸಿ) ನೀವು ACB ಮತ್ತು PRQ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟರೆ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 9.5

AB = PQ ನೀವು ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೂ ಕೂಡಾ ಬೇರೆ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದಾಗಿ, ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 9.2: ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳಿಂದ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 9.4 ರಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ:

ನೀವು $\angle AOB = \angle COD$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಆಗ, Δ AOB $\cong$ Δ COD (ಯಾಕೆ ?)

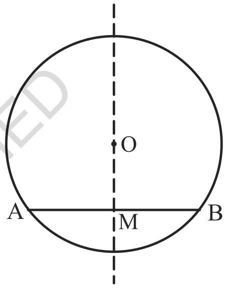
ಈಗ ನೀವು AB = CD ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದೇ ?

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಮನಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9.2 ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಒಂದು ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಹಾಳೆಯ (ಪೇಪರ್) ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. 'O' ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಆಗಿರಲಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ AB ರಚಿಸಿ. ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬೀಳುವಂತೆ 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಮಡಚಿ. ಈ ಮಡಚಿದ ಗೆರೆಯು AB ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ ಅಥವಾ OM ರೇಖೆ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. B ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದಯೇ ? (ಚಿತ್ರ 9.6ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಹೌದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ MA = MB.



ಚಿತ್ರ 9.6

OA ಮತ್ತು OB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಲಂಬಕೋನ Δ OMA ಮತ್ತು Δ OMB ಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವೇ ಸ್ವತಹಃ ಸಾಧಿಸಿ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾದ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿದೆ.

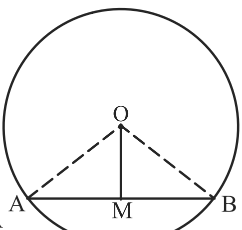
ಪ್ರಮೇಯ 9.3 : ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು? ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಮೇಯ 9.3 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಉಹಾಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ? ಮತ್ತು ಯಾವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಯು "ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ" "ಆ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 9.4 : ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು ಸರಿಯೇ ? ಕೆಲವು ಪ್ರಕರಣಗಳಿಗೆ ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಿ. ನಾವು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ ಮತ್ತು ನೀವು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ, O ಬಿಂದುವನ್ನು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು OM $\perp$ AB. OA ಮತ್ತು OB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.7ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 9.7

Δ OAM ಮತ್ತು Δ OBM ಗಳಲ್ಲಿ,

OA = OB (ಯಾಕೆ?)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

AM = BM (ಯಾಕೆ?)

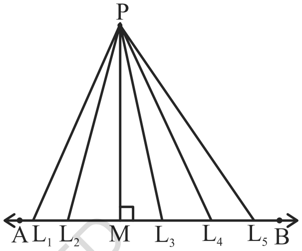
OM = OM (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, Δ OAM $\cong$ Δ OBM (ಹೇಗೆ?)

ಇದರಿಂದ, $\underline{|OMA}$ = $\underline{|OMB}$ = 90° (ಯಾಕೆ?)

9.3 ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ

AB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. P ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬಿಂದುಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ನೀವು PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4.......ಇತ್ಯಾದಿ, ಅಸಂಖ್ಯಾತ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ AB ನಿಂದ P ಗೆ ಇರುವ ದೂರ ಯಾವುದು? ಒಂದು ಕ್ಷಣ ಯೋಚಿಸಿ, ನೀವು ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ P ನಿಂದ AB ಗಿರುವ ಲಂಬ PM ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಟ ದೂರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 9.8ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಕನಿಷ್ಟ ಅಳತೆ PM ಇದು AB ನಿಂದ P ಗೆ ಇರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವೀಗ ಇದನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

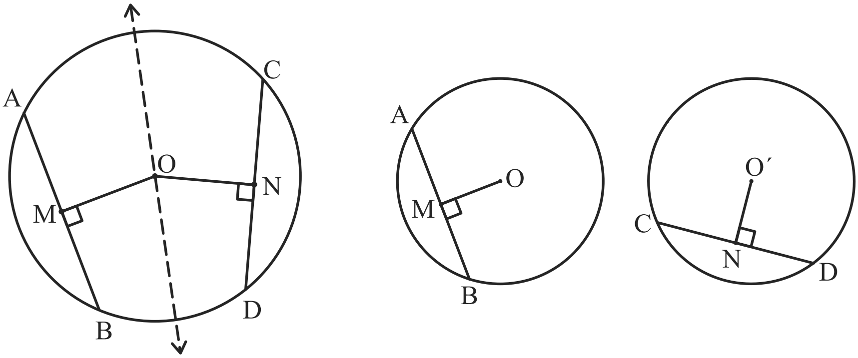


ಚಿತ್ರ 9.8

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದವೇ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಿರುವ ದೂರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ಜ್ಯಾಕ್ಕಿಂತ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ ನೀವಿದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅತ್ಯಂತ ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾ ಆದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೂ ಇರುವ ದೂರವೇನು? ಕೇಂದ್ರವು ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿರುವ ಕಾರಣ ದೂರವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೆ? ಈಗ ನಾವದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.



(i) (ii)

ಚಿತ್ರ 9.9

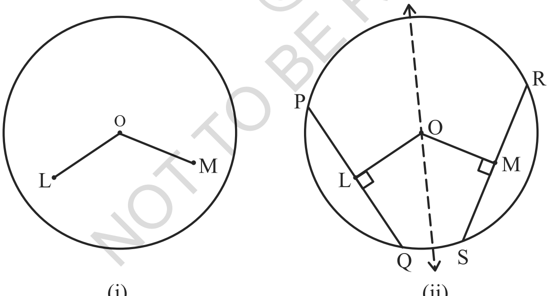
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತ ರಚಿಸಿ. ಅದರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನೆಳೆದು ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ OM ಮತ್ತು ON ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. B ಯು D ಯ ಮೇಲೆ ಹಾಗೂ A ಯು C ಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮಡಚಿ (ಚಿತ್ರ 9.9 (1)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). O ಬಿಂದುವು ಮಡಚಿದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ N ಬಿಂದುವು M ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ OM = ON. O ಮತ್ತು O^1 ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ರಚಿಸಿ, ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಈ ಜ್ಯಾಗಳ ಮೇಲೆ OM ಮತ್ತು O^1N ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.9 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, AB ಯ ಮೇಲೆ CD ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಇಡಿ. ಆಗ O ಮತ್ತು O^1 ಹಾಗೂ M ಮತ್ತು N ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 9.5 : ವೃತ್ತದ (ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ) ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ(ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ) ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ನಂತರ, ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು ಸರಿಯೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ 'O' ದಿಂದ ಸಮ ಅಳತೆಯ OL ಮತ್ತು OM ಎಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 9.10 (1)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). OL ಮತ್ತು OM ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ PQ ಮತ್ತು RS ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 9.10 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). PQ ಮತ್ತು RS ಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿವೆಯೆ? ಇಲ್ಲ ಎರಡೂ ಸಮನಾಗಿವೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮನಾದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.



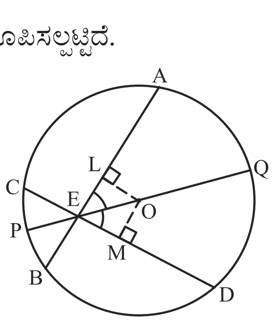
ಚಿತ್ರ 9.10

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 9.5 ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 9.6: ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ, ಪರಸ್ಪರ ಭೇದಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಅವುಗಳ ಭೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 9.11

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪರಿಹಾರ : 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\angle AEQ = \angle DEQ$ (ಚಿತ್ರ 9.11 ಗಮನಿಸಿ) ಆಗುವಂತೆ PQ ವು E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು AB = CD

AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ OL ಮತ್ತು OM ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (Δ ದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

Δ OLE ಮತ್ತು Δ OME ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle LEO = \angle MEO$ (ಯಾಕೆ?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ)

EO = EO (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (ಯಾಕೆ?)

ಇದರಿಂದ OL = OM (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)

ಆದರೆ AB = CD (ಯಾಕೆ?)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

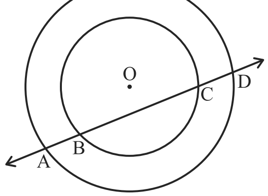
ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. 5cm ಮತ್ತು 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 4cm ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವೃತ್ತದಲ್ಲೇ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಅದ–ಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ. ಛೇದಕ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಎರಡು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು (ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು) A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ. AB = CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.12ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



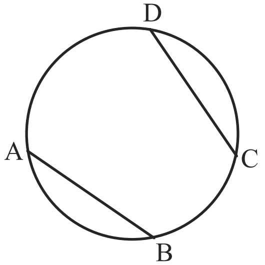
ಚಿತ್ರ 9.12

5 ರೇಷ್ಮಾ, ಸಲ್ಮಾ, ಮಂದೀಪ್ ಎಂಬ ಮೂವರು ಹುಡುಗಿಯರು ಒಂದು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ 5 ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಂತು ಆಟವಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ರೇಷ್ಮಾ ಸಲ್ಮಾಳಿಗೆ ಚೆಂಡು ಎಸೆದರೆ, ಸಲ್ಮಾ ಮಂದೀಪ್‌ಗೆ ಹಾಗೂ ಮಂದೀಪ್ ರೇಷ್ಮಾಳಿಗೆ ಚೆಂಡು ಎಸೆಯುತ್ತಾರೆ. ರೇಷ್ಮಾ ಮತ್ತು ಸಲ್ಮಾ ಹಾಗೂ ಸಲ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ್ ಇವರುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 6m, ಆದರೆ ರೇಷ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ್ ನಡುವಿನ ದೂರವೇನು?

6 ಒಂದು ಕಾಲೋನಿಯಲ್ಲಿ 20m ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವಿದೆ. ಅಂಕುರ, ಸೈಯದ್, ಡೇವಿಡ್ ಎಂಬ ಮೂರು ಹುಡುಗರು ಈ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನಲ್ಲಿ ಸಮದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಮಾತನಾಡಲು ಆಟಿಕೆಯ ಟೆಲಿಫೋನ್ ಇದೆ. ಪ್ರತಿ ಫೋನಿನ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.4 ವೃತ್ತದ ಕಂಸದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ:

ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಧಿಕಕಂಸ ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆಗ ವೃತ್ತಕಂಸಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ ? ಒಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕಂಸವು ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೇ ನಿಜವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಹೇಗೆಂದರೆ ಬಗ್ಗಿಸದೆ ತಿರುಗಿಸದೆ ಒಂದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲಿಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.



?

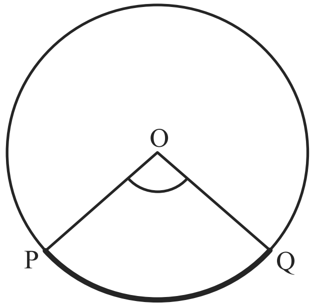
ಚಿತ್ರ 9.13

ಈ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಚಿತ್ರ 9.13ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ CD ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಕಂಸವನ್ನು CD ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಕತ್ತರಿಸಿ ಅದನ್ನು AB ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡಿರುವ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ CD ಯು AB ಯ ಮೇಲೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 9.13ಗಮನಿಸಿ) ಇದರಿಂದ **ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ**. ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನೀವು ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವೆಂದರೆ ಆ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ ಲಘುಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಅಧಿಕ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 9.14ರಲ್ಲಿ ಲಘುಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಕೋನ $\angle POQ$ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರ O ನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಸರಳಾಧಿಕ $\angle POQ$ ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.14

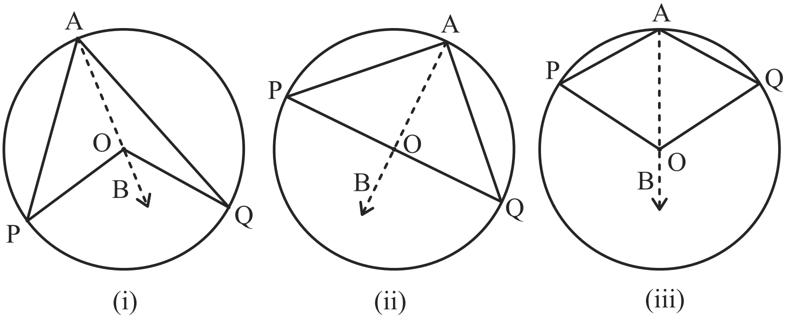
ವೃತ್ತದ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು (ಸಮನಾದ ಕಂಸಗಳು) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಲಘುಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಪ್ರಮೇಯ 9.7: ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ:– ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $\angle POQ$ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಭಾಗದ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle PAQ$ ವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು $\angle POQ = 2\angle PAQ$.



ಚಿತ್ರ 9.15

ಚಿತ್ರ 9.15 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

i. ರಲ್ಲಿ PQ ಲಘುಕಂಸ   ii. ರಲ್ಲಿ PQ ಅರ್ಧವೃತ್ತಕಂಸ   iii. ರಲ್ಲಿ PQ ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾಗಿದೆ.

AO ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು B ಯವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಕೋನವು ಅದರ ಅಂತಸ್ಥಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ΔOAQ ನಲ್ಲಿ

$OA = OQ$ .... (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle OAQ = \angle OQA$ .... (ಪ್ರಮೇಯ 7.5)

ಇದರಿಂದ, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ .... (1)

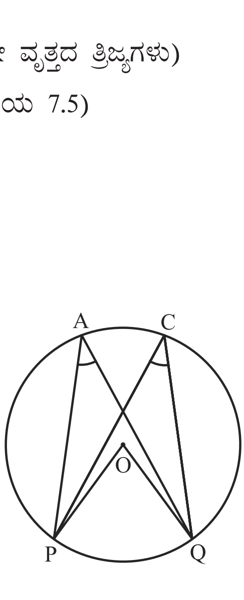
ಹಾಗೆಯೇ $\angle BOP = 2\angle OAP$ .... (2)

1 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ಅಂದರೆ $\angle POQ = 2\angle PAQ$ .... (3)

ಪ್ರಕರಣ (iii) ರಲ್ಲಿ PQ ಅಧಿಕಕಂಸವಾಗಿದೆ. (3) ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.
ಸರಳಾಧಿಕ $\angle POQ = 2\angle PAQ$

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೇಳೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. PQ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಪಡೆದರೆ ಆಗ $\angle PAQ$ ವನ್ನು PAQP ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಚಿತ್ರ 9.16

ಪ್ರಮೇಯ 9.7ರಲ್ಲಿ ಲಘುಕಂಸ PQ ವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ A ಯು

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೇಳೆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (ಚಿತ್ರ 9.16 ಗಮನಿಸಿ) ಆಗ

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

ಆದ್ದರಿಂದ : $\angle PCQ = \angle PAQ$

ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 9.8 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದೇ ಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

ಪುನಃ ಪ್ರಮೇಯ 12.8ರ ಪ್ರಕರಣ (ii) ನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $\angle PAQ$ ಇದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನ.

ಅದು ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡದಕೋನ ಮತ್ತು $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬೇರೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪುನಃ ನೀವು $\angle PCQ = 90°$ ಎಂದು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವು ವೃತ್ತದ ಮತ್ತೊಂದು ಗುಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

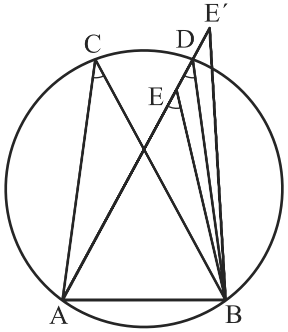
ಪ್ರಮೇಯ 9.8ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿ, ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 9.9: ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ. (ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ).

ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನೀವು ಹೀಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 9.17 ರಲ್ಲಿ AB ಯು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಇದು C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\angle ACB = \angle ADB$

A,B,C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾದರೆ A,B,C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಇದು D ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗದಿದ್ದರೆ ಅದು AD ಯನ್ನು (ಅಥವಾ AD ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು) E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ (E^1 ನಲ್ಲಿ) ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.17

A,C,E ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ

$\angle ACB = \angle AEB$
(ಯಾಕೆ?)

ಆದರೆ $\angle ACB = \angle ADB$ (ದತ್ತ)

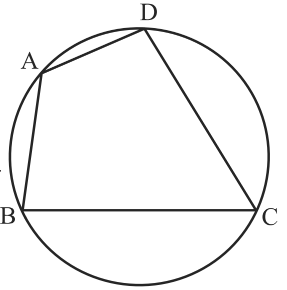
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AEB = \angle ADB$

E ಮತ್ತು D ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೆ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗೆಯೇ E^1 ಇದು D ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗಲೇಬೇಕು.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.5 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು



ಚಿತ್ರ 9.18

ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 9.18ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಈ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ವಿಶೇಷವಾದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ. ವಿವಿಧ ಅಳತೆಯ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಹಲವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ (ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಹಲವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು). ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕ್ರ.ಸಂ	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಿರಿ?

$\angle A + \angle C = 180$ ಮತ್ತು $\angle B + \angle D = 180°$ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಅಳತೆಯಲ್ಲಾದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದರೆ ಇದು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತದೆ.

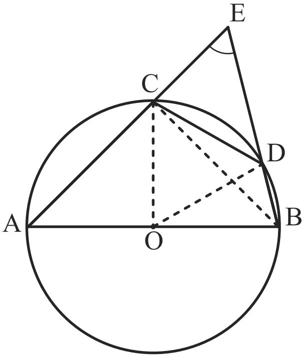
ಪ್ರಮೇಯ 9.10 : ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿ. ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 9.11 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನೀವು ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಮೇಯ 9.9 ರಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚಿತ್ರ 9.19 ರಲ್ಲಿ AB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. CD ಯು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾವಾಗಿದೆ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle AEB = 60°$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 9.19

ಪರಿಹಾರ: OC, OD ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

ΔODC ಯು ಸಮಬಾಹುತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ (ಯಾಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle COD = 60°$

ಈಗ: $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ಪ್ರಮೇಯ 9.7)

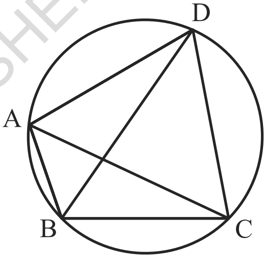
ಇದರಿಂದ $\angle CBD = 30°$

ಮತ್ತು $\angle ACB = 90°$ (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗೆ $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

ಇದರಿಂದ $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$ ಅಂದರೆ $\angle AEB = 60°$

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಿತ್ರ 9.20ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಕರ್ಣಗಳು $\angle DBC = 55°$, ಮತ್ತು $\angle BAC = 45°$ ಆದರೆ $\angle BCD$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.20

ಪರಿಹಾರ: $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55° + 45° = 100°$

ಆದರೆ $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

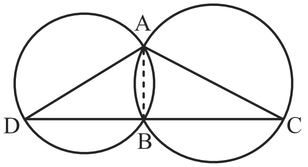
ಆದುದರಿಂದ $\angle BCD = 180° - 100 = 80°$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. AD ಮತ್ತು AC ಗಳು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು. (ಚಿತ್ರ 9.21 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). B ಯು DC ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : AB ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90° \\ \angle ABC = 90°\end{array}\right\}$$ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನ



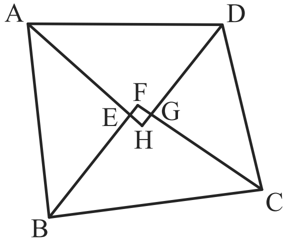
ಚಿತ್ರ 9.21

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

ಆದ್ದರಿಂದ DBC ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಅಂದರೆ B ಯು DC ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ 9.22 ರಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AH, BF, CF ಮತ್ತು DH ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವು EFGH ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.22

ಈಗ $\angle FEH = \angle AEB = 180 - (\angle EAB - \angle EBA)$ (ಏಕೆ?)

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

ಮತ್ತು $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ (ಏಕೆ?)

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\angle FEH + \angle FGH = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

$$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

$$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

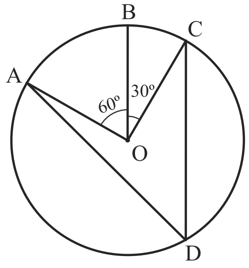
$$= 360^0 - 180^0 = 180^0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 9.11ರಿಂದ EFGH ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

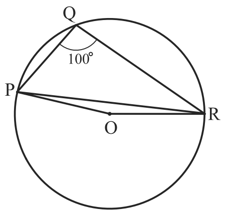
1. ಚಿತ್ರ 9.23 ರಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\angle BOC = 30^\circ$ ಮತ್ತು $\angle AOB = 60^\circ$ ಇರುವಂತೆ A,B,C ಗಳು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು. ಕಂಸ ABC ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ D ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ $\angle ADC$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.23

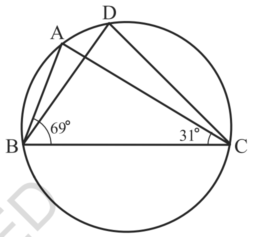
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಆ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಲಘುಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅಧಿಕಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಚಿತ್ರ 9.24 ರಲ್ಲಿ $\angle PQR = 100^\circ$ P,Q,R ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು, $\angle OPR$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



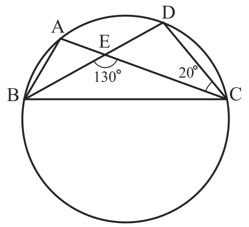
ಚಿತ್ರ 9.24

4. ಚಿತ್ರ 9.25 ರಲ್ಲಿ $\angle ABC = 69^\circ$, $\angle ACB = 31^\circ$ ಆದರೆ $\angle BDC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.25

5. ಚಿತ್ರ 9.26 ರಲ್ಲಿ A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು $\angle BEC = 130^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ECD = 20^\circ$ ಇರುವಂತೆ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle BAC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.26

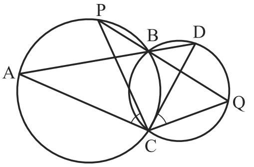
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. ABCDಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle DBC = 70^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$ ಆದರೆ $\angle BCD$ ಯನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ AB = BC ಆದರೆ $\angle ECD$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು B ಮತ್ತು C ಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. B ಯ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ABD ಮತ್ತು PBQ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A,D,P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 9.27 ಗಮನಿಸಿ) $\angle ACP = \angle QCD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 9.27

10. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಭುಜದ 3ನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. ΔABC ಮತ್ತು ΔADC ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಕರ್ಣ AC ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು $\angle CAD = \angle CBD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಚಕ್ರೀಯ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಗ್ರಹವೇ ವೃತ್ತ.
2. ವೃತ್ತದ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು (ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.
3. ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.
4. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.
5. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತದ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
7. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.
8. ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಗಳು (ಲಘು ಅಧಿಕ) ಸರ್ವಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

10. ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಇತರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

11. ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

12. ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

13. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

14. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

15. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3I2APH

ಅಧ್ಯಾಯ – 10

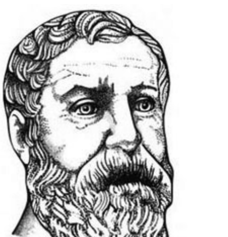
ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

10.1 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರ ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ , ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ, ಒಂದು ವೇಳೆ ನಮಗೆ ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರದ ಅಳತೆಯು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಈಗಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ 40 m, 32 m ಮತ್ತು 24 m ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವಿದೆ. ನೀವು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಿರಿ. ನೀವು ತ್ರಿಭುಜದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀವು ಮೊದಲು ಲೆಕ್ಕಿಸಲೇಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಸುಳಿವು ಇಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಿಮಗೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ.

ಹೆರಾನ್ ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಶ.10ರಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದ ಅಲೇಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದರು. ಅವರು ಅನ್ವಯಿಕ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮತ್ತು ಭೌತಿಕ ವಿಷಯದ ಮೇಲೆ ಅವರು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಬಹಳಷ್ಟು ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂದಿನ ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವರನ್ನು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಎನ್ಸೈಕ್ಲೋಪಿಡಿಯಾ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅವರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕೆಲಸಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಇದ್ದು ಅದನ್ನು ಮೂರು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಮೊದಲ ಪುಸ್ತಕವು ಚೌಕಗಳ, ಆಯುತಗಳ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ (Trapezia) ಗಳ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ರೂಪದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ, ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ, ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳ, ಶಂಕುಗಳ, ಗೋಳಗಳ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೆರಾನ್‌ರವರು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅದರ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾರೆ.



ಹೆರಾನ್
(ಕ್ರಿ.ಶ. 10 – ಕ್ರಿ.ಶ. 75)
ಚಿತ್ರ 10.1

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ಹೆರಾನ್** ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೆರೋಸ್ (Hero's) ಸೂತ್ರ ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅದರ ಹೇಳಿಕೆಯು **ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$** (I)

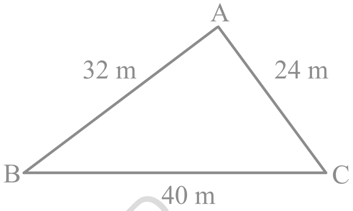
ಇಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು s = ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆ, ಅಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆ = $\frac{a+b+c}{2}$.

ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 10.2ಗಮನಿಸಿ.)

a = 40 m, b = 24 m, c = 32 m ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ $s = \frac{40+24+32}{2}$ m

= 48 m



ಚಿತ್ರ 10.2

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$$

$$= 384 \text{ m}^2$$

ಇಲ್ಲಿ, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು ಅಂದರೆ BC ಯು 40 m ಇದ್ದು ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಕರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು AB ಹಾಗೂ AC ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 90° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು = $\frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಈಗ ದೊರೆತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮವಾಗಿ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನೀವು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಮೊದಲು ಚರ್ಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಸೂತ್ರದ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

(i) ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 10 cm ಇರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

(ii) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಸಮಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 5 cm ಮತ್ತು ಅಸಮ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 8 cm.

ನೀವು ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

(i) ರಿಂದ, ನಮಗೆ $s = \frac{10+10+10}{2} = 15$ cm

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ cm²

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ cm²

$= 25\sqrt{3}$ cm²

(ii) ರಿಂದ, ನಮಗೆ $s = \frac{8+5+5}{2} = 9$ cm

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}$ cm²

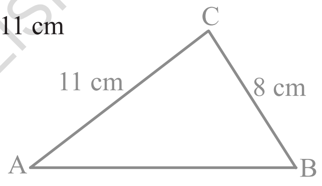
$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ cm²

$= 12$ cm²

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು 8 cm ಹಾಗೂ 11 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 32*cm* ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 10.3 ಗಮನಿಸಿ]

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ = 32 cm, $a = 8$ cm ಮತ್ತು $b = 11$ cm



ಚಿತ್ರ 10.3

ಮೂರನೇ ಬಾಹು $c = 32$ cm $- (8 + 11)$ cm $= 13$ cm

$2s = 32$ cm ಅಂದರೆ $s = \frac{32}{2} = 16$ cm

$(s - a) = (16 - 8)$ cm $= 8$ cm

$(s - b) = (16 - 11)$ cm $= 5$ cm

$(s - c) = (16 - 13)$ cm $= 3$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ cm²

$= 8\sqrt{30}$ cm²

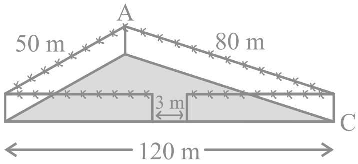
ಉದಾಹರಣೆ 2: ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು 120 m, 80 m ಮತ್ತು 50 m ಆಗಿವೆ [ಚಿತ್ರ 10.4 ಗಮನಿಸಿ]. ಉದ್ಯಾನವನದ ಮಾಲಿ **ಧಾನಿಯಾ** ಅದರ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಸಬೇಕಾದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಲಿಗಾಗಿ 3 m ಅಗಲದ ಜಾಗಬಿಟ್ಟು, ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 20 ರಂತೆ ಮುಳ್ಳುತಂತಿಯಿಂದ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪರಿಹಾರ: ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ

$2s = 50\text{ m} + 80\text{ m} + 120\text{ m} = 250\text{ m}$

ಅಂದರೆ $s = 125\text{ m}$



ಚಿತ್ರ 10.4

ಈಗ, $(s - a) = (125 - 120)\text{ m} = 5\text{ m}$

$(s - b) = (125 - 80)\text{ m} = 45\text{ m}$

$(s - c) = (125 - 50)\text{ m} = 75\text{ m}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$

$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$

ಉದ್ಯಾನವನದ ಸುತ್ತಳತೆ $= AB + BC + CA = 250\text{ m}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಬೇಕಾದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = 250 m – 3 m (ಬಾಗಿಲಿಗೆ 3 m ಜಾಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿದೆ) = 247 m

ಮತ್ತು ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 20 × 247

= ₹ 4,940

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

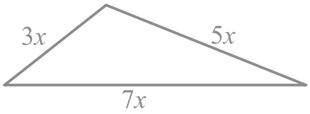
ಉದಾಹರಣೆ 3: ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು 3 : 5 : 7 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 300 m. ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳು $3x$, $5x$, $7x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ 10.5 ಗಮನಿಸಿ].

ಈಗ, ಜಾಗದ ಸುತ್ತಳತೆ $= 3x + 5x + 7x = 300$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $15x = 300$

$x = 20$



ಚಿತ್ರ 10.5

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು $3 \times 20\text{ m}, 5 \times 20\text{ m}, 7 \times 20\text{ m}$

ಅಂದರೆ, 60 m, 100 m, ಮತ್ತು 140 m.

ಈಗ ನೀವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, $s = \dfrac{60 + 100 + 140}{2}\text{ m} = 150\text{ m}$

ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ m^2$

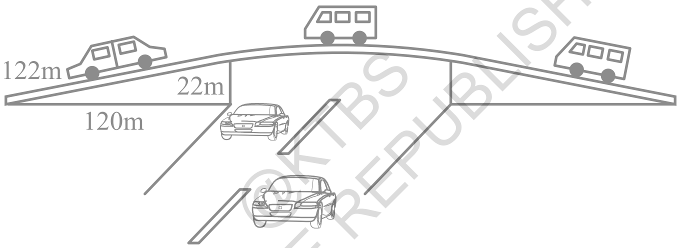
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ m^2$

$= 1500\sqrt{3}\ m^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

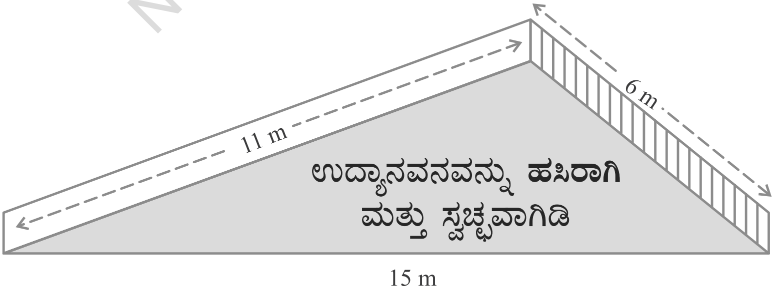
1. "ಮುಂದೆ ಶಾಲೆ ಇದೆ" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಚಾರ ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಬಾಹು 'a' ಆಗಿದೆ. ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕದ ಸುತ್ತಳತೆ 180 cm ಆದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?

2. ಒಂದು ಮೇಲುಸೇತುವೆಯ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಬದಿಯ ಗೋಡೆಗಳನ್ನು ಜಾಹಿರಾತು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಗೋಡೆಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು 122 m, 22 m ಮತ್ತು 120 m ಇವೆ [ಚಿತ್ರ 10.6 ಗಮನಿಸಿ]. ಜಾಹಿರಾತು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿ m^2 ಗೆ ₹ 5000 ದಂತೆ ಆದಾಯಗಳಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಕಂಪನಿಯು ಈ ಗೋಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗಾಗಿ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆದರೆ, ಅದು ನೀಡುವ ಬಾಡಿಗೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 10.6

3. ಒಂದು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ಬದಿಯ ಗೋಡೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಣ್ಣದಿಂದ "**ಈ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ಹಸಿರಾಗಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಚ್ಛವಾಗಿಡಿ**" ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ [ಚಿತ್ರ 10.7 ಗಮನಿಸಿ]. ಗೋಡೆಯ ಬಾಹುಗಳು 15m, 11m ಮತ್ತು 6m ಇದ್ದರೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.7

4. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು 18cm ಮತ್ತು 10cm ಇದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 42cm ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು 12 : 17 : 25 ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 540cm ಆಗಿದೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 30cm ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 12cm ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.2 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. a, b ಮತ್ತು c ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಸೂತ್ರದ ಹೇಳಿಕೆಯು,

$$\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ಇಲ್ಲಿ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

3JCPXQ

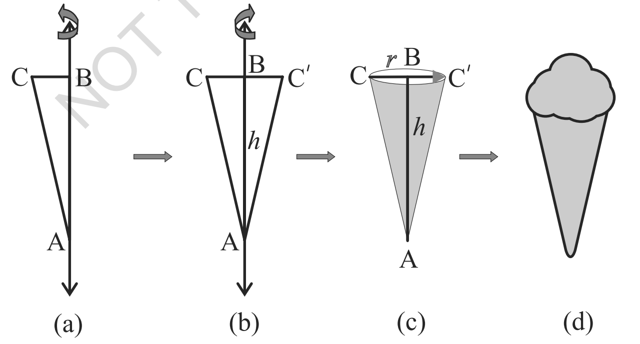
ಅಧ್ಯಾಯ– 11

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

11.1 ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಸರ್ವಸಮವಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು **"ಪಟ್ಟಕ (prism)ಗಳು"** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ಆದರೆ ಪಟ್ಟಕವಲ್ಲದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. [ಈ ರೀತಿಯ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು **ಗೋಪುರ (pyramid)ಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ]. ಈಗ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಕೋನ Bಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ (AB ಗೆ)ಉದ್ದವಾದ, ದಪ್ಪವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 11.1 (*a*) ಗಮನಿಸಿ]. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೈಯಿಂದ ತಂತಿಯನ್ನು ಹಿಡಿದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಕ್ಷವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ತಿರುಗಿಸಿ. ಈಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ತಂತಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಗುರುತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? [ಚಿತ್ರ 11.1 b ಗಮನಿಸಿ] ಇಂತಹ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ರಿಮ್ ಅನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಕೊಂಡು ಈ ಹಿಂದೆ ತಿಂದಿದ್ದನ್ನು ನೆನಪಿಸುತ್ತಿಲ್ಲವೆ? [ಚಿತ್ರ 11.1 (c) ಮತ್ತು (d) ಗಮನಿಸಿ].



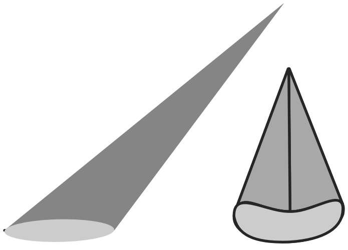
ಚಿತ್ರ 11.1

ಇದನ್ನು **ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಚಿತ್ರ 11.1 (c)ದಲ್ಲಿ, A ಬಿಂದುವನ್ನು

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಶೃಂಗ ಬಿಂದು, AB ಯನ್ನು **ಎತ್ತರ,** BC ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಶಂಕುವಿನ **ಓರೆಎತ್ತರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ B ಬಿಂದುವು ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ h, r ಮತ್ತು l ದಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾರಿ ಯಾವ ವಿಧದ ಶಂಕುವು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಚಿತ್ರ 11.2 ರಲ್ಲಿ. ನೀವು ನೋಡುತ್ತಿರುವ ಆಕೃತಿಯು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಿತ್ರ (a) ದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ (b) ದಲ್ಲಿ ಪಾದವು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.



(a) (b)

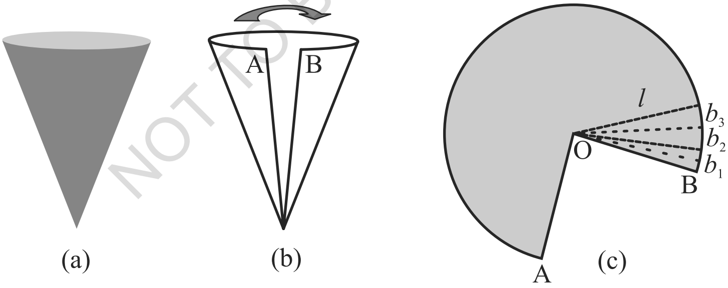
ಚಿತ್ರ 11.2

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ, ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ಓದುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಶಂಕು ಅಂದರೆ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕು ಎಂದು ಅರ್ಥ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : (i) ಕಾಗದವು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಪಿಸಿರದಂತೆ, ಕಾಗದದಿಂದ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಶಂಕುವನ್ನು ಅದರ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಕಾಗದವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. ನೀವು ನೋಡುವ ಕಾಗದದ ಆಕಾರವು ಶಂಕುವಿನ ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ನೀವು ಶಂಕುವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದ ರೇಖೆಯು ಶಂಕುವಿನ **ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ**. ಅದನ್ನು l ದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ.) ಇದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕೇಕ್‌ನ ಭಾಗದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

(ii) ಚಿತ್ರ 11.3 (c)ರಲ್ಲಿ, A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ನೀವು ಹತ್ತಿರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಂದರೆ, ಉಂಟಾಗುವ ವಕ್ರಭಾಗವು ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(a) (b) (c)

ಚಿತ್ರ 11.3

(iii) ಚಿತ್ರ 11.3 (c) ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಆಕಾರದ ಕಾಗದವನ್ನು **'O'** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ನೂರಾರು ಸಣ್ಣ ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ತುಂಡಿನ ಭಾಗವು ಬಹುತೇಕವಾಗಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಈಗ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ × ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ × l

ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಎಲ್ಲಾ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ

$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \ldots\ldots.$

$= \frac{1}{2} l [b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..]$

$= \frac{1}{2} l$ [ಚಿತ್ರ 11.3 (c)ಯ ಇಡೀ ವಕ್ರ ಸೀಮಾರೇಖೆಯ ಉದ್ದ]

($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..$ ಚಿತ್ರದ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ).

ಆದರೆ ಚಿತ್ರದ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ = $2\pi r$; ಇಲ್ಲಿ r ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

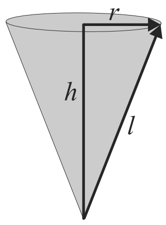
ಆದ್ದರಿಂದ, **ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$

ಇಲ್ಲಿ, r ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು l ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ

ಗಮನಿಸಿ : ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ $l^2 = r^2 + h^2$ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 11.4ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಇಲ್ಲಿ h ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

ಈಗ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಮುಚ್ಚಲು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು πr^2 ಇರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.4

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \, cm^2$

$= 220 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 16 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 cm. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $h = 16$ cm ಮತ್ತು $r = 12$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, $l^2 = h^2 + r^2$ ದಿಂದ

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm = 20 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{cm}^2$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

$= 753.6\ cm^2$

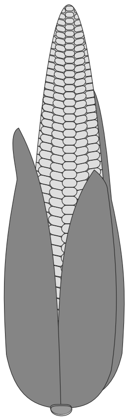
ಮುಂದುವರೆದು, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) cm^2$

$= (753.6 + 452.16)\ cm^2$

$= 1205.76\ cm^2$

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯು (ಚಿತ್ರ 11.5 ಗಮನಿಸಿ) ಸುಮಾರಾಗಿ ಶಂಕುವಿನ ಅಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಅಗಲವಾದ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2.1 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ) ವು 20 cm ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $1 cm^2$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 4 ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ಕಾಳುಗಳಿದ್ದರೆ, ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.5

ಪರಿಹಾರ : ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಳುಗಳು ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$= \sqrt{404.41}$ cm

$= 20.11$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 cm^2 = 132.726\ cm^2$

$= 132.73\ cm^2$ (ಸರಿಸುಮಾರು)

$1 cm^2$ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 132.73 \times 4$

$= 530.92$

$= 531$ (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ಕಾಳುಗಳು 531 ಆಗಿವೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

(π ಗೆ ಬೇರೆಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೇ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.)

1. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 10.5cm ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 10cm ಇದೆ. ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 21 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 24 cm ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $308\ cm^2$ ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ

(i) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು

(ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಡೇರೆಯ ಎತ್ತರವು 10 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 24 m ಆಗಿದೆ.

   (i) ಡೇರೆಯ ಓರೆ ಎತ್ತರ

   (ii) 1 m^2 ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ (canvas) ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 70. ಆದರೆ ಡೇರೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ (canvas) ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಎತ್ತರ 8 m ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 6 m ಇರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಡೇರೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ 3 m ಅಗಲದ ಟಾರ್ಪಾಲಿನ್‌ನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕು? ಡೇರೆಯ ಅಂಚನ್ನು ಹೊಲಿಯಲು ಮತ್ತು ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುವುದರಿಂದ 20 cm ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಟಾರ್ಪಾಲಿನ್ ಬೇಕಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

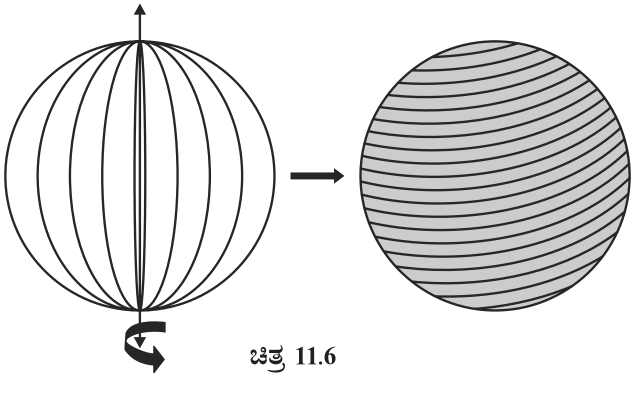
6. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಗುಮ್ಮಟದ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 25 m ಮತ್ತು 14 m ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ 100 m^2 ಗೆ ₹ 210ರಂತೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಬ್ಬ ವಿದೂಷಕನ ಟೋಪಿಯು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 24 cm ಆದರೆ ಅಂತಹ 10 ಟೋಪಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಮರುಬಳಕೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ 50 ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು ಬಸ್ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ರಸ್ತೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗದಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 40 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 1 m ಇದೆ. ಅದರ ಹೊರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ 1 m^2 ಗೆ ₹ 12 ವೆಚ್ಚವಾದರೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಮತ್ತು $\sqrt{1.04} = 1.02$ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.)

11.2 ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಗೋಳ ಎಂದರೇನು? ಇದು ವೃತ್ತದಂತೆ ಇದೆಯೇ? ನೀವು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಹೌದು, ನೀವು ಎಳೆಯಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಆವೃತವಾದ ಆಕೃತಿ. ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರದೂರವನ್ನು **ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದು** ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು **ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನೀವು ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅಂಟಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಂತೆ ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿರಿ. ಈಗ ನೀವು ಹೊಸದಾದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೀರಿ ಚಿತ್ರ 11.6 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಅದು ಯಾವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ? ಒಂದು ಚೆಂಡಿನಾಕೃತಿಯೇ? ಹೌದು, ಇದನ್ನು **ಗೋಳ** (Sphere) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.6

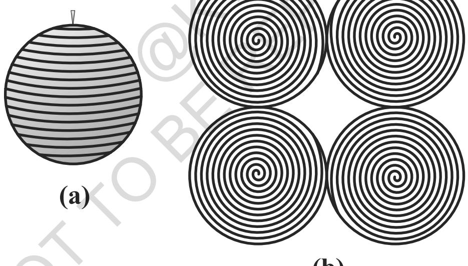
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಗೋಳದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ. ಅದು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಒಂದು ಗೋಳವು ಒಂದು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿ (ಘನಾಕೃತಿ)ಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

ಗಮನಿಸಿ : ಗೋಳವು ಒಂದು ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. **'ಘನಗೋಳ'** ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರ ಮೇಲ್ಮೈ ಹೊಂದಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : ನೀವು ಒಂದು ಬುಗುರಿಯೊಂದಿಗೆ ಆಟವಾಡಿದ್ದೀರಾ? ಅಥವಾ ಯಾರಾದರೂ ಒಂದು ಬುಗುರಿಯೊಂದಿಗೆ ಆಟವಾಡುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಬುಗುರಿಗೆ ಚಾಟಿಯನ್ನು (ದಾರವನ್ನು) ಹೇಗೆ ಸುತ್ತುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅರಿವಿರಬೇಕು. ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ರಬ್ಬರ್ ಚಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಮೊಳೆಯನ್ನು ಭದ್ರವಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿಸೋಣ. ಮೊಳೆಯ ಆಧಾರದಿಂದ ನಾವು ಚೆಂಡಿನ ಸುತ್ತಲು ದಾರವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸುತ್ತೋಣ. ಗುಂಡು ಪಿನ್ನುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ದಾರವು ಜಾರದಂತೆ ಚೆಂಡಿನ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದಾರದಿಂದ ಸುತ್ತಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 11.7 (a) ಗಮನಿಸಿ) ದಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಧಾನವಾಗಿ ದಾರವನ್ನು ಚಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯಿಂದ ಬಿಚ್ಚಿರಿ.

ಈಗ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ, ನೀವು ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಆನಂತರದಲ್ಲಿ, ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ, ಚೆಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಚೆಂಡಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತಿದ ದಾರವನ್ನು ಈ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದಾದ ನಂತರ ಒಂದನ್ನು ಸುತ್ತಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 11.7 (b) ಗಮನಿಸಿ]



(a) (b)

ಚಿತ್ರ 11.7

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಇದರಿಂದ ನೀವು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು?

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಸುತ್ತಲು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸುತ್ತಿದ್ದ ದಾರವನ್ನು, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ, ದಾರ ಉಳಿಯದಂತೆ ಸುತ್ತಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಏನು ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ?

ಇದು ಸೂಚಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟು = $4 \times (\pi r^2)$

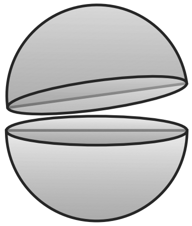
ಆದ್ದರಿಂದ, **ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4\pi r^2$**

ಇಲ್ಲಿ r ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುತ್ತೀರಿ? ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈ ಮುಖ.

ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಘನಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸೋಣ. ಈಗ ಗೋಳಕ್ಕೆ ಏನು ಆಗುತ್ತದೆ?

ಹೌದು, ಅದು ಎರಡು ಸಮಭಾಗವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. [ಚಿತ್ರ 11.8 ಗಮನಿಸಿ] ಈ ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧಭಾಗವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? ಅವುಗಳನ್ನು **ಅರ್ಧಗೋಳ** (hemisphere) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? [ಏಕೆಂದರೆ hemi ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ] ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ? ಅದು ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ? ಎರಡು ! ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಮುಖ, ಇನ್ನೊಂದು ಸಮತಲ ಮುಖ (ಪಾದ).



ಚಿತ್ರ 11.8

ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r^2$**

ಇಲ್ಲಿ, r ಗೋಳದ ಭಾಗವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ

ಇಗ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎರಡು ಮುಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2\pi r^2 + \pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $3\pi r^2$**

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇರುವ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇರುವ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$

$= 616 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ (i) ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$

(ii) ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ವ್ಯಾಸವು 7 m ಇರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್‌ನ ಬೈಕ್ ಸವಾರನು ತನ್ನ ಸಾಹಸ ಪ್ರದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಬೈಕ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ದೊರಕುವ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ = 7 m. ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 m. ಬೈಕ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ದೊರಕುವ ಸ್ಥಳವು 'ಗೋಳದ' ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅದು, $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಗುಮ್ಮಟಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ11.9 ಗಮನಿಸಿ). ಗುಮ್ಮಟದ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 17.6 m ಪ್ರತಿ 100 m^2 ಗೆ ₹ 5 ರಂತೆ ಇದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

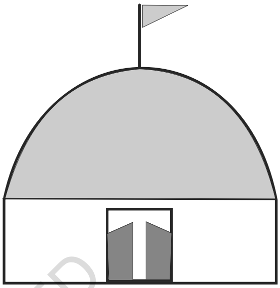
ಪರಿಹಾರ : ಗುಮ್ಮಟದ ದುಂಡಗಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗ ಗುಮ್ಮಟದ ಪರಿಧಿ = 17.6 m ಅಂದರೆ, 17.6 m = $2\pi r$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಮ್ಮಟದ ತ್ರಿಜ್ಯ = $r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

ಗುಮ್ಮಟದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$

$= 49.28 \text{ m}^2$



ಚಿತ್ರ 11.9

ಈಗ, 100 cm^2 ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 5

1 m^2 ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 500

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಮ್ಮಟಕ್ಕೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

(π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 cm ಇದೆ. ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

4. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಗಾಳಿಯನ್ನು ತುಂಬಿದಾಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 cm ದಿಂದ 14 cm ಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಹಿತ್ತಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 10.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಲಾಯಿಯನ್ನು ಹಾಕಿಸಲು ಪ್ರತಿ 100 cm^2 ಗೆ ₹ 16 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 154 cm^2 ಆದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಸ್ಟೀಲ್‌ನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಯ ದಪ್ಪವು 0.25 cm ಆಗಿದೆ. ಆ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

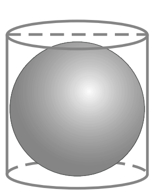
ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳತ್ರಿಜ್ಯವು 5 cm. ಅದರ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ***r*** ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್, ಸರಿಯಾಗಿ ಆವರಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 11.10 ಗಮನಿಸಿ]

(i) ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

(ii) ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

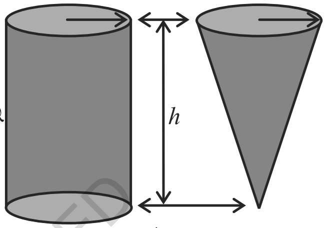
(iii) (i) & (ii) ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.10

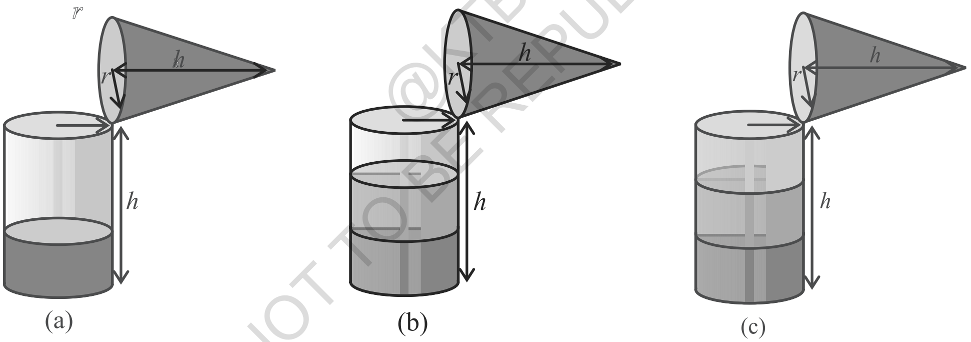
11.3 ಒಂದು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

ಈ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಚೌಕಘನ, ಆಯತಘನ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಚಿತ್ರ 11.11ರಲ್ಲಿ, ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವು ಒಂದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಾ ?



ಚಿತ್ರ 11.11

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಒಂದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 11.11 ಗಮನಿಸಿ] ನಂತರ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಕರಿಸುವ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 11.12

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ತುದಿಯವರೆಗೆ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿ, ಅದನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. ಅದು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತುಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. [ಚಿತ್ರ 11.12 (a) ಗಮನಿಸಿ.]

ಮತ್ತೆ ನಾವು ಶಂಕುವಿನ ತುದಿಯವರೆಗೆ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗಲೂ ಸಹ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ. [ಚಿತ್ರ 11.12 (b)]

ಶಂಕುವನ್ನು ಮರಳಿನಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಬಾರಿ ತುಂಬಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಖಾಲಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುದಿಯವರೆಗೆ ತುಂಬಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ [ಚಿತ್ರ 11.12 (c)]

ಇದರಿಂದ, ನಾವು ಯಾವುದೇ ಅನುಮಾನವಿಲ್ಲದಂತೆ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲದ ಮೂರರಷ್ಟು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಶಂಕುವಿನ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದರ ಅರ್ಥವು ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ಇಲ್ಲಿ r ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 21 cm ಮತ್ತು 28 cm ಆಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $l^2 = r^2 + h^2$ ದಿಂದ

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$$

$$= 7546 \text{ cm}^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ಮೋನಿಕಾಳ ಹತ್ತಿರ 551 m^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಇದೆ. ಅವಳು ಅದನ್ನು 7 m ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಟೆಂಟ್ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಟೆಂಟನ್ನು ಹೊಲೆಯಲು ಬಿಡುವ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ ವ್ಯರ್ಥವಾಗಿರುವ ಬಟ್ಟೆಯು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ 1 m^2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಟೆಂಟಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 551 m^2 ಮತ್ತು ವ್ಯರ್ಥವಾದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1 m^2 ಆದರಿಂದ, ಟೆಂಟ್ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ = $(551 - 1) \text{ m}^2$

$$= 550 \text{ m}^2$$

ಈಗ ಟೆಂಟಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 550 m^2 ಮತ್ತು ಬೇಕಾದ ಟೆಂಟಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 m

ಟೆಂಟ್ ಕೇವಲ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. (ಟೆಂಟಿನ ನೆಲವನ್ನು ಕ್ಯಾನ್ವಾಸದಿಂದ ಹೊದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಟೆಂಟಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 550 m^2

ಅಂದರೆ . $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

ಈಗ $l^2 = r^2 + h^2$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಆದರಿಂದ, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m$

$= 24$ m

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಟೆಂಟಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24\ m^3$

$= 1232\ m^3$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

[π ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.]

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ತ್ರಿಜ್ಯ 6 cm, ಎತ್ತರ 7 cm (ii) ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಎತ್ತರ 12 cm

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm, ಓರೆ ಎತ್ತರ 25 cm (ii) ಎತ್ತರ 12 cm ಓರೆ ಎತ್ತರ 13 cm

3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 15 cm ಇದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವು 1570 cm^3 ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

4. ಎತ್ತರ 9 ಇರುವ ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು $48\pi\ cm^3$ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಒಂದು ಹೊಂಡದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸ 3.5 m, ಆಳ 12 m ಇದೆ. ಅದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಿಲೋಲೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 9856 cm^3 ಇದೆ. ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 28 cm ಆದರೆ

   (i) ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ

   (ii) ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ

   (iii) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು 5 cm, 12 cm ಮತ್ತು 13 cm ಇದೆ. ಇದನ್ನು 12 cm ಬಾಹುವಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ 7 ರಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು 5 cm ಉದ್ದದ ಬಾಹುವಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರಶ್ನೆ 7 ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆ 8 ರಲ್ಲಿನ ಎರಡೂ ಘನಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಗೋಧಿಯ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಸ 10.5 m ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 3 m ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದನ್ನು ಮಳೆಯಿಂದ ರಕ್ಷಿಸಲು ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ

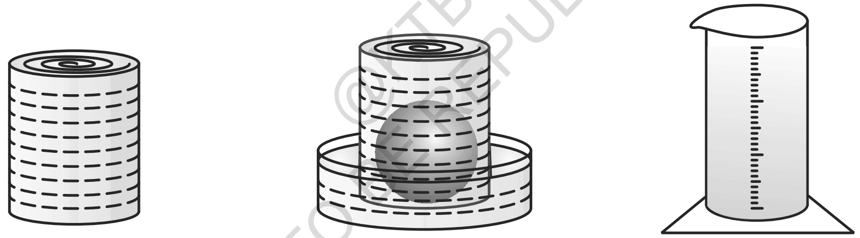
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಮಾಡಿದ ಬಟ್ಟೆಯನ್ನು ಹೊದಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11.4 ಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಈಗ ನಾವು ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಈ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಒಂದರಂತೆ ಪ್ರತಿ ಗೋಳವನ್ನು ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಗ್ರಾಹಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಸಂಗ್ರಾಹಕವನ್ನೂ ಸಹ ಇಡಬಹುದಾದ ದೊಡ್ಡ ತೊಟ್ಟಿ (trough) ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನಂತರದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ಅಂಚಿನವರೆಗೂ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 11.13 (a) ಗಮನಿಸಿ].

ಈಗ, ನೀವು ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗ್ರಾಹಕದಲ್ಲಿ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಹಾಕಿರಿ. ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರು ಸಂಗ್ರಾಹಕದಿಂದ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. [ಚಿತ್ರ 11.13 (b) ಗಮನಿಸಿ] ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. [ಅಂದರೆ, ಅಳತೆಯ ಗುರುತು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಜಾರ್] ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹರಿದು ಬಂದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ [ಚಿತ್ರ 11.13 (c)] ಒಂದು ವೇಳೆ ಮುಳುಗಿಸಿದ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆಗಿರಲಿ. (ನೀವು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು) ನಂತರ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಈ ಬೆಲೆಯು ಹೊರಕ್ಕೆ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಮವಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತಿದೆಯೆ?



(a) (b) (c)

ಚಿತ್ರ 11.13

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದೊಂದಿಗೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ R ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರದಲ್ಲಿ $\frac{4}{3}\pi R^3$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬೆಲೆಯು ಗೋಳವು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ (ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ) ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಳತೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಏನನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ? ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಗೋಳದಿಂದ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಗೋಳಗಳೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಘನದ $\frac{4}{3}\pi$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಗೋಳದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$**

ಇಲ್ಲಿ r ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸತ್ತೀರಿ. ಆದರೆ ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ನಿಜ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅರ್ಧಗೋಳವು ಗೋಳದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ನೀವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಬಹುದೇ? ಹೌದು ಅದು $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3$**

ಇಲ್ಲಿ r ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : 11.2 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3$

$= 5887.32 \text{ cm}^3$

ಉದಾಹರಣೆ 11 : ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಗೋಳಾಕಾರದ ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4.9 cm ಇದೆ. ಲೋಹದ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 7.8 g/cm^3 ಆದರೆ ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎಸೆತದ ಗುಂಡು ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಘನಗೋಳವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ನಾವು ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$

$= 493 \text{ cm}^3$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

1 cm^3 ಗಾತ್ರದ ಲೋಹದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 7.8 g ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ

$= 7.8 \times 493 \text{ g}$

$= 3845.44 \text{ g}$

$= 3.85 \text{ kg}$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ 12 : ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm. ಈ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ಪರಿಹಾರ : ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3$$

$$= 89.8 \text{ cm}^3$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

[π ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.]

1. (i) 7 cm (ii) 0.63 m ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಘನಗೋಳಾಕಾರದ ಚೆಂಡು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. ಒಂದು ಲೋಹದ ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವು 4.2 cm ಇದೆ. ಲೋಹದ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 8.9 g/cm^3 ಆದರೆ ಚೆಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಚಂದ್ರನ ಗಾತ್ರವು ಭೂಮಿಯ ಗಾತ್ರದ ಎಷ್ಟರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ?
5. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ವ್ಯಾಸವು 10.5 cm ಆದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ಹಾಲನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ?
6. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು 1 cm ದಪ್ಪ ಇರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಅದರ ಒಳತ್ರಿಜ್ಯವು 1 m ಆದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 154 cm^2 ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಗುಮ್ಮಟವು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ₹ 498.96 ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿದಿದೆ. ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 2.00 ಆದರೆ,

   (i) ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

   (ii) ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳಭಾಗದ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ S ಇರುವ 27 ಕಬ್ಬಿಣದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ S^1 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ ಹೊಸ ಗೋಳವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ.

   (i) ಹೊಸ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ (r^1) ನ್ನು,

   (ii) S ಮತ್ತು S^1 ಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

10. ಔಷಧದ ಗುಳಿಗೆಯು ಗೋಳದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು 3.5 mm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಗುಳಿಗೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ಔಷಧದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು mm^3 ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11.5 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

1. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r l$
2. ಲಂಬ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
3. r ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2$
4. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2 \pi r^2$
5. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3 \pi r^2$
6. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $== \frac{1}{3} \pi r^2 h$
7. r ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3} \pi r^3$
8. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3} \pi r^3$

(ಇಲ್ಲಿ l, h, r ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3JLKZD

ಅಧ್ಯಾಯ – 12

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

12.1 ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನ ಹರಿಸೋಣ. ಸಾವಿರ ಪದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ಉತ್ತಮ ಎಂಬ ಮಾತಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯು ನೈಜ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗಿಂತ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ನಕ್ಷೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

(A) ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳು (Bar graphs)

(B) ಒಂದೇ ಅಗಲದ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ಅಗಲಗಳ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂಗಳು ಅಥವಾ ಆಯತ ಚಿತ್ರಗಳು

(C) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು (Frequency Polygons)

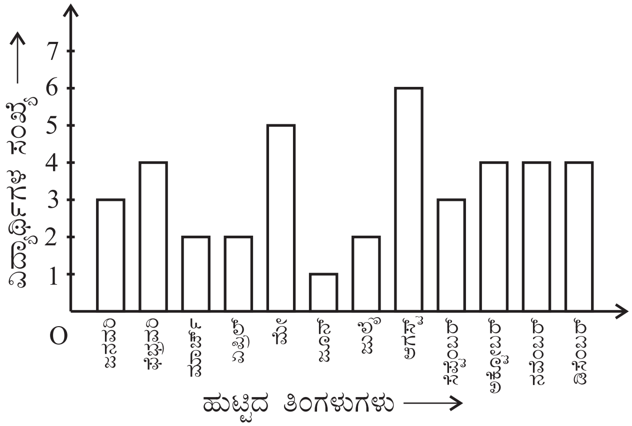
(A) ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳು (Bar graphs)

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕ್ರಮಬದ್ಧ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸೋಣ. ಸ್ತಂಭಲೇಖ ಎಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸಮಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಅಕ್ಷದ (ಉದಾ: x–ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಚರಾಂಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚರಾಂಶದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಅಕ್ಷದ (Y–ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ನಕ್ಷೆಯ ಎತ್ತರವು ಚರಾಂಶಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂಭತ್ತನೆ ತರಗತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಭಾಗದ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹುಟ್ಟಿದ ತಿಂಗಳನ್ನು ಕೇಳಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ಚಿತ್ರ 12.1

ಮೇಲಿನ ಸ್ತಂಭಲೇಖವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ:

(i) ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ?

(ii) ಯಾವ ತಿಂಗಳನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ 'ಹುಟ್ಟಿದ ತಿಂಗಳು' ಚರಾಂಶವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಚರಾಂಶದ ಬೆಲೆಯು 'ಹುಟ್ಟಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

(i) ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

(ii) ಆಗಸ್ಟ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಸ್ತಂಭಲೇಖದ ರಚನೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 20,000 ಆದಾಯವಿರುವ ಒಂದು ಕುಟುಂಬವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಖರ್ಚನ್ನು ಭರಿಸುವ ಯೋಜನೆ ಕೈಗೊಂಡಿತು.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಕೋಷ್ಟಕ 12.1

ವಿಷಯಗಳು (Heads)	ಖರ್ಚು (ಸಾವಿರ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)
ದಿನಸಿ (ಕಿರಾಣಿ)	4
ಬಾಡಿಗೆ	5
ಮಕ್ಕಳ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ	5
ಔಷಧ	2
ಇಂಧನ	2
ಮನೋರಂಜನೆ	1
ಇತರೆ	1

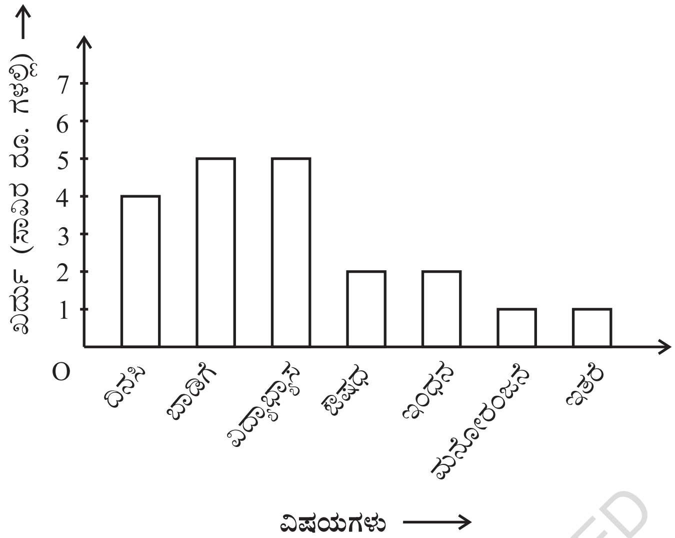
ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ತಂಭಲೇಖ ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖ ರಚಿಸಬಹುದು. ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಮಾನವು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, 'ದಿನಸಿ ವಸ್ತುಗಳ ಮುಂದೆ ಇರುವ 4' ಅಂದರೆ ಅದು ₹ 4000 ಎಂದರ್ಥ.

1. ಸೂಕ್ತ ಮಾನದ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರಅಕ್ಷ) ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಅಗಲವು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸ್ಪಷ್ಟತೆಗೋಸ್ಕರ ನಾವು ಒಂದೇ ಅಗಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಗಳ ನಡುವೆ ಸಮನಾದ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ವಿಷಯವನ್ನು 1 ಮಾನ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದಿರಲಿ.
2. ಖರ್ಚನ್ನು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ (ಭೂಲಂಬ ಅಕ್ಷ) ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಗರಿಷ್ಠ ಖರ್ಚು ₹ 5000 ಇರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮಾಣವು 1 ಮಾನ = ₹ 1000 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.
3. ಮೊದಲ ವಿಷಯ ಅಂದರೆ ದಿನಸಿ, ಇದನ್ನು ಅಗಲ 1 ಮಾನ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4 ಮಾನ ಇರುವ ಕಂಬದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.
4. ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ ಕಂಬಗಳ ನಡುವೆ 1 ಮಾನದಷ್ಟು ಅಂತರ ಇರುವಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

   ಈ ಸ್ತಂಭಲೇಖವನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.2 ರಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ಚಿತ್ರ 12.2

ಇಲ್ಲಿ, ಮೇಲ್ನೋಟದಿಂದಲೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚು, ಔಷಧದ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚಿನ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪಕ್ಕಿಂತ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ ಎನಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 : ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಈಗ ನಾವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ನೋಡೋಣ.

(B) ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ)

ಇದು ಸ್ತಂಭಲೇಖದಂತೆಯೇ ಇರುವ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯಾದರೂ ಇದನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಗಳಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೋಷ್ಟಕ 12.2ರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ತರಗತಿಯ 36 ಮಕ್ಕಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.2

ತೂಕಗಳು (kg. ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
ಒಟ್ಟು	**36**

ಈ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

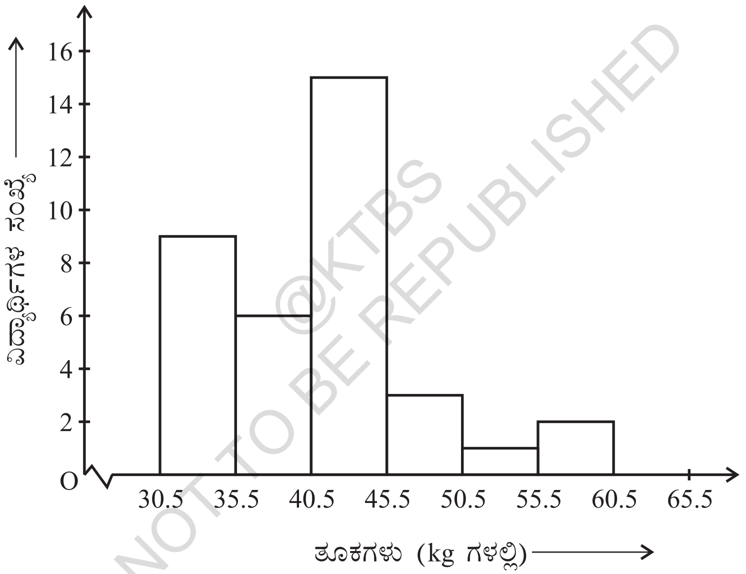
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

(i) ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ ತೂಕಗಳನ್ನು x– ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮಾಣ 1cm = 5kg ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರವು 30.5 ರಂದ ಆರಂಭಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಅಲ್ಲ). ಆದ್ದರಿಂದ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು **ತಿರುಚು / ತಡೆ (kink / break)** ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಬೇಕು.

(ii) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)ಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ y– ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 15 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ ಗುರುತಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ 1 cm = 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.

(iii) ಈಗ ಅಗಲವು ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯಷ್ಟು ಮತ್ತು ಉದ್ದವು (ಎತ್ತರ) ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯಷ್ಟು ಇರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು (ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು) ನಾವು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 30.5–35.5 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ 1 cm ಅಗಲದ ಮತ್ತು 4.5 cm ಉದ್ದದ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಚಿತ್ರ 12.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತಹ ನಕ್ಷೆಯು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.



©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಚಿತ್ರ 12.3

ಗಮನಿಸಿ: ಅನುಕ್ರಮ ಆಯತಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಅಂತರ (ಸ್ಥಳಾವಕಾಶ) ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಈ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ** ಅಥವಾ **ಆಯತಚಿತ್ರ** ಎನ್ನುವರು. ಇದು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ ಇರುವ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಅಗಲವು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಅಗಲವು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅನುರೂಪ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹಂತ (iii) ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

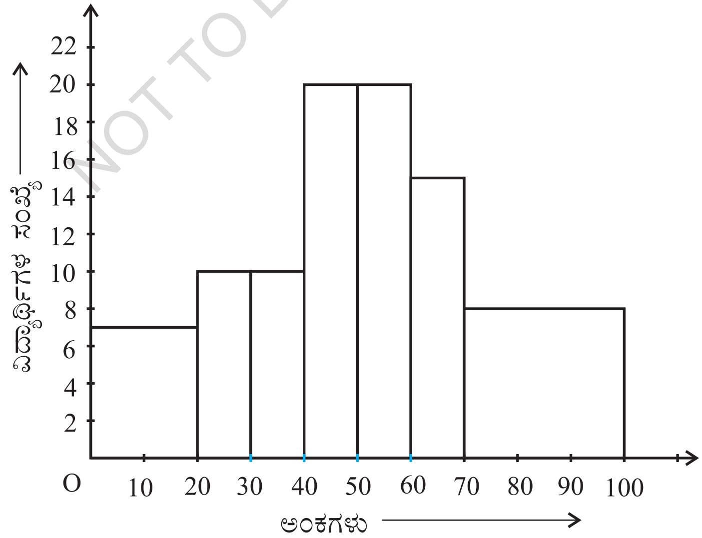
ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಬ್ಬ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಎರಡು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತದ 100 ಅಂಕದ ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದರು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಕೆಲವರು 20 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಕೆಲವರು 70 ಅಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿರುವುದು ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ 0–20, 20–30, ... 60–70, 70–100 ಈ ರೀತಿ ವಿಂಗಡಿಸಲು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದರು.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.3

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70⟶ ಹೆಚ್ಚು	8
ಒಟ್ಟು	**90**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ತಯಾರಿಸಿದ.



ಚಿತ್ರ 12.4

ಇಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರುವುದನ್ನು ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯೇ?

ಇಲ್ಲ. ಈ ನಕ್ಷೆಯು ನಮಗೆ ತಪ್ಪು ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಹಿಂದೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಉದ್ಭವಿಸಿರಲಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಸರಿಯಾದ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಇದು 60–70 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆವೃತ್ತಿಗಿಂತ 70–100 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆವೃತ್ತಿಯು ಹೆಚ್ಚಿರುವಂತೆ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಇದು ಹಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರಲು ನಾವು ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

1. ಕನಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರ 10.

2. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 10ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು 20, ಆದಾಗ ಆಯತದ ಉದ್ದವು 7 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು 10 ಆದಾಗ ಆಯತದ ಉದ್ದವು $\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$ ಆಗಬೇಕು.

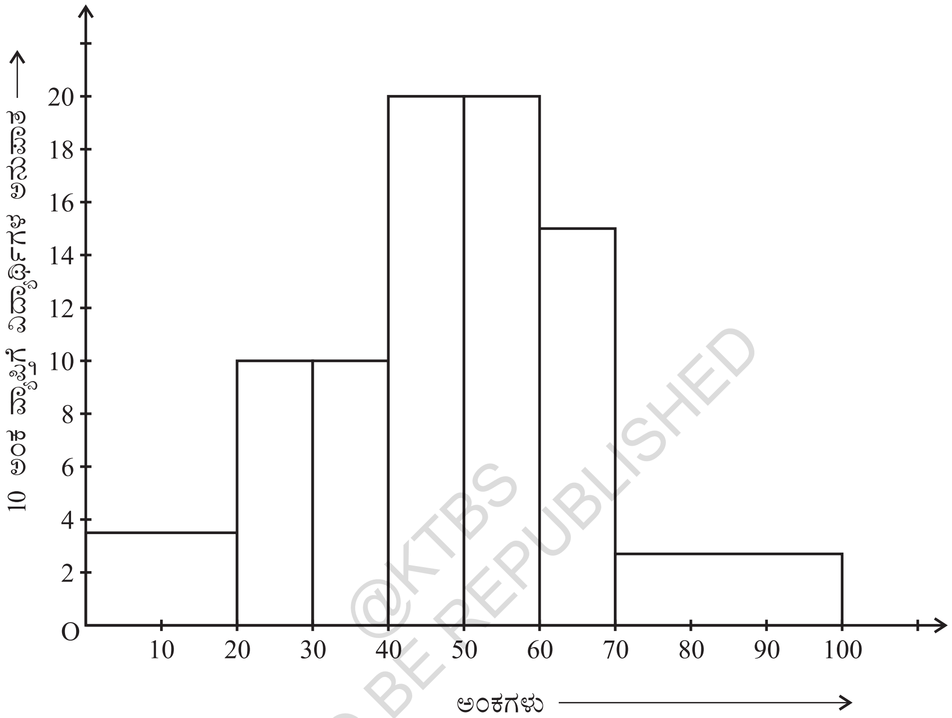
ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.4

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ವರ್ಗಾಂತರದ ಅಗಲ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 - 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ನಾವು 10 ಅಂಕಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು "**10 ಅಂಕ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಪಾತ**" ಎನ್ನಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಅಗಲದ ಸರಿಯಾದ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಚಿತ್ರ 12.5 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

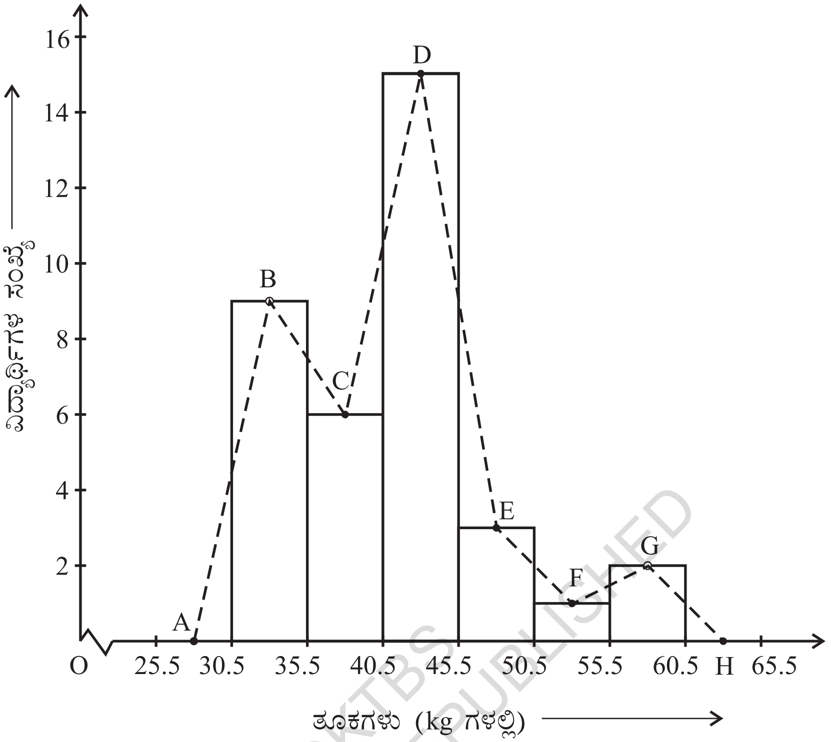


ಚಿತ್ರ 12.5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(C) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (Frequency Polygon)

ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಇದು ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಚಿತ್ರ 12.3 ರ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈಗ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸೋಣ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು B, C, D, E, F ಮತ್ತು G ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಗುರುತಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿದಾಗ BCDEFG ಆಕೃತಿ (ಚಿತ್ರ 12.6) ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ವರ್ಗಾಂತರ 30.5 – 35.5 ರ ಮೊದಲು ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರ 55.5 – 60.5 ರ ನಂತರ ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು H ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿ, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 12.3ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ABCDEFGH ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.6

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಕನಿಷ್ಠ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗಾಂತರದ ನಂತರ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ನಾವು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ಎರಡು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಏಕೆ ಹೀಗೆ? (ಸುಳುಹು: ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಈಗ, ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ: ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು? ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

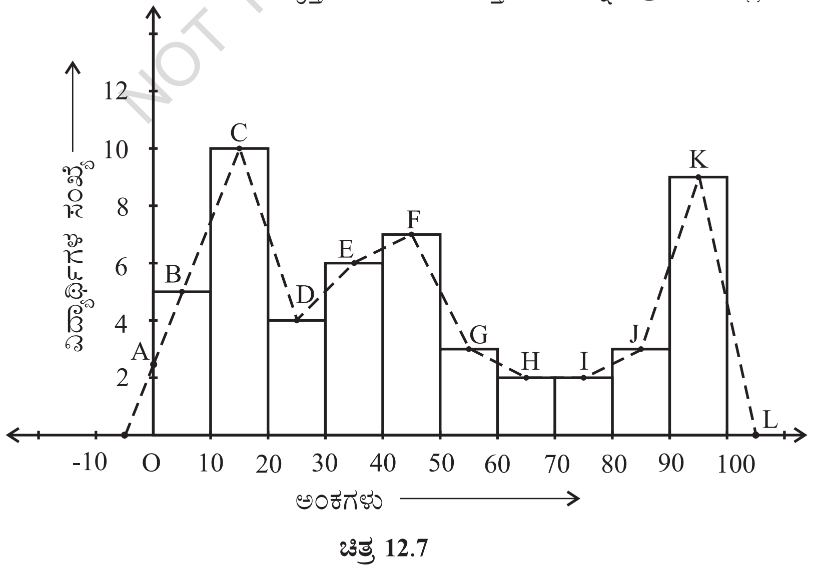
ಉದಾಹರಣೆ 4: ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 51 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ರಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 12.5 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.5

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
ಒಟ್ಟು	**51**

ಈ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರ 0–10, ಆದ್ದರಿಂದ x –ಅಕ್ಷವನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ವರ್ಗಾಂತರ (–10) –0ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈ ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಆಯತಗಳ ಮೊದಲ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಅಂದರೆ 'B' ಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ರೇಖಾಖಂಡ y –ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು 'A' ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'L' ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ OABCDEFGHIJKL ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.7

NOT TO BE REPUBLISHED

ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ರಚಿಸದೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿಯೂ (ನೇರವಾಗಿ) ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ದತ್ತಾಂಶದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಅದರಂತೆ ವರ್ಗ–ಅಂಕ = $\frac{\text{ಮೇಲ್ಮಿತಿ + ಕೆಳಮಿತಿ}}{2}$

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ವಾರಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ನಡೆಸುವ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಅಧ್ಯಯನದಂತೆ ದೊರಕಿದ ಜೀವನ ನಿರ್ವಹಣಾ ಸೂಚ್ಯಾಂಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.6

ಜೀವನ ನಿರ್ವಹಣಾ ಸೂಚ್ಯಾಂಕ	ವಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
ಒಟ್ಟು	**52**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಬರೆಯಿರಿ. (ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ರಚಿಸದೆ).

ಪರಿಹಾರ: ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ರಚಿಸದೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಅಂದರೆ, 140–150, 150–160,............... ರ ವರ್ಗ–ಅಂಕ (ಮಧ್ಯಬಿಂದು) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ವರ್ಗಾಂತರ 140–150 ರ ಮೇಲ್ಮಿತಿ = 150 ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿ = 140

$\therefore$ ವರ್ಗ ಅಂಕ (ಮಧ್ಯಬಿಂದು) = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

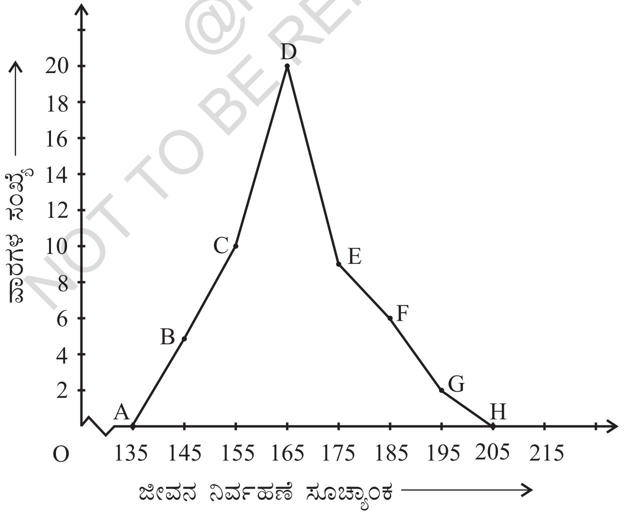
ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆದು ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಹೊಸ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 12.7

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳು (ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು)	ಆವೃತ್ತಿ
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
ಒಟ್ಟು		**52**

ಈಗ ವರ್ಗಅಂಕಗಳನ್ನು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ, ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ B (145, 5), C (155, 10), D (165, 20), E (175, 9), F (185,6) ಮತ್ತು G (195,2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗಾಂತರ 140–150 ರ ಮೊದಲು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರ 130–140 ರ ವರ್ಗ–ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಗುರುತಿಸಲು ಮರೆಯಬಾರದು. ಅದು A (135,0) ಆಗಿರಲಿ. ಅದೇ ರೀತಿ H (205,0) ಬಿಂದುವನ್ನು G (195,2) ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈಗ ದೊರಕುವ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ABCDEFGH ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.8ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ಚಿತ್ರ 12.8

ದತ್ತಾಂಶಗಳು ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ (Very large) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದೇ ಸ್ವಭಾವದ (Same nature) ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದತ್ತಾಂಶ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಇದು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದೇ ತರಗತಿಯ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ 15 ರಿಂದ 44 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದ ಮಹಿಳೆಯರಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಡೆಸಿದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಕಾಯಿಲೆಗಳಿಗೆ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಸಾವಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಕಿ–ಅಂಶಗಳು (% ದಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಕಾರಣಗಳು	ಮಹಿಳಾ ಮರಣದ ಪ್ರಮಾಣ (%)
1	ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿ ಆರೋಗ್ಯ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	31.8
2	ನರ–ಮಾನಸಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	25.4
3	ಗಾಯಗಳು	12.4
4	ಹೃದಯ ಸಂಬಂಧಿ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	4.3
5	ಉಸಿರಾಟದ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	4.1
6	ಇತರ ಕಾರಣಗಳು	22.0

(i) ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಮಹಿಳೆಯರ ಅನಾರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಸಾವಿಗೆ ಯಾವ ಸ್ಥಿತಿಗತಿ ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ?

(iii) (ii)ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಕಾರಣವು ಪ್ರಮುಖವೆನಿಸಲು ಯಾವ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಪಾತ್ರವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಎಂದು ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

2. ಭಾರತೀಯ ಸಮಾಜದ ವಿವಿಧ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಹುಡುಗರಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಹತ್ತಿರ ಸಮೀಪ ಬೆಲೆಗೆ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿಭಾಗ	ತಲಾ 1000 ಹುಡುಗರಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ
ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಜಾತಿ (ಪ.ಜಾ)	940
ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಪಂಗಡ (ಪ. ಪಂ)	970
ಪ.ಜಾ, ಪ. ಪಂ. ಹೊರತುಪಡಿಸಿ	920
ಹಿಂದುಳಿದ ಜಿಲ್ಲೆಗಳು	950
ಹಿಂದುಳಿದಿಲ್ಲದ ಜಿಲ್ಲೆಗಳು	920
ಗ್ರಾಮೀಣ	930
ನಗರ	910

(i) ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

3. ಒಂದು ರಾಜ್ಯದ ವಿಧಾನಸಭಾ ಚುನಾವಣೆಯ ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷಗಳು ಗೆದ್ದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷ	A	B	C	D	E	F
ಗೆದ್ದ ಸ್ಥಾನಗಳು	75	55	37	29	10	37

(i) ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಒಂದು ಸ್ತಂಭಲೇಖ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಯಾವ ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷವು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿದೆ?

4. ಒಂದು ಸಸ್ಯದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು mm ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಳೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದ್ದ (mm ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. (ಸುಳಿವು : ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ)

(ii) ಇದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರು ನಕ್ಷಾಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಇದೆಯೇ?

(iii) ಹೆಚ್ಚಿನ ಎಲೆಗಳು 153 mm ಉದ್ದ ಇವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು ಸರಿಯಿದೆಯೇ? ಏಕೆ?

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬುಗಳ ಬಾಳಿಕೆ (life time) ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಸಹಾಯದಿಂದ ನೀಡಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) 700 ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವ ಬಲ್ಬುಗಳು ಎಷ್ಟು?

6. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಅವರನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಹಂಚಿರುವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.

ವಿಭಾಗ – A		ವಿಭಾಗ – B	
ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

ಎರಡು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. ಈ ಎರಡು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ 60 ಎಸೆತಗಳಲ್ಲಿ (balls) A ಮತ್ತು B ತಂಡಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಂಡ A	ತಂಡ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

ಎರಡು ತಂಡಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(**ಸುಳಿವು** : ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ನಿರಂತರಗೊಳಿಸಿ)

8. ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ (random) ಸಮೀಕ್ಷೆಯಂತೆ ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆಡುವ ವಿವಿಧ ವಯೋಮಾನದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಬರೆಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮ (surname) ಗಳನ್ನು ಹೆಕ್ಕಿ ತೆಗೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ (surname) ಕಂಡುಬಂದ ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಉಪನಾಮ (surname) ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) ನೀಡಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

14.6. ಸಾರಾಂಶ :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ.

1. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಂದರೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅನುಬಂಧ – 2

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

A 2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಪ್ರಾಥಮಿಕಶಾಲಾ ಹಂತದಿಂದಲೂ ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಜಗತ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಬಿಡಿಸುತ್ತಾ (ಪರಿಹರಿಸುತ್ತಾ) ಬಂದಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಬಡ್ಡಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೂರು ಅಂಶಗಳಾದ ಅಸಲು, ಕಾಲಾವಧಿ, ಬಡ್ಡಿದರ ಇವುಗಳ ಸಂಭಂದವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು **ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೆ** ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಎಂದರೆ ನೈಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಗಣಿತದ ಸಂಬಂಧ ಸೂಚಕ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ರೂಪಿಸಲು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

- ಉಪಗ್ರಹ ಉಡಾವಣೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಮಾನ್ಸೂನ್ ಮಳೆ ಬರುವ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು.
- ವಾಹನಗಳಿಂದಾಗುವ ಪರಿಸರ ಮಾಲಿನ್ಯದ ನಿಯಂತ್ರಣ ಮಾಡುವುದು.
- ಬೃಹತ್ ನಗರಗಳಲ್ಲಿ ವಾಹನ ದಟ್ಟನೆಯ ಜಂಜಾಟವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನೇ "**ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ**" ಎಂದು ಕರೆದಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು 'ನೈಜ ಜೀವನದ ಘಟನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ' ಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ "ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ" ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೈಜ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅನಂತರದಲ್ಲಿ ಈ ಪರಿಹಾರವು ನೈಜ ಜೀವನದ ಘಟನೆಗೆ ಆಧರಿಸಿ ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಮಾನ್ಯತೆ ಅಥವಾ ಸಿಂಧುತ್ವ ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂತ್ರರಚನೆ (Formulation)

ಪರಿಹಾರ (Solution)

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (interpretation)

ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (validation)

ವಿಭಾಗ A 2.2 ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಕಾರ್ಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ನೀವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹೋಲುವಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಅನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲೂ ಬಳಸುತ್ತೇವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಭಾಗ A2.3 ನಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸರಳ ಮಾದರೀಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದೆ.

ಭಾಗ A2.4 ನಲ್ಲಿ ಮಾದರೀಕರಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಒಟ್ಟಾರೆ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು, ಅದರ ಉಪಯೋಗ ಮತ್ತು ಇತಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸೋಣ.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

A2.2 ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಬಿಡಿಸಿದಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸೋಣ. ಪ್ರಾರಂಭಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದ ಬಗೆಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾ 1 : ನನ್ನ ಕಾರಿನಲ್ಲಿ 432 km ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು 48 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ವ್ಯಯವಾಗಿದೆ. ನಾನು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳವು ಇಲ್ಲಿಂದ 180 km ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ ಆ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ನನ್ನಗೆ ಎಷ್ಟು ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರವು ಯಾವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಹೆಚ್ಚು ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಬೇಕು ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಅಂದರೆ ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ ನೇರವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

432 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ = 48 ಲೀಟರ್

180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ =?

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ನಾನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ = x

ನನಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ = y

y ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ x ನೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $y = kx$ ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. ನಾನು 432km ನ್ನು 48 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಬಹುದು.

ಹಾಗಾಗಿ $y = 48, x = 432$.

ಆದ್ದರಿಂದ $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

$y = kx$ ಆದ್ದರಿಂದ $y = \frac{1}{9}x$ .... (1)

ಸಮೀಕರಣ ಅಥವಾ ಸೂತ್ರ – (1) : ಅವಶ್ಯಕ ಇರುವ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ :

180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ $x = 180$ ಆದಾಗ y ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. $x = 180$ ಎಂದು ಸೂತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ ಆಗ $y = \frac{1}{9}x,\ y = \frac{1}{9} \times 180 = \frac{180}{9} = 20$

$y = 20$.

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ $y = 20$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು 180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು 20 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ಬೇಕು.

ಹೀಗೊಂದು ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ, ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀವು ಪ್ರಯಾಣಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದೇ? ಅದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೇ ಇರಬಹುದು! ಸಂದರ್ಭ ಹೀಗಿದೆ, ನೀವು ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿರುವ 432*km* ರಸ್ತೆ ಪರ್ವತ ಪ್ರದೇಶವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 180 km ರಸ್ತೆ ಸಮತಟ್ಟು ಪ್ರದೇಶವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಯಾಣದಲ್ಲಿ ಬೆಟ್ಟ–ಗುಡ್ಡಗಳ ಓಡಾಟದಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಸಮತಟ್ಟು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯು ಒಂದೇ ರೀತಿಯದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಥವಾ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಬಳಕೆಯು ತೀರಾ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಬಹುದು. ನಾವು ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಖರ್ಚು, ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ 'ರಸ್ತೆ' ಹಾಗೂ 'ಪ್ರಯಾಣ' ಎರಡೂ ಸಹ ಏಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಊಹೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಸುಧೀರ್ ಎಂಬುವವರು ವಾರ್ಷಿಕ 8% ಸರಳಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ ₹ 15,000/– ಗಳನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಹಣದ ಹಿಂಪಡೆಯುವಿಕೆಯಿಂದ ₹ 19.000/– ಬೆಲೆಯ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಬೇಕೆಂದಿದ್ದಾರೆ. ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲು ₹ 15,000/– ನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕಾಲದವರೆಗೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿರಬೇಕು?

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅಸಲು, ಬಡ್ಡಿದರ ಗೊತ್ತಿದೆ. ₹ 15,000/–ದ ಜೊತೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಹಣ ಸೇರಿಸಿ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಣ ಎಷ್ಟು ಕಾಲವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಅಪೇಕ್ಷೆ ನೆರವೇರಬಹುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರ = $I = \frac{Pnr}{100}$, ಇಲ್ಲಿ P = ಅಸಲು, n = ಅವಧಿ, r = ಬಡ್ಡಿಯ ದರ

I = ದೊರೆತ ಬಡ್ಡಿ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ P = ರೂ. 15,000/-

ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಸುಧೀರನಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ = ₹ 19,000/-

ಹಾಗಾಗಿ ಗಳಿಸಬೇಕಾದ ಬಡ್ಡಿ = ₹ (19,000–15,000) = ₹ 4,000/–

ಈಗ ₹ 15,000/– ವನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಡಬೇಕಾದ ಅವಧಿ = n ವರ್ಷಗಳು ಎಂದಿರಲಿ

₹ 15,000/– ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರ 8%ರಂತೆ ಗಳಿಸುವ ಬಡ್ಡಿ = I

ಆಗ $I = \frac{1500 \times n \times 8}{100} = 1200\,n$

ಆದ್ದರಿಂದ $I = 1200\ n$ .... (1)

(1) ಅಸಲು ₹ 15,000/– ಮತ್ತು 8% ನ ಬಡ್ಡಿದರದಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಹಾಗೂ ಅವಧಿಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಮಗೆ ₹ 4000/– ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$4000 = 1200\ n$ .... (2)

$n = 4000/1200 = \frac{40}{12} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3}$

$\therefore$ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಅವಧಿ = $3\,{}^{1}\!/_{3}$ ವರ್ಷಗಳು

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $n = 3\frac{1}{3}$, ವರ್ಷದ ಮೂರನೆ ಒಂದು ಭಾಗ ಅಂದರೆ 4 ತಿಂಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ 3 ವರ್ಷ 4 ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ ಸುಧೀರ್ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು (ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು) ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅವೆಂದರೆ

(1) ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಬದಲಾಗಿಲ್ಲ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(2) ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ $I = \frac{Pnr}{100}$ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ನದಿಯ ದಂಡೆಯ ಆಚೀಚೆಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಗ್ರಾಮಗಳಿಗೆ ಸಂಪರ್ಕ ಕಲ್ಪಿಸುವ ಮೋಟಾರ್‌ಬೋಟ್ (ಮೋಟಾರು ದೋಣಿ) ಲಭ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಒಂದು ತೀರದ ಊರಿನಿಂದ ನದಿ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಎದುರು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಊರನ್ನು ಸೇರಲು 6 ಗಂಟೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಆ ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಗ್ರಾಮದಿಂದ ಕೆಳತೀರದ ಗ್ರಾಮ ಸೇರಲು ಐದು ಗಂಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ನದಿಯ ನೀರಿನ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಜವ (speed) ವು $2 km/h$ ಇದ್ದರೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್‌ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: ಸೂತ್ರರಚನೆ : ನಮಗೆ ನದಿಯ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತಲುಪಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಗೊತ್ತಿದೆ. ನಾವು ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ : ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ x, t – ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಮತ್ತು y – ಚಲಿಸಿದದೂರ ಎಂದಿರಲಿ.

ದೂರ = ವೇಗ × ಕಾಲ . ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಆಗ $y = tx$ .... (1)

ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ d ಆಗಿರಲಿ ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಬೋಟ್ ಚಲಿಸುವಾಗ ಬೋಟ್‌ನ ನೈಜ ವೇಗ = ಬೋಟಿನ ವೇಗ – ನದಿಯ ವೇಗ ಏಕೆಂದರೆ ಬೋಟ್ ನದಿಯ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಎದುರಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಊರಿಗೆ ಹೋಗುವಾಗ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ

$= (x - 2)\ km/h$

ಮೇಲ್ ತೀರದ ಊರಿಗೆ ತಲುಪಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = 6 ಗಂಟೆ

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ರಿಂದ $d = 6\ (x - 2)$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ .... (2)

ಬೋಟ್ ಕೆಳತೀರದ ಊರಿಗೆ ಚಲಿಸುವಾಗ ಬೋಟಿನ ವೇಗಕ್ಕೆ ನದಿಯ ವೇಗವು ಸೇರುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬೋಟಿನ ವೇಗ = $(x + 2)\ km/h$

ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಊರಿನಿಂದ ಕೆಳತೀರದ ಊರಿಗೆ ಇರುವ ದೂರದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = 5 ಗಂಟೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $d = 5\ (x + 2)$ .... (3)

(2) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ $5(x + 2) = 6\ (x - 2)$ .... (4)

ಹಂತ2 : ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$$5(x + 2) = 6\ (x - 2)$$

$$\therefore 5x + 10 = 6x - 12$$

$$6x - 5x = 10 + 12 \ \therefore\ x = 22.$$

$\therefore$ ಬೋಟಿನ ವೇಗ = $22\ km/h$

ಹಂತ3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

$x = 22$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ (ಜವ) $22\ km/h$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಎಲ್ಲ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಬೋಟ್ ನದಿಯ ದಡದಿಂದ ಚಲಿಸಿ ನದಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಸೇರಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳ (ತೀರ) ಹತ್ತಿರ ಬಂದಾಗ ಚಲನೆಯ ವೇಗವನ್ನು ತಗ್ಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಜಾಗದ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವು ದಡ ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯ ಭಾಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುತ್ತದೆ. ದಡಗಳ (ತೀರ) ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ಬೋಟ್ ಕೆಲ ಸಮಯ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯ ಮಾತ್ರ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ನದಿಯ ವೇಗದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗದಲ್ಲಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ನಗಣ್ಯವಾದುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ ನದಿಯ ನೀರಿನ ಮತ್ತು ಬೋಟ್‌ನ ತಳದ ಭಾಗದ ನಡುವಿನ ಘರ್ಷಣೆ (ಪ್ರತಿರೋಧ friction) ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಪರಿಣಾಮವು ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

1. ನದಿಯ ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಹಾಗೂ ಬೋಟಿನ ವೇಗವು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ನೀರು, ಬೋಟ್ ಹಾಗೂ ಗಾಳಿಯ ಒತ್ತಡದಿಂದ ಆಗುವ ಘರ್ಷಣೆಯು (ಪ್ರತಿರೋಧವು) ನಗಣ್ಯವಾದುದೆಂದು. ನಾವು ಊಹಾನಿರ್ಣಯ (assume) ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಎರಡು ಊಹಾನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಾವು ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈವರೆಗೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ ಶಾಬ್ದಿಕಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ 3 ಹಂತಗಳು ಅಳವಡಿಕೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ ಅವುಗಳೆಂದರೆ.

1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ. (Formulation)

ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಸುಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು (Relevant).

ನಮ್ಮ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಸುಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ ಮತ್ತು ಬಳಕೆಯಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್. ರಸ್ತೆಯ ಸ್ಥಿತಿ, ರಸ್ತೆಯ ರೀತಿ, ಚಾಲನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ವೇಗ ಮುಂತಾದ ಸಣ್ಣ ಪುಟ್ಟ ಅಂಶಗಳನ್ನು 'ನಗಣ್ಯ'ವಾಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ತುಂಬಾ ಜಟಿಲವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಿದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅನಂತರ ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸೂತ್ರಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

2. ಪರಿಹಾರ : ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಕರಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

3. ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಪರಿಹಾರವು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ನಿಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಮೂರು ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಷಯವು ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ ರಚನೆ, ಪರಿಹಾರ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸುಸಂಬದ್ಧ, ಅಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿ.

1. ಒಂದು ಉದ್ಯಮಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಕಾಲದವರೆಗೆ ಒಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಖರೀದಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಬಾಡಿಗೆ ₹2,000/– ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಬೆಲೆ ₹ 25,000/–. ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ದೀರ್ಘಾವಧಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಇಷ್ಟೊಂದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಾಡಿಗೆ ತೆರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಸುವುದೇ ಅಗ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಆಗ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯುವುದೇ ಅಗ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಕನಿಷ್ಟ ಎಷ್ಟು ಅವಧಿಯ ಬಳಕೆಯು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಯನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗಿಂತ ಅಗ್ಗವಾಗಿಸುವುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

2. ಒಂದು ಕಾರು A ಎಂಬ ಸ್ಥಳದಿಂದ 40 km/h ವೇಗ (ಜವ) ದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ B ಎಂಬ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ B ಯಿಂದ A ಗೆ ಒಂದು ಕಾರು 30 km/h. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಅಂತರ 100 km ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಯದ ನಂತರ ಈ ಕಾರುಗಳು ಒಂದನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ? ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

3. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಚಂದ್ರನಿಗೆ 3,84,000 km ಅಂತರವಿದೆ. ಚಂದ್ರನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಸುತ್ತುವ ಪಥ ಬಹುತೇಕ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿದೆ. ಭೂಮಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕಲು ಚಂದ್ರನಿಗೆ 24 ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕು ಎಂದು ಊಹಿಸಿ, ಚಂದ್ರನು ಯಾವ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಹಾಕುವನು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

(π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ. ವೃತ್ತದ ಪರಧಿ = $2\pi r$)

4. ಒಂದು ಕುಟುಂಬವು ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್ ಬಳಸದೇ ಇರುವ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸುವ ವಿದ್ಯುತ್‌ಬಿಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ ಮೊಬಲಗು ₹1,000/–. ಅದೇ ರೀತಿ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸುವ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸುವ ವಿದ್ಯುತ್‌ಬಿಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ ಮೊಬಲಗು ₹ 1,240/–. ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್‌ಗೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಸಲು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹಣ ಗಂಟೆಗೆ ₹ 8/–. ದಿನಂಪ್ರತಿ ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿರುವ ಸರಾಸರಿ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A2.3 ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳು

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ನಮ್ಮ ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯದಲ್ಲಿ ಹೊಸತೇನು ಕಾಣಲಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದ 3 ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಹಂತ ಸೇರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಅದೆಂದರೆ 'ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ) ಹಾಗೆಂದರೇನು? ನೈಜಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗದಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುವ **'ಮಾದರಿ'** ಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವದೊಂದಿಗೆ 'ಉತ್ತರ' ವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನೂ ಸುಧಾರಿಸುವ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ಸಿಂಧುತ್ವ ಸ್ಥಿರೀಕರಣ/ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (Validity) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಇದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಹಂತ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

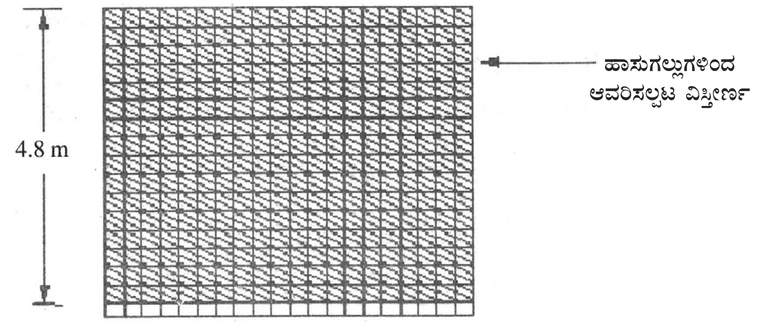
ಮೌಲ್ಯೀಕರಣದ ನಂತರ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಬೇಕಾಗದಿರುವ ಒಂದು ಮಾದರಿಯೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ನೀವು 6m, ಉದ್ದ 5m ಅಗಲದ ಕೊಠಡಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೀರಿ ಹಾಗೂ ಅದರ ನೆಲಕ್ಕೆ ಮೊಸಾಯಿಕ್ ಟೈಲ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು(ಹಾಸುಗಲ್ಲು) ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಹಾಸುಗಲ್ಲುಗಳು 30cm ಬಾಹುವಿನ ಚಚ್ಚೌಕ ಬಿಲ್ಲೆಗಳಾಗಿವೆ. ನಿಮಗೆ ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1: ಸೂತ್ರ ರಚನೆ : ನಾವು ಕೊಠಡಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ) ಹಾಗೂ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಲ್ಲೆಯ ಉದ್ದ 30cm = 0.3m ಕೊಠಡಿಯ ಉದ್ದ 6m. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಠಡಿಯ ಉದ್ದದವರೆಗೂ ಒಂದು ಸಾಲಿಗೆ $\frac{6m}{0.3m}=20$ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ A2.1)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



ಕೊಠಡಿಯ ಅಗಲ 5m, ಆದ್ದರಿಂದ. $\frac{5m}{0.3m} = 16.67$. ಹಾಗಾಗಿ 16 ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ 16 ಸಾಲು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಅಗಲದ ಗುಂಟ $16 \times 0.3 = 4.8$m ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $5 - 4.8 = 0.2$m ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಬಿಲ್ಲೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ. 0.2m ನ್ನು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ತುಂಡುಮಾಡಿ ಜೋಡಿಸಿ ತುಂಬಬೇಕು. ಬಿಲ್ಲೆಯು 0.3 m ಇದೆ. ಇದನ್ನು 2 ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದರೆ 0.15 m ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು 0.2m ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು 2 ಸಮ ಭಾಗಮಾಡಿದರೆ, 2 ಭಾಗವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ:

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

= (ಉದ್ದದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು × ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು) + ತುಂಬಿಸದೇ ಉಳಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ ಉದ್ದದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು 16 ಮತ್ತು ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು 16. ಹಾಗೂ ತುಂಬಿಸದೇ ಉಳಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು = 20

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$.

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ನಮಗೆ ಕೊಠಡಿಯ ನೆಲಕ್ಕೆ ಹಾಸಲು 340 ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಬೇಕು.

ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ) : ಈ ಪರಿಹಾರದ ಕಾರ್ಯಸಾಧ್ಯತೆ (ಸಿಂಧುತ್ವ) ಎಷ್ಟು? ಅಂದರೆ ನಿಜಜೀವನದಲ್ಲಿ, ಹಾಸುಗಲ್ಲು ಜೋಡಿಸುವ ಕೆಲಸಗಾರ ಇನ್ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲು ಕೇಳಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಕತ್ತರಿಸುವಾಗ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗಬಹುದು. ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸಗಾರನು ಚತುರತೆ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು, ಚತುರ ಕೆಲಸಗಾರನಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗಲೂಬಹುದು.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಸೂತ್ರ (1) ನ್ನು ಬದಲಿಸಬೇಕಿಲ್ಲ. ಈ ಸೂತ್ರವು ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸ್ಥೂಲ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಷ್ಟು ಸಾಕು.

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.

2000 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವ ಸಂಸ್ಥೆಯ (U.N .O) 191 ಸದಸ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಒಂದು ಘೋಷಣೆಗೆ ಸಮ್ಮತಿಸಿ ಸಹಿ ಹಾಕಿದವು. ಈ ಘೋಷಣೆಯು ಸಹಿಹಾಕಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು 2015 ರ ವೇಳೆಗೆ ಕೆಲವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯ ಗುರಿಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಾಗಿತ್ತು ಇದನ್ನು 'ಮಿಲೆನಿಯಮ್ ಡೆವಲಪ್‌ಮೆಂಟ್ ಗೋಲ್ಸ್' (ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಗುರಿಗಳು) ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುರಿ ಲಿಂಗತಾರತಮ್ಯ ನಿವಾರಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರುವುದನ್ನು ಅರಿಯಲು ಬಳಸುವ ಒಂದು ಸೂಚಕವೆಂದರೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಮಾಧ್ಯಮಿಕ, ಪ್ರೌಢ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಹುಡುಗಿ ಹಾಗೂ ಹುಡುಗರ ಅನುಪಾತ. ಭಾರತವೂ ಈ ಘೋಷಣೆಗೆ ಸಹಿ ಹಾಕಿರುವ ಸದಸ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರವಾಗಿದ್ದು ಈ ಅನುಪಾತದ ಸುಧಾರಣೆಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ (ಕೋಷ್ಟಕ A2.1)

ಕೋಷ್ಟಕ A2.1

ವರ್ಷ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	
1991 – 92	41.9	
1992 – 93	42.6	
1993 – 94	42.7	
1994 – 95	42.9	
1995 – 96	43.1	
1996 – 97	43.2	
1997 – 98	43.5	
1998 – 99	43.5	
1999 – 2000	43.6 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ
2000 – 2001	43.7 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ
2001 – 2002	44.1 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ

(ಆಧಾರ, ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರದ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ವೆಬ್‌ಸೆಟ್ – ಶಿಕ್ಷಣ ಅಂಕಿ – ಅಂಶ)

ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ ಅನುಪಾತವು 50% ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಕೋಷ್ಟಕ A2.1 ನಿಂದ 1991–92 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾತಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾಗುವುದರಿಂದ ನಾವು 1991–92, 1992–93 ಅನ್ನುವ ಬದಲು 1991, 1992 ಈ ರೀತಿ ನಮೂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿಯು ಕೊಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಶೇಕಡಾದಂತೆಯೇ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಮುಖ್ಯವೇ ವಿನಃ ಯಾವ ವರ್ಷ ಎನ್ನುವುದಲ್ಲ. (ಇದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆ ಯಾಗುವ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶ ₹ 1500/– ಕ್ಕೆ 8% ರಂತೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಮಾಡುವಾಗ ಅದು 1999 ರಿಂದ 2002, ಆದರು 2001 ರಿಂದ 2004 ರವರೆಗೆ ಆದರೂ ಒಂದೇ ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಈ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ) ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 1991 ರಿಂದ ದಾಖಲಾತಿಯು ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ 1991 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ವರ್ಷಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. 1991 ನ್ನು ಶೂನ್ಯ ವರ್ಷವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. 1992ಕ್ಕೆ 1ನೇ ವರ್ಷ 1993ಕ್ಕೆ 2ನೇ ವರ್ಷ. ಇದೇ ರೀತಿ ಬರೆದರೆ ಕೋಷ್ಟಕ 2.2 ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.2

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ %
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ಕೋಷ್ಠಕ A2.3 ದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಠಕ A2.3

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	ಹೆಚ್ಚಳ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 ರಿಂದ 1992 ರ ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 41.9 ರಿಂದ 42.6% ಗೆ ಅಂದರೆ 0.7 % ಹೆಚ್ಚಳವಾಯಿತು. ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 42.6% ರಿಂದ 42.9 ಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ 0.1 % ಹೆಚ್ಚಳವಾಯಿತು. ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಠಕದಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಹೆಚ್ಚಳದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ಇರುವ ಕಾಲಾವಧಿ ಹಾಗೂ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ರೂಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚಳವು ಒಂದಿಷ್ಟು ಸ್ಥಿರ ರೀತಿಯದ್ದಾಗಿದೆ. ಕೇವಲ ಮೊದಲನೆಯ ಹಾಗೂ ಹತ್ತನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಯವಿದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಸರಾಸರಿ = $\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಹೆಚ್ಚಳವು ಶೇಕಡಾ 0.22 ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ:

ನಾವು ದಾಖಲಾತಿಯು 0.22% ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ದಾಖಲಾತಿ ಹೆಚ್ಚಳದ ಶೇಕಡಾ (Enrolment percentage) = EP = 41.9 + 0.22.

2ನೆಯ ವರ್ಷದ EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 × 0.22

3ನೆಯ ವರ್ಷದ EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22

= 41.9 + 3 × 0.22.

ಅದೇ ರೀತಿ ($n \geq 1$) n ನೇ ವರ್ಷದ EP = 41.9 + 0.22n ಆದಾಗ .... (1)

ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂದರೆ ನಾವು ದಾಖಲಾತಿ ಶೇಕಡಾವು (EP) 50 ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ n ನ ಬೆಲೆಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು

50 = 41.9 + 0.22 n .... (2)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ: ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

0.22 n = 50 − 41.9 = 8.1

$n = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ: ವರ್ಷದ ಲೆಕ್ಕಚಾರವು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ 36.8 ರ ಬದಲಾಗಿ 37 ವರ್ಷ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇ 50 ದಾಖಲಾತಿಯು 1991 + 37 = 2028 ರಲ್ಲಿ ಆಗಲಿದೆ.

ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನೈಜಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವ)ದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ನಿಜಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಹಂತ 4 ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ : ಸೂತ್ರ 2 ವಾಸ್ತವಿಕತೆಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಸೂತ್ರ 2ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಅವಧಿ (ವರ್ಷಗಳು)ಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಕೋಷ್ಟಕ A2.4

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (% ನಲ್ಲಿ)	ಸೂತ್ರ (2) ರಂತೆ ದೊರೆತ ಬೆಲೆ% ನಲ್ಲಿ	ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

ಸೂತ್ರ (2) ರಿಂದ ದೊರೆತ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ 0.3% ರಷ್ಟು ಅಥವಾ 0.5 % ಗಿಂತಲು ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 1% ರಿಂದ 2% ಹೆಚ್ಚಳವಿರುವುದರಿಂದ 3 ರಿಂದ 5 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಆಗಬಹುದು. ಇಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಸಮಾಪ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ (2) ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ದೋಷವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಎನಿಸಿದಲ್ಲಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸುಧಾರಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಪುನಃ ಹಂತ (1) ಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು ಹಾಗೆ ಮಾಡೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಸುಧಾರಿತ ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಈಗಲೂ ನಾವು ಏರಿಕೆಯು 0.22% ಸ್ಥಿರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಆದರೆ ದೋಷವನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲು ದೋಷನಿವಾರಕ ಅಂಶವನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ದೋಷದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ.

(ಕೋಷ್ಟಕ A2.4 ರನ್ನು ನೋಡಿ)

$$\text{ದೋಷದ ಸರಾಸರಿ} = \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

ದೋಷದ ಸರಾಸರಿ 0.18 ನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸೋಣ.

ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಗಣಿತ ವಿವರಣೆ :

ಸರಾಸರಿ ದೋಷವನ್ನು ಸೂತ್ರ (2) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೊಂದಿರುವ ಶೇಕಡಾಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸೋಣ. ಅದರಿಂದಾಗಿ ನಮಗೆ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸೂತ್ರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿಯ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ ($n \leq 1$ ಆದಾಗ)

$= 41.9 + 0.22\ n + 0.18 = 42.08 + 0.22\ n$ .... (3)

ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸೋಣ

ಆದ್ದರಿಂದ n ನ ಹೊಸ ಸೂತ್ರವು

$50 = 42.08 + 0.22\ n$ .... (4)

ಹಂತ 2: ಪರ್ಯಾಯ ಪರಿಹಾರ : ಸೂತ್ರ (4) ನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

$0.22\ n = 50 - 42.08 = 7.92$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : 1991 + 36 = 2027 ರಲ್ಲಿ n = 36 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೆಣ್ಣುಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ 50% ಆಗುವುದು

ಹಂತ 4 ಸಿಂಧುತ್ವ : ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸೂತ್ರ (4) ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೈಜಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ A2.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.5

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	(2) ರಿಂದ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು	ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	(4) ರಿಂದ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು	(ಮೌಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	–0.12
8	43.6	43.66	–0.06	43.84	–0.24
9	43.7	43.88	–0.18	44.06	–0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	–0.18

ಈಗ 4 ರಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳು 2 ರಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತ ನೈಜಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ದೋಷವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಸಮಾಪ್ತಿಗೊಳಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರ (4) ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಹೆಣ್ಣುಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿಯಾದ ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ದಾಖಲಾತಿಯ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಾವು ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮೇಲಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅನುಸರಿಸಿದ ಕಾರ್ಯತಂತ್ರ (ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ) ಯನ್ನು **"ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ"** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿರಚನೆ ತಯಾರಿಸಲು ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದೆವು ನಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿ, ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು (prediction) ನೀಡುವ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅವು ತರಗತಿ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಮೀರಿದ್ದು. ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶವು ನಿಮ್ಮನ್ನು 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿರಚನೆ' ಯ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಹೇಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪರಿಚಯಿಸುವುದೇ ವಿನಃ ಇದರಿಂದ ಅತ್ಯಂತ ನಿಖರವಾದ ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಪಡೆಯುವುದಾಗಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಸಾಕು.

ಈವರೆಗಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ನೀವು ನೈಜ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಕೆಲವು ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ನೀವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲು ಇಲ್ಲೊಂದು ಅಭ್ಯಾಸವಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

1. ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಓಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳನ್ನು ಸೇರ್ಪಡೆಗೊಳಿಸದ ನಂತರ ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ 400 ಮೀಟರ್ ಓಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 'ಚಿನ್ನದ ಪದಕ' ವಿಜೇತರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಠಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಕ್ರೀಡಾಪಟುಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಹಾಗೂ ಕ್ರೀಡೆ ನಡೆದ ವರ್ಷ ಬಳಸಿ 'ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ' ರಚಿಸಿ. ಇದರ ಆಧಾರದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಒಲಂಪಿಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಿನ್ನದಪದಕ ವಿಜೇತರು' ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಿ.

ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳು 4 ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.6

ವರ್ಷ	ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಾವಧಿ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿನ್ನದ ಪದಕ ವಿಜೇತರು)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.4 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಇತಿಮಿತಿಗಳು.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಒಳಗೊಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪರಿಸಮಾಪ್ತಿಗೊಳಿಸೋಣ. ಈವರೆಗಿನ ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳ ಹಿನ್ನಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಸಿಂಹಾವಲೋಕನವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ : ವಿಭಾಗವನ್ನು 2.2 ರ ಉದಾಹರಣೆ 1. ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ 2.3 ರ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರ ಸೂತ್ರರಚನೆಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ವಿಭಾಗ 2.2 ರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವೂ ಸಿದ್ಧರೂಪದಲ್ಲಿತ್ತು. ಆದರೆ A2.3 ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗಿರಲಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರ ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲಾವಕಾಶ ಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಸೂತ್ರ 1 ನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಬಳಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಅದು ಸೂತ್ರ 2 ರಷ್ಟು ಉತ್ತಮವಾಗಿರಲಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ನೈಜಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ 1 ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರ 1 ರ ಸುಧಾರಣೆ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುವುದು. ಇದು ಸರ್ವೇಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಸತ್ಯ ನಾವು ನೈಜಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವಾಗ ಸೂತ್ರ ರಚನೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಚಲನೆಯ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವು ಚಲನೆಯ ಗಣಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿರೂಪಿಸಲು ಸರಳವಾಗಿವೆ.

ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ನ್ಯೂಟನ್‌ರವರು ಅವರಿಗಿಂತ ಮುಂಚೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಕಲೆಹಾಕಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಸೂತ್ರರಚನೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಹಂತ (ಹೆಜ್ಜೆ)ವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(i) ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು: ಅನೇಕ ವೇಳೆ 'ಸಮಸ್ಯೆ'ಯು ಅಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಬಾಲಕ – ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿಯು ಸಮನಾಗಿದೆ ಎಂದು ದೃಡೀಕರಿಸುವುದು ಒಂದು ಧ್ಯೇಯವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗಬೇಕಾದ ವಯೋಮಾನದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕರು ಹಾಗೂ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ದಾಖಲಾಗಲೇಬೇಕೆಂಬ ಅರ್ಥವು ಬರಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಥವೆಂದರೆ ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿರುವ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ಇರಬೇಕೆಂಬುದು. ನಾವು ಎರಡನೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ಅಂದರೆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(ii) ಸುಸಂಬದ್ಧವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು :

ಯಾವ ಅಂಶಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಬಂಧಗಳು ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದವು ಹಾಗೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದವು ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಪ್ರಮುಖವಲ್ಲದ, ಅಂದರೆ ನಗಣ್ಯವಾದ ಕೈಬಿಡಬಹುದಾದ ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾದ ಬಾಲಕಿಯರ ಶೇಕಡಾಪ್ರಮಾಣವು ಈ ವರ್ಷದ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣದ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಲಕಿಯರು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾದುದನ್ನು ಕಂಡ ಪೋಷಕರು ತಮ್ಮ ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಅಭಿಲಾಷೆ ಪಡಬಹುದು. ಆದರೆ ನಾವು ಈ ಅಂಶವನ್ನು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಹಂತವನ್ನು ದಾಟುವವರೆಗೆ ಈ ಅಂಶ ಪ್ರಮುಖವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದೂ ಅಲ್ಲವೇ ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಜಟಿಲವಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ನಮಗೆ ಈಗ ಸಮಸ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಯಾವ ಅಂಶಗಳು ಮುಖ್ಯವಾದವು ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಾವೀಗ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ಒಂದು ಆಲೇಖ, ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ರಚಿಸಬೇಕು.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯು ಸೂತ್ರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಒಂದು ಚರಾಂಶವಾಗಿ (variable) ನಮ್ಮ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದುದ್ದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂಗತಿ.

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. (ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ ಕ್ರಮ)

ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರ ರಚನೆಯೇ ನಮಗೆ 'ಪರಿಹಾರ'ವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮಾನ

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಗಣಿತೀಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ನಿಮ್ಮ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3 : ಪರಿಹಾರದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ.

ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿನ ಚರಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗುವುದು.

ಚರಾಂಶದ ಈ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ 'ಸಮಸ್ಯೆ'ಗೆ ವಾಪಸ್ಸಾಗಬೇಕು ಮತ್ತು ನೈಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು.

ಹಂತ 4 : ಪರಿಹಾರ ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ)

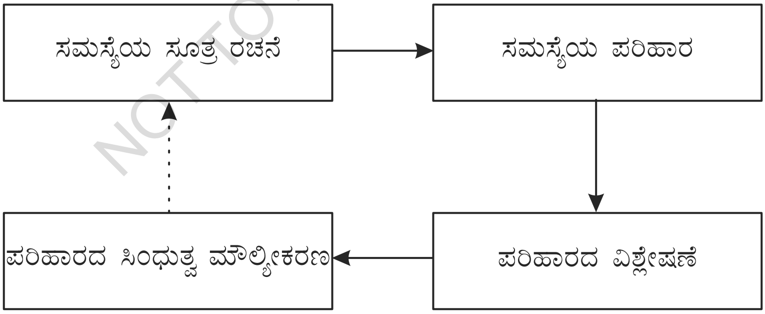
ವಿಭಾಗ A.2.3 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಿದಂತೆ, ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಮೇಲೆ ನೈಜತೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆದರೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹವಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿಹಾರವು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗದಿದ್ದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನರ್‌ರಚಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೊನೆಯ ಹಂತವು ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಹಾಗೂ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಈ ಹಂತವು ಶಾಬ್ಧಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.

ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ವದ ಹಂತವಾಗಿರುವ ಅಂಶ ಕೆಲವು ನೈಜ ಜೀವನದ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೂ ನಾವು ಎಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರವನ್ನು (ಪರಿಹಾರವನ್ನು) ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಸರಳವಾಗಿದ್ದು, ಉತ್ತರ/ಪರಿಹಾರ ಸರಿಯಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಇರುತ್ತದೆ.

A2.3 ನಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಉದಾಹರಣೆ ಇಂತಹುದಾಗಿದೆ

ಈ ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ A2.2 ನಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಹೇಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ. ಸಿಂಧುತ್ವ ಪರಿಶೀಲನಾ ಹಂತದಿಂದ ಸೂತ್ರಾಚರಣೆ ಹಂತಕ್ಕೆ 'ಚುಕ್ಕೆ ರೇಖೆ' ಯಿಂದ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇದರ ಉದ್ದೇಶ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಪುನಃ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕಾಗದಿರಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ.



ನೀವು ಈ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಹಂತಗಳ ಮುಖ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಧ್ಯೇಯವೆಂದರೆ ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಉಪಯುಕ್ತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಿಸುವುದು. ಈ ವಿಧಾನವು ಅಧಿಕ ವೆಚ್ಚದ ವಿಧಾನಗಳಾದ ನೇರವೀಕ್ಷಣೆ ಅಥವಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹವು ಅಸಾಧ್ಯವೆನಿಸುವ

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾದರೂ ಏಕೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಕೆಲವು ಅನುಕೂಲತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಮಥುರಾದಲ್ಲಿರುವ ಶುದ್ಧೀಕರಣ ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳಿಂದ ಹೊರ ಹೊಮ್ಮುವ ವಿಷ ಅನಿಲಗಳಿಂದ ತಾಜಮಹಲ್‌ನ ಅಮೃತಶಿಲೆಗೆ ತುಕ್ಕಿನಂತಹ ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗುವ ಪರಿಣಾಮದ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ನೇರವಾಗಿ ತಾಜಮಹಲ್‌ನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಲು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ಕ್ಷೇಮಕರವಲ್ಲ ಹಾಗೆ ಬೇಕೆಂದರೆ, ಅದರ ಕಿರು ಪ್ರತಿಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅದಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಸೌಕರ್ಯಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು ಅಪಾರ ವೆಚ್ಚದ ಕಾರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತ ಮಾದರೀಕರಣವು ಇಂತಹ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಸಂಗ, ಇನ್ನು ಐದು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳು ಬೇಕು ಎನ್ನುವುದಾಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳ ಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಅನೇಕ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ನೆರವಾಗುವ ಏಕೈಕ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ.

ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆ : ವಿಭಾಗ A2.3 ಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಒಳ್ಳೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಬಹುದಿತ್ತು. ಈ ಹಂತದಲ್ಲೇ ನಾವು ಸ್ಥಗಿತಗೊಳಿಸಿದ್ದೇಕೆಂದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಭಂದಿಸಿದ 'ಗಣಿತದ ಸಾಧನ'ಗಳಿರಲಿಲ್ಲ. ನಿಜ ಜೀವನದಲ್ಲೂ ಹೀಗೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅನೇಕ ವೇಳೆ ನೀವು ಲಭ್ಯವಾದ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಧಾನ ಪಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. (approximate) ಏಕೆಂದರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಗಣಿತ ಸಾಧನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಹವಾಮುನ್ಸೂಚನೆ ದೃಢೀಕರಣ ಮಾಡುವ 'ಹವಾಮಾನ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ' ಯು ಅತ್ಯಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದುದು. ಅತ್ಯಂತ ಖಚಿತವಾದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಗಣಿತೀಯ ಸಲಕರಣೆಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ನಮ್ಮ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸಲು ಎಷ್ಟೊಂದು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕೆಂದು ನಿಮಗೆ ಅಚ್ಚರಿಯಾಗಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಲು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚರಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆಗ ನಮಗೆ ಬಳಸಲು ಕಷ್ಟವಾಗುವಂತಹ ಅತ್ಯಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಮಾದರಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಉತ್ತಮ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಮತೋಲನ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅವೆಂದರೆ

1. ನಿಖರತೆ – ವಾಸ್ತವಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಹತ್ತಿರವಾಗಿರುವುದು.

2. ಉಪಯುಕ್ತತೆ – ಬಳಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಚಲನೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಸೂತ್ರಗಳು ಬಹಳ ಸರಳವಾಗಿವೆ, ಆದರೆ ಅನೇಕ ಭೌತಿಕ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು 'ಮಾದರಿ' ಯಾಗಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಎಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯೇ ಪರಿಹಾರವೆ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅಲ್ಲ! ಅದಕ್ಕೂ ಇತಿ–ಮಿತಿಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅದು ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ, ನಾವು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದುದೇನೆಂದರೆ

1. ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯು ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸರಳೀಕರಣ.

2. ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಅಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ದೇಶದ ಭೂಪಟದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೂ ಹಾಗೂ ನಿಜವಾದ ದೇಶಕ್ಕೂ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಭೂಪಟದ ನೆರವಿನಿಂದ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಪರ್ವತವು ಸಮುದ್ರ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮಟ್ಟದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದೇ ವಿನಃ ಅಲ್ಲಿನ ಜನರ ಚಹರೆ (ಲಕ್ಷಣ) ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಭೂಪಟ ಮಾದರಿಯನ್ನು ನಾವು ಅದು ಯಾವುದಕ್ಕಾಗಿ ರೂಪಿತವಾಗಿದೆಯೋ ಅಷ್ಟಕ್ಕೇ ಸೀಮಿತವಾಗಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ರಚಿಸುವಾಗ ದೇಶಸಂಬಂಧಿ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಅದೊಂದರಲ್ಲೇ ಸೇರಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಹಾಗೂ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಗಣ್ಯವಾಗಿರಿಸಿರುತ್ತೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಡಬೇಕು.

ನಾವು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಅದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ 'ಮಿತಿ'ಯಲ್ಲಿಯೇ ಬಳಸಬೇಕು. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿವರವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ರಚನೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಪರಿಹಾರ, ಇವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

2. ನಾಲ್ಕು ರಸ್ತೆಗಳ ಕೂಡು ಸ್ಥಳ (ವೃತ್ತ / ಚೌಕ) ದಲ್ಲಿ ವಾಹನಗಳು ದಟ್ಟಣೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಆ ವಾಹನಗಳನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳು ಕಾಯುವ ಸಮಯ ಅತಿಕಡಿಮೆಯಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯವಾದ ಹಾಗೂ ನಗಣ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವು?

   (i) ಪೆಟ್ರೋಲಿನ ದರ

   (ii) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ನಾಲ್ಕು ರಸ್ತೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೂಡು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬರುವ ವಾಹನಗಳ ವೇಗದ ದರ

   (iii) ಸೈಕಲ್, ರಿಕ್ಷಾ ಮುಂತಾದ ಕಡಿಮೆ ವೇಗದ ವಾಹನಗಳು ಹಾಗೂ ಕಾರು, ಮೋಟಾರ್ ಬೈಕ್ ನಂತಹ ವೇಗದ ವಾಹನಗಳ ಅನುಪಾತ.

A.2.5. ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ಹಂತಗಳು

2. ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯ ರಚನೆ.

3. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು

   1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ :

      (i) ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವುದು

      (ii) ಸಂಬಂಧಿಸಿದ (ಸುಸಂಬದ್ಧ) ಅಂಶ/ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡುವುದು.

      (iii) ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ

   2. ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

   3. 'ಪರಿಹಾರ'ವನ್ನು ನಿಜ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು.

   4. ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ 'ಮಾದರಿ'ಯು ಸುಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವ ಪರಿಶೀಲನೆ)

4. ಗಣೀತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಧ್ಯೇಯ, ಉಪಯುಕ್ತತೆ ಮತ್ತು ಇತಿ–ಮಿತಿಗಳು.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಉತ್ತರಗಳು / ಸುಳಿವು

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಅವುಗಳು ಸಮ 6. $\angle BAC = \angle DAE$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ 7. ಪ್ರತಿಕೋನವು 45°

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

3. (ii) ರಿಂದ (i), $\angle ABM = \angle PQN$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

3. (i) Δ DAC ಮತ್ತು Δ BCA ದಿಂದ, $\angle DAC = \angle BCA$ ಮತ್ತು $\angle ACD = \angle CAB$ ಮುಂತಾದವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (ii) ಪ್ರಮೇಯ 8.4 ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\angle BAC = \angle BCA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

2. PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. PQ||AC ಮತ್ತು PS||BD ಎಂದು ಸಹ ತೋರಿಸಿ. ಆದರಿಂದ $\angle P = 90^\circ$
5. AECF ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಅದರಿಂದ AF||CE ಮುಂತಾದವುಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

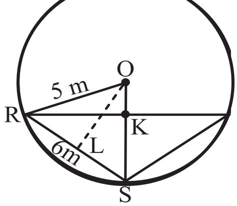
1. ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸಾಧಿಸಿ.
2. SAS ತ್ರಿಭುಜದ ಸರ್ವಸಮ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜವು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. 6 cm, ಮೊದಲು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB, CD ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $OM \perp AB$ ಮತ್ತು $ON \perp CD$ ಎಳೆಯಿರಿ. OE ಸೇರಿಸಿ.
   ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಭುಜ OME ಮತ್ತು ONE ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಉದಾಹರಣೆ 2ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.
4. AD ಗೆ OM ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. ರೇಷ್ಮಾ, ಸಲ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ ಇವರನ್ನು R,S,M ದಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ. KR = x m ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ ಗಮನಿಸಿ).



Δ ORS ದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}x\times 5$

Δ ORS + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ RS × OL = $\frac{1}{2}\times 6\times 4$

x ಮತ್ತು RM ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಮತ್ತು ಪೈಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. 45°

2. 150°, 30°

3. 10°

4. 80°

5. 110°

6. $\angle BCD = 80°$ ಮತ್ತು $\angle ECD = 50°$

8. CD ಯ ಮೇಲೆ AM ಮತ್ತು BN ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (AB ∥ CD ಮತ್ತು AB < CD). Δ AMD $\perp$ Δ BMC ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದರಿಂದ $\angle C = \angle D$ ಮತ್ತು $\angle A + \angle C = 180°$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2

2. ₹ 1650000

3. $20\sqrt{2}\ m^2$

4. $21\sqrt{11}\ cm^2$

5. 9000 cm^2

6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. 165 cm^2
2. 1244.57 m^2
3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2
4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280
5. 63 m
6. ₹ 1155
7. 5500 cm^2
8. ₹ 384.34 (ಸರಿಸುಮಾರು)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2
2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2
3. 942 cm^2
4. 1:4
5. ₹ 27.72
6. 3.5 cm
7. 1:16
8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4 \pi r^2$ (iii) 1 : 1

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 *l* (ii) $\frac{11}{35}$ *l*
3. 10 cm
4. 8 cm
5. 38.5 *kl*
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3
8. 240 π cm^3; 5: 12
9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}\ cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)
2. (i) $11498\ \frac{2}{3}\ cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g (ಸರಿಸುಮಾರು)
4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 *l* (ಸರಿಸುಮಾರು)
6. 0.06348 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)
7. $179\ \frac{2}{3}$ cm^3
8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)
9. (i) 3*r* (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. (ii) ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿಯ ಆರೋಗ್ಯದ ಸ್ಥಿತಿಗತಿ.

3. (ii) ಪಕ್ಷ A

4. (ii) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜ (iii) ಇಲ್ಲ

5. (ii) 184

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ವ್ಯಾಪ್ತಿ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
1 – 2	5	1	$\frac{5}{1}\times1=5$
2 – 3	3	1	$\frac{3}{1}\times1=3$
3 – 5	6	2	$\frac{6}{2}\times1=3$
5 – 7	12	2	$\frac{12}{2}\times1=6$
7 – 10	9	3	$\frac{9}{3}\times1=3$
10 – 15	10	5	$\frac{10}{5}\times1=2$
15 – 17	4	2	$\frac{4}{2}\times1=2$

ಈಗ ನೀವು ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಮ್‌ನ ಚಿತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. (i)

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
1 – 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 – 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 – 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 – 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 – 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

ಈಗ ನೀವು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಮ್‌ನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(ii) 6–8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಅಭ್ಯಾಸ A .2.1

1. ಹಂತ 1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಸುಸಂಬದ್ದ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವುವೆಂದರೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಬೇಕಾಗಿರುವ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಖರ್ಚು (ವೆಚ್ಚ).

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾಗಲಿ, ಬಾಡಿಗೆ ಪಡೆಯುವುದರಲ್ಲಾಗಲಿ, ಕಾಲಾವಧಿ ವೆಚ್ಚ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಗಣ್ಯ (ಅಸಂಬದ್ಧ) ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಎಲ್ಲ ಬ್ರಾಂಡ್, ಹಾಗೂ ಜನರೇಷನ್‌ನ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉತ್ಪಾದಕರು, ಬೇರೆಬೇರೆ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಡಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ತಯಾರಿಸಿದ್ದರೂ ಆ ಅಂಶವನ್ನು 'ನಗಣ್ಯ'ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

x ತಿಂಗಳಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚ $= 2000\,x$. ಇದು ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆಗುವ ವೆಚ್ಚಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದರಿಂದ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದೇ ಉತ್ತಮ ನಿರ್ಣಯ ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು $2000\,x = 25000$……(i)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ (1) ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ, $x = \frac{25,000}{2000} = 12.5$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಬಾಡಿಗೆ, ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಕೊಳ್ಳಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ 12 ತಿಂಗಳಿಗೂ ಹೆಚ್ಚು ಅವಧಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆ ವೆಚ್ಚವಾಗುತ್ತದೆ.

2. **ಹಂತ 1 :** ಸೂತ್ರದ ರಚನೆ

ಕಾರು ಸ್ಥಿರ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಕಾರಿನ ಜವದ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಗಣ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

x ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಎರಡು ಕಾರುಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದಾದರೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಕಾರು A ಯಿಂದ 40 x km ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯ ಕಾರು B ಯಿಂದ 30 $x$km ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದಾಗ ಅಂದರೆ ಅದು A ಯಿಂದ $(100 - 30x)$ km ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು. $40\ x = (100 - 30x)$km

ಅಂದರೆ, $70x = 100$ ……. (i)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ (i) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಗಂಟೆ $\frac{100}{70}$ = 1.4 ಗಂಟೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಾರುಗಳು 1.4 ಗಂಟೆ (1 ಗಂಟೆ 25 ನಿಮಿಷ) ನಂತರ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

3. **ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರರಚನೆ :** ಚಂದ್ರನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಮಾಡಿವ ವೇಗ = $\frac{\text{ಪಥದ ಉದ್ದ}}{\text{ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ}} = \frac{C}{t}$

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ : ಪಥವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಪರಧಿಯು

$$= 2 \times \pi \times 38400km = 2411520\ km$$

ಈ ಪಥದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಲ ಕ್ರಮಿಸಲು ಚಂದ್ರನು 24 ಗಂಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ $= \frac{2411520}{24} = 100480\ km / hour$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಚಂದ್ರನ ವೇಗ = ಗಂಟೆಗೆ 100480 km/h

4. **ಸೂತ್ರ ರಚನೆ :** ವಾಟರ್ ಹೀಟರನ ಬಳಕೆಯಿಂದಾಗಿಯೇ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದು ಪರಿಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಾಟರ್ ಹೀಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಅವಧಿಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಹೀಟರ್ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ ಅದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240

ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್‌ನ್ನು 1 ಗಂಟೆ ಬಳಸಿದ್ದಕ್ಕೆ ಆದ ವೆಚ್ಚ = ₹ 8

ಆದ್ದರಿಂದ 30 ದಿನ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿದ್ದಕ್ಕೆ ಆದ ಖರ್ಚು = $8 \times 30 \times x$

ಆದೇ ರೀತಿ, 30 ದಿನಗಳ ಅವಧಿಗೆ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿದ್ದರಿಂದ ಆದ ಖರ್ಚು = ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊಬಲಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಆದ್ದರಿಂದ $240\ x = 240$ ……….(i)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ $x = 1$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $x = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರನ್ನು ಪ್ರತಿದಿನ ಸರಾಸರಿ ಒಂದು ಗಂಟೆ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 2.2

1. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ನಿಮಗೆ ಸರಿಯೆನಿಸುವ ಇನ್ಯಾವುದೇ ಸೂಕ್ತವಾದ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ A 2.3

1. ಸೂತ್ರರಚನೆ ಹಂತವು ನೈಜಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಧೀರ್ಘವಾದಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿಸಿದ್ದೇವೆ.

   ಅದೇರೀತಿ, ಶಾಬ್ಧಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಮಾಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವವ ಪರೀಕ್ಷೆ) ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

   ಇದಲ್ಲದೆ ಶಾಬ್ಧಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು 'ನಿಖರವಾದ ಉತ್ತರ'ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

   ಇದು ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಪ್ರಸಂಗಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಆಗಲೇಬೇಕೆಂದೇನಿಲ್ಲ.

2. ಪ್ರಮುಖವಾದ (ಸುಸಂಬದ್ಧ) ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ

   (ii) ಮತ್ತು (iii)

   (i) ಇಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಬಹುದಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ (i) ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶ ಅಲ್ಲ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED