కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

Mathematics

Telugu Medium

9

తొమ్మిదవ తరగతి

భాగం – 2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

National Council For Education and Research

Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

Karnataka Textbook Society (R.)

6th Cross, Malleshwaram,

Bengaluru - 560 003

విషయ సూచిత

భాగం – 2

E4F5R6

అ.సంఖ్య	అధ్యాయం		పుట సంఖ్య
7.	**త్రిభుజాలు**		**1 - 23**
	7.1	పరిచయం	1
	7.2	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం	1
	7.3	త్రిభుజాల సర్వసమాన త్వానికి నియమాలు	4
	7.4	త్రిభుజము యుక్క కొన్ని ధర్మములు	13
	7.5	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరికొన్ని నియమాలు	18
	7.6	సారాంశం	22
8.	**చతుర్భుజాలు**		**24-37**
	8.1	సమాంతర చతుర్భుజం లక్షణాలు	24
	8.2	మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం	32
	8.3	సారాంశం	36
9.	**వృత్తాలు**		**38-54**
	9.1	వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పరచుకోణం	38
	9.2	వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం	40
	9.3	సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి మధ్యగల దూరాలు	41
	9.4	వృత్త చాపము ఏర్పరచే, కోణం	45
	9.5	చక్రీయ చతుర్భుజం	48
	9.6	సారాంశం	53

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.	హెరాన్స్ సూత్రం		**55-60**
	10.1	త్రిభుజ వైశాల్యం - హెరాన్స్ సూత్రం	55
	10.2	సారాంశం	60
11.	ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు		**61-76**
	11.1	వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం	61
	11.2	గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం	66
	11.3	వృత్తాకార సిలిండర్ ఉపరితల వైశాల్యం	70
	11.4	గోళం ఘన పరిమాణం	72
	11.5	సారాంశం	76
12.	సాంఖ్యక శాస్త్రం		**77-91**
	12.1	దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ప్రాతినిధ్యం చేయుట	77
	12.2	సారాంశం	80
13.	అనుబంధ – 2		**92-112**
	A 2.1	పరిచయం	92
	A2.2	సమస్యల సమీక్ష	93
	A2.3	కొన్ని గణిత నమూనాలు	98
	A2.4	గణిత నమూనా తయారి దాని ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు	106
	A.2.5	సారాంశం	111
14.	జవాబులు / సూచనలు		**112-117**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అధ్యాయం – 7

A4M1T2

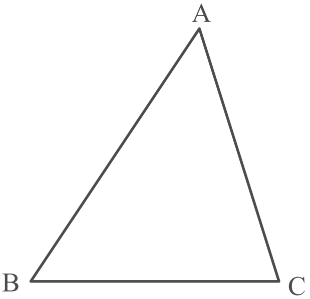
త్రిభుజాలు

7.1 పరిచయం

త్రిభుజాలు వాటి లక్షణాల గురించి కింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు. మూడు ఖండించు రేఖలతో ఏర్పడు సంవృత ఆకృతిని త్రిభుజం అంటాము అని మీకు తెలుసు (త్రి అంటే మూడు) ఒక త్రిభుజం మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలు. మూడు శీర్షాలు కలిగి వుంటుంది. త్రిభుజం ABC ని ΔABC అని సూచిస్తాము.

ఉదాహరణకు ΔABC లొ (చిత్రం 7.1) మూడు భుజాలు AB, BC, CA; మూడు కోణాలు $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు A, B, C లు మూడు శీర్షాలున్నాయి.

అధ్యాయం 6 లో త్రిభుజాలకు సంబంధించిన కొన్ని లక్షణాలను కూడా నీవు నేర్చుకొన్నావు. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజాల సర్వసమానతను. సర్వసమానత్వ నియమాలను విపులంగా మీరు నేర్చుకుంటారు. వీటిలోని అనేక లక్షణాలు వెనుకటి తరగతిలో ఇదివరకే పరీక్షించారు ఇప్పుడు కొన్నింటిని ఈ అధ్యాయంలో సాధిద్దాం.



చిత్రం 7.1

7.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

ఒకే కొలతలున్న నీ భావచిత్రాలు రెండు కాపీలు ఒకే రకంగా వుండడాన్ని మీరు గమనించివుంటారు. అదేవిధంగా ఒకే కొలత గల రెండు గాజులు, ఒకే బ్యాంకు ఇచ్చిన రెండు ATM కార్డులు ఒకే రకంగా ఉంటాయి. ఒకే సంవత్సరంలో ముద్రించిన రెండు ఒకరూపాయి నాణ్యాలు

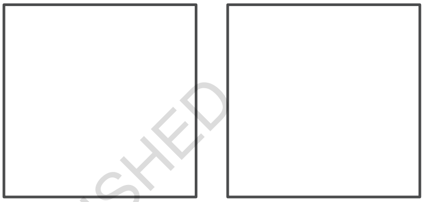
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒకదాని పై ఒకటి ఉంచిన రెండూ పరస్పరం ఏకిభవించడాన్ని గుర్తుచేసుకోండి.

ఈ విధమైన ఆకృతులను ఏమంటారు అని గుర్తుచేసుకొన్నచో వాటిని సర్వసమాన ఆకృతులు అని అంటాము. (సర్వసమానం అంటే అన్ని రకాల సమానంగా వుండడం లెదా అకారం మరియు పరిమాణం రెండింటాలోనూ సమానం అని అర్థం).

ఇప్పుడు ఒకే వ్యాసార్థగల రెండు వృత్తాలను గీసి ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచండి. మీరు ఏమిగమనించారు? అవి పరస్పరం ఒకదాని తో ఒకటి ఏకభవిస్తాయి అలా ంటి వాటిని మనం సర్వసమాన వృత్తాలంటాము.

భుజం పొడవు ఒకటే వున్న రెండు చతురస్రాలను (చిత్రం 7.2). లేదా సమబాహులున్న రెండు సమబాహుత్రిభుజాలను ఒక దానిపై ఒకట వుంచండి. చతురస్రాలు పరస్పరం సర్వమాన అదేవిధంగా సమబాహుత్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమాన మైనదానిని గమనిస్తారు.



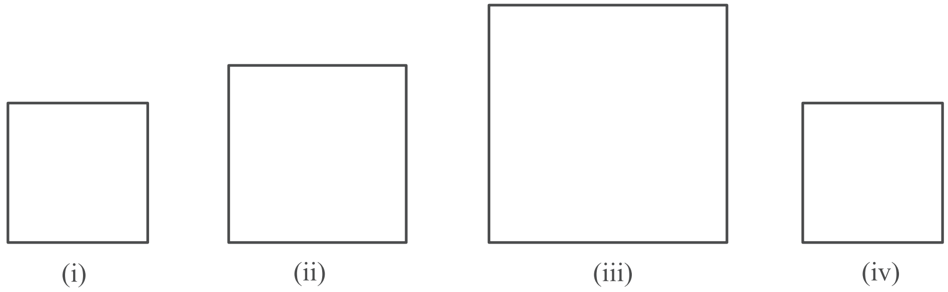
చిత్రం 7.2

సర్వసమానతను ఎందుకు చదవాలి. అని మీకు ఆనిపించిఉండవచ్చు. రిఫ్రిజిరేటర్‌లో ఐస్ క్యూబ్ లను వుంచడానికి ట్రేలను మీరు చూసి వుండవచ్చు, దానిలో వున్న అచ్చులు కూడా సర్వసమానమను మరియు ఆట్రేలోని గుంతలుకూడ సర్వసమానం ((దీర్ఘ చతురస్రాకార లేదా వృత్తాకారం లేదా త్రిభుజాకారంలో వుండవచ్చు) అందువల్ల ఒకే రూపం గల ఆకారాలను తయారు చేయడానికి సర్వసమానత్వ పరికల్పనలను ఉపయోగిస్తారు..

మీరు ఉపయోగించే పెన్నులలో పాత రీఫిల్ (ట్యూబ్) తీసి కొత్త రీఫిల్ వేయాలంటే అది పాత రీఫిల్ పరిమాణం లో లేకపోతే మార్చడానికి కష్టపడాల్సివస్తుంది రెండూ రీఫిల్‌లు ఒకేరకంగా సర్వసమానమైతే కొత్తది పెన్నుకు సరిపోతుంది .

నిత్యజీవితంలొ సర్వసమానత్వాన్ని ఆన్వయించు ఆకృతులకు అనేక ఉదాహరణలు మీరు చూడవచ్చు.

సర్వసమాన ఆక్రుతలకు ఇంకా ఎక్కువ ఉదాహరణలను ఆలోచించే ఈ కింది చిత్రాలలో 7.3(i) లోని చతురస్రానికి సర్వసమానం.

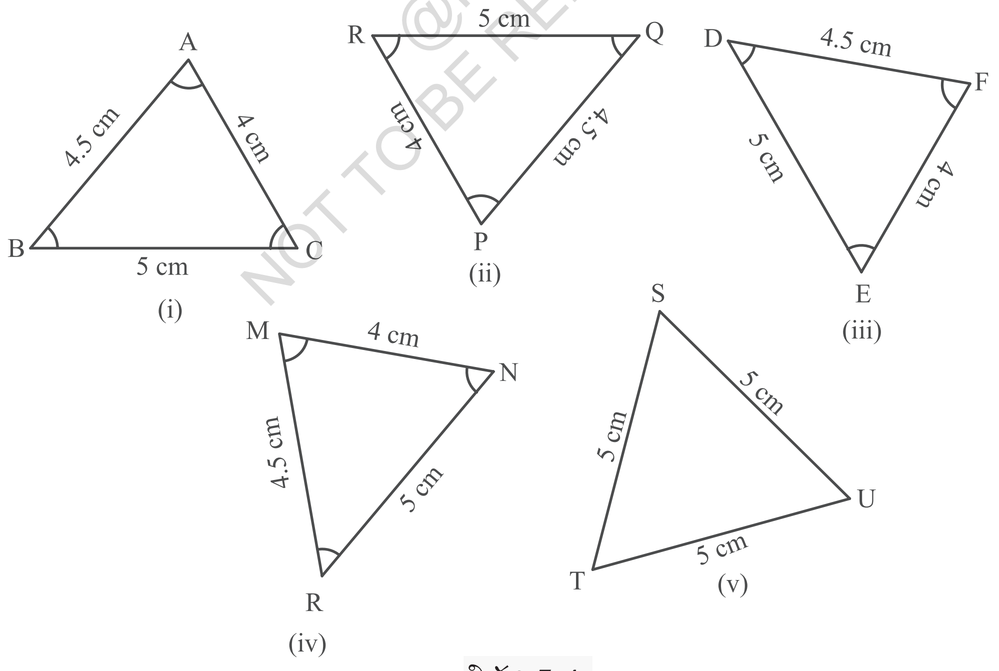


చిత్రం 7.3

చిత్రం 7.3 (ii) మరియు (iii) లో పెద్ద చతురస్రాలు, చిత్రం 7.3 (i) లో ఉన్న చతురస్రానికి సర్వసమానం కాదని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది అయితే 7.3 (iv) లోవున్న చతురస్రం చిత్రం 7.3 (i) లో నున్న చతురస్రాననికిసర్వ సమానం.

ఇప్పుడు త్రిభుజాల సర్వసమానత గురించి చర్చిద్దాం! ఒక త్రిభుజపు అన్ని భుజాలు మరియు కోణాల కొలతలు మరొక త్రిభుజానికి అనురూప భుజాలు మరియుకోణాలు సమాన మైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన మవుతాయి. అని ఇదివరకే మీకు తెలుసు

ఇప్పుడు కింది త్రిభుజాలలో ఏ త్రిభుజం చిత్రం 7.4 (i) లోని ΔABC కి సర్వసమానం?



చిత్రం 7.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 7.4 లో వున్న (ii) నుండి (v) వరకు వున్న త్రిభుజాలను కత్తిరించండి. ఆత్రిభుజాలను త్రిప్పి ΔABC పై ఏకీభవించేట్లు ప్రయత్నించండి చిత్రం 7.4 లో (ii), (iii) (iv) త్రిభుజాలు ΔABC కి సర్వసమానమవుతాయి. అయితే, 7.4 (v) ΔTSU, ΔABC సర్వసమానంకాదు.

ΔPQR, ΔABC కి సర్వమానమైతే $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అని రాస్తాము.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అయిన ΔPQR యుక్క భుజాలు మరియు కోణాలు ΔABC సమాన అనురూప భుజాలు మరియు కోణాలతో ఏకీభవిస్తాయి అనేదాన్ని గమనించండి.

అంటే PQ తో AB, QR తో BC మరియు CA తో RP ; $\angle P$ తో $\angle A$, $\angle Q$ తో $\angle B$ మరియు $\angle R$ తో $\angle C$ ఏకభవిస్తాయి దానిని ఈ విధంగా రాస్తాము. $P \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $R \leftrightarrow C$

ఈ విధమైన అనురూపతలో $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అవుతుంది అయితే $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ అని రాయడం తప్పు అవుతుంది అదే విధంగా చిత్రం 5.4 (iii) లో వున్న త్రిభుజానికి

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$, మరియు $EF \leftrightarrow CA$

అలానే $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$, మరియు $E \leftrightarrow C$

అంటే $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. అయితే $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ అని రానినచో తప్పు ఆవుతుంది అదే విధంగా చిత్రం 5.4 (iii) లొని త్రిభుజానికి $FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$, మరియు $EF \leftrightarrow CA$

మరియు $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$, మరియు $E \leftrightarrow C$

అయినందున $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. అయితే $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ అని రాస్తే తప్పు అవుతుంది.

ΔABC మరియు చిత్రం 7.4 (iv) లొని త్రిభుజానికి గల అనురూపతను చూద్దాం

గమనించండి : సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సమాన భాగాలు.

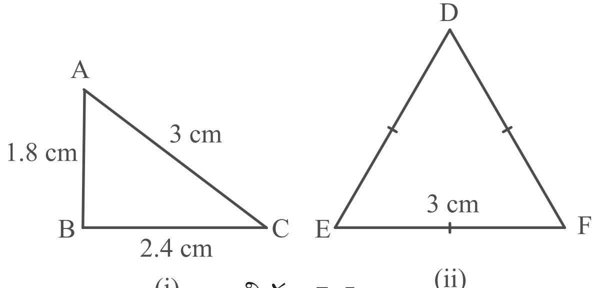
సంక్షిప్తంగా '**సత్రి అభా**' అని రాస్తాము అంటే సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూపభుజాలు అని అర్థం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నిబంధనలు :

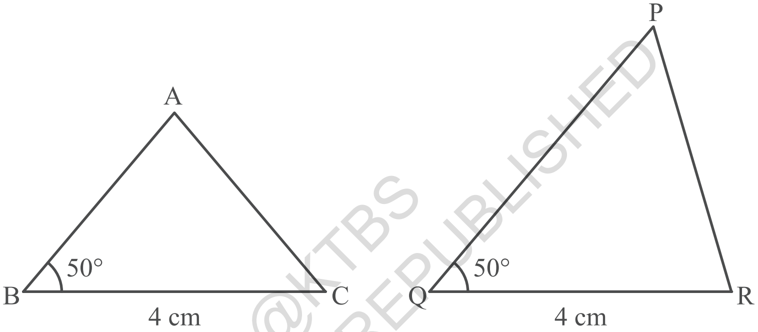
త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నాలుగు నియమాలను కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నారు వాటిని గుర్తుచేసుకుందాము.

ఒక భుజం పొడవు 3cm వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలనుగీసి, ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానమా? అని సర్వసమానంకాదు అనేదాన్ని గమనించండి (చిత్రం 7.5).



చిత్రం 7.5

ఇప్పుడు ఒక భుజం పొడవు 4cm మరియు ఒక కోణం 50° వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. (చిత్రం 7.6). అవి సర్వసమానమా?



చిత్రం 7.6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇవికూడా సర్వసమానం కాదు.

ఇంకా ఎక్కువ త్రిభుజాలు జతలను తీసుకొని, ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

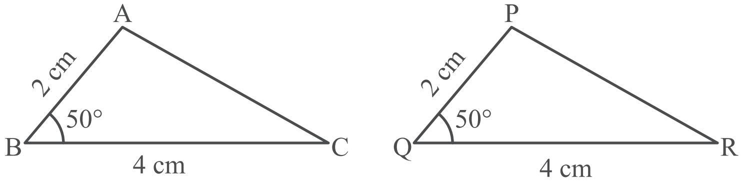
అందువల్ల త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక జత భుజాలు సమానం లేదా ఒక జత భుజాలు మరియు ఒక జత కోణాలు సమానమైతే మాత్రం సరిపోదు.

సమకోణాలను కలిగిన మరొక జత భుజాలు కూడా సమానమైనచో ఏమవుతుంది?

చిత్రం 7.7 లో BC = QR, ∠B = ∠R మరియు AB = PQ ఇప్పుడు ΔABC మరియు ΔPQR ల సర్వసమానత గురించినీ సమాధానమేమి?

క్రింది తరగతిలో నేర్చుకున్నదాన్ని గుర్తు చెసుకోండి. ఈవిషయంలో త్రిభుజాలు సర్వసమానమవుతాయి. చిత్రం 7.7 లో ΔABC మరియు ΔPQR లకు ఇవి పరీక్షించండి.

వేరొక త్రిభుజాల జతను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. రెండు భుజాల సమానము మరియు వాటితో ఏర్పడే కోణము సమంగా వుండడం, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి సరిపోవునా? అవును ఇది చాలు.



చిత్రం 7.7

ఇదే త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మొదటి నియమము

స్వీకృతం 7.1: భుజము –కోణము– భుజము (భు. కో. భు) సర్వసమానత్వ నియమము:

ఒకత్రిభుజపురెండుభుజాలుమరియువాటిమధ్యకోణమువరుసగావేరొకత్రిభుజంలోరెండు భుజాలువాటిమధ్యకోణమునకుసమానమెతేఆరెండుభుజాలువాటిమధ్యకోణమునకుసమానమైతే ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానత్రిభుజాలు.

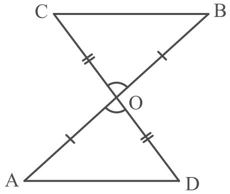
మొదటి తెలిసి ఫలితాలను సాధించడానికి కాదు అందువల్ల ఇది సరి అనే సీకృతం ప్రకారం నిరూపించబడినది.(అనుబంధం 1చూడండి).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు కొనని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణం1: చిత్రం 7.8 లో OA = OB మరియు OD = OC.

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ మరియు (ii) AD || BC అని నిరూపించండి.



చిత్రం 7.8

సాధన : (1) ΔAOD, ΔBOC లలో

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\}$$ (దత్తాంశం)

$\angle AOD$, $\angle BOC$ ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణములను ఏర్పరచును అందువలన $\angle AOD = \angle BOC$

కావున $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (భు. కో. భు సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం)

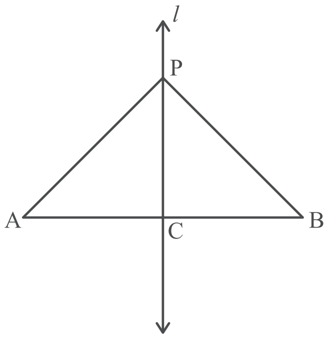
(ii) ΔAOD, ΔBOC సర్వసమానత్వ త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు సమానం

కావున ∠OAD = ∠OBC. మరియు ఇవి AD, BC రేఖాఖండములకు ఒక జత ఏకాంతరకోణాలను ఏర్పరచును AD || BC

ఉదాహరణం 2

AB ఒకే సరళ రేఖ *l* దీనికి లంబసమద్విఖండనరేఖ. ఈ రేఖ పై. P ఒక బిందువు అయిన ఈ *p* బిందువు P A, B బిందువునుండి సమాన దూరం లో వుంటుందని చూపండి

సాధన : *l*⊥ AB మరియు ఈ రేఖ ఖండము AB మధ్య బిందువు C గుండాపోవును (చిత్రం 7.9). PA = PB అని చూపాలి ΔPCA మరియు ΔPCB లను పరిగణించండి.



చిత్రం 7.9

AC = BC (AB కి C మధ్యబిందువు)

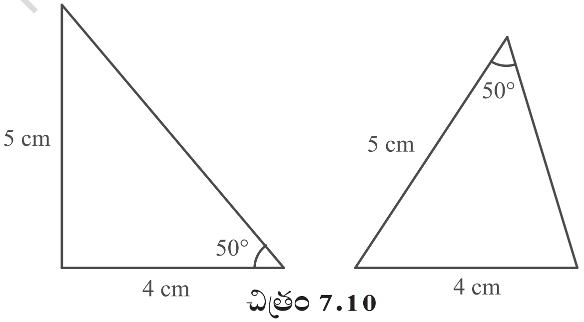
∠PCA = ∠PCB = 90° (దత్తాంశం)

PC = PC (ఉమ్మడి భుజం)

కావున ΔPCA ≅ ΔPCBభ (భు.కో.భు నియమం)

అదేవిధంగా PA = PB, సర్వసమానం. త్రిభుజాలను సదృశ భుజాలు.

భుజాల పొడవు 4cm, 5cm మరియు కోణాలలో ఒకటి 50° వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీద్దాం. త్రిభుజాలను గీసేటప్పుడు 50° కోణము సమభుజాల మధ్య వుండకుండా గీయడం. (చిత్రం 7.10). రెండు త్రిభుజాలు స్వసమానమా?

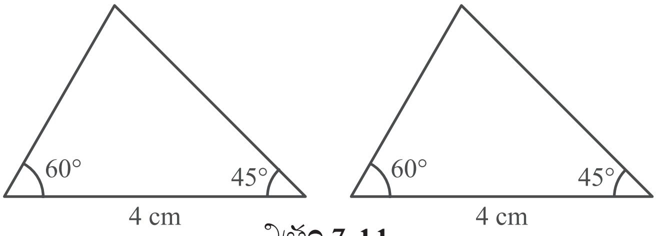


చిత్రం 7.10

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కాదు అనేదానిని గమనించండి. ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

త్రిభుజం సర్వసమానం కావాలంటే ముఖ్యంగా సమకోణాలు సమాన భుజాల మధ్య వుండాలి అనేదాన్ని మీరు గమనించండి. అందువల్ల భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమము సరిపోతుందేకాని కో. భు.భు. లేదా భు. భు. కో నియమంకాదు .



చిత్రం 7.11

ఈ త్రిభుజాలను కత్తిరించి ఒక దానిపై మరొకటి వుంచండి. ఏమిగమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి అంటే రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావర్తనం చేయండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే రెండు సమకోణాలు మరియు **వాటి సామాన్య భుజాలు**. సమానంగా వుంటే చాలు అనేదాన్ని గమనించండి.

ఈ ఫలితము త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి కోణము. భుజము. కోణము నియము దీనిని కో.భ. కో నియమం అనిరాస్తాము. ఈ నియమము కింది తరగతులలో పరిక్షించారు అయితే ఇప్పుడు దీన్ని నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 7.1: (కో. భు.కో సర్వసమానత్వ నియముము)

ఒక త్రిభుజం లోని రెండు కోణాలు. వాటి మధ్యభుజము వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు కోణములు. వాటి మధ్యభుజానికి సమానమైన ఆరెండు భుజాలు సర్వసమానములు.

దత్తాంశం: ΔABC, ΔDEF అను రెండు త్రిభుజాలను ఇవ్వబడినది

వాటిలో $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

మరియు $BC = EF$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని నిరూపిద్దాము.

ఈ సర్వసమానత్వాన్ని నిరూపించడానికి మూడు సందర్భాలున్నాయి.

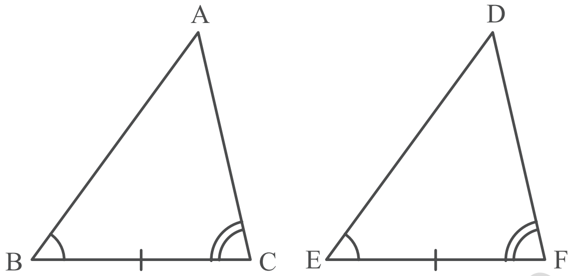
సందర్భం (i)**:** $\overline{AB} = \overline{DE}$ అయిన (చిత్రం 7.12)

మనం ఏమి గమనించవచ్చు? మీరు కింది అంశాలను గమనించవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

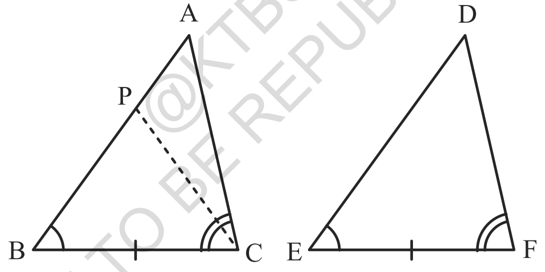
AB = DE	(ఊహించినది)
$\angle$ B = $\angle$ E	(దత్తాంశము)
BC = EF	(దత్తాంశము)

కావున Δ ABC ≅ Δ DEF (భు.కో.భు. సర్వసమాన స్వీకృతం నుండి)



చిత్రం 7.12

సందర్భం (ii)**:** రెండవ సందర్భం AB > DE అనుకోండి PB = DE అగునట్లు AB పై 'P' బిందువును తీసుకొండి ఇప్పుడు Δ PBC , Δ DEF లలో (చిత్రం 7.13).



చిత్రం 7.13

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Δ PBC మరియు Δ DEF లలో కింది వాటిని గమనిమచండి.

PB = DE	(నిర్మాణం ప్రకారం)
$\angle$ B = $\angle$ E	(దత్తాంశం)
BC = EF	(దత్తాంశం)

కావున Δ PBC ≅ Δ DEF అని నిరూపించాము భు. కో.భు. సర్వసమానత్వ సిద్ధాంతంలో త్రిభుజాల సర్వసమాన కావడంవల్ల వాటి సదృశ భాగాలు సమానం

కావున $\angle$ PCB = $\angle$ DFE

అయిన $\angle$ ACB = $\angle$ DFE (దత్తాంశం)

అందువల్ల $\angle$ ACB = $\angle$ PCB

కావున ఇది సాధ్యమా ?

ఇది సాధ్యం కావాలంటే P బిందువు A లో ఏకీభవించాలి లేదా

BA = ED

అప్పుడు Δ ABC $\cong$ Δ DEF (భు.కో. భు. సిద్ధాంతం)

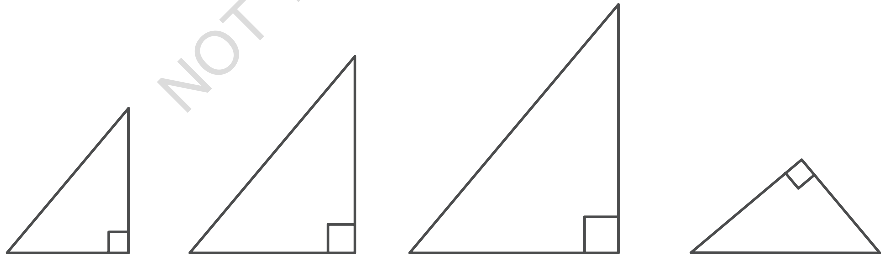
సందర్భం (iii) : మూడవ సందర్భం AB < DE అయిన ME = AB అయ్యేట్లు ΔDEF. లో M తీసుకొని సందర్భం (ii) లో చెప్పినట్లుకొనసాగించిన AB = DE అని చెప్పవచ్చు అప్పుడు ΔABC $\cong$ ΔDEF.

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు జతల కోణాలు, ఒక జత భుజములు సమానము.ఇక్కడ ఆ భుజము సమానముగానున్న సదృశ కోణాల జతల మధ్య భుజము కాదు. అయిననూ భుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయా? అవి రెండూ సర్వసమానంగా ఉంటాయని మీరుగమనించవచ్చు ఎందుకోమీరు కారణం చెప్పగలరా?

ఒక త్రిభుజంలోని కోణాలముత్తం 180° రెండు జత కోణాలు సమానమైతే మూడవ జత కోణాలు కూడా సమానమవుతాయి (180° సమాన కోణాల మొత్తము)

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు జతల కోణాలు మరియు ఒకజత సదృశ భుజాలు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు. దీనిని మనం కో. కో.భు సర్వసమాన నియమం అంటాము. ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

కోణాలు 40°, 50° మరియు 90° వుండెటట్లు త్రిభుజాలను గీయండి. ఈ విధంగా ఎన్ని త్రిభుజాలను గీయగలవు? భుజాలు పొడవు వేరువేరుగా వుండేటట్లు అనేక త్రిభుజాలను గీయవచ్చు (చిత్రం 7.14).



చిత్రం 7.14

త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావచ్చు లేదా కాక పోవచ్చు అనేదాన్ని గమనించండి.

కావున త్రిభుజా సర్వసమానత్వానికి ముడు కోణాలు సమానమైతే సరిపోదు. అందువల్ల త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మూడు సమాన భాగాలలో ఒకటి భుజం అయివుండాలి.

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాం.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణం 3 : AB రేఖాఖండం CD రేఖాఖండానికి సమాంతరంగా వుంటుంది AD మధ్యబిందువు O (చిత్రం 7.15).

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC కి కూడా మధ్యబింధువు 'O' అయిన నిరూపించండి.

సాధన :-

(i) Δ AOB మరియు Δ DOC లలో

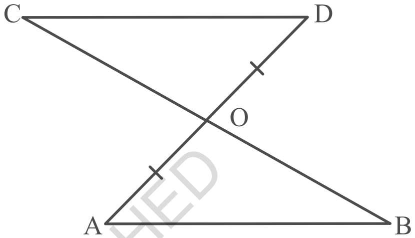
$\angle ABO = \angle DCO$ (AB || CD : BC తిర్యగ్రేఖ ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle AOB = \angle DOC$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

OA = OD (దత్తాంశము)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta DOC$

(కో.కో.భు నియమంప్రకారం)



చిత్రం 7.15

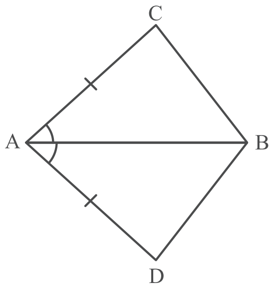
(ii) OB = OC (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు సమానం)

కావున BC మధ్యబిందువు 'O'

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 7.1

(1) చతుర్భజం ACBD లో AC = AD మరియు $\angle A$ కు AB కోణా సమద్విఖండన రేఖ అయిన $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ BC మరియు BD ల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? (చిత్రం 7.16).



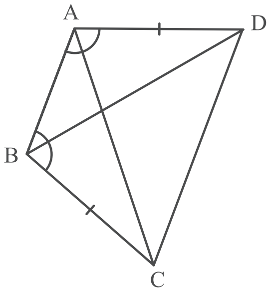
చిత్రం 7.16

(2) ABCD చతుర్భజంలో AD = BC మరియు $\angle DAB = \angle CBA$ అయిన(చిత్రం 7.17).

(1) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

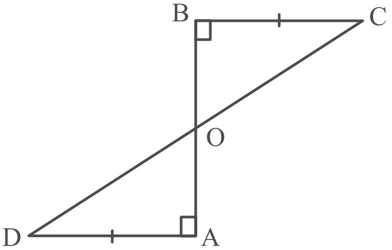
(2) BD = AC

(3) $\angle ABD = \angle BAC$ అని నిరూపించండి



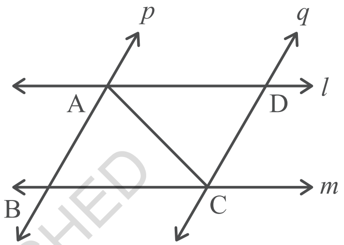
చిత్రం 7.17

(3) AD, BC సమానము మరియు రేఖా ఖండము AB కి లంబములు అయిన CD రేఖాఖండము AB ని సమద్విఖండన చేయునని చూపుము. (చిత్రం 7.18).



చిత్రం 7.18

(4) l,m అనే ఒక జత సమాంతర రేఖలు p మరియు q అనే వేరొక జత సమాంతర రేఖలే ఖండించబడినవి Δ ABC ≅ ΔCDA అని నిరూపించుము (చిత్రం 7.19).

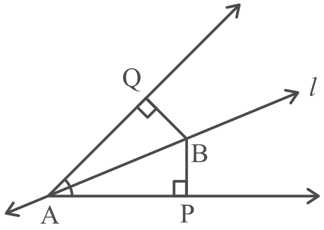


చిత్రం 7.19

(5) ∠A యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ l అయిన l పై B ఏదో ఒక బిందువు BP మరియు PQ లు B నుండి ∠A యొక్క భుజాలకు గీచిన లంబాలు. (చిత్రం 7.20).

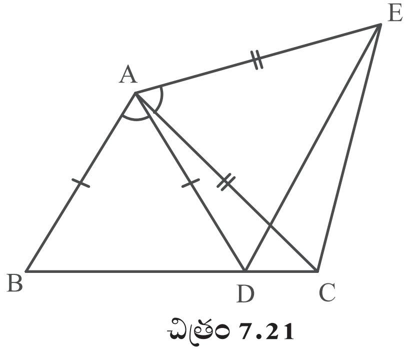
(i) ΔAPB ≅ ΔAQB

(ii) BP = BQ లేదా B ∠A భుజాలనుండి సమానదూరం లో వున్నదని చూపండి.



చిత్రం 7.20

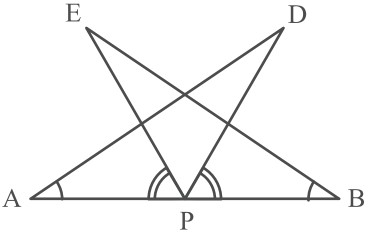
(6) చిత్రం 7.21 లో AC = AE, AB = AD మరియు ∠BAD = ∠EAC అయిన BC = DE అని నిరూపించుము.



చిత్రం 7.21

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(7) AB ఒక రేఖాఖండము మరియు P దాని మధ్యబిందువు $\angle BAD = \angle ABE$ మరియు $\angle EPA = \angle DPB$ అయ్యేటట్లు D మరియు E బిందువులు AB కి ఒకే వైపు వున్నవి (చిత్రం 7.22).

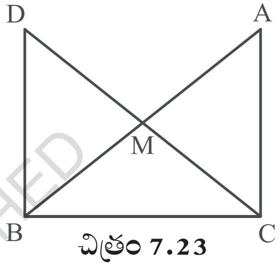


చిత్రం 7.22

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) AD = BE అని చూపండి.

(8) లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము $\angle C$ వద్ద వున్నది, కర్ణము AB యొక్క మధ్యబిందువు M, C బిందువు M కు కలిపి DM = CM అయ్యేటట్లు D బిందువు వద్దకు పొడిగించినారు చిత్రంలో చూసినట్లు D బిందువును B బిందువుకు కలిపారు (చిత్రం 7.23).



చిత్రం 7.23

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

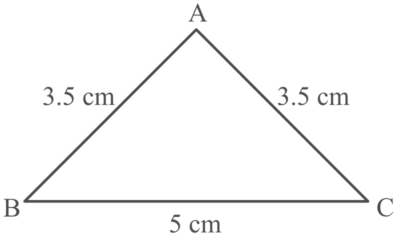
(ii) $\angle DBC$ ఒక లంబకోణము

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2}$ AB అని చూపండి

7.4 త్రిభుజము యొక్క కొన్ని ధర్మములు

పైన ఇంతవరకూ మనం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం యొక్క రెండు నియమాల గురించి నేర్చుకున్నాము. ఈ పలితాలను రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజ ధర్మాల అధ్యయనానికి ఉపయోగిద్దాము



చిత్రం 7.24

కింద ఇచ్చిన కృత్యాన్ని చేయండి రెండు సమాన భుజాల పొడవు 3.5cm మరొక భుజం పొడవు 5cm మరొక భుజం వుండేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి (చిత్రం 7.24).

ఈ విధమైన నిర్మాణాలు మీరు కింది తరగతులలో చేశారు ఇలాంటి త్రిభుజాలను ఏమని పిలుస్తారో గుర్తుచేసుకోండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక త్రిభుజం లో ఏవైనా రెండు భుజాలు సమాన మైన దానిని సమద్విబాహు త్రిభుజము అని అంటారు. చిత్రం 7.24 లో ΔABC సమబాహు త్రిభుజము $AB = AC$ అవుతుంది.

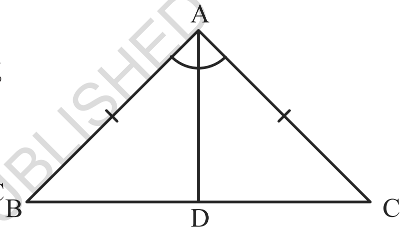
$\angle B$ మరియు $\angle C$ లను కొలవండి ఏమి గమనించారు?

వివిధ భుజాల కొలతలున్న సమద్విబాహు త్రిభుజాలను తీసుకొని, ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

అటువంటి ప్రతి త్రిభుజములో, సమానభుజాలకు ఎదురుగావున్న కోణాలు సమానంగా వుండడాన్ని మీరు గమనిస్తారు. ఇది చాలా ముఖ్యమైన ఫలితము మరియు ప్రతి సమద్విబాహు త్రిభుజానికి ఇది సత్యము. దీనిని కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 7.2 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములో సమాన భుజాలకు ఎదురుగానున్న కోణాలుసమానము

దానిని అనేక పద్ధతులలో రుజువు చేయవచ్చు. ఇక్కడ ఆ నిరూపణలలో ఒకటి ఇవ్వబడినది.



చిత్రం 7.25

సాధన : ABC సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $AB = AC$ అయిన $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించాలి.

$\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ గీస్తాము ఇది భుజము BC ని D బిందువు వద్ద ఖండించును అనుకోండి. (చిత్రం 7.25).

ΔBAD మరియు ΔCAD లలో

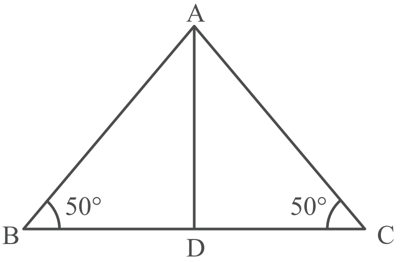
$AB = AC$	(దత్తాంశం)
$\angle BAD = \angle CAD$	(నిర్మాణంప్రకారం)
$AD = AD$	(ఉమ్మడి భుజం)
కావున $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(భు.కో.భు సర్వసమాన స్వీకృతం)
అందువలన $\angle ABD = \angle ACD$	(సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ భుజాలునమానం)
అనగా $\angle B = \angle C$	(సమానకోణాలు)

దీని విలోమం కూడా సరినా? అంటే "ఏదైనా త్రిభుజములో రెండు కోణాలు సమానమైన వాటి ఎదురుగా వుండే భుజాలు కూడా సమానము" అని మీరు చెప్పగలరా?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ కృత్యాన్ని చేయండి.

BC ఏదైనా కొలత వుండి $\angle B = \angle C = 50^\circ$ వుండేటట్లు త్రిభుజం ABC గీయండి. $\angle A$ కి కోణసమద్విఖండన రేఖనుగీసి అది BC ని D వద్ద ఖండిస్తుంది (చిత్రం 7.26). ΔABC ని కాగితంపై కత్తరించి శీర్షం A ని శీర్షం B తో ఏకీభవించేటట్లు AD గీతమీద మడిచండి.



చిత్రం 7.26

AC మరియు AB భుజాల గురించి ఏమిగమనించావు AC,AB తో ఏకీభవిస్తాయని గమనించి వుంటారు కావున AC = AB

మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసికొని కృత్యాన్ని పునరావర్తనం చేయాలి. ప్రతిసారి సమానకోణాల అభిముఖ భుజాలు సమానవుతాయి అనేదాన్ని గమనించండి కావున ఈ కింది అంశం కనిపిస్తుంది.

సిద్ధాంతం 7.3: ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వుండే భుజాలు సమానము.

ఇది సిద్ధాంతం 7.3 కు విలోమం

ఈ సిద్ధాంతం కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. ఈ ఫలితాన్ని అన్వయించడానికి మనం కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాం.

ఉదాహరణం 4: ΔABC లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ AD, BC భుజానికి లంబంగానున్నది అయిన AB =AC అని ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి (చిత్రం 7.27)

సాధన : ΔABD మరియు ΔACD లలో

$\angle BAD = \angle CAD$ (దత్తాంశం)

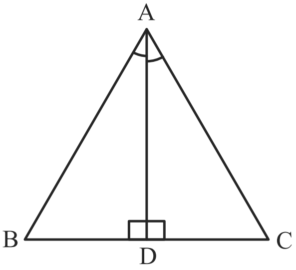
$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (దత్తాంశం)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (కో. భు.కో నియమం)

దానివల్ల $AB = AC$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

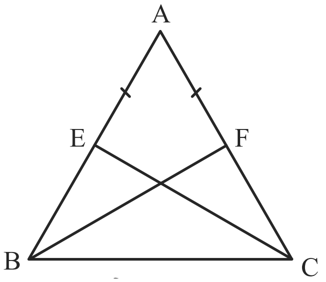
లేదా ΔABC సమద్విబాహుత్రిభుజము.



చిత్రం 7.27

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణం 5 : ΔABC లో సమాన భుజాలు AB, AC ల మధ్య బిందువుల వరుసగా E మరియు F (చిత్రం 7.28). $BF = CE$ అని చూపండి



చిత్రం 7.28

సాధన : ΔABF మరియు ΔACE లలో

$AB = AC$ (దత్తాంశము)

$\angle A = \angle A$ (ఉమ్మడి కోణము)

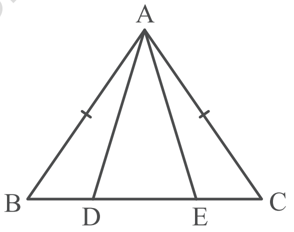
$AF = AE$ (సమానభుజాలలో సగాలు)

కావున $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (భు.కో.భు. నియమం)

$\therefore$ $BF = CE$ (సర్వసమాన త్రిభుజాలలోని సదృశ భుజాలు సమానం)

ఉదాహరణం 6 : ఒకసమద్విబాహుత్రిభుజము ABC లో D మరియు E బిందువులు $AB = AC$. BC పై $BE = CD$ అయ్యేటట్లు బిందువులు(చిత్రం 7.29). అయిన $AD = AE$ అనిచూపండి.

సాధన : ΔABD మరియు ΔACE లలో



చిత్రం 7.29

$AB = AC$ (దత్తాంశం) .... (1)

$\angle B = \angle C$

(సమాన భుజాలకు ఎదురుగావున్న సమానకోణాలు) .... (2)

ఇంకా $BE - DE = CD - DE$

అనగా $BD = CE$ .... (3)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) ల నుండి మరియు భు.కో.భు. నియమం)

దానినుండి $AD = AE$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

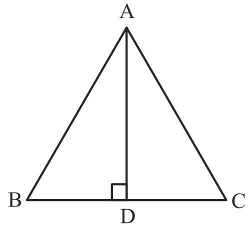
అభ్యాసం 7.2

(1) ΔABC సమద్విబాహుత్రిభుజంలో $AB = AC$;. $\angle B$, $\angle C$ లకోణ సమద్విఖండనరేఖలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. A మరియు O బిందువులను కలపండి

(i) $OB = OC$

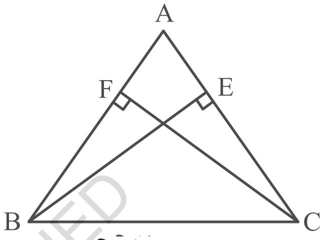
(ii) $\angle A$ కు కోణసమద్విఖండనరేఖ AO

(2) ΔABCలో AD అనునది BC భుజానికిగల లంబ సమద్విఖండనరేఖ (చిత్రం 7.30). AB = AC అయ్యేటటు సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



చిత్రం 7.30

(3) ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము సమాన భుజాలు AC, AB లకు గీసిన లంబాలు వరుసగా BE మరియు CF (చిత్రం 7.31). లంబాలు సమానమని చూపండి.



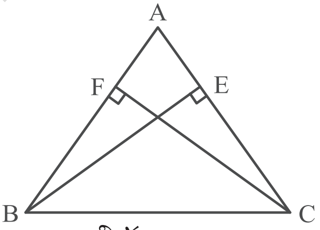
చిత్రం 7.31

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

(4) ΔABCలో AC, AB భుజాలకు గీసిన లంబాలు BE మరియు BF లు సమానమయిన(చిత్రం 7.32).

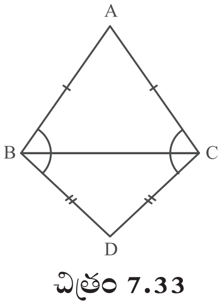
(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) AB = AC అంటే ΔABC సమబాహు త్రిభుజం అని చూపండి.



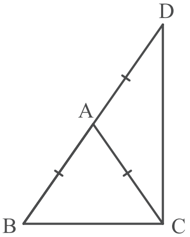
చిత్రం 7.32

(5) ΔABC, DBC లు ఒకే భుజము BCపై నున్న రెండు సమద్విబాహుత్రిభుజాలు (పటం 7.33). అయిన $\angle ABD = \angle ACD$ అనిచూపండి.



చిత్రం 7.33

(6) ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం AB = AC అయిన AD = AB అయ్యేట్లు BA ని D వరకు పొడిగించిన $\angle BCD$ ఒక లంబకోణం అని చూపండి (చిత్రం 7.34).



చిత్రం 7.34

(7) ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\angle A = 90^o$ మరియు AB = AC. $\angle B$ మరియు $\angle C$ లను కనుగొనండి.

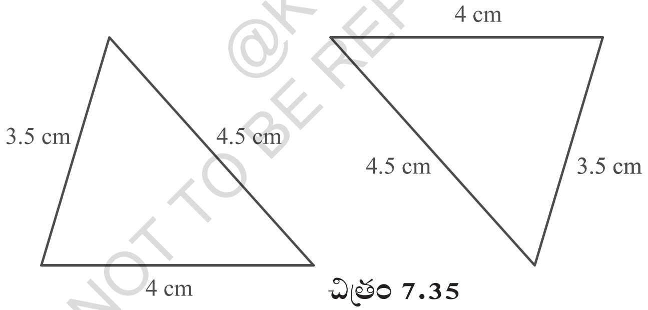
(8) ఒక సమబాహుత్రిభుజం యొక్క ప్రతి కోణము 60^o వుంటుందని చూపండి.

7.5 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరికొన్ని నియమాలు

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడుకోణాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలు సమానమైతే సరిపోదు అనే దాన్ని పైన తెలుసుకున్నారు. త్రిభుజాలసర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు. మరొకత్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలకు సమానమైతే సరి అని అంటే మీకు ఆశ్చర్యం అవుతుంది, ఇప్పటికే కిందితరగతులలో దీనిని పరీక్షించారు ఇది సత్యం.

దీనిని పరీక్షించడానికి భుజాలకొలత 4cm, 3.5cm మరియు 4.5cm వున్న రెండు త్రిభుజాలను గీసి వాటిని కత్తరించి, ఒకదాని పైఒకటి వుంచండి ఏమి గమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు సంపూర్ణంగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించేటట్లు సమాన భుజాలు ఏకీభవించేటట్లు అమర్చాలి. ఆందువల్ల త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 7.35

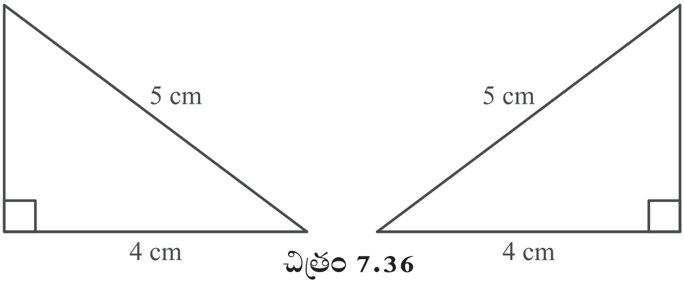
మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయాలి. దీనితో త్రిభుజాల సర్వసమాసత్వమునకు మరొక నియమం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతం : 7.4 : భుజము. భుజము.భుజము (భు. భు. భు) సర్వసమానత్వ నియము.

ఈ సిద్దాంతాన్ని ఒక సరైన నిర్మాణాలను ఉపయోగించి సాధించవచ్చు భు.కో.భు సర్వసమాన త్వ నియమంలో సమాన కోణాలను సదృశ సమాన భుజాల జతల మధ్య వుంటే మాత్రమే త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వాన్ని కలిగివుంటాయి లేకపోతే డవు అనేదాన్ని మీరు ఇంతకుముందే తెలుసుకొన్నారు.

ఈ కృత్యాన్ని చేయండి:

కర్ణం పొడవు 5cm మరియు మిగిలిన రెండు భుజాలలో ఒకదాని పొడవు 4cm వుండేటట్లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను గీయండి (చిత్రం 7.36).



చిత్రం 7.36

త్రిభుజాలను కత్తరించి సమాన భుజాలు ఏకీభవించేటట్లు ఒకదానిపై మరొకటి వుంచండి అవసర మైనచో త్రిభుజాలను త్రిప్పండి మీరు ఏమి గమనించారు?

రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి. ఆందువల్ల ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానం వేరొక జత లంబకోణత్రిభుజాలను తిసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి మీరు ఏమి గమనిస్తారు.

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే, ఒక జత భుజాలు మరియు కర్ణాలు సమానంగా వుండాలి అనే దాన్ని మీరు కనుక్కోగలరు దీనిని క్రింది తరగతులలో పరీక్షించారు. ఈ విషయంలో లంబకోణము సమాన భుజాలమధ్య కోణంకాదు అనేదాన్ని గమనించండి.

అందువల్ల ఈ కింది సర్వసమానత్వ నియమాన్ని చూడండి

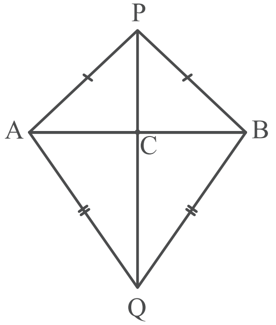
సిద్ధాంతం : 7.5 రెండు లంబకోణత్రిభుజాలలో ఒకత్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజాలకు సమానమైన ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు.

గమనించండి: లం.క.భు అనగా లంబ కోణము– కర్ణము– భుజము ఆని అర్థం

కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 7: AB ఒక రేఖా ఖండము. P మరియు Q అనే బింధువులు AB కి రెండు వైపులలో A, B లకు సమాన దూరంలో ఉన్నాయి. (చిత్రం 7.37) అయిన . PQ రేఖ AB లంబసమద్వి ఖండన రేఖ అని చూపండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 7.37

సాధన : PA = PB మరియు QA = QB అని ఇవ్వ బడినది. మీరు PQ⊥AB కి లంబమని మరియు దానిని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపాలి PQ, AB ని C బిందువు వద్ద ఖండించును ఈ చిత్రంలో సర్వసమాన త్రిభుజాలగురించి ఆలోచించగలరా?

ΔPAQ మరియు ΔPBQ తీసుకోండి

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$AQ = BQ$

$PQ = PQ$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (భు. భు.భు. సర్వసమామత్వ నియమము)

$\therefore \angle APQ = \angle BPQ$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

ΔPAC మరియు ΔPBC లలో

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ పైన నిరూపించబడినది)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (భు.కో.భు నియమం)

$AC = BC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు) ....(1)

మరియు $\angle ACP = \angle BCP$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

ఇంకా $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (సరళయుగ్మాలు)

కావున $2\angle ACP = 180°$

లేదా $\angle ACP = 90°$ ....(2)

(1), (2) ల నుండి PQ, AB కి లంబ సమద్విఖండన రేఖ అని చెప్పవచ్చు గమనించవలసిన విషయమేమింటే ΔPAQ, ΔPBQ ల సర్వసమానత్వం రుజువు చేయకుండా $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ అని నిరూపించలేము.

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజము)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మరియు ∠PAC = ∠PBC (ΔAPB లో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా నున్న సమాన కోణాలు)

దీనినుండి ఇది రెండూ సర్వసమానం కాదు ఎందుకంటే ఈ ఫలితం భు. భు. లో నియమాన్ని ఇస్తుంది కాని త్రిభుజాల సమానత్వానికి ఈ నియమం ఎల్లప్పుడూ నిజంకాదు ఇంకా కోణ జత సమాన భుజాల జతల మధ్య కోణము కాదు ఇప్పుడు కింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదాహరణ 8: l,m రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి P బిందువు ఈ రేఖలకు సమాన దూరంలో ఉంది (చిత్రం 7.38). AP రేఖ l,m ల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

సాధన : l ,m రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి PB ⊥ l, మరియు PC ⊥ m.

PB = PC (అని ఇవ్వబడినది)

∠PAB = ∠PAC అని చూపాలి.

ΔPAB, ΔPAC లలో

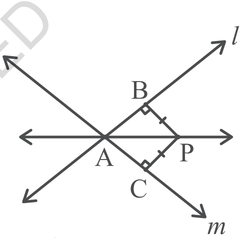
PB = PC (దత్తాంశం)

∠PBA = ∠PCA = 90° (దత్తాంశం)

PA = PA (ఉమ్మడి భుజం)

కావున ΔPAB ≅ ΔPAC (లం. క. భు. నియమం)

కావున ∠PAB = ∠PAC (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)



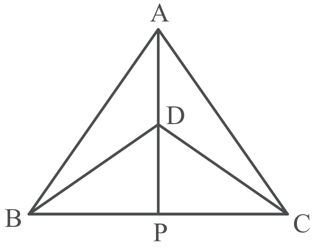
చిత్రం 7.38

ఈ ఫలితము అభ్యాసం 7.1 ప్రశ్న 5 యొక్క ఫలితం విలోమము అనేదాన్ని గమనించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 7.3

1. ఒకే భుజం BC పై ΔABC మరియు ΔDBC సమద్విబాహుత్రిభుజాలు ఏర్పడినవి A మరియు D శీర్షాలు BC కి ఒకే వైపు వున్నవి (చిత్రం 7.39). AD ని పొడిగించిన BC ని P బిందువువద్ద ఖండిస్తుంటే.
   (i) ΔABD ≅ ΔACD
   (ii) ΔABP ≅ ΔACP
   (iii) ∠A మరియు ∠D ని AP సమద్విఖండనచేస్తుంది
   (iv) BC కి లంబం AP అని చూపండి.



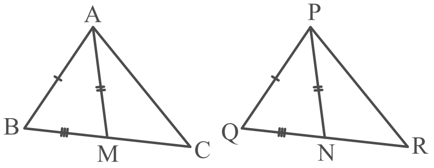
చిత్రం 7.39

2. ఒక సమద్వి బాహుత్రిభుజముABC లో AB = AC,AD అనేది A నుండి BC కి గీసిన లంబము అయిన.

   (i) BC భుజాన్ని AD సమద్విఖండన చేయునని

   (ii) $\angle$A ని AD కోణ సమద్విఖండన చేయునని చూపండి.

3. ΔABCలో రెండు భుజములు AB,BC మరియు మధ్యగతము AM వరుసగా ΔPQR లో రెండు భుజాలు PQ, QR లు మరియు మధ్యగతము PN కు సమానము (చిత్రం 7.40) అయిన.



చిత్రం 7.40

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చూపండి.

4. ΔABC లో BE, CF లు రెండు సమాన లంబములు, లం.క.భు సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి ΔABC సమద్విబాహుత్రిభుజమని చూపండి.

5. సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC. అయిన $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించండి AP $\perp$ BC అయ్యేటట్లు AP ని గీయండి.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

7.6 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

(1) సమరూప అకృతులు అనగా ఒకే ఆకారం మరియు పరిమాణము.

(2) ఒకే వ్యాసార్థం కలిగిన రెండు వృత్తాలు సర్వసమానము.

(3) భుజము కొలత ఒకటే అయిన రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానము.

(4) A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q మరియు C $\leftrightarrow$ R సదృశంగావున్న త్రిభుజం ABC మరియుత్రిభుజం PQR లు సర్వసమానమైతే సాంకేతికంగా $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అనిచూపిస్తాము.

(5) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణము మరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలు, వాటిమధ్య కోణానికి సమానమైన ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమము.)

(6) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ కోణాలు. వాటిమధ్య భుజానికి సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. (కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమము)

(7) ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు, ఒక భుజము మరొక త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు, ఒక భుజము సదృశంగా సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము (కో.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం)

(8) ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వున్న కోణాలు సమానం.

(9) ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వున్న భుజాలు సమానం

(10) సమబాహుత్రిభుజంలో ప్రతి కోణం 60°.

(11) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వేరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలకు సమాన మైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము. (భు.భు.భు సర్వసమాన నియమము.)

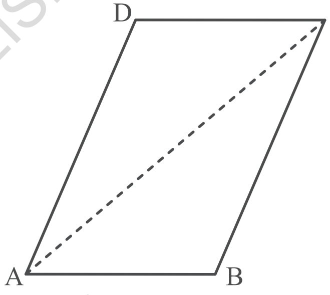
(12) రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని కర్ణము. భుజము వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని కర్ణము సదృశ భుజాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. (లం. క. భు సర్వసమానత్వ నియమము).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అధ్యాయం - 8

చతుర్భుజాలు

8.1 సమాంతర చతుర్భుజాల లక్షణాలు

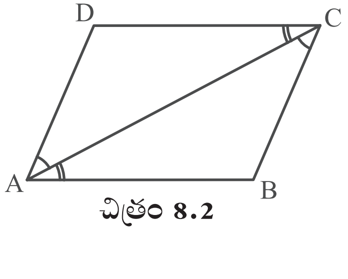


చిత్రం 8.1

ఒక కృత్యం చేద్దాం. ఒక సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో ఒక కాగితాన్ని కత్తరించండి (చిత్రం 8.1). రెండు త్రిభుజాలు వస్తాయి ఈ రెండు త్రిభుజాలగురించి ఏమిచెబుతారు?

ఒక త్రిభుజంపైన మరొక త్రిభుజాన్ని ఉంచండి ఆవసరమైతే తిప్పండి. మీరు ఏమి గమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైనదాన్ని గమనించండి.

మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ ఫలితాన్ని పరిశీలించండి దీనికొరకు ప్రతిసారి ఒక కర్ణము సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండుసర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది అనేదాన్ని మీరు గమనించండి.



చిత్రం 8.2

సిద్ధాంతం 8.1 : సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది

సాధన : ABCD సమాంతర చతుర్భుజం AC దాని కర్ణం అవుతుంది

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(చిత్రం 8.2). సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని కర్ణం AC రెండు త్రిభుజాలు Δ ABC మరియు ΔCDA లుగా విభజిస్తుంది ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని నిరూపించాలి.

Δ ABC మరియు Δ CDA లలో

BC || AD మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున

$\angle$ BCA = $\angle$ DAC (ఏకాంతర కోణాలు)

ఐతే AB || DC మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున.

$\angle$ BAC = $\angle$ DCA (ఏకాంతరకోణాలు)

మరియు AC = CA (ఉమ్మడి భుజం)

అందువల్ల Δ ABC $\cong$ Δ CDA (కో.భు.కొ నియమం)

లేదా కర్ణం AC సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని Δ ABC మరియు Δ CAD అనే రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటి భుజాలు సమానమని కొలిచిన మీరు ఏమి గమనించారు.

AB = DC మరియు AD = BC అని కనుక్కోగలరు

ఇది సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక లక్షణం దీనిని ఈ కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.2 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమానము.

సమాంతర చతుర్భుజపు ఒకకర్ణము సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమానత్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని ఇంతకు ముందే చూశారు ఆ త్రిభుజాలు సదృశ భుజాల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు? అవిసమానం.

అందువల్ల AB = DC మరియు AD = BC ఇప్పుడు ఈ ఫలితాంశపు విలోమము ఏమి? సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ను సాధిస్తాం దాని విలోమం ఏమని మీకు ముందే తెలుసు అందువల్ల సిద్ధాంతం 8.2 ను ఈ కిందివిధంగా నిరూపిద్దాం.

ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజమయితే దాని ప్రతి ఒక్క జత ఎదుట భుజాలు సమానమవుతాయి అందువల్ల దీనివిలోమము.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సిద్ధాంతం 8.3 : ఒక చతుర్భుజంలోని ప్రతిజత ఎదుటి భుజాల సమానమైతే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది ఎలా అని కారణం చెప్పగలరా?

చతుర్భుజం ABCD లో AB = CD మరియు

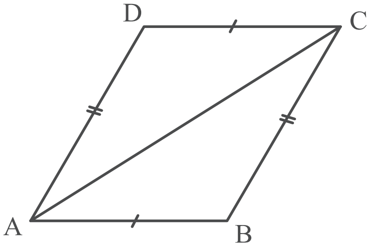
AD = BC అని (చిత్రం 8.3).

కర్ణం AC ని గీయండి.

స్పష్టంగా $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ఎలా)

$\angle BAC = \angle DCA$

మరియు $\angle BCA = \angle DAC$ (ఎలా?)



చిత్రం 8.3

ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని మీరు చెప్పవచ్చా ఎలా?

సమాంతర చతతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుట భుజాలు సమానమని విపర్యయం చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం అయితే, అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది. ఇదే ఫలితాన్ని

ఎదుటి కోణాలను జతలకు అన్వయించవచ్చా?

ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని, గీసి దాని కోణాలను కొలిచి, ఏమి గమనిస్తావు? ప్రతి ఒక్క జత ఎదుటికోణాలు సమానం

ఇంకా కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని చేయండి ఈ కింది చూపిన ఫలితాన్ని సాంధించగలము.

సిద్ధాంతం 8.4 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజలో అభిముఖ కోణాలు సమానం. దీని విలోమం కూడా సరియైనదా? అవును ఒక చతుర్భుజములో ని కోణాల మొత్తం లక్షణాలు మరియు తిర్యగ్రేఖ సమాంతర రేఖలను ఖండించినప్పుడు వచ్చే ఫలితమును ఉపయోగించి, దీని విలోమము కూడా సరైనదే అని మనకు కనిపిస్తుంది. అందువల్ల మనకు ఈ కింది సిద్ధాంతం వస్తుంది.

సిద్ధాంతం 8.5 : ఒక చతుర్భుజంలో ప్రతిఒక్క జత ఎదుటి కోణాలు సమానంగావుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక లక్షణం ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం. ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయాలి రెండు కర్ణాలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించేట్లు గీయాలి (చిత్రం 8.4).

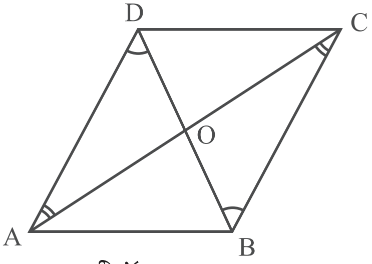
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

OA, OB, OC మరియు OD ని కొలచిన మీరు ఏమిగమనించారు.

OA = OC మరియు OB = OD అయినదాన్ని గమనించండి లేదా రెండు కర్ణాలు

'O' మధ్యబిందువు అయినది అందువల్ల మనకు ఈ కింది ప్రమేయం వుంది.

సిద్ధాంతం 8.6 : సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి



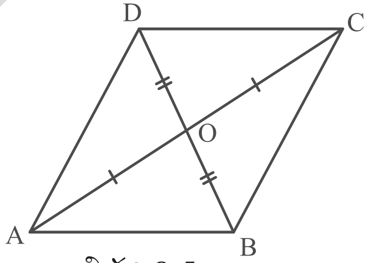
చిత్రం 8.4

ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకుంటే ఏమవుతుంది? అది సమాంతర చతుర్భుజమవుతుందా? నిజానికి ఇది సత్యం

ఈ ఫలితము సిద్ధాంతం 8.6 కి విలోమం అది కిందివిధంగావుంది

సిద్ధాంతం 8.7 : ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

ఈ ఫలితానికి కింది కారణాలు ఇవ్వవచ్చు.



చిత్రం 8.5

చిత్రం 8.5 లో OA = OC మరియు OB = OD

అయినదాన్ని గమనించండి

అందువల్ల $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఎలా)

$\angle ABO = \angle CDO$ (ఎలా)

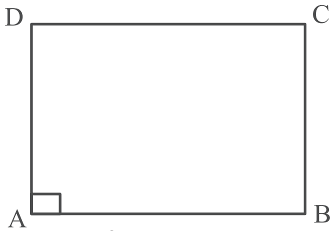
దీనితో AB || CD అని లభిస్తుంది

అదేవిధంగా BC || AD

అందు వల్ల ABCD క సమాంతర చతుర్భుజం ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణం 1: దీర్ఘ చతురస్రంలోని ప్రతికోణము ఒక లంబకోణమని నిరూపించండి.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం అంటే ఏమి అనేదాన్ని గుర్తుతెచ్చుకుందాం దీర్ఘచతురస్రం ఒక కోణం లంబకోణము అయివుండి ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.



చిత్రం 8.6

ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అయితే $\angle A = 90°$ అయిన.

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ అని మనం చూపాలి.

AD || BC మరియు AB తిర్యగ్రేఖ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కావున $\angle A + \angle B = 180°$

(తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునగల అంతర కోణాలమొత్తం)

కాని $\angle A = 90°$

అందువల్ల $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

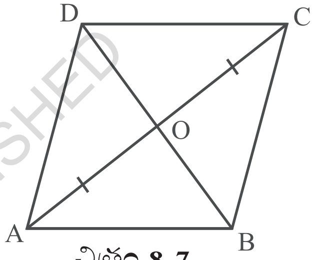
ఇప్పుడు $\angle C = \angle A$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సమాంతర చతుర్భుజపు ఎదుటికోణాలు)

కావున $\angle C = 90^0$ మరియు $\angle D = 90^0$

అందుచేత దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతికోణము లంబకోణము.

ఉదాహరణం : 2: రాంబస్ లోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబం గావుంటాయిని చూపండి

ABCD ఒక రాంబస్ అనుకుంటే (చిత్రం 7.13).



చిత్రం 8.7

AB = BC = CD = DA అని మీకు తెలుసు (ఎలా?)

ΔAOD మరియు ΔCOD లలో

OA = OC (సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు సమద్విఖండనచేసుకుంటాయి.)

OD = OD (ఉమ్మడిభుజం)

AD = CD

కావున $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (భు.భు.భు. సర్వసమాన నియమము)

$\angle AOD = \angle COD$ (స.త్రి.అ.భు)

అయితే $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (రేఖ ద్వయం)

కావున $2 \angle AOD = 180^0$

$\angle AOD = 90°$

అందువల్ల రాంబస్ కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు.

ఉదాహరణం 3 : ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో AB = AC అయినది బాహ్యాకోణం PAC ని AD సమద్విఖండించును మరియు CD || AB (చిత్రం 8.8). (i) $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు (ii) ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అనిచూపండి.

సాధన : ΔABC సమద్విబాహుత్రిభుజం

AB = AC (దత్తాంశం)

కావున $\angle ABC = \angle ACB$ (సమానభుజాలకు ఎదురుగావున్న కోణాలుసమానం)

$\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (త్రిభుజబాహ్యకోణం)

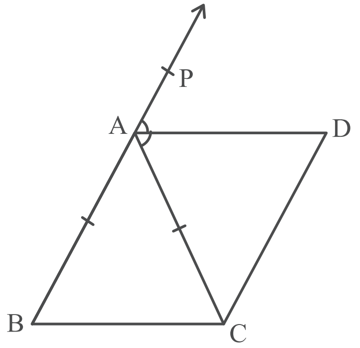
లేదా $\angle PAC = 2 \angle ACB$ .... (1)

$\angle PAC$ ని AD సమద్విఖండించును.

కావున $\angle PAC = 2 \angle DAC$ .... (2)

కావున $2 \angle DAC = 2 \angle ACB$

(లేదా $\angle DAC = \angle ACB$



చిత్రం 8.8

(ii) ఇప్పుడు ఈ సమానకోణాల జత ఒక జత ఎదుటికోణాలవుతాయి ఇక్కడ BC మరియు AD సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ AC ఖండిస్తుంది.

కావున BC || AD

అలానే BA || CD (దత్తాంశం)

ఇప్పుడు ABCD చతుర్భుజపు రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగావున్నాయి

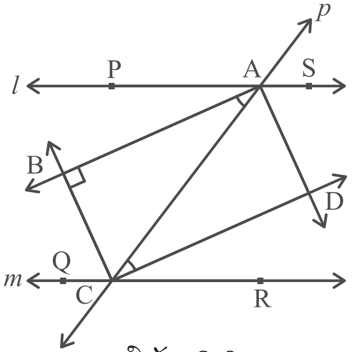
అందువల్ల ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

ఉదాహరణం : 4 l మరియు m లు సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ p ఖండిస్తుంది (చిత్రం 8.9).

అంతరకోణాల కోణసమద్వి ఖండనలతో చతుర్భుజం ఏర్పడును. దానిని ఒక దీర్ఘ చతురస్రమని చూపండి.

సాధన : PS || QR తిర్యగ్రేఖ p సమాంతర రేఖలను క్రమంగా A మరియు B ఖండిస్తుంది

$\angle PAC$ మరియు $\angle ACQ$ లు కోణసమద్విఖండరేఖలు B వద్ద ఖండించును $\angle ACR$ మరియు $\angle SAC$ లు కోణ సమద్విఖండనరేఖలు D వద్ద ఖండించును.



చిత్రం 8.9

ABCD చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రం అని చూపాలి $\angle PAC = \angle ACR$ (ఏకాంతర కోణాలు $l \parallel m$ మరియు p తిర్యగ్రేఖ)

కావున $\frac{1}{2} \angle PAC = \frac{1}{2} \angle ACR$

అయితే $\angle BAC = \angle ACD$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇవి ఒక జత పర్యాయకోణాలు AB మరియు DC రేఖల తిర్యగ్రేఖ AC మరియు ఈ రెండు కోణాలు సమానంగావున్నాయి.

కావున AB || DC

అలాగే BC || AD ($\angle$ ACB మరియు $\angle$ CAD లను తీసుకున్నప్పుడు)

అందువల్ల ABCD చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

కావున $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (రేఖాయుగ్మాలు)

$\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$

$\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

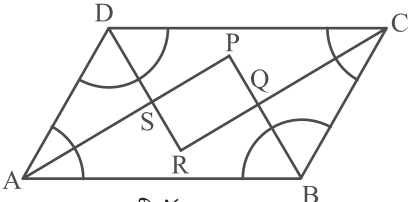
లేదా $\angle BAD = 90^0$

కావున ABCD లో ఒక్క కోణం 90^0 వుండే ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

కావున, ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

ఉదాహరణ : 5 ఒక సమాంతర చతుర్భుజము కోణసమద్విఖండనరేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన : ABCD సమాంతర చతుర్భుజం $\angle A$ $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle C$, $\angle D$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖలు P, Q, R, S బిందువుల వద్ద ఖండించుకొని చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి (చిత్రం 8.10).



చిత్రం 8.10

Δ ASD లో మీరు ఏమి గమనించారు?

$\angle D$ ని DS సమద్విఖండిస్తుంది మరియు $\angle A$ ను AS సమద్విఖండిస్తుంది.

కావున $\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2}\times 180°$ ($\angle$ A మరియు $\angle$ D లు తిర్యగ్రేఖ ఒకే వైపునవున్న అంతర కోణాలు)

$= 90°$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అలాగే $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (త్రిభుజకోణాల మొత్తం)

లేదా $90^0 + \angle DSA = 180^0$

లేదా $\angle DSA = 90^0$ ($\angle DSA$ మరియు $\angle PSR$ శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle PSR = 90^0$

అదేవిధంగా $\angle APB = 90^0$ లేదా $\angle SPQ = 90^0$ అని చూపవచ్చు

($\angle DAS$ లో చూపిన విధంగా)

$\angle PQR = 90^0$ మరియు $\angle SRQ = 90^0$

అందువల్ల PQRS ఒక చతుర్భుజం దీనిలో అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు దీనిని దీర్ఘ చతురస్రం అని చెప్పవచ్చా? దానిని పరీక్షిద్దాం.

$\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ మరియు $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ అని చూపించాం. అందువల్ల రెండు జతల ఎదుట కోణాలు సమానం.

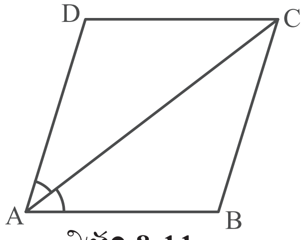
కావున PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దీనిలో ఒక కోణం (అన్నికోణాలు) 90^0 అయినవి. కావున PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

అభ్యాసం 8.1

1. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కర్ణాలుసమానమైన అది దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది. అని చూపండి.
2. ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొన్నచో అది రాంబస్ అని చూపండి.
3. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క కర్ణం AC, $\angle A$ ని సమద్విఖండన చేస్తుంది. (చిత్రం 8.11).

   (i) అది $\angle C$ కూడాసమద్విఖండన చేయును

   (ii) ABCD ఒక వజ్రాకృతి అని చూపండి.



చిత్రం 8.11

4. ABCD ఒక రాంబస్ AC కర్ణము $\angle A$ మరియు $\angle C$ సమద్విఖండనచేయును మరియు BD కర్ణం $\angle B$, $\angle D$ సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.
5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో DP = BQ అయ్యేటట్లు కర్ణం BD పై P మరియు Q రెండు బిందువులను తీసుకొని (చిత్రం 8.12).

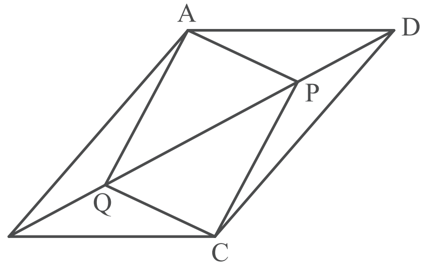
   (i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

   (ii) AP = CQ

(iii) Δ AQB $\cong$ Δ CPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

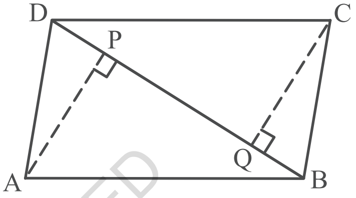


చిత్రం 8.12

6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AP మరియు CQ లు శీర్షాలు A మరియు C నుండి కర్ణం BD పై గీచి లంబాలు (చిత్రం 8.13) అయిన.

(i) Δ APB $\cong$ Δ CQD

(ii) AP = CQ అనిచూపండి.



చిత్రం 8.13

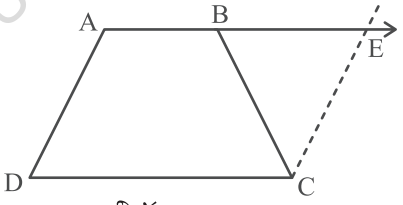
7. ABCD ఒక ట్రెపీజియం లో AB||CD మరియు AD = BC అయిన (చిత్రం 8.14).

(i) $\angle$ A = $\angle$ B

(ii) $\angle$ C = $\angle$ D

(iii) Δ ABC $\cong$ Δ BAD

(iv) కర్ణం AC = కర్ణం BD అని చూపండి.



చిత్రం 8.14

[గమనిక : AB ని పొడిగించిన. C ద్వారా DA కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయండి ఇది AB ని పొడిగించిన రేఖను E వద్ద ఖండించును.

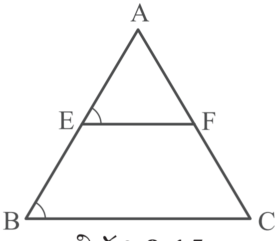
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.2 మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం

త్రిభుజాలు మరియు చతుర్భుజాల ధర్మాలను తెలుసుకున్నాం త్రిభుజ భుజాల మధ్య బిందువుల అధారంగా, మనం మరికొన్ని నూతన సంబంధాలను రాబడదాం. ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

ABC త్రిభుజం గీయండి. AB మరియు AC మధ్యబిందువుగా E మరియు F లు గుర్తించండి.

EF మరియు BC ని కొలవండి $\angle$ AEF మరియు $\angle$ ABC ని కూడా కొలవండి.



చిత్రం 8.15

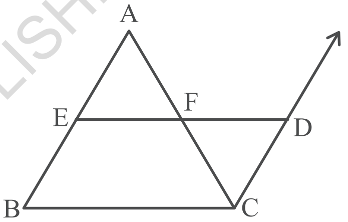
మీరు ఏమి గమనించారు?

EF = $\frac{1}{2}$ BC మరియు $\angle$AEF = $\angle$ABC అయినదాన్ని గమనించి EF || BC

మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసికొని ఈ కృత్యాన్ని చేయండి దీనివల్ల ఈ కింది సిద్ధాంతం ప్రకారం నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.8 : ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.

కింది ఇచ్చిన సాధన ప్రకారం ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించవచ్చు.



చిత్రం 8.16

చిత్రం 8.16 లో. AB మరియు AC ల మధ్య బిందువు క్రమంగా E మరియు F అయిన CD || BA

Δ AEF $\cong$ Δ CDF (కో. భు. కో. నియమం)

కావున EF = DF మరియు BE = AE = DC (ఎలా)

BCDE ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (ఎలా)

EF || BC

ఈ విషయంలో EF = $\frac{1}{2}$ED = $\frac{1}{2}$BC. అని గమనించండి.

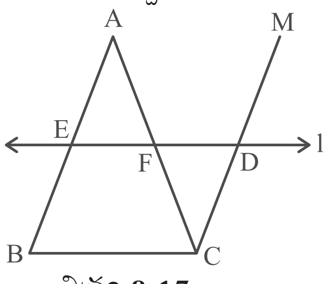
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సిద్ధాంతం 8.8 యొక్క విలోమము నిరూపిస్తారా? విలోమము సరినా?

ఈ పైప్రమేయం విలోమము కూడా సరి దీనిని ఈ విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.9 : ఒక త్రిభుజానికి ఒక భుజము మధ్య బిందువు గుండా గీసిన రేఖ మరొక భుజానికి సమాంతరంగావుండి రెండవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

చిత్రం 8.17 AB మధ్యబిందువు E మరియు l రేఖ E బిందువుద్వారా పోతూ BC కి సమాంతరంగావుంది.

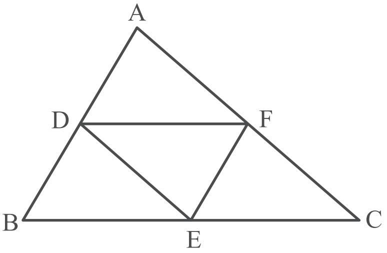


చిత్రం 8.17

CM || BA Δ AEF మరియు Δ CDF లు సర్వసమానత్వాన్ని ఉపయోగించి AF = CF అని చూపండి.

ఉదాహరణ : 6

Δ ABC లో D, E మరియు F లు వరుసగా AB, BC మరియు CA భుజాల మధ్యబిందువులు. వీటిని ఒకదానితో మరొకటి కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చూపండి (చిత్రం 8.18).



చిత్రం 8.18

నిరూపణ : Δ ABC లో D,E లు వరుసగా AB మరియు BC ల మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారం (8.8) DE || AC

అదేవిధంగా DF || BC మరియు EF || AB.

అగును అందువల్ల ADEF, BDFE మరియు DFCE లు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం

యొక్క కర్ణం BDFE అయి న DE అయినది

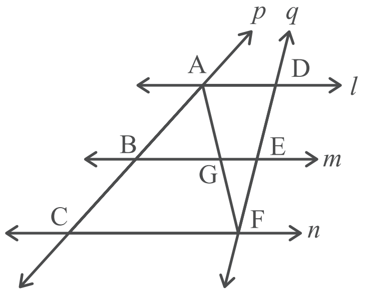
అందువల్ల Δ BDE ≅ Δ FED

కావున Δ DAF ≅ Δ FED

మరియు Δ EFC ≅ Δ FED

అందువల్ల అన్ని నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానము

ఉదాహరణ : 7 : *l, m* మరియు *n* అనేమూడు సమాంతర రేఖలను *p* మరియు అనేరెండు తిర్యగ్రేఖలు *p* పై *l, m* మరియు *n* లు AB మరియు BC సమానంగా అంతర ఖండాలను ఏర్పరచినవి (చిత్రం 8.19).



చిత్రం 8.19

l, m మరియు *n* లు పై కూడా సమాన అంతర ఖండాలను ఏర్పరుస్తాయి అని చూపండి.

సాధన : AB = BC ఇచ్చినది DE = EF అని చూపాలి

A మరియు F రేఖను గీయగా ఇది *m* రేఖను G వద్ద ఖండించదనుకోండి Δ ACF మరియు Δ AFD అను రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Δ ACF లో AC మధ్యబిందువు B అవుతుంది (AB = BC) మరియు BG || CF (m || n అయినందున.)

కావున AF మధ్యబిందువు G అయినది (సిద్ధాంతం 8.9 ఉపయోగించి)

Δ AFD లో AF మధ్యబిందువు G అని అదేవిధంగా చూపించాలి. GE||AD మరియు సిద్ధాంతం 7.10 నుండి DF యొక్క మధ్యబిందువు E అయినది.

అంటే DE = EF

మరొక పద్ధతిలో చెప్పాలంటే *l*, *m* మరియు *n* రేఖలు *q* రేఖపై కూడా సమాంతర ఖండాలు ఏర్పరుస్తుంది.

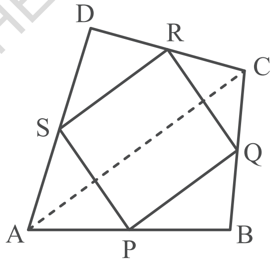
అభ్యాసం 8.2

1. ABCD ఒక చతుర్భుజం. AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్యబిందువులు క్రమంగా P, Q, R మరియు S అయినవి (చిత్రం 8.20). AC కర్ణం అయితే

   (i) SR || AC మరియు SR = $\frac{1}{2}$AC

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

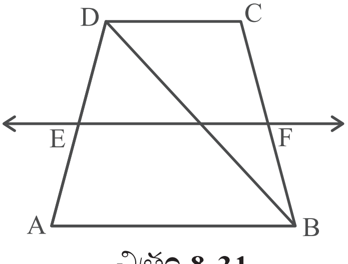


చిత్రం 8.20

2. ABCD ఒక రాంబస్ AB, BC, CD మరియు DA భుజాలు మధ్యబిందువులు క్రమంగా P, Q, R అయినవి PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రమని చూపండి.

3. ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్య బిందువులు క్రమంగా P, Q, మరియు S అయినవి. PQRS ఒక రాంబస్ అని చూపండి.

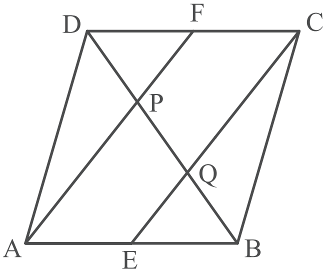
4. ABCD ఒక ట్రెపీజియం AB || DC, BD కర్ణం మరియు AD మధ్య బిందువు E అయిన. E ద్వారా AB కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయండి BC ని F బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది (చిత్రం 8.21). BC కి మధ్యబిందువు F అని చూపండి.



చిత్రం 8.21

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో AB మరియు CD ల మధ్యబిందువులు వరుసగా E F అయిన AF మరియు EC రేఖాఖండాలు కర్ణము BD ని త్రిభాగిస్తామని చూపండి.



చిత్రం 8.22

6. ABC ఒక లంబకోణత్రిభుజంలో. $\angle C$ లంబకోణము అయిన కర్ణం AB మధ్య బిందువు M గుండా BC కి సమాంతరంగా గీచినరేఖ AC ని D వద్ద ఖండిస్తే.

(i) AC మధ్య బిందువు D

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

8.3 సారాంశం

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ అధ్యాయంలో ఈ కింది అంశాలను మీరు నేర్చుకున్నారు.

1. సమాంతర చతుర్భుజం లో ఒక కర్ణం రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
2. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం లో
   (i) ఎదుట భుజాలు సమానం
   (ii) ఎదుటి కోణాలు సమానం
   (iii) కర్ణాలు పరస్పర సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
3. దీర్ఘ చతురస్రంలోని కర్ణాలు సమానమై సమద్విఖండన చేస్తుంటాయి మరియు దీని విలోమము కూడా సరైనది.

4. రాంబస్ కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయి మరియు దీని విలోమము కూడా సరైనది.

5. చతురస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమానము, లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయి దీని విలోమం కూడా సరైనది.

6. త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను మరియు దానిలో సగము వుంటుంది.

7. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి మధ్యబిందువు గుండా గీయబడిన రేఖ మరొక భుజానికి సమాంతరంగా మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేయును.

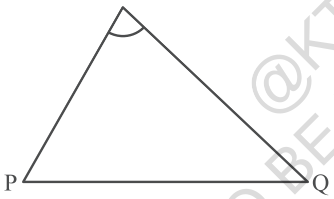
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

అధ్యాయం – 9

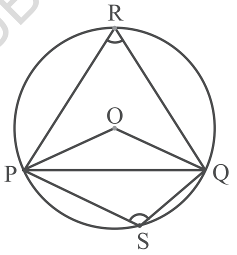
వృత్తాలు

9.1 వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పడినకోణం

$\overline{PQ}$ అను రేఖా ఖండమును తీసుకోండి. PQ రేఖాఖండము పై తీనటువంటి బిందువు R ను గుర్తించండి. PR మరియు QR లను కలపండి చిత్రం 9.1 లో చూపినట్టు. ఇపుడు Δ PQR ఏర్పడినది.



చిత్రం 9.1

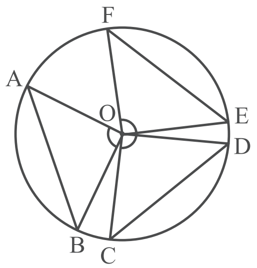


చిత్రం 9.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రంలోని కోణాలు $\angle POQ$, $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$ లను మీరు ఏమని పిలుస్తారు.

కేంద్రం "O" వద్ద జ్యా PQ ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$. అదే విధంగా జ్యా PQ అల్పవృత్త ఖండం మరియు అధిక వృత్త ఖండాల పై గల బిందువు S మరియు R వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు వరుసగా $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$.



చిత్రం 9.3

అయితే ఈ జ్యాలు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుతున్న కోణాలను గురించి నీవు ఏం చెప్పగలవు. కోణాలను పరిశీలించడం ద్వారా జ్యా పొడవు పెరిగిన కోద్దీ అది కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం కొలత పెరుగుటను గమనిస్తాం.

మరి రెండు సమాన జ్యాలను తీసుకుంటే అవి కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు ఎలా ఉంటాయో ఆలోచించండి. ఇంకొక రెండు సమాన జ్యాలను గీచి, అవి వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలను కొలిచి చూడండి.

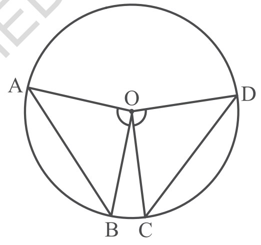
ఆ కోణాలు సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు. (చిత్రం 9.3). ఈ సత్యాన్ని నిరూపిస్తాం.

సిద్ధాంతం 9.1: ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం.

సాధన : 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB మరియు CD లు రెండు సమాన జ్యాలు. (చిత్రం 9.4)

సారాంశం : $\angle AOB = \angle COD$

నిర్మాణం : వృత్త కేంద్రాన్ని జ్యాల యొక్క అంత్య బిందువులతో కలుపుము అప్పుడు ΔAOB మరియు ΔCOD లు ఏర్పడుతాయి.



చిత్రం 9.4

నిరూపణ :

ΔAOB మరియు ΔCOD లలో

$OA = OC$ (దత్తాంశం నుండి)

$OB = OD$ (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

$AB = CD$ (దత్తాంశం)

కావున $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (భుజం, భుజం, భుజం నియమం)

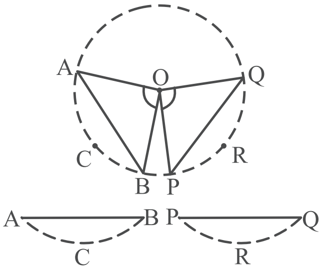
కావున $\angle AOB = \angle COD$

(సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూపకోణాలు)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి : మన అనుకూలం కోసం **సర్వసమాన త్రిభుజపు** అనురూపకోణాలు స.త్రి.అ.కో (CPCT) నిర్మించుకున్నాం. ఇలాంటివి మనం చాలా తక్కువగా చూస్తుంటాం.

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసేకోణాలు సమానమైన. జ్యాల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? ఈ విషయాలన్నీ కింది కృత్యం ద్వారా పరీక్షిద్దాం.



చిత్రం 9.5

కృత్యం : ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకోంని, అందులో ఒక వృత్తం గీయండి. వృత్త అంచులు ఏకీభవించునట్లు ఏదైనా ఒక వ్యాసం వెంట మడవండి. దీని కేంద్రం. 'O' A, B లు వృత్తం పై బిందువులను గుర్తించి $\angle AOB$ ని గీయండి. 'O' ని కేంద్రంగా చేసుకొని $\angle POQ$ మరొక కోణాన్ని గుర్తించండి. రెండు కోణాలకు కేంద్ర బిందువు 'O'. పటంలో చూపినట్టు AB మరియు PQ లను కత్తిరించండి. ఇప్పుడు మీకు ACB మరియు PRQ అను వృత్తఖండాలు లభిస్తాయి ఇప్పుడు మీరు వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచిన, ఏమి గమనించారు. అవి రెండు సర్వసమానాలు. కాబట్టి AB = PQ ఇదే విషయాన్ని వేర్వేరు కొలతలుగల సమాన కోణాలు తీసుకొని సరిచూసిన జ్యాలు సమానమగును.

సిద్ధాంతం 9.2: ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రంవద్ద చేసే కోణాలు సమాన మైన ఆ జ్యాలు సమానం.

ఇది ఇంతకు ముందు చెప్పబడిన సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం. ఇచ్చిన సిద్ధాంతం 9.1, ప్రకారం చిత్రం 9.4 గమనించండి.

$\angle AOB = \angle COD$ తీసుకున్నచో

అప్పుడు మీరు $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$ (ఎందుకు?)

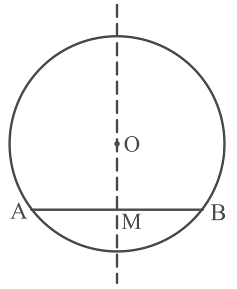
ఇప్పుడు AB = CD (అని గమనించవచ్చు?)

అభ్యాసం 9.1

1. ఒకే వృత్తవ్యాసార్థం కలిగిన, రెండు సర్వసమాన వృత్తాలను తీసుకొని, ఆ వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం అని నిరూపించండి.
2. ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానమని నిరూపించండి.

9.2 వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం :

'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. జ్యా AB ని గీయండి మరియు కేంద్రం 'O' నుండి జ్యా AB కి ఒక లంబాన్ని గీయండి. లంబం మరియు జ్యా AB ల ఖండన బిందువు M అనుకోండి. MA మరియు MB అవుతుంది. OM, AB కి లంబరేఖ కావున $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ లేక $MA \perp MB$.



చిత్రం 9.6

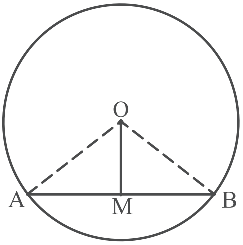
OA మరియు OB లను కలిపిన లంబకోణ Δ OMA మరియు Δ OMB లను సర్వసమానం అని మీరే స్వంతంగా సాధించండి. ఈ ఉదాహరణ ఈ కింద ఫలితానికి నిర్ధిష్టమైన నిరూపణ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సిద్ధాంతం 9.3 : ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదైనా జ్యాకు గీచిన లంబం జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి? వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన లంబరేఖను వృత్త జ్యా కూడా సమద్విఖండన చేస్తుంది. కాబట్టి వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యా ను సమద్విఖండన చేసే రేఖ జ్యా కు లంబంగా ఉంటుంది.

సిద్ధాంతం 9.4 : వృత్తకేంద్రంనుండి గీచినరేఖ వృత్తజ్యానుసమద్విఖండన చేస్తుంది అది జ్యాకు లంబం.



చిత్రం 9.7

ఇది నిజమా? కొన్ని సందర్భాలలో ప్రయత్నించి చూడండి. అన్ని సంధర్భాలలో ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. కింది అభ్యాసం చేయడం ద్వారా సాధారణంగా ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. మీరు దశలను రాయగలరు మరియు కారణాలు కూడా ఇవ్వగలరు.

AB ని వృత్తం యొక్క జ్యా అనుగుంటే, కేంద్రబిందువు 'O' మరియు AB ల మధ్యబిందువు M అయిన OM ను కలపండి $OM \perp AB$ అని నిరూపితము. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా OA మరియు OB లను కలపండి.

Δ OAM మరియు Δ OBM త్రిభుజాలలో,

OA = OB (ఎందుకు ?)

AM = BM (ఎందుకు?)

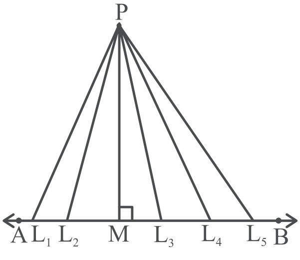
OM = OM (సామాన్యభుజం)

కాబట్టి, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (ఎందుకు?)

$\underline{|OMA} = \underline{|OMB} = 90°$ (ఎందుకు?)

9.3 సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి మధ్యగల దూరాలు.

AB అనే ఒక సరళ రేఖను తీసుకొంటే P అనేది తలంలో ఒక బిందువు అయితే. ఒక సరళ రేఖపై అనతంమైన బిందువులు వుంటాయి. కాబట్టి. ఒక వేళ వాటిని P బిందువుతో కలిపితే, అనంత సంఖ్యలో రేఖా ఖండాలు అనేవి ఏర్పడతాయి. ఉదా : PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4.......వాటి మధ్య దూరం (AB) P ? బాగా ఆలోచించి సమాధానం రాయండి? పై రేఖాఖండాలన్నింటిలోనూ P నుండి AB కి గీచినవి



చిత్రం 9.8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

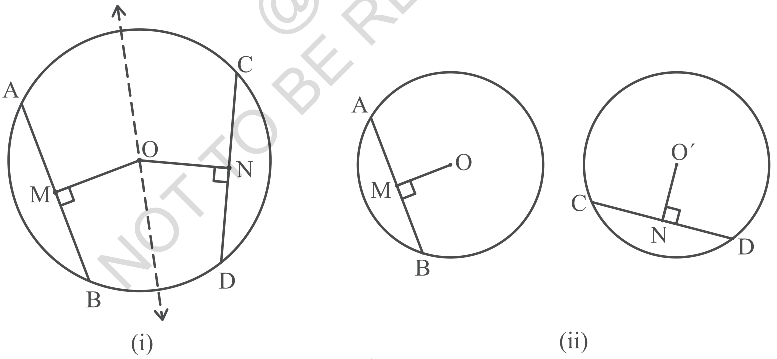
అన్ని లంబంగా ఉన్నాయా? కేవలం PM మాత్రమే AB కి లంబంగా ఉండి అని చిత్రంనుండి అర్థమవుతుంది. (9.8) మరియు అదే అదే అతి తక్కువ పొడవు. గణితపరంగా AB పై P అనే బిందువునుండి గీచిన రేఖాఖండం అతి తక్కువ పొడవును కలిగివుంది అని నిర్వచిస్తాం. కాబట్టి దీనిని క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

సరళ రేఖపై ఒక బిందువు నుండి గీచిన లంబరేఖ పొడవు అనేది. బిందువు నుండి సరళరేఖపై ఒక బిందువుకు గీచిన పొడవుకు సమానం.

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే, ఒక వేళ ఒక బిందువు సరళరేఖపై బిందువు ఒక్కటే ఆయితే ఆ బిందువుకు సరళరేఖపై బిందువుకు గీచిన మధ్య దూరం శూన్యం లేదా సున్న అవుతుంది.

ఒక వృత్తానికి గల జ్యాలు అపరిమితం మనం వృత్తంలో ఒకే పొడవులు గల అనేక జ్యాలను గీస్తే. కేంద్రం నుండి సమాన జ్యాలకు గల దూరం ఎలా ఉంటుంది. కేంద్రానికి దక్కరగా పోయే జ్యా చాలా పెద్దగా వుంటుంది. మిగిలిన జ్యాలతో పోల్చిన, అందులో వ్యాసం యొక్క దూరం ఎంత? వృత్తంలో అతి పెద్ద జ్యా ఏది? కేంద్రం గుండా పోతే వాటి మధ్య దూరం సున్న గమనించండి ఇక్కడ జ్యాల యొక్క పొడవుకు మరియు కేంద్రం యొక్క మధ్య దూరానికి రెండిటి మధ్య అవినాభావ సంబంధం ఉంది. వాటి మధ్య సంబంధం చూద్దాం!

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(i) (ii)

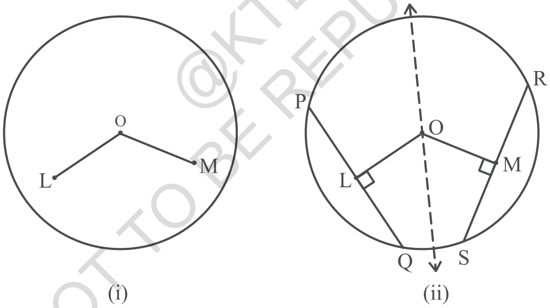
చిత్రం 9.9

కృత్యము : వృత్తాన్ని గీచి దీనిని సగానికి మధ్య మడవండి. అర్ధవృత్తపు చాపపు అంచుదగ్గర నుండి మడత విప్పన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD గా గుర్తించండి. మరియు వృత్త కేంద్రం 'O' నుండి జ్యాలకు గీచిన లంబదూరాలు OM మరియు ON. ఇప్పుడు పేపరును మడిచిన B, D తోనూ A, C తోనూ ఏకీభవిస్తాయి. పై పటం 9.9(i) లో చూపిన విధంగా! M కు N కు మధ్యలో వృత్తకేంద్రం గుండా పోయే జ్యా సరిహద్దుగా ఉంటుంది.

∴ కాబట్టి OM = ON. కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయగా సర్వసమాన వృత్తాలు గీయగా వాటి వృత్త కేంద్రాలు 'O' మరియు O^1 అయిత సమాన జ్యాలు AB మరియు CD లను ఒక్కొక్క వృత్తంలో గీస్తే. లంబాలను OM మరియు O^1N లను చిత్రం 9.9(ii)లో చూపిన విధంగా గుర్తించాలి. ఒకదాన్ని కత్తరించి రెండవదానిపై AB, CD లను పోలి వుంటుంది. ఇక్కడ వృత్తకేంద్రం O, O^1 దగ్గరే ఉంటుంది. M ను N గాలీసుకుంటాం. ఈ విధంగా కిందివాటిని సరిచూడండి.

సిద్ధాంతం 9.5 : సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

తర్వాత ఈ సిద్ధాంత విపర్యయం సత్యమో కాదో గమనిద్దాం. 'O' కేంద్రంగా గల ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. 'O' ను కేంద్రంగా చేసుకొని రెండు రేఖా ఖండాలను గీయండి. వాటిని OL మరియు OM గా గుర్తించండి. ఈ వృత్త రేఖా ఖండాల పొడవులు సమానంగా వుండే విధంగా సమాన దూరంలో వృత్తం అంతర భాగంలో ప్రక్క పటం లో(9.10(i)) చూపిన విధంగా గీయండి. ఇప్పుడు PQ మరియు RS ల పొడవును కొలవండి. ఏమైనా వ్యత్యాసం ఉందా? లేదు, రెండూ సమానం ఇదే విధంగా కృత్యాన్ని తిరిగి చేయండి. సమాన రేఖా ఖండాలను గీచి సమాన జ్యాలను గీచి వాటికి లంబంగా వుండే విధంగా చూడండి. ఈ పరిశీలన ద్వారా చేయండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

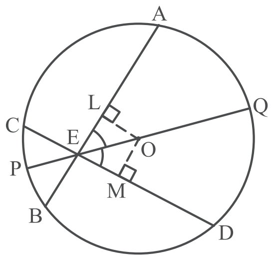
చిత్రం 9.10

సిద్ధాంతం 9.5 యొక్క విపర్యయం సత్యం అని ఋజువయింది.

సిద్ధాంతం 9.6: ఒక వృత్త కేంద్రంనుండి గీచిన సమాన జ్యాలు ఆ వృత్తంలో వాటి పొడవులు సమానం.

పై సిద్ధాంతాన్ని వివరించడానికి ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ప్రయత్నిద్దాం!

ఉదాహరణ 1 : ఒక వృత్తానికి పరస్పరం ఖండించుకునే రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమానమైన కోణాలను ఏర్పరిస్తే, ఆ జ్యాలు పరస్పరం సమానమవుతాయని చూపండి.



చిత్రం 9.11

సాధన : ఒక వృత్తంలో AB మరియు CD లు ఆ వృత్త జ్యాలుగా తీసుకుంటే, 'O' వృత్త కేంద్రం లో E పరిచ్ఛేదన బిందువు. PQ అనేది E గుండా వ్యాసం అయితే.అప్పుడు $\angle AEQ = \angle DEQ$ (పటం 9.11) నుండి. ఇపుడు AB = CD అని నిరూపిద్దాం 'O' వృత్త కేంద్రంగా OL మరియు OM అనే లంబాలను గీచిన, ఇవి AB మరియు CD లకు లంబంగా వుంటాయి. అదే విధంగా ఇప్పుడు.

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (త్రిభుజంలోని కోణాం మొత్తం ధర్మం ఆధారం గా)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

Δ OLE మరియు Δ OME నుండి

$\angle LEO = \angle MEO$ (ఎందుకు?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (పైనిరూపణ ఆధారంగా)

EO = EO (ఉమ్మడివి)

కాబట్టి $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (ఎందుకు?)

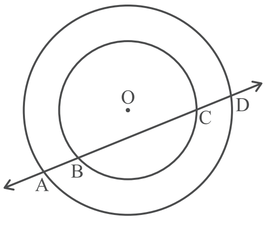
ఇస్తుంది OL = OM (సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూప కోణాలు)

కావున AB = CD (ఎందుకు?)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 9.2

1. రెండు వృత్త వ్యాసార్థాలు, వరుసగా 5cm మరియు 3cm లు కేంద్రంనుండి 4cm దూరంలో అవి రెండు బిందువులు ఖండించుకుంటే, ఆ వృత్త ఉమ్మడి జ్యా పొడవు ఎంత?
2 ఒక అంతర వృత్తం లో రెండు సమాన జ్యాలు సమద్వి ఖండన చేసుకుంటే, ఒక జ్యాలో గల ఖండించుకున్న భాగాలు మిగిలిన జ్యాలో గల భాగానికి సమానంగా ఉంటాయి. అని నిరూపించండి.
3 ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమాన కోణాలు చేస్తే, ఆ జ్యాల పొడవులు సమానమని నిరూపించండి.
4 రెండు ఏక కేంద్రక వృతాలను ఒక సరళ రేఖ ఖండించిన ఆ వృత్తకేంద్రం. O ఖండన బిందువులు A,B,C మరియు D అయిన



చిత్రం 9.12

(పక్క చిత్రం 9.12) నుండి AB = CD అని నిరూపించండి.

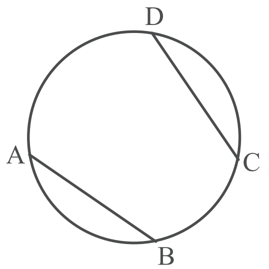
5 ఒక పార్కులో 5m వ్యాసార్థంతో గీచినటువంటి ఒక వృత్తంలో రేష్మా, సల్మా మరియు జ్యోత్స్న అనే ముగ్గురు అమ్మాయిలు ఆడుకుంటున్నారు. రేష్మా బంతిని సల్మాకు విసిరింది. సల్మా అదే బంతిని జ్యోత్స్నకు విసిరింది. జ్యోత్స్న తిరిగి అదే బంతిని రేష్మాకు విసిరింది. అయితే రేష్మా మరియు సల్మా మరియు సల్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం 6m ప్రతి ఒక్కరికి, అయితే రేష్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం ఎంత?

6 ఒక కాలనీలో 20m వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తాకారపు పార్క్‌ను నిర్మించారు. ఆ పార్కులో అంకుర్, సయ్యద్ మరియు డేవిడ్ అనే ముగ్గురు మిత్రులు బొమ్మ టెలిఫోన్ తీసుకొని ఆ పార్కు (వృత్తపు) అంచులలో కూర్చుని మాట్లాడుకుంటున్నారు. అయితే, ప్రతి ఒక్కరి బొమ్మ టెలిఫోన్‌తీగ యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

9.4 వృత్త చాపము ఏర్పరిచే కోణం :

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో వృత్తాన్ని రెండు చాపాలుగా విభజిస్తుంది. ఒకటి అధిక మరియు ఇంకొకటి అల్ప చాపం. ఒకవేళ రెండు సమాన జ్యాలు అయితే అప్పుడు చాపంయొక్క పరిమాణం ఎంత? మొదటి చాపాన్ని మొదటి జ్యా రెండవ చాపాన్ని రెండవ జ్యా సమానంగా ఏకీభచించును? పొడవులో దాదాపుగా సమానం. ఒక చాపాన్ని మరోచాపంతో కలిపిన అవి రెండు సర్వ సమానాలు అగును. వాటిని రెండింటిని కదల్చకుండా, ఒక దానిపై మరొకటి తాకే విధంగా వుంచిన అవి రెండు కలిసిపోయి పూర్తిగా కనిపిస్తాయి.

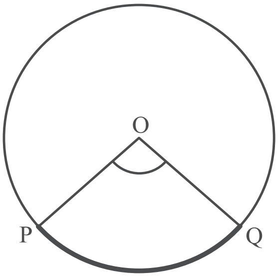


చిత్రం 9.13

ఒక చాపాన్ని కత్తరించి ఈ నిజాన్ని నిరూపించండి. వృత్తాన్ని దానిలో సగానికి మధ్యలో మడవండి. ఇప్పుడు అర్ధవృత్తం చాపపు అంచు దగ్గర నుంచి మడత విప్పిన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD లుగా గుర్తించండి. అపుడు CD పూర్తిగా ABలో కలిసిపోయి కనిపిస్తుంది. (లేదా సర్వ సమానాలుగా) చిత్రం 9.13లో చూపిన విధంగా ఉంటుంది. దీనిని బట్టి సమాన జ్యాలు సర్వసమాన చాపాలను ఏర్పరుచును మరియు విపర్యయంగా సర్వసమాన చాపాలు వృత్తంలో సమాన జ్యాలను ఏర్పరుచును అని చెప్పవచ్చునని నిరూపించుదాం.

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయితే, అందులో ఏర్పడు చాపాలు సర్వసమానాలు మరియు విపర్యయంగా, ఒకవేళరెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన ఆ వృత్తంలో ఏర్పడే

జ్యాలు కూడా సమానాలు.



చిత్రం 9.14

అదే విధంగా వృత్తచాపం ఏర్పరచే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు వద్ద రెండు జ్యాలు ఖండించుకొను బిందువు వద్ద ఏర్పడే ప్రాంతం ఆ వృత్తం యొక్క మధ్యబిందువు అగును. అల్పచాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అధిక చాపం ఏర్పరచేకోణం దాని ప్రతిబింబం అగును అందుచేత పటం 9.27 నుండి అల్పచాపం PQ, O వద్ద ఏర్పరిచేకోణం $\angle POQ$ మరియు అధిక కోణ చాపము O వద్ద ఏర్పరిచే చాపం PQ అనేది $\angle POQ$ కోణం యొక్క ప్రతిబింబం.

సిద్ధాంతం 9.1 నుండి పైన చెప్పబడిన అంశాలు సత్యము.

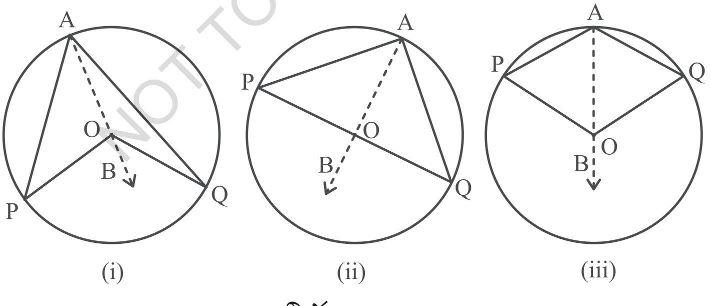
ఒక వృత్తములోని సర్వసమాన చాపాలు ఆ వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానాలు.

అందువలన, వృత్తంలో జ్యాల ద్వారా ఏర్పడే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు గుండా వెళ్ళే అనురూప జ్యాల యొక్క కోణం సమానం. ఈ సిద్ధాంతం వృత్త కేంద్రంవద్ద వృత్త చాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అది వృత్తంలోని ఒక బిందువు.

సిద్ధాంతం 9.7: ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం, ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తం పై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

సాధన : 'O' అనునది వృత్త కేంద్రం, చాపము PQ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$, $\angle PAQ$ అనునది మిగిలిన వృత్తం మీద ఏదేని ఒక బిందువు అయిన $\angle POQ = 2\angle PAQ$ అని నిరూపించాలి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 9.15

ఇక్కడ(i) PQ ఒక అల్పచాపం, (ii) PQ ఒక అర్ధ వృత్తం మరియు (iii) PQ ఒక అధిక చాపం అయ్యే మూడు సందర్భాలు కలవు.

A బిందువును 'O' కలిపి B బిందువు దాక పొడిగించడం ద్వారా నిరూపణను మొదలు పెడదాం (అన్ని సందర్భాలలోనూ)

$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

ΔOAQ లో

$OA = OQ$ .... (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

అందువలన, $\angle OAQ = \angle OQA$ .... (సిద్ధాంతం 7.5)

దీని నుండి, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ .... (1)

అదే విధంగా $\angle BOP = 2\angle OAP$ .... (2)

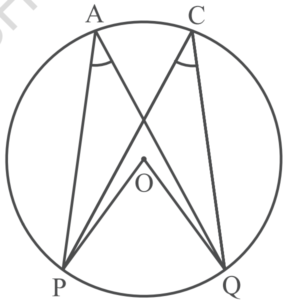
1 మరియు 2 నుండి $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ఇదేవిధంగా $\angle POQ = 2\angle PAQ$ .... (3)

సందర్భం (iii) లో PQ అధికచాపం (3) ను ముళ్ళు పెట్టిన ప్రతిబింబ కోణం $\angle POQ = 2\angle PAQ$

గమనిక : ఒక వేల P మరియు Q బిందువులను కలిపిన PQ యొక్క జ్యాలు ప్రక్క చిత్రంలోచూపిన విధంగా ఉంటాయి. $\angle PAQ$ ను PAQP ల కోణఖంధన బిందువులు అంటారు.

సిద్ధాంతం 9.7లో A అనేది వృత్తం పై ఏదైనా ఒక బిందువు. C మరొక బిందువు అదే వృత్తంపై అనుకుంటే చిత్రం (9.16)నుండి.



చిత్రం 9.16

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

కావున : $\angle PCQ = \angle PAQ$

అని నిరూపించవచ్చును.

సిద్ధాంతం 9.7 : వృత్తంలోని కోణ సమద్విఖండన రేఖలు సమానం.

కోణాన్ని ఈ సందర్భం (ii) లో చర్చిద్దాం. సిద్ధాంతం 12.8లో ప్రత్యేకంగా $\angle PAQ$ కోణ సమద్వి ఖండన చేయగా అది అర్ధవృత్తం అగును.

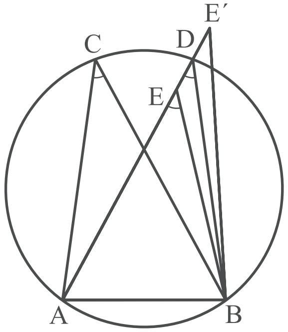
అందులో $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ అర్ధవృత్తం పై మరో ఏదైనా ఒక బిందువు C అనుకుంటే $\angle PCQ = 90°$ మరలా వచ్చును.

అందుచేత వృత్తంలోని అంశాలను బట్టి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అర్ధ వృత్తంలోని కోణం ఒక లంబకోణం అని చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 9.9: రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం (ఆ రేఖా ఖండానికి ఒకే వైపుగల) ఏవైనా వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి. (అంటే అవి చక్రీయాలు అవుతాయి).



చిత్రం 9.17

ఈ ఫలితం యొక్క సత్యవిలువను కిందివిధంగా పరిశీలించవచ్చు. చిత్రం 9.30 నుండి. AB ఒక రేఖా ఖండం AB నకు ఒకే వైపుగల బిందువుల C మరియు D ల వద్ద AB చేయు కోణాలు,

$\angle ACB = \angle ADB$

A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తంపైన బిందువులు అయిన. ఒకవేళ D గుండా వృత్తం వెళ్ళకపోతే. AD ని ఒక చోట ఖండిస్తాయి. (లేదా AD ని పొడిగించగా) దానిని E బిందువుగా గుర్తిద్దాం! (లేదా E^1).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక వేళ A,C,E మరియు B లు ఒకే వృత్తం పై బిందువులు అయితే

$\angle ACB = \angle AEB$ (ఎందుకు ?)

కాని $\angle ACB = \angle ADB$ (అని ఈయబడినది)

కాబట్టి $\angle AEB = \angle ADB$

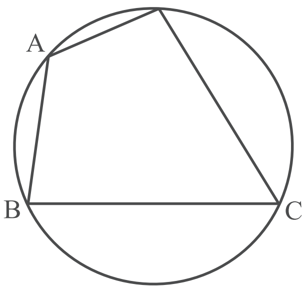
ఇది E మరియు D లు ఏకీభవిస్తే తప్ప సాధ్యం కాదు. (ఎందువలన ?)

కావున E కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

అదే విధంగా E^1 కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

9.5 చక్రీయ చతుర్భుజం

చిత్రం 9.18లో చతుర్భుజ శీర్షాలు A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైగలవు. ఇటువంటి చతుర్భుజంABCD ను చక్రీయ చతుర్భుజం అంటాం. ఇటువంటి చతుర్భుజాలు ABCD లను



చిత్రం 9.18

నాల్గింటిని గీచి, చతుర్భుజ కోణాలను కొలిచి పట్టికను నింపండి.

క్రమ సంఖ్య (చక్రీయ చతుర్భుజాలు)	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

ఈ పట్టిక నుండి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ మరియు $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ను సాధించండి. కొలతలలో దోషాలను వదిలివేయగా క్రింది వాటిని సాధించండి.

సిద్ధాంతం 9.10 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటికోణాల మొత్తం అయినా 180° అయితే, అది చక్రీయ చతుర్భుజం.

దీని విపర్యయం కూడా ఎల్లప్పుడూ సత్యమే

సిద్ధాంతం 9.11 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటి కోణాల మొత్తం 180° అయితే, ఆ చతుర్భుజం ఒక చక్రీయం.

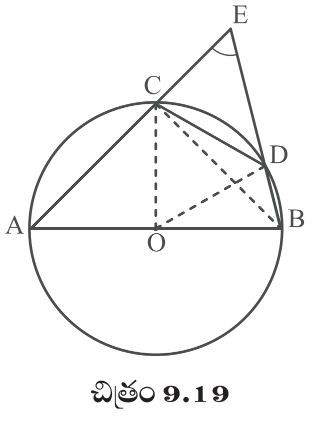
ఈ సిద్ధాంతంను సాధంచడానికి సిద్ధాంతం 9.9లో ఉన్న సాధన ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 2: చిత్రం 9.19 లో AB వృత్త వ్యాసం. CD ఆ వృత్త జ్యా మరియు వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఆ బిందువు E. అయితే $\angle AED = 60^\circ$ అని నిరూపించండి.

సాధన : OC, OD మరియు BC లను కలుపగా.

ΔODC ఒక సమబాహు త్రిభుజం (ఎందుకు?)

కాబట్టి $\angle COD = 60^\circ$



చిత్రం 9.19

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు : $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (సిద్ధాంతం 9.7)

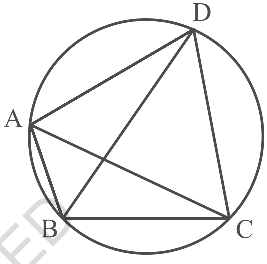
దాని నుండి $\angle CBD = 30^\circ$

అదే విధంగా $\angle ACB = 90^\circ$ (ఎందుకు?)

కావున $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

దీని నుండి $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ కావున $\angle AEB = 60^\circ$

ఉదాహరణ 3: చిత్రం 9.20లో ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం AC మరియు BD లు వాటి కర్ణాలు.అయిన $\angle DBC = 55^\circ$, మరియు $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCD$ ఎంత?.



చిత్రం 9.20

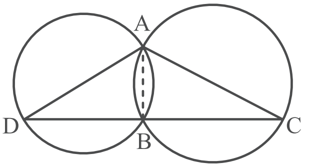
సాధన : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (ఒకే రేఖా ఖండంలోని కోణాలు)

కాబట్టి $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

కానీ $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాలు)

కావున $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

ఉదాహరణ 4 : రెండు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు A మరియు B ల వద్ద ఒక దానిని ఒకటి ఖండించుకొనిన. AD మరియు AC లు ఆ రెండు వృత్తాల వ్యాసాలు. (చిత్రం 9.21లో చూడండి). B గుండా గీయబడిన రేఖ DC ని ఖండించును అని ఋజువుచేయండి.



చిత్రం 9.21

సాధన : AB లను కలిపిన

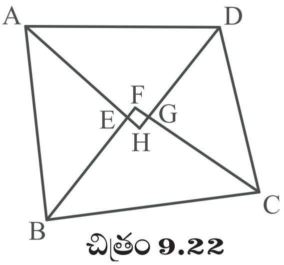
$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ\end{array}\right\}$ అర్ధవృత్తంలోని కోణం

కావున $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

కాబట్టి DBC ఒక సరళ రేఖ అగును. ఈ B సరళ రేఖ అనునది DC ని ఖండించును.

ఉదాహరణ5:ఒకచతుర్భుజంలోనిఅంతర్గతకోణాలుఖండించుకొనిన అక్కడ ఏర్పడేది ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అని నిరూపించండి.

సాధన : పటం 9.22 లో ABCD ఒక చతుర్భుజం మరియు AH, BF, CF మరియు DH లు కోణ సమద్విఖండన బిందువుల అంతర్గతంగా



చిత్రం 9.22

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఖండించుకొనిన $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ లు దానిలోని EFGH చతుర్భుజం అగును.

ఇప్పుడు $\angle FEH = \angle AEB = 180° - (\angle EAB - \angle EBA)$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

మరియు $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

కాబట్టి,

$$\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

$$= 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

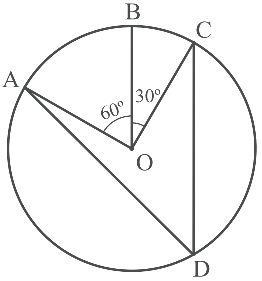
$$= 360^0 - 180^0 = 180^0$$

సిద్ధాంతం 9.11 నుండి చతుర్భుజంలో EFGH చక్రీయం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

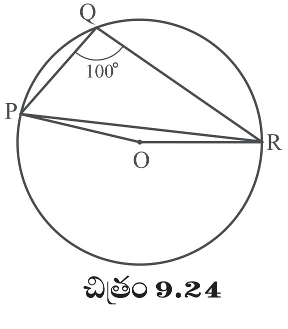
అభ్యాసం 9.3

1. చిత్రం 9.23 నుండి A,B మరియు C లు వృత్తం పై ఏవైనా మూడు బిందువులు O వృత్తం కేంద్రం. అయిన $\angle BOC = 30°$ మరియు $\angle AOB = 60°$ మిగిలిన వృత్త చాపం పై ABC కి మరొక వైపున బిందువు D అనుకుంటే $\angle ADC$ ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 9.23

2. ఒక వృత్తం యొక్క జ్యా ఆ వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. అయిన వృత్తచాపం వద్ద ఈ రెండు ఖండించుకొనిన ఏర్పడుకోణం. అల్పచాపం మరియు ఖంఢన బిందువుం వద్ద ఏర్పచే చాపం అధికచాపం అని నిరూపించండి.

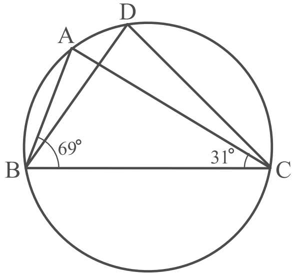


చిత్రం 9.24

3. చిత్రం 9.24 నుండి $\angle PQR = 100°$ P,Q మరియు R లు వృత్తం పై ఏదైనా బిందువులు. 'O' వృత్త కేంద్రం అయిన $\angle OPR$ ను

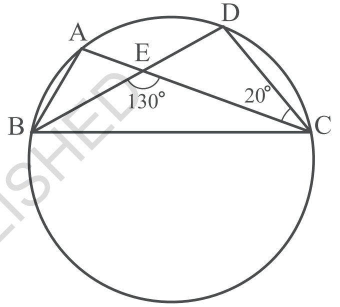
కనుగొనండి.

4. చిత్రం 9.25లో $\angle ABC = 69^\circ$, $\angle ACB = 31^\circ$ అయిన $\angle BDC$ ఎంత?



చిత్రం 9.25

5. చిత్రం 9.26 లో A,B,C మరియు D లు వృత్తంపై ఏవేని నాలుగు బిందువులు. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద అది ఖండించుకొనును. ఆ ఖంఢన బిందువు E అయిన $\angle BEC = 130^\circ$ మరియు $\angle ECD = 20^\circ$ అప్పుడు. $\angle BAC$ ఎంత?



చిత్రం 9.26

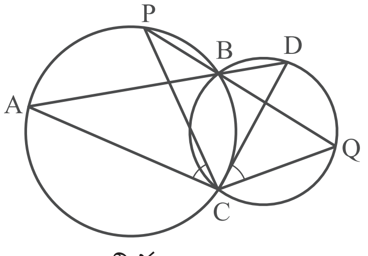
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అయిన అందులోని కర్ణాలు E బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన, $\angle DBC = 70^\circ, \angle BAC = 30^\circ$ అయిన $\angle BCD$ ని కనుక్కోండి. ఒకవేళ AB = BC అయిన $\angle ECD$ ని కనుక్కోండి.

7. చక్రీయ చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు వృత్తం యొక్క వ్యాసాలు ఒకటే అయిన ఆ చతుర్భుజ శీర్షాల ద్వారా ఏర్పడునది ఒక చతురస్రం అని నిరూపించండి.

8. సమాంతర కాని భుజాలతో ఏర్పడిన ఒకే ట్రెపీజియం అది చక్రీయం అని నిరూపించండి.

9. రెండు వేర్వేరు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు B మరియు C ల వద్ద ఖండించుకొనిన B గుండా ఒక రేఖాఖండంను పొడిగించిన ఆ బిందువు A, D అగును. అపుడు ABD మరియు PBQ లు వృత్తంపై A,D,P ల వద్ద ఖండించుకొనిన. Q పరంగా పటంలో 9.27 నుండి $\angle ACP = \angle QCD$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 9.27

10. త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలను వృత్తం యొక్క వ్యాసంగా గీచిన, ఆ మూడవ భుజం వృత్తంలోని మిగిలిన రెండు వ్యాసాలతో ఖండించును అని చూపండి.

11. ΔABC మరియు ΔADC లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు అయిన వాటి ఉమ్మడికర్ణాలు AC అయిన $\underline{|CAD} = \underline{|CBD}$ అని నిరూపించండి.

12. సమాంతర చక్రీయ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్త్రం అని నిరూపించండి.

9.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మనం కింది అంశాలు నేర్చుకున్నాం

1. వృత్తం అనేది ఒక తలంలోని అనేక బిందువుల సముదాయం ఆ బిందువులు సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

2. వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఖండించుకొనిన కేంద్రం వద్ద ఏర్పడుకోణాలు సమానం.

3. వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు ఖండించుకొనగా, వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు సమానాలు అలాగే వ్యాసాలు సమానాలు.

4. వృత్తంలోని లంబం వృత్త జ్యాలను సమద్విఖండన చేయును.

5. ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన సరళ రేఖ ఆవృత్త వ్యాసాన్ని సమద్వి ఖంఢన చేయును మరియు వ్యాసానికి లంబంగా వుండును.

6. ఒక వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఆ వృత్త కేంద్రానికి సమాన దూరంలో వుంటాయి.

7. వృత్త కేంద్రంనుండి సమాన దూరంలో గీచిన జ్యాలు సమానాలు.

8. ఒక వృత్తంలోని రెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన వాటి వ్యాసాలు కూడా సమానాలు మరియు విపర్యయంగా వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయిన వాటి (అల్ప, అధిక) చాపాలు సర్వసమానాలు.

9. ఒక వృత్తంలోని సర్వసమాన చాపాలు ఖండించు కొనిన వృత్త కేంద్రంవద్ద చేసే కోణం సమానం.

10. వృత్తచాపం వద్ద చేసేకోణం వృత్తంలో మిగిలిన చాపం యొక్క కోణం ఏ బిందువువద్ద నైనా చేసే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

11. వృత్తంలోని కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు చేసేకోణాలు సమానం.

12. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం.

13. ఒక రేఖా ఖండం రెండు బిందువులను కలిపి ఆ బిందువుల వద్ద చేసే కోణంతో సమాన కోణం గల మరొక రెండు బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే రేఖాఖండాలు బిందువులు నాలుగు కూడా వృత్తం పై వుంటాయి.

14. ఒకచక్రీయచతుర్భుజంలోనిఒకజతఅంతరకోణాలమొత్తంలేదాఎదురెదురుకోణాలమొత్తం కూడా 180°.

15. చతుర్భుజంలోని ఒక జత ఎదురెదురు కోణాల మొత్తం 180° అయిన అది చక్రీయ చతుర్భుజం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అధ్యాయం - 10

Y6K1H5

హెరాన్స్ సూత్రం

10.1 త్రిభుజ వైశాల్యం - హెరాన్స్ సూత్రం

త్రిభుజపు ఎత్తు ఇచ్చినప్పుడు, త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times$ పాదం $\times$ ఎత్తు అని మనకు తెలిసింది.

ఒక వేళ మనకు విషమ బాహు త్రిభుజము భుజాల కొలతలు తెలిసి దాని ఎత్తు తెలికపోతే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంకనుక్కోవచ్చా? ఉదాహరణకు మీ దగ్గర 40 m , 32 m మరియు 24 m భుజాలుగల త్రిభుజాకార పార్కు వుంది. దాని వైశాల్యం ఎలా లెక్కించగలవు? త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రం అన్వయించాలంటే దాని ఎత్తు మొదట కనుక్కోవాలి. అయితే ఎత్తు కనుక్కోవడం సాధ్యం కానిచో ముందుకు వెళ్ళి ఈవిధంగా గల త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుక్కోవచ్చు అని తెలుసుకోండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

హెరాన్ సుమారు క్రీ.శ. 10లో ఈజిప్టు దేశంలో అలెక్జాండ్రియాలో జన్మించెను. అతను అన్వయగణిత పై పరిశోధన చేసెను. గణితం మరియు భౌతిక శాస్త్రం విషయాల పై ఎన్నో శోధనలు చేశారు. ఆరోజుల్లో అతను ఆక్షేత్రాలలో ఎన్ సైక్లోపిడియా రాస్తున్నారని తెలిసినది. అతను ఎక్కువగా జామితీయ ఆకారాలక్షేత్రగణితపు సమస్యలపై మూడుపుస్తకాలు రాశారు. మొదటి పుస్తకంలో చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు, ట్రెపీజియంలు, వివిధ ప్రత్యేక చతుర్భుజాలు, క్రమ బహుభుజాలు, వృత్తాలు, సిలిండరు, శంఖువు, గోళాల ఉపరితలవైశాల్యాలు మొదలైన వాటిని గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పుస్తకంలో హెరాన్ ప్రసిద్ధమైన సూత్రం త్రిభుజ వైశాల్యము మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు కనుగొనడాని ప్రతిపాదించాడు.

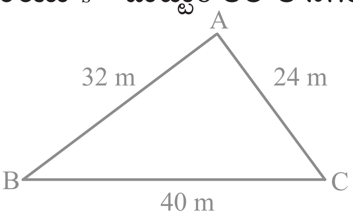
హెరాన్
(క్రీపూ.10-క్రీపూ.75)
చిత్రం 10.1

త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రాన్ని హెరాన్స్ ఇచ్చారు. ఈ సూత్రాన్ని హెరోస్ (Hero's) సూత్రం అని కూడా అంటారు.

ఆ సిద్ధాంతం ఈ విధంగా ఉంది **త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$** (II)

ఇక్కడ a, b మరియు c లు త్రిభుజ భుజాల పొడవు మరియు s = చుట్టుకొలత లోసగం

త్రిభుజం చుట్టుకొలతలోసగం $= \frac{a+b+c}{2}$. త్రిభుజం ఎత్తును సులభంగా కనుక్కోవడానికి సాధ్యంకాని సందర్భాలలో ఈ సూత్రం సహాయపడుతుంది. దీనిని పైన చెప్పినట్లు త్రిభుజాకార పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి అన్వయిస్తాం (చిత్రం 10.2 గమనించండి.)



చిత్రం 10.2

$a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m అని తీసుకుంటే.

అప్పుడు $s = \frac{40+24+32}{2}$ m

$= 48$ m

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

పార్కు ABC వైశాల్యం

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ m}^2$$

$$= 384 \text{ m}^2$$

$32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ అనుకుంటే వస్తుంది. కావున పార్కు భుజాలు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. పెద్ద భుజం పొడవు i.e BC = 40 m త్రిభుజ కర్ణం అవుతుంది మరియు AB మరియు AC ల మధ్య కోణం 90° అవుతుంది. మొదటి సూత్రం ఉపయోగించి, మనం పార్కు వైశాల్యం కనుక్కొని పరిశీలించవచ్చు.

వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$

హెరాన్స్ సూత్రం లో కనుక్కున్న వైశాల్యం మరియు సామాన్య సూత్రం ద్వారా వచ్చిన వైశాల్యం సమానంగా వుండడాన్ని చూడవచ్చు.

ఇప్పుడు మొదటే చర్చించిన త్రిభుజ వైశాల్యాలను కనుగొని సూత్రము సరైనదని నిర్ణయించవచ్చు అంటే,

(i) భుజం పొడవు 10 cm గాగల సమబాహు త్రిభుజము

(ii) రెండు సమాన భుజాల పొడవు 5 cm మరియు మూడవ భుజం పొడవు 8 cm వున్న సమద్వి బాహు త్రిభుజం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మీరు వీటిని గమనించవచ్చు.

(i) మొదటి దానికి $s = \frac{10 + 10 + 10}{2} = 15$ cm

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{15(15 - 10)(15 - 10)(15 - 10)}$ cm^2

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ cm^2

$= 25\sqrt{3}$ cm^2

(ii) రెండవది $s = \frac{8 + 5 + 5}{2} = 9$ cm

తిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{9(9 - 8)(9 - 5)(9 - 5)}$ cm^2

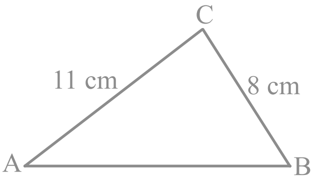
$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ cm^2

$= 12$ cm^2

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను సాధిస్తాం

ఉదాహరణం 1: ఒక త్రిభుజ భుజాలు 8 cm మరియు 11 cm అయి దాని చుట్టుకొలత 32*cm* అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి. [చిత్రం 10.3 గమనించండి]

సాధనం: చుట్టు కొలత = 32 cm, $a = 8$ cm $b = 11$ cm



చిత్రం 10.3

మూడవ భుజం $c = 32$ cm $-$ $(8 + 11)$ cm $= 13$ cm

$2s = 32$ cm, $s = \frac{32}{2} = 16$ cm

$(s - a) = (16 - 8)$ cm $= 8$ cm

$(s - b) = (16 - 11)$ cm $= 5$ cm

$(s - c) = (16 - 13)$ cm $= 3$ cm

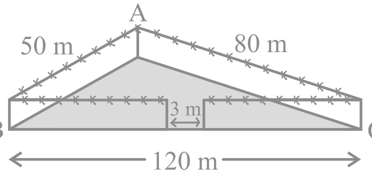
త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ cm^2

$= 8\sqrt{30}$ cm^2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 2: ABC త్రిభుజాకారంలో వున్న పార్కు భుజాలపొడవులు 120 m, 80 m మరియు 50 m అయిన [చిత్రం 10.4 గమనించండి]. పార్కు యజమాని దాని దాని చుట్టూ కంచె వేయడానికి మరియు దానిలో గడ్డి పెంచడానికి నిర్ణయించినారు. తాను గడ్డి పెంచవలసిన వైశాల్యం ఎంత? పార్కు గేటు కోసం ఒకవైపు 3 m వదలి ₹ 20 ప్రకారం కంచె వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ఎంత?



చిత్రం 10.4

సాధనం: పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి మనవద్ద

$2s = 50 \text{ m} + 80 \text{ m} + 120 \text{ m} = 250 \text{ m}$

$s = 125 \text{ m}$

ఇప్పుడు, $(s - a) = (125 - 120) \text{ m} = 5 \text{ m}$

$(s - b) = (125 - 80) \text{ m} = 45 \text{ m}$

$(s - c) = (125 - 50) \text{ m} = 75 \text{ m}$

పార్కు వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75} \text{ m}^2$

$= 375\sqrt{15} \text{ m}^2$

పార్కు చుట్టు కొలత $= AB + BC + CA = 250 \text{ m}$

పార్కు చుట్టు కంచె వేసే పొడవు $= 250 \text{ m} - 3 \text{ m}$ (వాకిలి కోసం) $= 247 \text{ m}$

కంచె వేయడానికి ఖర్చు = ₹ 20 × 247

= ₹ 4,940

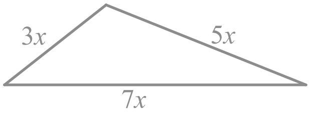
ఉదాహరణం 3: త్రిభుజాకార స్థలం భుజాలు 3 : 5 : 7 నిష్పత్తిలో వుండి మరియు దాని చుట్టు కొలత 300 m. అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: త్రిభుజాకార స్థలం భుజం పొడవులు వరుసగా $3x, 5x, 7x$ మీటర్లు [చిత్రం 10.5 గమనించండి].

స్థలం చుట్టు కొలత $= 3x + 5x + 7x = 300$ అని మనకు తెలుసు

కావున, $15x = 300$

$x = 20$



చిత్రం 10.5

కావున త్రిభుజాకార స్థలం భుజాల పొడవులు 3×20 m, 5×20 m, 7×20 m అయితే, 60 m, 100 m, మరియు 140 m.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవడానికి హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి కనుక్కోవచ్చు.

$$s = \frac{60 + 100 + 140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$$

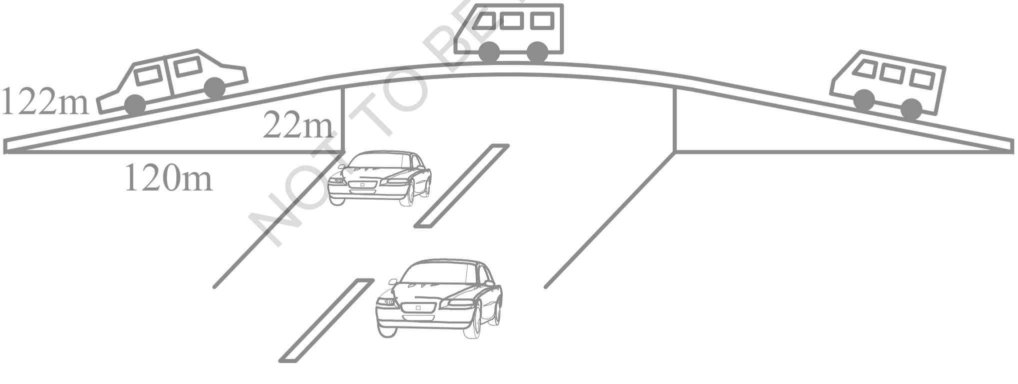
దాని వైశాల్యం $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)} \text{ m}^2$

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ m}^2$

$= 1500\sqrt{3} \text{ m}^2$

అభ్యాసం 10.1

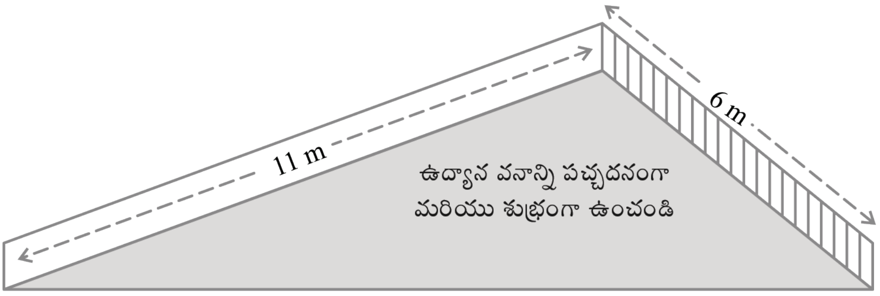
1. ముందు పాఠశాల వుంది అని చెప్పే సూచనా పలక భుజం పొడవు 'a' వుండేటట్లు ఒక సమబాహు త్రిభుజమైనది. దాని చుట్టు కొలత 180 cm అయిన సూచనాపలక వైశాల్యంను హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి, కనుగొనండి
2. ఒక వంతెన ప్రక్క వైపు గోడలు త్రిభుజాకార గోడలపై ప్రకటనలు వేశారు. ప్రక్క గోడల భుజాలు 122 m, 22 m మరియు 120 m [చిత్రం 8.9 గమనించండి]. ప్రకటనల వల్ల సంవత్సరానికి ₹ 5000 ప్రతి చదరపు మీటరు ప్రకారం అద్దె ఇస్తారు. ఒక సంస్థ ఒక గోడను మూడు నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్నది సంస్థ ఇచ్చే అద్దె ఎంత?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 10.6

3. ఒక పార్కులో జారుడు బల్ల వుంది దాని ఒకగోడకు ఏదోరంగుతో ఈ పార్కు పచ్చదనంగా మరియు శుభ్రంగా ఉంచండి. అని [చిత్రం 10.7 గమనించండి]. రాయబడినది. గోడ భుజాలు 15m, 11m మరియు 6m వుంటే రంగువేసిన వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 10.7

4. త్రిభుజ రెండు భుజాలు 18cm మరియు 10cm మరియు దాని చుట్టుకొలత 42cm వుంటే ఆత్రిభుజవైశాల్యంకనుక్కోండి.

5. ఒక త్రిభుజ భుజాలు 12 : 17 : 25 నిష్పత్తిలో వుండి, దాని చుట్టుకొలత 540cm అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. ఒక సమ ద్విబాహు చుట్ట కొలత 30cm మరియు దాని సమాన భుజాల పొడవు 12cm అయిన త్రిభుజవైశాల్యం కనుక్కోండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.2 సారాంశం

ఈ పాఠంలో మీరు ఈ కింది అంశాలను చదివారు:

1. a,b మరియు c భుజాలుగల త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి లెక్కించే సూత్ర సిద్ధాంతం.

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ఇక్కడ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ అయివుంటుంది.}$$

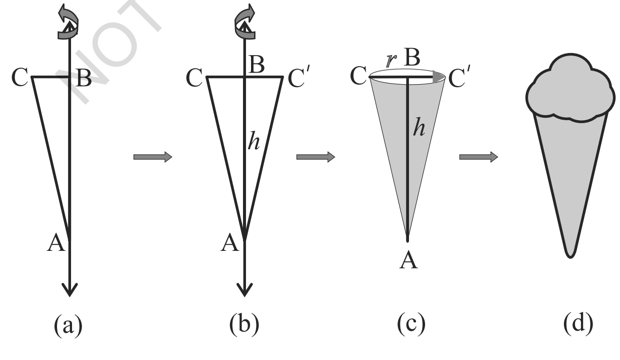
అధ్యాయం-11

ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు

11.1 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం

మనం ఇది వరకు సర్వసమానమైన ఆకారాలను ఒక దానిపై మరొకటి పెట్టడం ద్వారా ఘనాకృతులను నిర్మించాం. ఈ ఘనాకృతులను 'పట్టకా'లు **(prisms)** అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం మరొక మాదరి, అయితే పట్టకం కాని ఘనాకృతులను చూద్దామా (ఈ మాదరి ఘనాకృతులను గోపురాలు (pyramid) అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం వాటిని ఎలా నిర్మాణం చేయవచ్చో చూద్దాం.

కార్యాచరణం : లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో B కోణం లంబకోణం ఉండునట్లు కత్తరించుకోండి. లంబ కోణం పొందిన ఒక భుజానికి పొడవుగా, మందంగా గల ఒక తంతిని అంటించండి. [చిత్రం 13.13 (*a*) చూడండి]. భుజాన్ని AB అని తెలుసుకోండి. త్రిభుజం రెండు వైపుల చేతిలో తంతిని పట్టుకోండి. తంతిని అక్షంగా చేసుకొని త్రిభుజాన్ని చాలాసార్లు త్రిప్పండి. ఇప్పుడు ఏమవుతుంది? తంతి చుట్టూ త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఆకారాన్ని మీరు గుర్తించగలరా? [చిత్రం 11.1 b చూడండి] ఇలాంటి ఆకారాలలో ఐస్‌క్రీమ్‌ను గోపురం లాగా వేసుకొని, గతంలో తిన్నదాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. [చిత్రం 11.1 (c) మరియు (d) చూడండి].



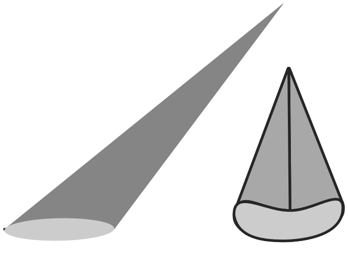
చిత్రం 11.1

దీనిని వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని పిలుస్తారు. వృత్తాకార శంఖువు యొక్క చిత్రం 11.1 (c)లో A బిందువును శీర్షం, AB ని ఎత్తు, BC ని వ్యాసార్థం మరియు AC ని శంఖువు

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మొత్తు ఏటవాలు ఎత్తు అని అంటారు. ఇక్కడ B బిందువు శంఖువు యొక్క వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్ధం. శంఖుపు యొక్క ఎత్తు, వ్యాసార్ధం మరియు ఏటరాలు ఎత్తును సాధారణంగా *h, r* మరియు *l* తో వరుసగా సూచిస్తారు.

ఇప్పుడు మనం ఏ రకపు శంఖువును వృత్తాకార లంబ శంఖువో అను దానిని చూద్దాం చిత్రం 11.2 చూడండి ఈ చిత్రంలో మీరు చూస్తున్న ఆకృతి వృత్తాకార లంబ శంఖువు కాదు. ఎందుకనగా చిత్రం(a) లో శీర్ష్య బిందువు మరియు పాద కేంద్రాన్ని కలుపు (ఖండించు) రేఖ పాదంతో లంబకోణంతో ఏర్పడదు. చిత్రం (b) లో పాదం వృత్తాకారంలో లేదు.



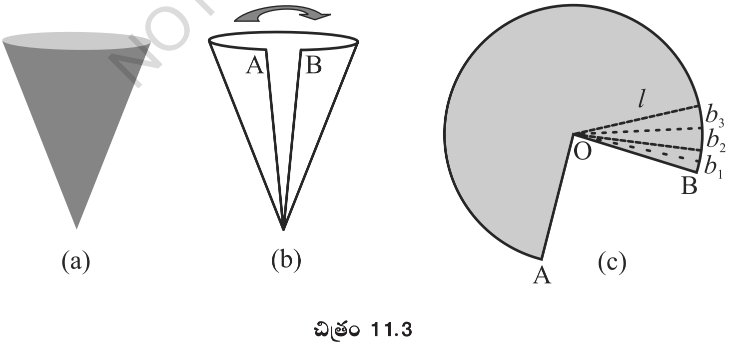
చిత్రం 11.2

సిలిండర్‌లో ఉన్నట్లు, మనం ఇక్కడ కేవలం వృత్తపాద లంబ శంఖువు గురించి మాత్రమే చదివాం. ఈ అధ్యాయంలో శంఖువు అనగా వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని అర్థం. అను దానిని మీరు జ్ఞాపకముంచుకోండి..

కార్యాచరణం :

(i) కాగితం ఒకదానిపై మరొకటి వ్యాపించినట్లు కాగితంతో సరిగ్గా చేసిన శంఖువును సరళరేఖలో ప్రక్కప్రక్కలో కత్తిరించండి. కాగితాన్ని వదిలి, శంఖువు ఉపరితల ఆకారాన్ని కాగితం మీద చూడండి. (మీరు శంఖువును కత్తరించిన రేఖను శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. దానిని l తో చూపుతాం). ఇది వృత్తాకారపు కత్తిరించిన కేకు భాగం చూసినట్లు ఉంటుంది.

(ii) చిత్రం 11.3 (c) భుజం తుదిలో గుర్తించిన, A మరియు B భుజాలను మీరు దగ్గరకు తీసుకొని వస్తే, చిత్రం 11.3 (c) లోగల వక్ర భాగం శంఖువుయొక్క వృత్తాకార పాదాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. అని మీరు చూసి ఉండవచ్చు.



చిత్రం 11.3

(iii) చిత్రం 11.3 (c) లో ఉన్న ఆకారపు కాగితాన్ని 'O' బిందువు నుండి గీచిన రేఖ పొడవుకు వందలాది చిన్న ముక్కలుగా కత్తరించినచో, ప్రతి మొక్క భాగం చాలా మటుకు చిన్న త్రిభుజంగా ఉంటుంది. దీని ఎత్తు శంఖువుయొక్క వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. .

(iv) ఇప్పుడు ప్రతి త్రిభుజం వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times$ త్రిభుజం యొక్క ప్రతిపాదం $\times l$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అందువలన మొత్తం కాగితం వైశాల్యం

= చిన్న త్రిభుజాలన్నింటి వైశాల్యాల మొత్తం

$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + ...$

$= \frac{1}{2} l [b_1 + b_2 + b_3 + ...]$

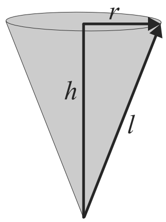
$= \frac{1}{2}$ l [చిత్రం 11.3(c) మొత్తం వక్రం సరిహద్దు రేఖ పొడవు]

($b_1 + b_2 + b_3 + ...$ చిత్రంలోని వక్రభాగ సరిహద్దు రేఖను సూచిస్తుంది).

అయితే, చిత్రంలోని వక్రభాగం సరిహద్దు రేఖ శంఖువు యొక్క పాదపు చుట్టుకొలత అవుతుంది. శంఖువు యొక్క పాదపు పరిధి = $2\pi r$, ఇక్కడ r శంఖువు యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం.

అందువలన, **శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం** $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l$

ఇక్కడ, r దాని పాదపు వ్యాసార్థం మరియు l దాని వాలుతలం ఎత్తు.



చిత్రం 11.4

గమనించండి : $l^2 = r^2 + h^2$ (చిత్రం 11.4 లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని అన్వయించినప్పుడు దీనిని చూడండి. ఇక్కడ h శంఖువు ఎత్తు అవుతుంది.

అందువలన $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

ఇప్పుడు శంఖువు పాదం ఆవృతం కావాలంటే వృత్తపు వ్యాసార్థం r గల వృత్తాకార కాగితం కావాలి. దీని వైశాల్యం πr^2 ఉంటుంది

అందువలన, **శంఖువు పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం** $= \pi r l + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$

ఉదాహరణ 1 : వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 10 cm మరియు పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm ఉన్నచో శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10\ cm^2$

$= 220\ cm^2$

ఉదాహరణ 2 : శంఖువు యొక్క ఎత్తు 16 cm మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 12 cm. శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని ఉపయోగించండి)

సాధన : ఇక్కడ $h = 16$ cm మరియు $r = 12$ cm

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అందువలన, $l^2 = h^2 + r^2$ నుండి

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

వక్ర ఉపరితల వైశాల్యర $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{cm}^2$

$= 753.6 \text{ cm}^2$

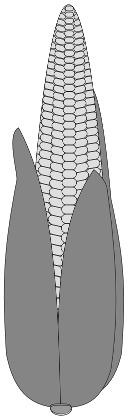
కొనసాగించి సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)\text{cm}^2$

$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$

$= 1205.76 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 3 : మొక్కజొన్న కంకి శంఖువు ఆకారంలో ఉంది. దాని వెడల్పాటి భాగపు వ్యాసార్థం 2.1 cm దాని పొడవు (ఎత్తు) 20 cm ఉంది దాని ప్రతి యొక్క 1cm^2 వైశాల్యం సరాసరి 4 మొక్కజొన్న గింజలున్నచో మొక్క జొన్న కంకిలో ఉండు మొత్తం గింజలు కనుగొనండి.



చిత్రం 13.15

సాధన : మొక్కజొన్న కంకిలోని గింజలు దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో మాత్రమే కనబడుతాయి అందులో ఉండవలసిన మొత్తం గింజలను కనుగొనడానికి మనం మొక్క జొన్న కంకి యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనాలి ఈ ప్రశ్నలో మనకు ఎత్తు ఇవ్వబడింది. అయితే, మనం వాలుతల ఎత్తును లెక్కించాలి .

ఇక్కడ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2} \text{ cm}$

$= \sqrt{404.41} \text{ cm}$

$= 20.11 \text{ cm}$

అందువలన కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2$

$= 132.73 \text{ cm}^2$ (సుమారుగా)

1cm^2 ఉపరితలం వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య = 4

అందువలన, కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య $= 132.73 \times 4$

= 530.92

= 531 (సుమారుగా)

మొక్కజొన్న కంకిలో ఉండవలసిన మొక్కజొన్నలు 531.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 11.1

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. ఒక శంఖువు యొక్క పాదపు వ్యాసం 10.5cm మరియు దాని వాలుతలం ఎత్తు 10cm ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

2. ఒక శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 21 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసం 24 cm అయితే, శంఖువు యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

3. ఒక శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 308 cm^2 మరియు దాని వాయుతలం ఎత్తు 14 cm శంఖువు యొక్క

   (i) పాదపు వ్యాసార్థం.

   (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

4. ఒక శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 10 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 24 m

   (i) శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు

   (ii) 1 m^2 గుడారం వస్త్రం (canvas) వెల ₹ 70. అయినచో డేరాను గుడారం వస్త్రం (canvas) తో చేయడానికి కావలసిన ఖర్చు కనుగొనండి.

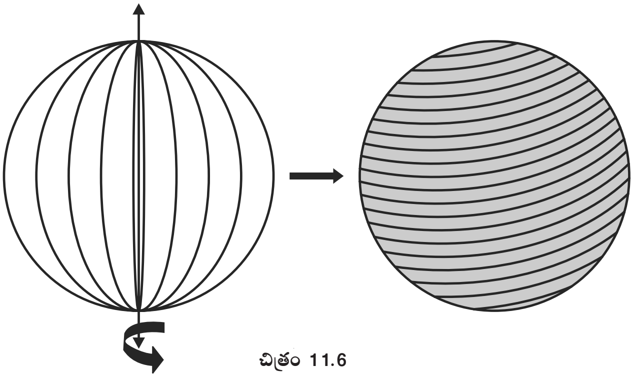
5. శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 8 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్తం 6 m గల డేరాను 3 m వెడల్పుగల టార్పాలిన్‌తో చేయడానికి కావలసిన పడవు ఎంత? డేరాను కుట్టించడానికి కావలసిన ఎక్కువ టార్పాలిన్ అధికపొడవు 20 cm అయువుంటుందని తెలుసుకుందాం.. (π = 3.14 అని ఉపయోగించండి)

6. ఒక శంఖువాకార స్మారకపు వాటి తలం ఎత్తు మరియు పాదపు వ్యాసం 25 m మరియు 14 m వరుసగా ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ప్రతి 100 m^2 చదరపు మీటర్లకు ₹ 210 చొప్పున సున్నం పూయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

7. ఒక హాస్యకారుని టోపి వృత్తాకార లంబ శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm మరియు ఎత్తు 24 cm అయితే, అలాంటి 10 టోపీలను తయారు చేయడానికి కావలసిన కాగితం వైశాల్యం కనుగొనండి.

8. పునర్నిర్మాణం చేసిన కార్డ్ బోర్డుతో తయారు చేసిన 50 టొళ్ళుగల (బోలు) శంఖువులతో బస్సు నిలయాన్ని రోడ్డునుండి వేరుగా గుర్తించపానికి పెట్టడమైనది ప్రతి శంఖువు పాదపు వ్యాసం 40 cm మరియు ఎత్తు 1 m ఉంది దాని వెలుపలి భాగాన్ని రంగు వేయాల్సిఉంది. మరియు ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు 1 m^2 ₹ 12 ఖర్చవుతుంది. ఈ శంఖువులన్నింటిని రంగులు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి (π = 3.14 మరియు $\sqrt{1.04}$ = 1.02 అని ఉపయోగించండి.)

11.2 గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం



చిత్రం 11.6

గోళం అనగానేమి? గోళం మరియు వృత్తం రెండు కూడా ఒకటేనా? మీరు కాగితం మీద వృత్తం గీయగలరా? ఔను మీరు గీయవచ్చు. ఎందుకనగా వృత్తం ఒక ఆవృతమైన ఆకృతి. దాని పైనగల బిందువులన్ని నిర్దిష్ట బిందువునుండి స్థిరవైన దూరంలో ఉన్నాయి. ఈ స్థిరదూరాన్ని వ్యాసార్థం మరియు స్థిర బిందువును వృత్తకేంద్రం అని అంటారు. ఇప్పుడు మీరు ఒక తంతిని దాని వ్యాసానికి అంటించండి. వెనుక భాగంలో త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినట్లు ఈ వృత్తాన్ని త్రిప్పండి. ఇప్పుడు మీరు క్రొత్త ఘనాకృతిని చూస్తారు. అది ఏ ఘనాకృతిని పోలివుంది? అది బంతి? అవును దీనిని గోళం అని అంటారు.

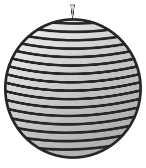
వృత్తాన్ని త్రిప్పడం వలన ఏర్పడిన గోళంలో వృత్తకేంద్రం ఏమవుతుందో మీరు ఊహించగలరా? ఖచ్చితంగా అది గోళపు కేంద్రం అవుతుంది. అందువలన ఒక గోళం **మూడు పరిమాణాత్మక (మితీయ) ఆకృతి (త్రిమితీయ ఆకృతి) దాని బిందువులన్ని అవకాశంలో స్థిర బిందువునుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. స్థిర బిందువును గోళపుకేంద్రం మరియు స్థిర దూరాన్ని గోళపు వ్యాసార్థం అని అంటారు.**

గమనించండి : గోళం బంతి ఉపరితలంలాగా ఉంటుంది. ఘనగోళం అను పదాన్ని గోళపు ఉపరితలం అని అర్థంలో ఉపయోగించబడుతుంది.

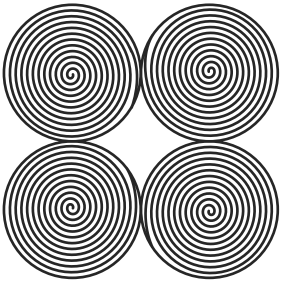
కార్యాచరణం : మీరు ఎప్పుడైనా బొంగరంతో ఆట్లాడారా? లేదా వేరేవారు బొంగరం ఆట ఆట్లాడుచుండుటను మీరు చూశారా? బొంగరానికి తాడు ఎలా చుట్టుతారు అని మీకు తెలిసి ఉండాలి. ఇప్పుడు మీరు ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకోండి. దానికి ఒక చిన్న మేకును భద్రంగా గుచ్చుదాం. మేకును ఆధారంగా పెట్టుకుని బంతి చుట్టూ దారం చుడదాం గుండుపిన్నులు ఉపయోగించి దారం జారకుండా బంతిని సంపూర్ణంగా దారంతో చుట్టండి. (చిత్రం 11.7(a) చూడండి.) దారానికి ప్రారంభ మరియు అంతిమ బిందువును గుర్తు పెట్టండి. దారాన్ని నిధానంగా బంతి ఉపరితలం నుండి విప్పండి.

ఇప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహాయంతో మీరు బంతి వ్యాసం కొలవండి. దీనివలన మీరు సులభంగా వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఆ తరువాత కాగితంతో బంతి వ్యసార్థానికి సమానమైన వ్యాసార్థం కల్గియున్న నాలుగు వృత్తాలు గీయండి. బంతి చుట్టూ చుట్టిన దారాన్ని ఈ వృత్తాలకు ఒకదాని తరువాత మరొకటి చుట్టండి. [చిత్రం 11.7 (b) చూడండి]

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(a)



(b)

చిత్రం 11.7

దీనివలన మీరు ఏమేమి చూపినట్లయింది?

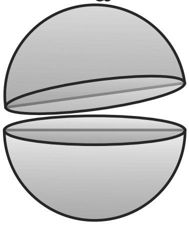
గోళం ఉపరితలం చుట్టూ సంపూర్ణంగా చుట్టిన దారాన్ని గోళపు వ్యాసార్ధానికి సమానంగా ఉన్న నాలుగు వృత్త ప్రదేశాలలో పూర్తిగా దారం వదులు కాకుండా చుట్టబడింది. ఇది ఏమి అర్థాన్నిస్తుంది?

వ్యాసార్థం r గల గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = వ్యాసార్థం r గల వృత్తి వైశాల్యానికి 4 రెట్లు = $4 \times (\pi r^2)$

అందువలన, **గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = $4\pi r^2$**

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్థం.

గోళం ఉపరి తలంలో ఎన్ని ముఖాలున్నాయో మీరు చూశారా? అది వక్రంగా ఉన్న కేవలం ఒక ముఖం ఇప్పుడు మనం ఒక గోళాకృతి తీసుకుని, దానిని దాని కేంద్రం ద్వారా మధ్యలో సాగిపోవునట్లు సరిగ్గా ఒక సమతలం కత్తిరించండి(విభజించండి). ఇప్పుడు గోళం ఏమి అవుతుంది? అవును అది రెండు సమాన భాగాలుగా కనిపిస్తోంది. (చిత్రం 11.8 చూడండి) ఈ ప్రతి అర్థ భాగాన్ని ఏమని అంటారు. వాటిని అర్థగోళం లేదా గోళార్థం (Hemisphere) అని అంటారు. (ఎందుకనగా Hemi అనగా అర్దం).



చిత్రం11.8

దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఏమయి ఉంటుంది? అది ఎన్ని ముఖాలు కల్గియుంది? రెండు ! అందులో ఒకటి వక్రముఖం, మరొకటి సమతల ముఖం (పాదం)

అర్థగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం దాని గోళపు ఉపరితల వైశాల్యాన్ని అర్దం మంత ఉంటుంది.అనగా $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

అందువలన, **అర్దగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r^2$**

ఇక్కడ, r అర్థగోళం వ్యాసార్థంగల గోళంలోని భాగం.

ఇప్పుడు ఒక అర్థగోళంలోని రెండు ముఖాలను తీసుకున్నప్పుడు, వాటి వైశాల్యం $2\pi r^2 + \pi r^2$

అందువలన, **అర్దగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం = $3\pi r^2$**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 4 : వ్యాసార్ధం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వ్యాసార్ధం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$

$$= 616 \text{ cm}^2$$

ఉదాహరణ 5 : 21 cm వ్యాసార్ధంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (i) వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : 21 cm వ్యాసార్ధంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

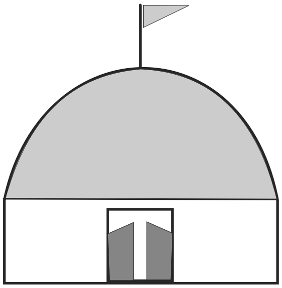
(ii) అర్ధగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 6 : ఒక సర్కస్‌లోని మోటారు ద్విచక్ర వాహన సవారుడు అతని సాహసాలను టొళ్ళుగా (బోలుగా) ఉన్న గోళంలో చేసి చూపుతాడు. గోళపు వ్యాసం 7 m అయితే ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : గోళపు వ్యాసం = 7 m. అందువలన వ్యాసార్ధం 3.5 m. ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు స్థలం గోళపు ఉపరితల వైశాల్యానికి సమానంగా ఉంటుంది.

అది, $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

ఉదాహరణ 7 : ఒక భవనంలోని అర్ధగోళాకృతి ఉన్న గోపురానికి రంగు వేయవలసి ఉంది. (చిత్రం 11.9 చూడండి). గోపురం పాదం పరిధి 17.6 m ప్రతి 100 m² కు ₹ 5 చొప్పున రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చున కనుగొనండి.


చిత్రం 11.9

సాధన : గోపురం గుండ్రంగా ఉన్న ఉపరితలానికి మాత్రమే రంగు వేయాల్సి ఉన్నందున, మనం అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొని, రంగు వేయవలసిన వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి. ఇప్పుడు గోపురం పరిధి = 17.6 m అందువలన, 17.6 m = $2\pi r$

గోపురం వ్యాసార్ధం $= r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m}$

గోపురం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$

ఇప్పుడు, 100 cm² రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 5

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1 m^2 రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500

అందువలన, గోపురం సంపూర్ణంగా రంగు వేయడానికి

అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640

అభ్యాసం 11.2

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. కింది వ్యాసార్థాలుగల గోళం ఉపరితల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.

   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

2. కింది వ్యాసం గల గోళం ఉపరివైశాల్యాలను కనుగొనండి.

   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. ఒక అర్ధగోళం వ్యాసార్థం 10 cm ఉంది. దాని సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి. (π = 3.14 ఉపయోగించండి)

4. ఒక గోళాకృతి బెలూన్‌కు గాలిని నింపడానికి దాని వ్యాసార్థం 7 cm నుండి 14 cm కు పెరుగుతుంది. ఈ రెండు ప్రకరణలలో బెలూన్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్య నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

5. ఇత్తడితో తయారు చేసిన ఒక అర్ధగోళాకృతిగల పాత్ర లోపలి వ్యాసం 10.5 cm అయితే పాత్ర లోపలి భాగంలో కళాయి వేయడానికి ప్రతి 100 cm^2 కు ₹ 16 చొప్పున అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

6. ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని వ్యాసార్థం కనుగొనండి.

7. చంద్రుని వ్యాసం అందాజుగా భూమిలో నాలుగింట ఒక భాగం అయిన, వాటి ఉపరితల వైశాల్యం నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

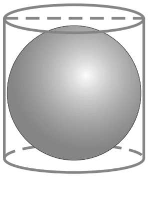
8. స్టీల్‌తో తయారు చేసిన అర్ధగోళాకారంలో గల పాత్ర మందం 0.25 cm ఉంది. ఆ పాత్ర లోపలి వ్యాసార్థం 5 cm. అయితే, దాని వెలుపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

9. r ఒక వృత్తాకార లంబ(నిటారు) సిలిండర్ వ్యాసార్థం గల ఒక గోళాన్ని సరిగ్గా ఆవరించింది. [చిత్రం 11.10 చూడండి].

   (i) గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం,

   (ii) సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం,

   (iii) (i) & (ii) లోని వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

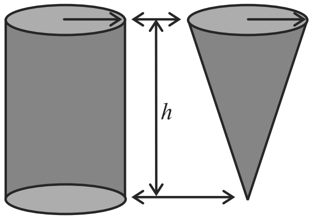


చిత్రం 11.10

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

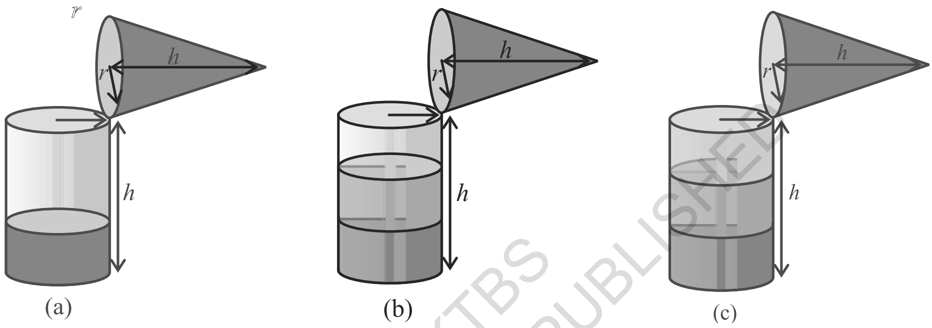
11.3 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం

చిత్రం 13.28లో వృత్తాకార లంబ సిలిండర్ మరియు వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఒకే ఎత్తు కలిగియుండుటను మీరు చూస్తున్నారు ?



చిత్రం 11.11

కార్యాచరణం : ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం ఒకే ఎత్తు కల్గిన బోలుగా ఉన్న సిలిండర్ మరియు బోలుగా ఉన్న శంఖువు తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి. [చిత్రం 11.11 చూడండి] ఆ తరువాత మనం వృత్తాకార లంబకోణ ఘనపరిమాణాన్ని ప్రయోగాత్మకంగా చూడటానికి ఒక ప్రయోగం చేద్దామా.



చిత్రం11.12

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనం దానిని ఇలా ప్రారంభిద్దాం.

మనం శంఖువులో దాని తుదివరకు ఇసుకనింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. అది సిలిండర్‌లో కేవలం కొద్ది భాగం నిండటం మీరు కనుగొంటారు. (చిత్రం 11.12(a) చూడండి)

మనం తిరిగి శంఖువు తుది వరకు నింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. ఇప్పుడు కూడా సిలిండర్ పూర్తిగా నిండకపోవడం చూస్తారు. [చిత్రం 11.12 (b) చూడండి]

శంఖువును మూడవసారి నింపి సిలిండర్‌లో ఖాళీచేసినప్పుడు సిలిండర్ సంపూర్ణంగా తుదివరకు నిండుటను చూస్తాం. [చిత్రం 11.12 (c) చూడండి]

దీనివలన మనం ఎటువంటి అనుమానం లేకుండా శంఖువు ఘనపరిమాణపు మూడురెట్లు సిలిండర్ ఘనపరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది అని నిర్ధారించవచ్చు. ఇక్కడ శంఖువుయొక్క మరియు సిలిండర్ యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఎత్తు సమానంగా ఉండాలి. దీని అర్థం శంఖువు ఘనపరిమాణం సిలిండర్ పరిమాణపు మూడింట ఒక భాగం ఉంటుంది.

అయితే, **శంఖువుఘనపరిమాణం** $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ఇక్కడ r పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h శంఖువు యొక్క ఎత్తు.

ఉదాహరణ 9 : ఒక శంఖువు ఎత్తు మరియు వాలుతలం వరుసగా 21 cm మరియు 28 cm ఉన్నంచో శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : $l^2 = r^2 + h^2$ నుండి

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$$

$$= 7546 \text{ cm}^3$$

ఉదాహరణ 9 : మోనికా దగ్గర 551 m^2 వైశాల్యంగల క్యాన్వాస్ బట్ట ఉంది. ఆమె దానిని 7 m పాదపు వ్యాసార్థంగల శంఖువాకార టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించింది. టెంట్ (గుడారం) కుట్టడానికి వదిలే అంచు మరియు కత్తరించడం వలన వ్యర్థమగు బట్ట 1 m^2 అయినచో, టెంట్ ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : క్యాన్వాస్ ఘనపరిమాణం = 551 m^2 మరియు వ్యర్థమైన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం 1 m^2 అందువలన, టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించిన క్యాన్వాస్ = (551 - 1) m^2

$$= 550 \text{ m}^2$$

ఇప్పుడు టెంట్ ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2 మరియు టెంట్ పాదపు వ్యాసార్థం = 7 m

టెంట్ కేవలం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుందని గమనించండి. (టెంట్ నేలను క్యాన్వాస్‌తో పోల్చబడదు!!.)

అందువలన, టెంట్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2

అనగా . $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550, \quad l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

ఇప్పుడు $l^2 = r^2 + h^2$

అందువలన, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m = 24 \text{ m}$$

అందువలన, శంఖువాకార టెంట్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$$

$$= 1232 \text{ m}^3$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 11.3

[π చెప్పింది వదలి $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించుకోండి.]

1. కింది వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

   (i) వ్యాసార్థం 6 cm, ఎత్తు 7 cm (ii) వ్యాసార్థం 3.5 cm ఎత్తు12 cm

2. కింది శంఖువాకార పాత్ర సామర్థ్యాన్ని లీటర్లలో కనుగొనండి.

   (i) వ్యాసార్థం 7 cm, వాలుతలం ఎత్తు 25 cm(ii) ఎత్తు 12 cm వాలుతలం ఎత్తు 13 cm

3. ఒక శంఖువు ఎత్తు 15 cm ఘనపరిమాణం 1570 cm^3 ఉన్నచో, దాని పాదపు వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ను ఉపయోగించండి)

4. ఎత్తు 9 గల వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘన పరిమాణం 48π cm^3 ఉన్నచో, పాదపు వ్యాసం కనుగొనండి.

5. శంఖువాకార ఒక గొయ్యి పై వ్యాసం 3.5 m, లోతు 12 m అయిన దాని సామర్థ్యం కిలో లీటర్లలో కనుగొనండి.

6. ఒక వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం 9856 cm^3 దాని పాదపు వ్యాసం 28 cm అయినచో

   (i) శంఖువు ఎత్తు (ii) శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు

   (iii) శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

7. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లోని భుజాలు 5 cm, 12 cm మరియు 13 cm దీనిని 12 cm భుజం పాదవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘన వస్తువుయొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

8. పై ప్రశ్న 7లోని ABC లను 5 cm భుజపు పాదవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘనవస్తువుయొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. ప్రశ్న 7 మరియు ప్రశ్న 8 లోని రెండు ఘనవస్తువుల ఘనపరిమాణాలను నిష్పత్తిలో కనుగొనండి.

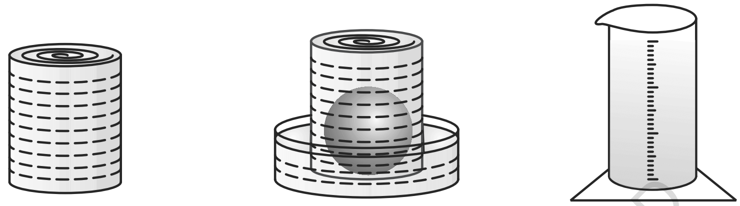
9. గోధుమ రాశి శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని వ్యాసం 10.5 m మరియు ఎత్తు 3 m ఉన్నచో, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. దీనిని వర్షంనుండి రక్షించడానికి క్యాన్వాస్ తో తయారుచేసిన బట్టను కప్పవలసిఉంది. దీనికి కావలసిన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం కనుగొనండి.

11.4 గోళం ఘనపరిమాణం

ఇప్పుడు మనం గోళం ఘనపరిమాణం ఎలా కొలవవచ్చో చూద్దాం. ముందుగా రెండు లేదా మూడు వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కలిగిన గోళాలను మరియు ఈ మూడు గోళాలను ఒకే చోట ఉంచదగు ఒకపెద్ద పాత్ర తీసుకోండి. ఈ పాత్రను ఉంచగల (పెట్టగల)పెద్ద తొట్టి తీసుకోండి. తరువాత పాత్రలో అంచువరకు నీటిని నింపండి. (చిత్రం 11.13 (a) చూడండి].

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మీరు ఇప్పుడు ఒక గోళాన్ని తొట్టిలో ఉంచిన పాత్రలో జాగ్రత్తగా వేయండి. కొద్దిగా నీరు పాత్రలో నిండి ప్రవహించి తొట్టిలో పడుతుంది. [చిత్రం 11.13 (b) చూడండి]తొట్టిలోని నీటిని కొలిచే సిలిండర్‌లో వేయండి. (అనగా కొలతల గుర్తు పొందిన సిలిండర్ ఆకారంలోని జార్) మరియు ఎక్కువగా ప్రవహించి వచ్చిన నీటి ప్రమాణాన్ని కొలవండి. [చిత్రం 11.13 (c)చూడండి] ఒకవేళ మునిగిన గోళం వ్యాసార్థం r అనుకోండి (మీరు గోళపు వ్యాసాన్ని తెలుసుకోవడం ద్వారా వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనవచ్చు). తరువాత $\frac{4}{3}\pi r^3$ విలువను కనుగొనండి. మీరు విలువ ఎక్కువగా ప్రవహించిన నీటి ఘనపరిమాణానికి చాలావరకు సమానంగా ఉండుట కన బడుతున్నదా?



(a) (b) (c)

చిత్రం 11.13

ఈ ప్రక్రియను ఇతర వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కల్గిన గోళాలతో పునరావర్తనం చేయండి. గోళం వ్యాసార్థం R కనుగొని తరువాత $\frac{4}{3}\pi R^3$ విలువ కనుగొనండి. తిరిగి ఈ విలువ గోళం స్థళాంతరం చెందిన (ఎక్కువగా ప్రవహించిన) నీటి ప్రమాణం కొలతకు సమానంగా ఉంటుంది. ఇది మీకు ఏమేమి తెలుపుతున్నది? గోళం ఘన పరిమాణం గోళం నుండి స్థలాంతరం చెందిన నీటి ఘన పరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది. ఈ ప్రయోగాన్ని పునః పునః వేర్వేరు వ్యాసార్థాలుపొందిన గోళాలతో చేసినప్పుడు వచ్చే, ఫలితం ఒకటే అయి వుంటుంది. అనగా, గోళపు ఘన పరిమాణం వ్యాసార్థ ఘనపు $\frac{4}{3}\pi$ అంతకు సమానంగా ఉంటుంది. దీనివలన మనకు ఈ కింది కల్పన (సూత్రం) నిస్తుంది.

అనగా, **గోళం ఘన పరిమాణం = $\frac{4}{3}\pi r^3$**

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్థం.

దీనిని మీ తరువాతి తరగతులలో సాధించి చూపుతారు. అయితే, ఈ దశలో మీరు దీనిని నిజం అని తీసుకొందాం.

అర్ధగోళం గోళంలోని సగం ఉంటుంది. మీరు అర్ధగోళం ఘన పరిమాణం ఎంత ఉంటుందో తెలుపవచ్చా? అవును అది $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

అనగా, **అర్ధగోళం ఘనపరిమాణల = $\frac{2}{3}\pi r^3$**

ఇక్కడ r అర్ధ గోళం వ్యాసార్థం అవుతుంది.

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించడం గురించి, కొన్ని ఉదాహరణలతో స్పష్టపరుచుదాం.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 10 : 11.2 cm వ్యాసార్ధంగల గోళపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

కావలసిన ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7} \times 11.2\times 11.2\times 11.2 \text{ cm}^3$

$= 5887.32 \text{ cm}^3$

ఉదాహరణ 11 : లోహంలో తయారుచేసిన గోళాకారపు షాట్ పుట్ (గుండు) వ్యాసార్ధం 4.9 cm లోహపు సాంద్రత 7.8 g/cm^3 అయితే షాట్‌పుట్ ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.

సాధన : షాట్‌పుట్ గుండును లోహంతో తయారుచేసిన ఘన గోళం అవుతుంది. దాని ద్రవ్యరాశి ఘనపరిమాణం మరియు సాంద్రతయొక్క గుణలబ్దానికి సమానం. మీరు ఇప్పుడు గోళపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇప్పుడు గోళపు ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$

$= 493 \text{ cm}^3$ (సుమారుగా)

1 cm^3 పరిమాణపు లోహద్రవ్యరాశి 7.8 g .

అందువలన, షాట్‌పుట్ గుండు ద్రవ్యరాశి $= 7.8 \times 493$ g

$= 3845.44 \text{ g} = 3.85 \text{ kg}$ (సుమారుగా)

ఉదాహరణ 12 : ఒక అర్ధగోళాకృతి పాత్ర వ్యాసార్ధం 3.5 cm. ఈ పాత్రలో పట్టు నీటి పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : పాత్రలో పట్టెడి (నింపదగు) నీటి ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3$

$= 89.8 \text{ cm}^3$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 11.4

[π చెప్పింది మినహా $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించికోండి.]

1. కింది వ్యాసార్ధం కల్గియున్న గోళం ఘన పరిమాణం కనుగొనండి

   (i) 7 cm (ii) 0.63 m

2. కింది వ్యాసం కల్గియున్న ఘన గోళాకార బంతి స్థళాంతరం చెందిన నీటి ప్రమాణాన్ని కనుగొనండి.

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. ఒక లోహపు బంతి వ్యాసం 4.2 cm లోహపు సాంద్రత 8.9 g/cm^3 అయితే, బంతి ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.

4. చంద్రుని వ్యాసం సుమారుగా భూమి వ్యాసానికి నాలుగింతలు ఒక భాగానికి సమానం. చంద్రుని ఘనపరిమాణం భూమి ఘన పరిమాణానికి ఎంత భిన్నానికి సమానంగా ఉంటుంది?

5. ఒక అర్ధగోళాకార పాత్ర వ్యాసం 10.5 cm అయితే, అది ఎన్ని లీటర్ల పాలు దానిలో పడుతుంది?

6. ఒక అర్ధగోళాకార తొట్టి 1 cm మందంగల ఇనుప రేకుతో తయారు చేయబడింది. దానిలోపలి వ్యాసార్థం 1 m అయితే, తొట్టి తయారు చేయడానికి ఉపయోగించిన ఇనుము ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

7. ఒకగోళం ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

8. ఒక భవన గోపురం అర్ధ గోళాకారంలో ఉంది. దాని లోపలి భాగం సున్నం పూయడానికి అయిన ఖర్చు ₹ 498.96 ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 2.00 చొప్పునసున్నం పూయడానికి ఖ్చు అయినచో,

   (i) గోపురం లోపలి భాగపు ఉపరితల వైశాల్యం

   (ii) గోపురం లోపలి భాగంలోని గాలి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

9. ఇనుమ వ్యాసార్ధం r మరియు ఉపరితల వైశాల్యం S గల 27 ఇనుప గోళాలను కరిగించి S ఉపరితల వైశాల్యం కల్గిన క్రొత్తి గోళం చేయబడింది.

   (i) క్రొత్త గోళపు వ్యాసార్ధం (r^1),

   (ii) S మరియు S1 యొక్క నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

10. ఒక ఔషద గుళిక గోళాకారంలో 3.5 mm వ్యాసం కల్గి యుంది. గుళికలో నింపదగిన ఔషద ప్రమాణం mm^3 కనుగొనండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది అంశాలు చదివారు.

1. శంఖువు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l$
2. లంబ వృత్తాకార శంఖువు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
3. r వ్యాసార్థం కలిగిన గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r^2$
4. అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 2 \pi r^2$
5. అర్ధగోళం సంపూర్ణ ఉపరి తల వైశాల్యం $= 3 \pi r^2$
6. సిలిండర్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
7. r వ్యాసార్థంకల్గియున్న గోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3} \pi r^3$
8. అర్దగోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3} \pi r^3$

(ఇక్కడ l, b, h, a, r మొదలగు అక్షరాలను వాటి సందర్భాను సారంగా సాధారణ అర్థంలో ఉపయోగించబడినవి)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

V8Z4L2

అధ్యాయం - 12

సాంఖ్యక శాస్త్రం

12.1 దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ప్రాతినిధ్యం చూపడం

దత్తాంశాలను పట్టికల ద్వారా ప్రాతినిధ్యం చేయుటను ఇదివరకే చర్చించాము. ఇపుడు గ్రాఫ్ ద్వారా దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయుట గురించి గమనిద్దాం. వేయి, పదాలకంటే ఒక చిత్రం ఉత్తమం అని మనకు తెలుసు. ప్రతి దత్తాంశాల మధ్య పోలికను గ్రాఫ్ ద్వారా అత్యుత్తమంగా చూపవచ్చు. ఇలాంటి ప్రదర్శన నిజ దత్తాంశాలను అర్థం చేసుకోవడం కంటే సులభం. ఇప్పుడు మనం క్రింది దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయు గ్రాఫ్‌ల గురించి అధ్యయనం చేద్దాం.

(A) స్తంభ నక్ష (Bar graphs) దిమ్మ చిత్రాలు

(B) హిస్టోగ్రాం (Histogram) ఒకే వెడల్పు మరియు విభిన్న వెడల్పులు కలిగిన.

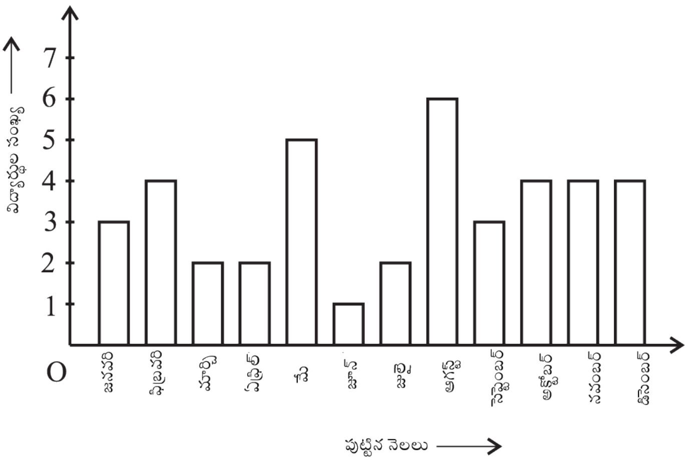
(C) (Frequency Polygons) ఆవృత

(A) (Bar graphs) సోపాన రేఖా చిత్రము (దిమ్మ చిత్రము)

మునుపటి తరగతులలో మీరు ఇది వరకే దిమ్మచిత్రాల గురించి అభ్యాసం మరియు నిర్మాణాలు చేశారు. ఇక్కడ వాటి గురించి ఎక్కువ క్రమబద్ధమైన చర్చ చేద్దాం. దిమ్మచిత్రం అంటే దత్తాంశాలను చిత్రాల ద్వారా చూపడం అని జ్ఞాపకం చేసుకోవడం. సామాన్యంగా దిమ్మ చిత్రాలను సమపరిమాణంలో మరియు రెండు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరం ఉండునట్లు ఒక X - అక్షం పై చరరాశులను చిత్రీకరించాలి. చరాంశాల విలువలను మరొక Y - అక్షంపై గుర్తించాలి. గ్రాఫ్ ఎత్తు చరరాశుల విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 1 : 9వ తరగతిలో ఒక సెక్షన్ విభాగపు 40 మంది విద్యార్థులు పుట్టిన నెలలను అడిగి తెలుసుకొని దత్తాంశాల నుండి క్రింది గ్రాఫ్‌ను నిర్మించారు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



చిత్రం 12.1

పై దిమ్మ చిత్రాన్ని గమనించి, క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) నవంబర్ నెలలో ఎంత మంది విద్యార్థులు పుట్టారు?

(ii) ఏ నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విద్యార్థులు పుట్టారు?

సాధన : ఇక్కడ పుట్టిన నెలలు చరరాశులు (variable) మరియు చరరాశి యొక్క విలువ విద్యార్థుల సంఖ్య అని గమనించండి.

(i) నవంబర్ నెలలో 4 విద్యార్థులు పుట్టినారు.

(ii) ఆగస్టు నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విదార్థులు పుట్టినారు.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా దిమ్మ చిత్ర నిర్మాణాన్ని గుర్తు చేసుకొందాం.

ఉదాహరణ 2 : ఒక కుటుంబం యొక్క నెలసరి ఆదాయం ₹ 20,000 క్రింది విధంగా వివిధ విషయాలకు నెలలో చేయవలసిన ఖర్చులకు ప్రణాళికను తయారు చేశారు.

పట్టిక 12.1

విషయాలు (Heads)	ఖర్చు (వెయ్యి. రూ. లలో)
కిరాణా వస్తువులు	4
బాడుగ	5
పిల్లల విద్యాభ్యాసం	5
ఔషధాలు	2
ఇందనం	2
వినోదం	1
ఇతర	1

పై దత్తాంశాలకు ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

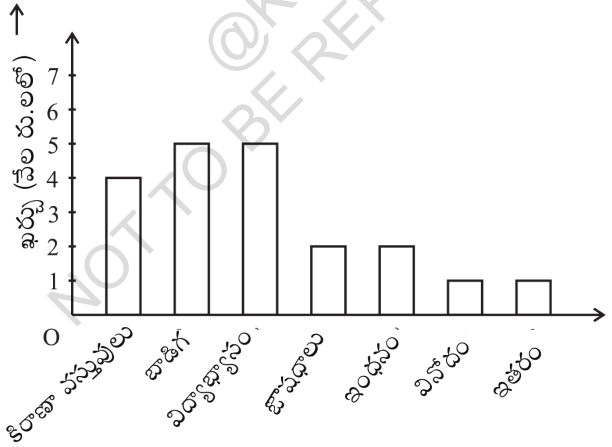
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన : ఈ క్రింది దశలనుండి పై దత్తాంశాలకు దిమ్మ చిత్రం నిర్మించవచ్చు. రెండవ వరుసలో మూల ప్రమాణం వెయ్యి రూపాయలలో అనుటను గమనించండి కిరాణా వస్తువుల ముందు 4 అంటే ₹ 4000.

1. విషయాలను (చరరాశులు) x - అక్షంపై (క్షితిజ సమాంతర) సరైన ప్రమాణాన్ని ఎన్నుకొని సూచిస్తాము. ఎందుకంటే ఇక్కడ స్థంభం వెడల్పు ముఖ్యం కాదు. అయితే స్పష్టత కోసం మనము ఒకే వెడల్పు గల అన్ని స్థంభాలను మరియు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరాన్ని తీసుకొంటాము. ప్రతి విషయాన్ని '1' యూనిట్ అని సూచించాలి.
2. ఖర్చును y - అక్షంపై (భూలంభాక్షం) గుర్తించబడుతుంది. గరిష్ట ఖర్చు ₹ 5000 ఉన్నందువల్ల ప్రమాణం 1 యూనిట్= ₹ 1000 అని తీసుకోబడినది.
3. మొదటి విషయం అంటే కిరాణ వస్తువులు దీని వెడల్పు 1 యూనిట్ ఎత్తు 4 యూనిట్లు ఉండునట్లు స్థంభం ద్వారా ప్రాతినిధ్యం అయినది.
4. ఇదే విధంగా మిగిలిన విషయాలను క్రమంగా స్థంభాల మధ్య 1 - యూనిట్ అంతరం ఉండునట్లు ప్రతినిధించబడినది.

దిమ్మ చిత్రంను (చిత్రం 11.2) లో నిర్మించబడినది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



విషయాలు ⟶
చిత్రం 12.2

ఇక్కడ out look నుండి దత్తాంశాల లక్షణాలను సులబంగా పోల్చవచ్చు ఉదా: పిల్లల విద్యాభ్యాసానికి అయిన ఖర్చు, ఔషదాలకు అయిన ఖర్చుకంటే రెండింతలు ఎక్కువ కావున కొన్ని విధానాలలో పట్టిక రూపం కంటే దిమ్మ చిత్రంలో దత్తాంశాలను ప్రతినిదించటం ఉత్తమమనిపిస్తుంది.

కార్యాచరణం 3 : కార్యాచరణం-1లో తీసుకున్న దత్తాంశాలను తగిన దిమ్మ చిత్రంలో ప్రతినిదించమని అదే గుంపు విద్యార్థులకు సూచించాలి.

ఇప్పుడు మీరు నిరంతరం వర్గ వ్యాప్తికలిగిన పౌనః పుణ్య వితరణ పట్టికను గ్రాఫ్‌లో ప్రతినిదించుట గురించి చూద్దాం.

(B) హిస్టోగ్రామ్ (Histo gram)

ఈ విధమయిన ప్రదర్శన దిమ్మ చిత్రం లాగే వున్నను ఇవి నిరంతర తరగతి అంతరాలలో ఉపయోగించబడుతుంది. ఉదాహరణకు 12.2 లో పౌనః పుణ్య వితరణా పట్టికను గమనించండి. తరగతిలోని 36 మంది పిల్లల బరువులను ఇచ్చారు.

పట్టిక 12.2

బరువు (kg. లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
ఒట్టు	**36**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

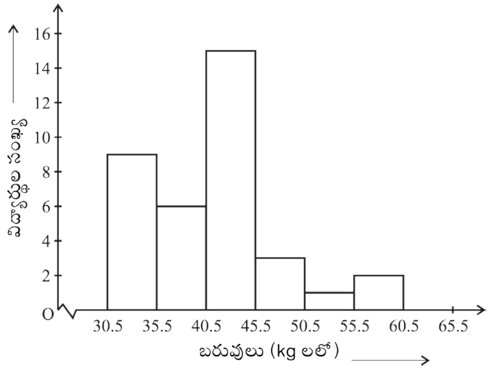
పై దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ఈ విధంగా ప్రతినిదిస్తాం.

(i) సరైన ప్రమాణంలో బరువులను x - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. స్కేలు (ప్రమాణం) 1cm = 5kg అని తెలుసుకోవచ్చు. మొదట తరగతి అంతరం 30.5 నుండి ప్రారంభం అవుతుంది. 0 నుండి కాదు. కావున అక్షంలో ఒక చిక్కుముడి లేక విరామం (**kink / break**)ను గుర్తించండి. సరైన యూనిట్‌లతో గ్రాఫ్‌ను రచించండి.

(ii) విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపుణ్యం)ను y - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. గరిష్ట పౌనఃపుణ్యము 15 అయినందు వల్ల, ఈ గరిష్ఠ పౌనఃపుణ్యం గుర్తించడానికి సరైన ప్రమాణాన్ని ఎంచుకోవాలి.

(iii) ఇప్పుడు వెడల్పు తరగతి అంతరము మరియు పొడవు తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యము ఉండునట్లు దీర్ఘచతురస్రాకారస్థంబాలను రచిస్తాము. ఉదాహరణకు 30.5-35.5 తరగతి అంతరానికి 1cm వెడల్పు మరియు 4.5cm పొడవు గల ధీర్ఘచతురస్రాన్ని రచిస్తాము.

(iv) ఈ విధంగా చిత్రం 14.3లో చూపించినటువంటి గ్రాఫ్ మనకు దొరుకుతుంది.



చిత్రం 12.3

అనుక్రమ దీర్ఘచతుస్రాల మధ్య అంతరం లేనందువలన ఈ గ్రాఫ్ ఒక ఘనాకృతిలాగ కనపడుతుంది. దీనిని హిస్టోగ్రామ్ లేదా కమ్మీరేఖా చిత్రం అంటారు. ఇది నిరంతర తరగతి అంతరాలు గల వర్గీకృత పౌనః పుణ్య వితరణను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించడమయినది. ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రపు వెడల్పు రచనలో ముఖ్యం అవుతుంది. అయితే దిమ్మ చిత్రంలో స్థంబముయొక్క వెడల్పు ముఖ్యం కాదు.

వాస్తవంగా వుంటాయి. అయినను దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పు సమానంగా వున్నందువల్ల వాటి పొడవులు పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటాయి. అందువలన పొడవులను దశ (iii) లో చెప్పినట్టు నిర్మిస్తాము. ఇప్పుడు పై విధంగా లేని మరొక సంధర్భాన్ని గమనిద్దాం.

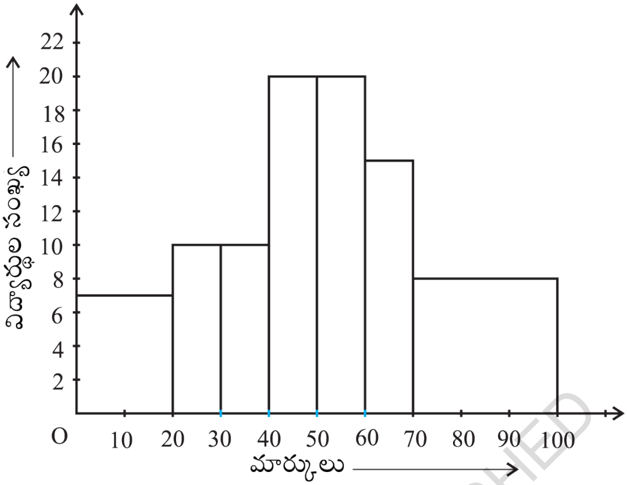
ఉదాహరణం 3: ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి 2 విభాగాల విద్యార్థులకు గణిత పరీక్షయొక్క నిర్వహణను విశ్లేషించాలనుకున్నారు. విద్యార్థుల నిర్వహణను చూసినప్పుడు కొందరు 20 మార్కులకంటే తక్కువ మరియు 70 మార్కులను లేదా ఎక్కువ మార్కులను పొందారని తెలిసింది. అందువలన వారు వివిధ పరిమాణాల గుంపులుగా 0-20, 20-30, ... 60-70, 70-100 ఈ విధంగా క్రమీకరించాలని నిర్ధారించి ఒక పట్టికను తయారు చేశారు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పట్టిక 12.3

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70→ ఎక్కువ	8
మొత్తం	**90**

పై వితరణకు ఒక విద్యార్థి హిస్టోగ్రామ్ తయారు చేశాడు. దీనిని చిత్రం 12.4 లో చూపారు.



చిత్రం 12.4

ఇక్కడ గ్రాఫ్‌లో గుర్తించినవాటిని జాగ్రత్తగా పరీక్షించండి. ఇది దత్తాంశము యొక్క సరైన ప్రదర్శనమా? కాదు. ఈ గ్రాఫ్‌లోనున్న నమూనా తప్పు కల్పనను ఇస్తుంది. మనం ఇదివరకే తెలిపినట్లు హిస్టోగ్రామ్‌లో దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యము పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటుంది. ఈ సమస్య ఇంతకు ముందు లేదు. ఎందుకంటే దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానంగా వుండేవి. అయితే ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రాల వెడల్పులలో వ్యత్యాసం కలదు. కావునపై హిస్టోగ్రామ్ సరైన కల్పన ఇవ్వదు. ఉదాహరణ ఇది. 60-70 తరగతి అంతరంలో పౌనఃపుణ్యం కంటే 70-100 తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుండాలి. మనం దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులలో నిర్దిష్ఠ మార్పులను చెయ్యటం అవసరం.

NOT TO BE REPUBLISHED

అనుసరించవలసిన దశలను క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. కనిష్ట పరిమాణం గల తరగతి అంతరాన్ని ఎంచుకోండి. పై ఉదాహరణలలో తరగతి అంతరపు కనిష్ట పరిమాణము 10.

2. తరగతి పరిమాణం 10కి అనుగుణంగా దీర్ఘచతురస్రాల పొడవును మార్చాలి. పై ఉదాహరణలో తరగతి పరిమాణం 20 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు 7 అయ్యింది. కావున తరగతి అంతరపు పరిమాణం 10 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ కావాలి.

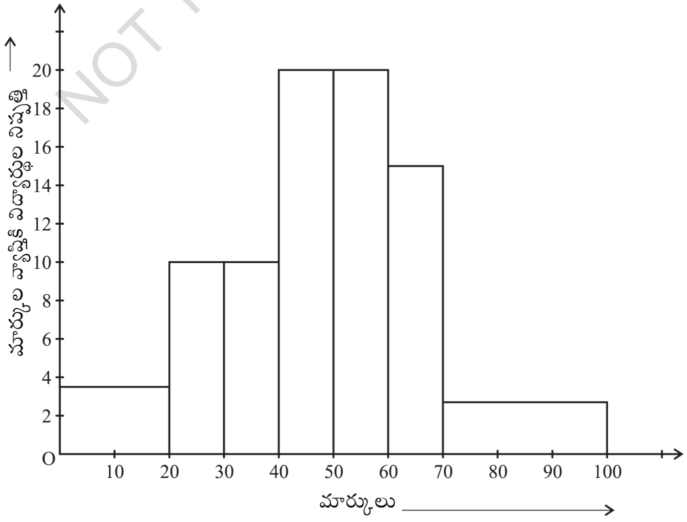
ఇదే విధంగా కొనసాగినప్పుడు క్రింది పట్టికను పొందుతాము.

పట్టిక 11.4

మార్కులు	పౌనః పుణ్యం	తరగతి అంతరపు వెడల్పు	దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

మనం పది మార్కుల అంతరంలో పొడవును లెక్కించనందువల్ల ఈ పొడవులను పది మార్కుల అంతరానికి, విద్యార్థుల నిష్పత్తి అనవచ్చు. కావున మారుతున్న వెడల్పు యొక్క సరైన హిస్టోగ్రామ్‌ను చిత్రం 12.5 లో ఇవ్వబడినది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

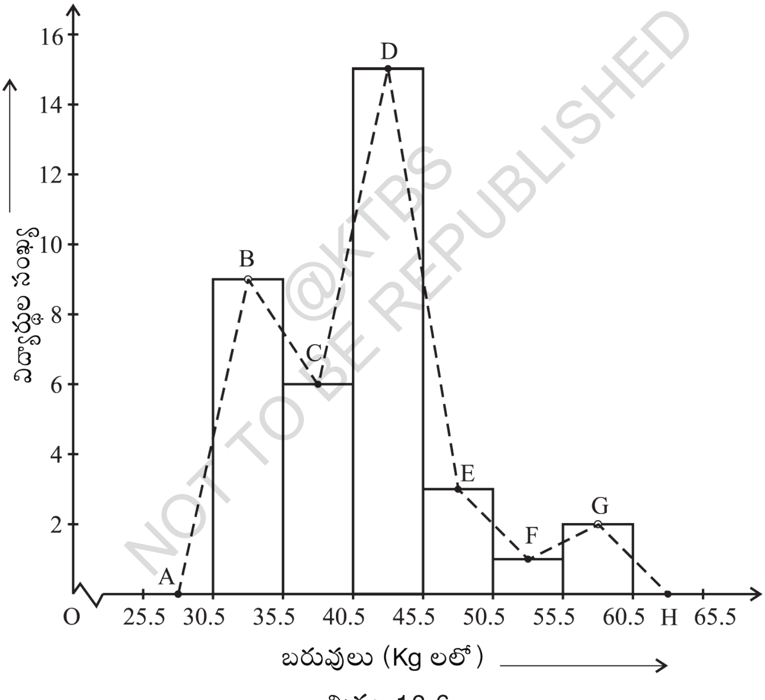


చిత్రం 12.5

(C) పౌనః పుణ్యపు బహుబుజి (Frequency Polygon)

పరిమాణాత్మక దత్తాంశాలను మరియు వాటి పౌనఃపుణ్యాలను మరొక విధంగా గ్రాఫ్ విధానంలో గుర్తించవచ్చు. ఇది ఒక బహుబుజి చిత్రం దీన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి చిత్రం 12.3 యొక్క హిస్టోగ్రామ్‌ను గమనించండి. హిస్టోగ్రామ్ యొక్క దీర్ఘచతురస్రాల పై భాగపు మధ్య బిందువులను క్రమంగా రేఖాఖండాలచే కలుపుదాం. ఈ మధ్య బిందువులను A,B,C,D,E,F మరియు G బిందువులుగా గుర్తించండి. వాటిని రేఖా ఖండాలతో చేర్చినప్పుడు B,C,D,E,F,G, ఆకృతి ఏర్పడుతుంది. (చిత్రం 12.6).

తరగతి అంతరం 35.5-60.5, తరువాత 0 పౌనఃపుణ్యము గల తరగతి అంతరం ఉందని అనుకొని వాటి మధ్య బిందువులను. క్రమంగా A మరియు H అని గుర్తించండి. ఆ బహుబుజాకృతిని పూర్తి చెయ్యండి. చిత్రం 12.3 యొక్క దత్తాంశాలను అనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుబుజముల ABCDEFGH అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 12.6 లో చూపారు.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 12.6

కనిష్ట తరగతి అంతరము ముందు మరియు గరిష్ట తరగతి అంతరము తరువాత ఏ తరగతి అంతరాలు లేకున్నను మనం సున్న పౌనఃపుణ్యం యొక్క రెండు తరగతి అంతరాలను చేర్చుకుంటాము. దీనివల్ల పౌనఃపుణ్య బహుబుజము వైశాల్యము హిస్టోగ్రాం వైశాల్యమునకు సమానం అవుతుంది. ఇది ఎందుకు? ఎలా? (సూచన : సర్వసమాన త్రిభుజాల లక్షణాలను ఉపయోగించండి).

ఉదాహరణ 4 : ఒక తరగతిలోని యాభై ఒక్క మంది విద్యార్థులు 100కి పొందిన మార్కులను పట్టిక 12.5లో ఇచ్చినదాన్ని గమనించండి.

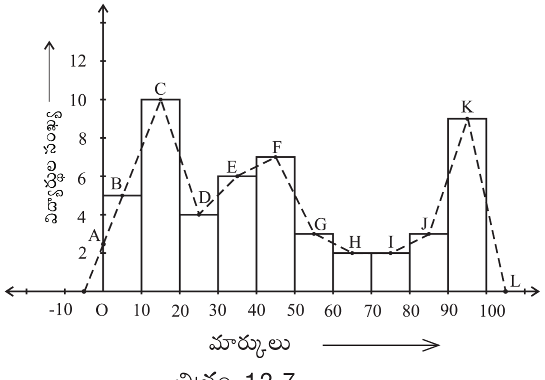
పట్టిక 12.5

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
మొత్తం	**51**

ఈ పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికకనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుబుజాన్ని రచించండి.

సాధన : మొదట దత్తాంశాలకు హిస్టోగ్రామ్ ను నిర్మించండి. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రపు చివర మధ్య బిందువులను క్రమంగా B, C, D, E, F, G, H, I, J, K అను గుర్తించండి. మొదటి తరగతి అంతరం 0-10, కావున x అక్షాన్ని ఋణాత్మక దిశకు పొడిగించండి. కాల్పనిక తరగతి అంతరముల (-10)-0 యొక్క మధ్య బిందువును గుర్తించాలి. ఈ సున్న పౌనఃపుణ్యముయొక్క వర్గాంతర మధ్య బిందువును దీర్ఘచతురస్రాల మొదటి మధ్యబిందువు. అంటే 'B' కి చేర్చాలి. Y అక్షాన్ని ఖండించు బిందువును 'A' అని గుర్తించాలి, దత్తాంశాల చివరి తరగతి అంతరానికి కంటే మొదటి తరగతి అంతరం యొక్క మధ్య బిందువు 'L' కావాలి. తరువాత OABCDEFGHIJKL పౌనః పున్య బహుభుజి అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 12.7 లో చూపబడింది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 12.7

హిస్టోగ్రామ్ నిర్మించకుండానే పౌనఃపుణ్య భుజాకృతిని నేరుగా నిర్మించవచ్చు. దీనికి మనకు దత్తాంశాల తరగతి అంతరపు మధ్య బిందువుల అవసరం వుంది. ఈ తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులను వర్గ - అంక అంటారు.

వర్గ అంకాలను కనుగొనడానికి ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధుల మొత్తాన్ని రెండు చే భాగించాలి. $= \frac{\text{ఎగువ అవది + దిగువ అవధుల}}{2}$

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 9: ఒక నగరంలో వారానికి ఒకసారి నడిపే పరిశీలనా అధ్యయనంలో లభించిన జీవన వ్యయాల **(cost of living)** సూచ్యాంకం **(Index)** ఈ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

పట్టిక 12.6

జీవన వ్యయపు ఇండెక్స్	వారాల సంఖ్య
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
మొత్తం	**52**

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపున్య బహుభుజిని (histogram)నిర్మించండి.

సాధన : హిస్టోగ్రాం నిర్మించకుండా పౌనఃపున్య బహుభుజాన్ని నిర్మించవలసినందువలన దత్త తరగతి అంతరాలకు అంటే 140-150, 150-160,............... యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువు)లను కనుగొనాలి.

తరగతి అంతరం 140-150 యొక్క ఎగువ అవధి = 150 మరియు దిగువ అవధి = 140.

$\therefore$ వర్గ అంక (మధ్య బిందువు) = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

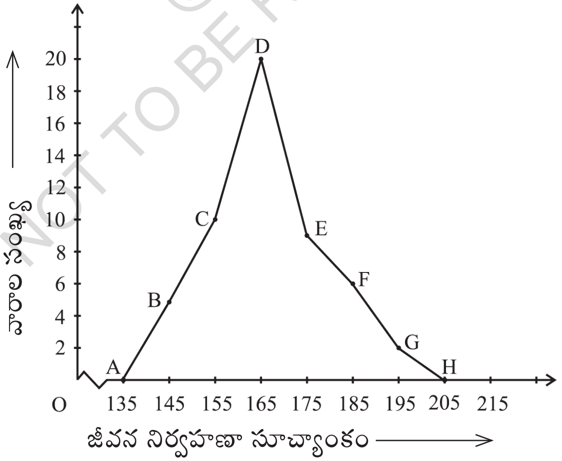
ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తూ అన్ని తరగతి అంతరాలకు వర్గ-అంకం(మధ్య బిందువు) లను కనుగొనవచ్చు. దీని నుండి లభించిన కొత్త పట్టికను క్రింద చూపడమయినది.

పట్టిక 12.7

తరగతి అంతరం	వర్గ అంకం (మధ్య బిందువులు)	పౌనః పుణ్యం
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
మొత్తం		**52**

ఇప్పుడు వర్గ - అంక (మధ్యబిందువులను) x - అక్షరంపై మరియు పౌనః పుణ్యాలను Y- అక్షం పై గుర్తించండి. పౌనఃపున్య బహుభుజమును గీయవచ్చు దీనికోసం B (145, 5), C (155,10), D (165,20), E (175,9), F (185,6) మరియు G (195,2) బిందువులను రేఖా ఖండాలచే చేర్చాలి. తరగతి అంతరం 140-150 మొదటి సున్నా పౌనః పుణ్యపు తరగతి అంతరము 130-140 యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువును) కనుకొని గుర్తించడం మరవకూడదు. అది A(135,0) కావాలి. అదేవిధంగా బిందువు H (205,0) ను బిందువు G (195,2) తర్వాత గుర్తించాలి. ఇప్పుడు లభించు పౌనఃపుణ్య బహుభుజము ABCDEFGH అవుతుంది (చిత్రం12.8 ని చూడండి.)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 12.8

పౌనఃపుణ్య బహుభుజంలో దత్తాంశాలు నిరంతరంగా మరియు ఎక్కువ ప్రమాణంలో ఉపయోగిస్తారు. ఒకే లక్షణం కలిగిన రెండు వేర్వేరు దత్తాంశాల గణనలున్నప్పుడు పోల్చడానికి ఇది సహాయపడుతుంది. ఉదాహరణకు, ఒకే తరగతి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చడం.

అభ్యాసం 12.1

1. ఒక సంస్థ ప్రపంచ వ్యాప్తంగా 15 నుండి 44 సంవత్సరాల వయోమానపు మహిళల అనారోగ్యానికి కారణం మరియు మరణాలకు సంబంధించిన జరిపిన సమీక్షలో కనబడిన గణాంకాల వివరాలు (%లో) క్రిందివిధంగా ఉన్నాయి.

క్ర.సం.	కారణాలు	మహిళల మరణపు ప్రమాణం (%)
1	సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్య స్థితి	31.8
2	నరాలు మానసిక స్థితి	25.4
3	గాయాలు	12.4
4	హృదయ సంబంధ రోగాలు	4.3
5	శ్వాసక్రియ స్థితి	4.1
6	ఇతర కారణాలు	22.0

(i) పై సమాచారాలను గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించండి.

(ii) ప్రపంచవ్యాప్తంగా మహిళలలు మరియు మరణానికి ఏ స్థితి-గతి ముఖ్యకారణం.

(iii) (ii) లో ఇచ్చిన కారణాలు ముఖ్యమనిపించడానికి ఏ రెండు ముఖ్య అంశాలు పాత్ర ముఖ్యమైనదని ఉపాధ్యాయులు సహాయంతో కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. భారతీయ సమాజపు వివిధ విభాగాలలో 1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా వున్న అమ్మాయి సంఖ్యను దశాంశను సమీపంగా ఈ క్రింది దత్తాంశాలలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం	1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా అమ్మాయిల సంఖ్య
షెడ్యూల్డ్ కులాలు (SC)	940
షెడ్యూల్డ్ తెగలు (ST)	970
SC/ST కాకుండా	920
వెనుకబడిన జిల్లాలు	950
వెనుకబడిన జిల్లాలు	920
గ్రామీణ	930
నగరాలు	910

(i) పై సమాచారంను దిమ్మ చిత్రంలో గుర్తించండి.

(ii) ఈ గ్రాఫ్ నుండి ఏ తీర్మానానికి సాధ్యమో తరగతిలో చర్చించండి.

3. ఒక శాసన సభ ఎన్నికల వోటింగ్ ఫలితాలలో రాజకీయ పార్టీలు గెలిచిన స్థానాల సంఖ్యలను కింద ఇవ్వబడినది.

రాజకీయ పార్టీలు	A	B	C	D	E	F
గెలిచిన స్థానాల సంఖ్య	75	55	37	29	10	37

(i) వోటింగ్ ఫలితాంశాలను సూచించే ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

(ii) ఏ రాజకీయ పార్టీ ఎక్కువ స్థానాలను గెలిచింది?

4. ఒక మొక్క యొక్క 40 ఆకుల పొడవు 1mm కు సరిగా కొలిచి పొందిన దత్తాంశాలను ఈ క్రింది పట్టికలో గుర్తించారు?

పొడవు (mm లలో)	ఆకుల సంఖ్య
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) ఇచ్చిన దత్తాంశాలను ఒక హిస్టోగ్రాంలలో గుర్తించండి. (సూచన: తరగతి అంతరాలు నిరంతరంగా ఉండునట్లు రాయండి.)

(ii) ఇవే దత్తాంశాలను గుర్తించే సరైన గ్రాఫ్ వేరేవుందా?

(iii) ఎక్కువ ఆకులు 153mm పొడవు వున్నాయని తీర్మానించవచ్చా? ఎందుకు?

5. క్రింది పట్టిక 400 నియాన్ బల్బుల మన్నిక (life time) ను ఇస్తుంది.

మన్నిక గం.లలో	బల్బుల సంఖ్య
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) హిస్టోగ్రాం సహాయంతో ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించండి.

(ii) 700 గంటలకంటే ఎక్కువ మన్నిక వచ్చే బల్బులు ఎన్ని?

6. విద్యార్థులు వారు పొందిన మార్కుల ఆధారంతో వారిని రెండు విభాగాలకు పంపిణీ చేసినదాన్ని ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం – A		విభాగం – B	
మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం	మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

రెండు విభాగాల విద్యార్థుల మార్కులు ఒకే గ్రాఫ్‌లో పౌనఃపున్య భుజాలలో గుర్తించండి. రెండు పౌనఃపుణ్య బహుభుజాలనుండి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చండి.

7. ఒక క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో మొదటి 60 బంతులలో A మరియు B జట్లు సంపాదించిన పరుగులు కింది పట్టికలో ఇచ్చారు.

బంతుల సంఖ్య	జట్టు A	జట్టు B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

రెండు జట్లు దత్తాంశాలను ఒకే గ్రాఫ్ లో పౌనఃపున్య బహుభుజాల నుండి ప్రతినిధించండి.

(**సూచన** : తరగతి అంతరాలను మొదట నిరంతరగా ఉండాలి)

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

8. ఒక యాదృచ్ఛిక (random) సర్వేలో పార్కులో ఆడే వివిధ వయస్సు పిల్లల సంఖ్య కింది విధంగా ఉన్నది.

వయస్సు సం. లలో	పిల్లల సంఖ్య
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

పై దత్తాంశాలను గుర్తించు ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

9. ఒక స్థానిక టెలిఫోన్ డైరెక్టరీ (దూరవాణి విళాస దర్శిని) నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటిపేర్లను (surname) లను తీశారు. మరియు వాటిలో (surname) లో కనబడిన ఆంగ్లభాష అక్షరాల సంఖ్యల పౌనఃపున్య వితరణ కింద ఇవ్వబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	ఇంటిపేర్ల (surname) ల సంఖ్య
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించడానికి ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

(ii) ఇంటిపేర్ల సంఖ్య గరిష్ఠ తరగతి అంతరాన్ని రాయండి..

14.6. సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు

1. దత్తాంశాలను గ్రాఫ్ విధానంలో అంటే దిమ్మ చిత్రం (Bar graph) హిస్టోగ్రాం మరియు పౌనః పున్య బహుభుజాలలో చూపవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అనుబంధ – 2

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం

A 2.1 పరిచయం

మీరు మీ ముందు తరగతులలో మీ చుట్టూ వాస్తవ ప్రపంచానికి సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించారు. ఉదాహరణకు సరళవడ్డి సూత్రం $\left(I = \frac{PnR}{100}\right)$ను ఉపయోగించి కనుగొన్నారు. ఈ సూత్రము వడ్డీ దానికి సంబందించిన మూడు అంశాలైన అసలు, కాలం, వడ్డీ రేటు వీటికి గల సం బందాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ సూత్రము గణిత నమూనాకు ఒక ఉదాహరణ. గణిత నమూనాలు అంటే నిజ జీవితంలోని కొన్ని సన్నివేశాలను వివరించే గణిత సంబంధ సూచకం.

నిజజీవితంలో అనేక సమస్యలకు పరిష్కారం చూపడానికి గణిత నమూనాలు ఉపయోగ పడతాయి.

- ఒక ఉపగ్రహాన్ని కక్ష్యలోనికి ప్రవేశపెట్టడం.
- వర్షాకాలం వచ్చే సూచనను అంచనా వేయడం.
- వాహనాల వల్ల కలుగు వాతావరణ కాలుష్యాన్న నియంత్రించడం.
- నగరాలలో ట్రాఫిక్ రద్దీని తగ్గించడం.

ఈ అధ్యాయంలో గణిత నమూనాను రచించ ప్రక్రియలను మీకు పరిచయం చేస్తూ దానిని ''గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ'' అని అంటారు. గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణలో ఒక నిజ జీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి సమానమైన గణిత సమస్యగా రాస్తాము. ఈ గణిత నమూనాలోని సమస్యను పరిస్కరించి దాని ఫలితాంశాన్ని నిజ జీవన సమస్య యొక్క భాష్య పదాలలో విశ్లేషిస్తాము. తరువాత ఈ పరిష్కారము నిజ జీవనానికి ఆధారంగా ఎంత వరకు సంబంధం ఉందని గమనిస్తాము. అందుకు గణితీయ ఆకృతీకరణ ఈ దశలలో కూడి ఉంటుంది.

సూత్రకరణం (Formulation)

పరిష్కారం (Solution)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

విశ్లేషణ (వ్యాఖ్యానం) (interpretation)

దృవీకరణం (validation)

విభాగం (సెక్షనే) A 2.2 లో మీరు పద సమస్యలను పరిష్కరించడానికి ఈ విధానాన్ని పరిశీలించుట ద్వారా ప్రారంబిద్ధాం. మీరు వెనుకటి తరగతులలో పరిష్కరించిన పద సమస్య (Word Problem) లకు పోలిన కొన్ని సమస్యలను ఇపుడు చర్చిద్దాం. తరువాత సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఉపయోగించు దశలలో కొన్నింటిని గణిత ఆకృతీకరణలలో ఉపయోగిస్తాం అనుటను చూద్దాం.

విభాగం A2.3 లో కొన్ని సరళ మాదిరిలను ప్రస్తావిద్ధాం.

విభాగం A2.4 లో మొత్తం ఆకృతీకరణ ప్రక్రియ మరియు దాని ఉపయోగం మరియు పరిమితుల గురించి ప్రస్తావిద్ధాం.

A2.2 సమస్యల సమీక్ష

ఈ విభాగంలో వెనుకటి తరగతులలో మీరు పరిష్కరించిన కొన్ని సమస్యలను ప్రస్తావిద్ధాం ప్రత్యక్ష వైవిధ్యంలో సమస్యలను ప్రారంబిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : నా కారులో 432 km దూరం ప్రయాణించడానికి 48(Lif)t లో పెట్రోలు ఖర్చు అయ్యిది. ఆ ప్రదేశానికి చేరుకోవడానికి నేను ఇంకా 180 km ప్రయాణించాలి. నాకు ఇంకా ఎంత పెట్రోలు అవసరం.

సాధన : సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఏ దశలలో కూడి ఉన్నిదో చూద్ధాం.

దశ 1 : సూత్రీకరణ

ఎక్కువ దూరం ప్రయాణించడానికి ఎక్కువ పెట్రోలు అవసరం. అని మీకు తెలుసు అంటే ప్రయాణించిన దూరానికి అనుగునంగా పెట్రోలు ప్రమాణం నేరుగా మారుతుంది.

432 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = 48 లీటర్లు

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = ?

గణిత వివరణ :

x = నేను ప్రయాణించిన దూరం

y = నాకు కావలసిన పెట్రోలు

x తో పాటు నేరుగా y కూడా మారుతుంది.

అందువలన $y = kx$ (ఇక్కడ k ఒక స్థిరాంకం) నేను 432km లను 48 లీటర్ల పెట్రోలుతో ప్రయాణించవచ్చు.

కాబట్టి $y = 48, x = 432$.

అందువలన $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

$y = kx$ కావున $y = \frac{1}{9}x$ .... (1)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సూత్రం (1) : కావలసిన పెట్రోలు మరియు ప్రయాణించు దూరాల సంబంధాన్ని వివరిస్తుంది.

దశ 2 : సాధన :

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలును మనం లెక్కించాలి.

అంటే $x = 180$ అయినపుడు y ఎంత అవుతుంది అని చూడాలి. $x = 180$ అని (1) లో ప్రతిక్షేపించిన $y=\frac{1}{9}x$, $y=\frac{1}{9}\times 180 = \frac{180}{9} = 20$

$y = 20.$

దశ3 : విశ్లేషణ : $y = 20$, అయినందువల్ల మనం 180 km ప్రయాణించడానికి 20 లీటర్ల పెట్రోలు కావాలి.

ఇపుడు ఒక విషయం ఆలోచించండి. ఇదే సూత్రాన్ని మీరు ప్రయాణించు సం దర్భాలకు అన్వయించవచ్చా? అది సాధ్యం కాకపోవచ్చు ! సందర్భం ఇలా ఉంది మీరు ప్రయాణిస్తున్న 432km దారి పర్వతాల మధ్య మరియు మిగిలిన 180 km సమతల ప్రదేశం అయ్యిఉంది. మొదటి ప్రయాణంలో ఎక్కువ పెట్రోలు ఖర్చు అవుతుంది (కొండ, గుట్టలలో ప్రయాణం) అదే రేటులో సమతల ప్రదేశాలలో పెట్రోలు ఖర్చు కాదు. ఇక్కడ తక్కువ ప్రమాణంలో ఖర్చు అవుతుంది. ఈ రెండు విషయాలలో ప్రయాణ పరిస్థితులు ఒకే విధం గా ఉంటే సూత్రం అన్వయించబడుతుంది. అల లేక పోతే అన్వయించదు. లేదా ప్రయాణ పరిస్థితులలో మార్పు ఉన్నందువల్ల ప్రయాణ పరిస్థితికి అనుగుణంగా పెట్రోలు ఖర్చు చాలా తక్కువ కూడా కావచ్చు మనం పెట్రోలు ఖర్చు ప్రయాణించిన ప్రత్యక్ష నిష్పత్తిలో ఉంటుంది. అని చెప్పేటపుడు 'దారి' ప్రయాణం రెండూ కూడా ఒకే విధంగా ఉంటాయి అనే ఊహలో ప్రారంభిం చాము.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 2 : సుధీర్ 8% వడ్డీరేటులో ₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టారు. ఈ డబ్బును వెనక్కి తీసుకొని ₹ 19.000/- విలువ గల వాషింగ్ మిషన్ కొనాలనుకున్నాడు వాషింగ్ మిషన్ కొనాలంటే ఈ ₹ 15,000/- ను ఎంత కాలం వరకు పెట్టుబడిగా ఉంచాలి.

సాధన :

దశ 1 : సూత్రీకరణ

ఈ సన్నివేశంలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు తెలుసు. ఈ ₹ 15,000/లకు వడ్డీడబ్బు చేరిస్తే వాషింగ్ మిషన్ కొనవచ్చు. డబ్బు ఎంత కాలం పెడి తన ఇష్టం నెరవేరుతుంది. అని లెక్కించ వలసి ఉంది.

గణిత వివరణ :

సరళ వడ్డీ సూత్రం = $I = \frac{Pnr}{100}$, P = అసలు, n = కాలం, r = వడ్డీరేటు

I = సరళ వడ్డీ

ఈ సమస్యలో P = 15,000/-, n = ? R = 8%

సుధీర్‌కు కావలసిన డబ్బు = ₹ 19,000/-

అందువలన కావలసిన వడ్డీ = ₹ (19,00015,000) = ₹ 4,000/

₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టవలసిన కాలం = n

₹ 15,000/ లకు వడ్డీరేటు 8%

సంపాదించు వడ్డీ = I

$$I = \frac{1500 \times n \times 8}{100} = 1200\, n$$

$I = 1200\, n$ .... (1)

(1) ₹ 15,000/ లను 8% వడ్డీరేటులో సరళ వడ్డీ మరియు కాలానికి గల సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

మనకు ₹ 4000/- కావాలి.

$4000 = 1200\, n$ .... (2)

$$n = 4000/1200 = \frac{40}{12} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

దశ 3 : విశ్లేషణ : $n = 3\frac{1}{3}$, మరియు సంవత్సరంలో $\frac{1}{3}$వ భాగం అంటే 4 నెలలు అందువలన సుధీర్ 3cm 4 నెలల తరువాత వాషింగ్ మెషిన్ కోనవచ్చు. ఇక్కడ రెండు నిబంధనలను ''ఊహించాలి. అవి ఏమంటే

(1) ఈ అవధిలో వడ్డీరేటు మారదు.

(2) వాషింగ్ మెషన్ విలువ ఎక్కువకాదు. $I = \frac{Pnr}{100}$ ఈ సూత్రం అన్వయంకాదు.

ఉదాహరణ 3 : నది తీరానికి ఇరువైపులా ఉన్న రెండు ఊర్లు/గ్రామాలకు సంపర్కం కల్పించు మోటారు బోటు (ఓడ) ఒక ఊరి నుండి నది ప్రవాహపు ఎదురు తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి 60గం।। సమయం పడుతుంది. అదే మోటారు బోటు ఆ పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరం లోని గ్రామాన్ని చేరడానికి 5గం।। సమయం పడుతుంది. నది నీటి ప్రవాహపు వడి (speed) 2*km*/*h* ఉంటే స్థిరనీటిపై మోటారు బోటు వేగాన్ని లెక్కించండి.

సాధన :

దశ 1: సూత్రీకరణం : మనకు నది ప్రవహించు నీటి వడి మరియు మోటారు బోటు రెండు ఊర్లను చేరుటకు తీసుకొను సమయం తెలుసు. మనం స్థిర నీటిపై బోటు వేగాన్ని కనుగొనవలసి ఉన్నది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గణిత వివరణ : బోటువేగం x అనుకొందాం తీసుకొన్న కాలం t చలించిన దూరం y అనుకొందాం.

దూరం = వేగం × కాలం అని తెలుసు.

అపుడు $y = t\,x$ .... (1)

రెండు ఊర్ల మధ్య దూరం 'd' అనుకోండి నీటి ప్రవాహ నికి వ్యతి రేఖంగా బోటు చలించినపుడు బోటు యొక్క వాస్తవ వేగం = బోటువేగం – నదీప్రవాహ వేగం ఎందుకంటే బోటు నదీప్రవాహనికి వ్యతిరేకంగా పయాణిస్తుంది. అందువలన పై తీరంలోని ఊరికి పోయే బోటు వేగం = $(x-2)\ km/h$

పై తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి పట్టిన కాలం = 6 గం॥ అందువలన (1) నుండి

$d = 6\,(x-2)$ అని రాద్దాం .... (2)

బోటు క్రింది తరంలోని ఊరికి చలించునపుడు బోటువేగం నదీ ప్రవాహపు వేగంలో చేరుతుం దికదా?

ఈ సందర్భంలో బోటువేగం = $(x + 2)\ km/h$

పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరంలోని ఊరికి దూరంలో వ్యత్యాసం లేదు.

ఇపుడు తీసుకొన్న కాలం = 5గం॥ అందువలన

అందువలన $d = 5\,(x + 2)$ .... (3)

(2) మరియు (3) లను ఉపయోగిస్తే $5(x + 2) = 6\,(x-2)$

.... (4)

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

$$5(x + 2) = 6\,(x - 2)$$

$$\therefore 5x + 10 = 6x - 12$$

$$6x - 5x = 10 + 12 \ \therefore\ x = 22.$$

∴ బోటు వేగం = 22 km/h

దశ 3 : విశ్లేషణ

$x = 22$ అయినందువలన స్థిరనీటి పై బోటు వేగాం (వడి) 22 km/h

ఇంత వరకు ప్రస్తాపిచింన పద సమస్యలను పరిష్కరించుటలో మూడు దశలను ఉపయోగిం చడం జరిగింది అవి

1. సూత్రీకరణం. (Formulation)

మనము సమస్యలను విశ్లేషించి, పరిష్కరించుటలో ప్రధానంగా ప్రభావం చూపే అంశాలను గమనిస్తాము. ఇటి సందర్భోచిత అంశాలు మన మొదటి సమస్యలో సందర్భోచిత అంశాలు అంటే

(i) ప్రయోగించిన దూరం మరియు ఉపయోగించిన పెట్రోలు.

(ii) దారి విధానం (స్థితి) ప్రయాణిస్తున్న వేగం మొదలైన చిన్న చిన్న అంశాలను కూడా గమనించాలి.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అలాకాక పోతే సమస్యను పరిష్కరించడం చాలా (కష్టం) అయ్యేది. మనం పట్టించుకోని కారకాలను అసంబద్ధకారకాలు అంటారు. తర్వాత మనం సమస్యను ఒకటి లేక ఎక్కువ సూత్రాల రూపంలో పరిష్కరిస్తాము.

2. **సాధన (Solution) :** దశ – 1లో గణిత సమీకరణాలను తగిన విధానాలను సూత్రాలను ఉపయోగించి పరిష్కరిస్తాము.

3. **విశ్లేషణ (Interpretation) :** దశ – 2లో పొందిన పరిహారాన్ని దత్త సమస్వయ సందర్భానికి ఎలా సరిపోతుందా అని చూస్తాము.

మీకు అభ్యాసానికై కొన్ని సమస్యలు ఇవ్వబడినవి. ఈ సమస్యలను "మూడు దశలను అన్వయించుకొని పరిష్కరించడం ద్వారా మీకు ఎంతవరకు అర్థమయినది అని తెలుసుకోవడాన్ని మీరు ఇష్టపడతారు.

పై ఉదాహరణలలో, నదీప్రవాహ వేగము అన్నిచోట్లా ఒకేలా ఉండదు అని మనకు తెలుసు. బోటు నదీ తీరము నుండి చలించి నది మధ్యకు వస్తుంది. చేర్చ వలసిన తీరానికి దగ్గరగా వచ్చినపుడు చలనవేన్నిగా తగ్గించి చలించి ఆ తీర సమీపానికి చలిస్తుంది. కావున బోటు పగంలో తీరం మధ్యభాగం నేటలో కొంచెం వ్యత్యాసం ఉంటుంది. తీర సమీపంలో బోటుకొంత సేపు మాత్రమే ఉండడం వలన నదీ ప్రవాహవేగము కొంచెం సేపు మాత్రమే పరిణామం చూపిస్తుంది. కావున మనం ఈ సమయాలలో నది యొక్క వేగపు వ్యత్యాసము పట్టించుకోనవసరం లేదు. అదేవిధంగా బోట్ వేగంలోని వ్యత్యాసం కూడ పట్టించుకోనవసరం లేదు. మరొక అశమేమంటే నదినీటికి మరియు బోటు కింది భాగానికి మధ్యన ఘర్షణ ఉంటుంది. ఇది కొంచెం ప్రమాణంలో ఉంటుంది. అందువల్ల దీని పరిణామాన్ని అత్యంత తక్కువ అని భావిస్తాము.

అందువలన,

1. నది ప్రవాహపు వేగము అలాగే బోటు వేగము అన్ని సమయాలలో స్థిరంగా ఉంటుంది.
2. నీరు మరియు బోటు, అలాగే గాలి ఒత్తిడి నుండి కలుగు ఘర్షణను కూడా పట్టించుకోనవసరం లేదు అని ఊహనిర్ణయం (assume) చేస్తాం.

ఈ రెండు ఊహా నిర్ణయాలను ఆధారం చేసుకొని, మనం బోటు వేగాన్ని లెక్కిస్తాము.

అభ్యాసం A2.1

ఈ క్రింది సమస్యలలో సూత్రీకరణం, సాధన, వ్యాఖ్యానం దశలలోగల సుసంబద్ధ, అసంబద్ధ అంశాలు ఏవి అనుటను స్పష్టంగా తెలపండి.

1. ఒక కంపెనీకి కొంతకాలం మాత్రం కంప్యూటర్ అవసరం ఉందని, అనుకొందాం దానికి గాను కంప్యూటర్ బాడుగకు తీసుకొనవచ్చును లేదా కొనవచ్చును. ప్రతి నెల బాడుగ ₹ 2,000/ దాని విలువ ₹ 25,000/. కంప్యూటర్ దీర్ఘకాలం నీకు అవసరమైతే, ఇంత

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఎక్కువ బాడుగకు తీసుకోవడం కంటే కంప్యూటర్‌ను తీసుకోవడమే చౌక అవుతుంది. కంప్యూటర్ యొక్క అవసం ఒక నెల మాత్రమే అనుకుందాం, అపుడు బాడుగకు తీసుకోవడమే మంచిది అవుతుంది. కనీసం ఎంతకాలానికి ఉపయోగించు కం ప్యూటర్‌నుకొనడం బాడుగ కంటే చౌక అని లెక్కించండి.

2. ఒక కారు A నుండి 40 km/h వేగం తో ప్రయాణించి B వద్దకు చేరుతుంది. అదేవిధంగా. B నుండి A కి ఒక కారు 30 km/h. వేగంలో ప్రయాణిస్తుంది. A మరియు B ల అంతరం 100 km అనుకుందాం ఎంత సమయం తర్వాత ఈ కార్లు రెండూ కలుస్తాయి లెక్కించండి.

3. భూమి నుండి చంద్రునికి గల దూరము 3,84,000 km భూమి చుట్టూ దాని మార్గం దాదాపు వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. భూమిని చంద్రుడు ఒక చుట్టు వేయడానికి 24h కావాలి అని అనుకుందాం. చంద్రుడు ఏ వేగంతో తన కక్ష్యలో భూమిని చుట్టి వస్తుంది. లెక్కించండి

($\pi = 3.14$ వృత్తపరిధి $= 2\pi r$)

4. ఒక కుటుంబం వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించని నెలలో చెల్లించు విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి

₹ 1,000/అదే విధంగా వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించిన నెలలలో చెల్లించిన విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి ₹ 1,240/-వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించుటకు చెల్లించవలసిన డబ్బు గంటకు ₹ 8/-. ప్రతి రోజు వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించు సరాసరి కాలావధిని కనుగొనండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.3 కొన్ని గణిత నమూనాలు

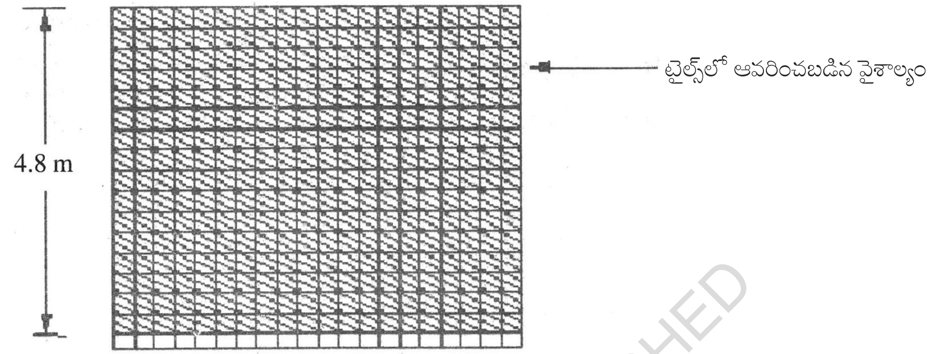
ఇప్పటి వరకు మనం చర్చలలో కొత్తదనం ఏమి లేదు. ఈ విభాగంలో ఇదివరకే ప్రస్తావించిన 3 దశలకు మరొకదశ చేర్చారు. అదే మంటే ధృవీకరణం (Validity) దశ. ధృవీకరణం అనగానేమి? నిజ జీవితంలో మన వాస్తవ జీవనానికి మ్యాచ్ కాని పరిహారాన్ని ఇచ్చు నమూనాను ఒప్పుకోలేము. వాస్తవంగా జవాబును పరీక్షించే ప్రక్రియ, అలాగే అవసరం ఉంటే గణిత వివరణను సరిచేయు కార్యాన్ని ధృవీకరణం అంటారు. నమూనాలో ఇది ముఖ్యమైన దశ. ఈ విభాగంలో దీనిని పరిచయం చేస్తున్నాము.

ధృవీకరణ తర్వాత రూపాంతరం చేయదగిన ఒక నమూనాలో ప్రారంభిద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : మీరు 6m, పొడవు 5m వెడల్పు గల ఒక గదిని కలిగివున్నారు. అలాగే నేలకు భుజం 30cm గల చదరం గల మొసాయికే టైల్‌లు వేయవలసి ఉంది. ఐతే ఎన్ని చదరాలు అవసరం అవుతాయి. గణిత నమూనాను గీచి ఈ సమస్యను పరిష్కరించండి.

సాధన :

దశ 1: సూత్రీకరణం : మనం గది వైశాల్యము, అలాగే టైల్ వైశాల్యం పరిగణించాలి. ప్రతి టైల్(tile) పొడవు 30cm = 0.3m గది పొడవు 6m. అందువలన గది పొడవుకు వేయు టైల్స్ $\frac{6m}{0.3m}=20$ జోడించవచ్చు. (చిత్రం A2.1)



గదివెడల్పు5m,అందువలన $\frac{5m}{0.3m}=16.67$.అందువలన16టైల్స్‌గదివెడల్పుకుజోడించవచ్చు. అంటే మొత్తం గదికి 16 వరుసల టైల్స్ జోడించవచ్చు. వెడల్పు 16 × 0.3 = 4.8m ను టైల్స్ వేయవచ్చు. అంటే 5 – 4.8 = 0.2m వెడల్పులో టైల్స్ వేయలేదు. 0.2m టైల్స్ ముక్కలతో నింపాలి. టైల్ 0.3 m దీనిని సమభాగాలుగా చేసిన 0.15 m ఇది 0.2m కంటే తక్కువ అందువలన టైల్స్‌ను 2 సమభాగాలు చేస్తే 2 భాగాలను ఉపయోగించలేము.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గణిత వివరణ

మనకు కావలసిన టైల్స్ సంఖ్య

= (పొడవునా కావలసిన టైల్స్ × వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్) + నింపకుండా మిగిలిన వైశాల్యం --(1)

సాధన : మనమిదివరకే చూసినట్టు పొడవునా కావలసిన టైల్స్ 20 వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్ 16 ఈ విలువలను (1)లో ఆదేశించినపుడు

(20 × 16) + 20 = 320 + 20 = 340.

వ్యాఖ్యానం : మనకు మొత్తం గదికి వేయవలసిన టైల్స్ 340.

దృవీకరణం : నిజ జీవింలో మీ పనివాళ్ళు (టైల్స్ జోడించువారు) ఇంకొంచెం ఎక్కువ టైల్స్ అందించమని అడగవచ్చు. ఎందుకంటే కత్తరించునపుడు టైల్స్ పగిలిపోవచ్చు. మీ పనివాడు నైపుణ్యం కలవాడైతే టైల్స్ పగిలిపోకుండా పని చేయవచ్చు. నైపుణ్యం లేని పనివాడు ఎక్కువ టైల్స్‌ను నిరుపయోగం చేయవచ్చు. దీనికోసం మనం సూత్రం (1) మార్చవలసిన అవసరం లేదు.

ఈ సూత్రం మీకు కావలసిన టైల్స్ స్థూల పరిమాణాన్ని ఇస్తుంది. ఇంత చాలు. ఇప్పుడు మరొక సన్నివేశాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 5 :

2000 వ సం॥లో U.N (విశ్వసంస్థ) 191 సభ్యదేశాలు ఒక ప్రకటనకు సమ్మతించి సంతకం చేశారు. ఈ ప్రకటనకు సంతకం చేసిన దేశాలు 2015 సంవత్సరానికి ఖచ్చితమైన కొన్ని అభివృద్ధి లక్ష్యాలను సాధించాలని, దీనిని "మిలీనియం అభివృద్ధి లక్ష్యాలు" నిర్ణయించుకున్నారు.

అందులో ఒక లక్ష్యం 'లింగసమానత్యం'. ఈ లక్ష్యాన్ని సాధించామని తెలుసుకొనుటకు ప్రాథమిక, మాధ్యమిక, ఉన్నత పాఠశాల విద్య బాల బాలికల నిష్పత్తి సూచిస్తుంది. భారత దేశం కూడా సంతకం చేసిన సభ్యదేశం, అలాగే ఉన్నది. కింది పట్టికలో ప్రాథమిక పాఠ దాఖలైన విద్యార్థినుల శాతాల ప్రమాణమును చూపిస్తుంది.

పట్టిక A2.1

సంవత్సరం	విద్యార్థినుల దాఖలాతి (నమోదు)	
1991 – 92	41.9	
1992 – 93	42.6	
1993 – 94	42.7	
1994 – 95	42.9	
1995 – 96	43.1	
1996 – 97	43.2	
1997 – 98	43.5	
1998 – 99	43.5	
1999 – 2000	43.6 *	} దత్తాంశం తాత్కాలికం
2000 – 2001	43.7 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశం
2001 – 2002	44.1 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశర

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మూలం : భారతద ప్రభుత్వపు విద్యాశిక్షణ సంస్థ (Web page) (Indicates that the data is Provisional)

ఈ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించుకొని ప్రాథమిక పాఠ శాలలో నమోదైన ఆడపిల్లల నిష్పత్తిని గణతీయంగా వివరించండి. సంవత్సరంలో విధ్యార్థినుల నమోదు నిష్పత్తి 50% అవుతుందా లెక్కించండి.

సాధన : మొదట మనం ఈ సమస్యను గణిత సమస్యగా పరిగణించాలి.

దశ 1 : సూత్రీకరణం :

పట్టిక A2.1 నుండి 1991-92 నుండి ప్రతిసంవత్సరం నమోదు చేయ బడి ఉంది. విద్యార్థులు విద్యాసంవత్సర ప్రారంభంలో నమోదు అయినందు వల్ల మనం 1991-92, 1992-93 అనుటకు బదులు 1991, 1992 ఈ విధంగా నమోదుచేయవచ్చు. విద్యార్థినుల నమోదు పట్టికలోని శాతములా కొనసాగుతుంది అనుకుందాం. కావున రెండు సం॥లు ముఖ్యమే (దీనిని పోలిన ఒక సన్నివేశం ₹ 1500 కు 8% రేటులో 3సం॥లకు వడ్డీని లెక్కించునప్పుడు అది 1999 నుండి 2002, అరాగే 2001 నుండి 2004 వరకు. అయితే ఒక ముఖ్యమైన అంశం. ఈ సం॥ రాలలోని వడ్డీరేటు)

ఇక్కడ కూడ 1991 నుండి నమోదు ఎలా పెరిగిందని 1991 నుండి ప్రారంభమైన సం వత్సరాలను గణనకు తీసుకోవచ్చు. 1991 ని 'O' వ సం॥ అని పరిగణించాలి. 1992కు 1వ సం॥ 1993కు 3వ సం॥ ఇదేవిధంగా బోటు పట్టిక A2.2 లో ఉండునట్లు లభిస్తుంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పట్టిక A2.2

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

పట్టిక A2.3 లో ప్రతిసంవత్సరం పెరుగుదల చూపుతుంది.

పట్టిక A2.3

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

1991 నుండి 1992 సంవత్సరాంతం వరకు 41.9 నుండి 42.6%కు అంటే 0.7% పెరిగింది. రెండవ సంవత్సరం వరకు 42.6% నుండి 42.9 వరకు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టిక నుండి నిర్ధిష్టమైన పెరుగుదల సంబంధాన్ని గణనకు కాలావధి మరియు శాత ప్రమాణాన్ని రూపించడం కుదరదు. అయితే పెరుగుదల కొంచెం స్థిరంగానే ఉన్నది కేవలం మొదటి సంవత్సరం మరియు పదవ సంవత్సరంలో మాత్రమే వ్యత్యాసమున్నది. ఈ విలువలు సరాసరి పరిశీలిద్దాం.

$$\text{సరాసరి} = \frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

అందువలన సరాసరి పెరుగుదల 0.22 శాతము అని అనుకుందాం.

గణిత వివరణ :

మనం దాఖలాతిని (నమోదు) 0.22% వలే పెరిగినది అని అనుకుందాం అందువలన మొదటి సంవత్సరం

దాఖలాతి పెరుగుదల శాతం (Enrolment percentage) = EP = 41.9 + 0.22.

రెండవ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 × 0.22

3 వ సంవత్సరం $EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22.$

అదే విధంగా n వ సంవత్సరం $EP = 41.9 + 0.22n$ ($n \geq 0$ కాదు) ....(1)

సమస్యలో ఉన్నట్టు మనం దాఖలాతి శాతము (EP) = 50 అగుటకు ఎన్ని సంవత్సరములు అవుతుందని కనుగొన వలసి ఉన్నిది.

కావున సమీకరణం (1) లో n విలువ కనుగొనాలి

$$50 = 41.9 + 0.22\,n \qquad ....(2)$$

దశ 2 : పరిష్కారం : సమీకరణం (2) ను పరిష్కరించునపుడు

$$0.22\,n = 50 - 41.9 = 8.1$$

$$n = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

దశ 3 : వ్యాఖ్యానం : సంవత్సరాల లెక్కింపు పూర్ణ సంఖ్యలలో ఉండాలి. కావున 36.8 బదులుగా 37 సంవత్సరాలు అనుకుందాం. అందువలన 50 శాతము దాఖలాతి 1991 + 37 = 2028 లో అవుతుంది సమస్య పరిష్కారం ఇక్కడికి ముగిసింది. అయితే నిజజీవితంలో దాని దృ వీకరణ సాధ్యమవుతుందా అని పరిశీలించాలి. గణిత లెక్కింపు నిజ జీవితంలో సన్నివేశాలకు తగినట్టు దృవీకరణ కావాలి.

దశ 4 : నిజజీవనానికి అనుకూలత ఉందా? అని సమీకరణం (2)ను పరీక్షించాలి. సమీకరణం (2)ను ఉపయోగించుకొని సహజంగా జరిగిన పెరుగుదలకు సరాసరి పెరుగుదలకూ గల వ్యత్యాసాన్ని పట్టీ చేయండి.

పట్టిక A2.4

సంవత్సరం	దాఖలాతి (% లలో)	సమీకరణం (2) కు లభించిన విలువ % లలో	శాతములోని వ్యత్యాసం
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సమీకరణం (2)లోని విలువకు మరియు వాస్తవ విలువల కంటే తక్కువ 0.3% నుండి 0.5% వరకు. తగ్గుతుంది.

ప్రతి సంవత్సరం1% నుండి 2% పెరుగుదల వల్ల 3 నుండి 5సంవత్సరాలలో ఈ విధంగా కావచ్చు. ఇంత ప్రమాణపు వ్యత్యాసాన్ని ఒప్పుకోవలసి ఉంటుంది. ఈ విషయంలో సూత్రం (2) మన గణిత నమూన.

ఒక వేల ఈ ప్రమాణ దోషము ఎక్కువ ప్రమాణ మైనది అనిపించి, మనం మన నమూనాను మెరుగు చేయవచ్చు. అపుడు మరల దశ – 1 కి వెళ్ళి సమీకరణం (2)ను మార్చవచ్చు అలా చేద్దాం.

దశ 1 : పునర్ సూత్రీకరణం (సూత్రీకరణ మెరుగు)

ఇపుడు మనం పెరుగుదల 0.22% స్థిరంగా ఉందని భావిస్తా. అయితే దోషాన్ని తగ్గించడానికి దోషనివారక అంశంను చేరుస్తాం. దానికోసం మనం దోషపు సరాసరిని లెక్కిద్దాం పట్టిక A2.4 ను చూడండి.

$$\text{దోషపు సరాసరి} = \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

దోషం సరాసరి 0.18ని తీసుకొని, సమీకరణపు విలువను సరి చేద్దాం.

మెరుగుపరిన గణిత వివరణ :

సరాసరి దోషాన్ని సమీకరణ (2)లో మనకు లభించిన శాతాన్ని కలుపుదారి. అందువలన మనకు సరిచేసిన సమీకరణం దొరుకుంది.

n వ సం॥లో దాఖలాతి శాత ప్రమాణం ($n \le 1$ అయిన)

$= 41.9 + 0.22\,n + 0.18 = 42.08 + 0.22\,n$ .... (3)

అందాజుగా సమీకరణం (2)ను సరిచేద్దాం

అందువలన n వ కొత్త సమీకరణం

$$50 = 42.08 + 0.22\,n \qquad \text{............... (4)}$$

దశ 2: మార్చిన తర్వాత పరిష్కారం : సమీకరణం (4)ను పరిష్కరిద్దాం.

$0.22\,n = 50 - 42.08 = 7.92$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దశ 3 : వ్యాఖ్యానం : $n = 36$ అయినందువల్ల, ప్రాథమిక పాఠశాలా దశలో బాలికల దాఖలాతి ప్రమాణం 50% 1991 + 36 = 2027 లో అవుతుంది.

దశ 4 : మరొక సారి సమీకరణం (4)లో లభించిన నిలువలను వాస్తవ విలువలతో కలుపుదాం. అలాంటి పోలిక పట్టిక A2.5 లో చూపిస్తే.

పట్టిక A2.5

సంవత్సరం	దాఖలాతి %	(2) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువలు మధ్య వ్యత్యాసు	(4) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసల
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	–0.12
8	43.6	43.66	–0.06	43.84	–0.24
9	43.7	43.88	–0.18	44.06	–0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	–0.18

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇపుడు (4)లో విలువ (2) లోని విలువలకంటే వాస్తవ విలువలకు దగ్గరగా ఉన్నాయి. అనుటను గమనించవచ్చు. అంటే 6వ వరుసలోని విలువలను సంకలనం చేస్తే దోషం '0' అని తెలుస్తుంది.

ఈ ప్రక్రియను ఇక్కడికి ముగిస్తాం. అందువలన సమీకరణం (4) మన గణిత వివరణ అవుతుంది మరియు అది దాఖలైన సంవత్సరాల సంఖ్య మరియు దాఖలాతి శాత ప్రమాణానికి గల సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది. అందువలన మనం పెరుగదలను వివరించే గణితి నమూనాను రాశాం.

పై సన్ని వేశాలలో మనం ఉపయోగించిన కార్య తంత్రాన్ని ''**గణిత ఆకృతీకరణ**'' అంటాం.

మన దగ్గర గల గణిత పరికరాల (Tools) లతో గణిత నమూనారచన (ఆకృతీకరణ) తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించాము. మన వద్దగల దత్తాంశాలను ఇంకా పరిణామ కారిగా ఉపయోగించి మున్సూచన ఇచ్చే గణిత పరికరాలున్నాయి. అవి మీ తరగతి వ్యాప్తి కంటే ఎక్కవ మా ఉద్వేశ్యం మిమ్మలి 'గణిత ఆకృతీకరణ' పాఠ్యాంశంలో పాల్గొనేలా చేసి ఈ ప్రక్రియ ఎలా సాగుతుంది అని పరిచయం చేసేదేకాని దానివల్లన అందువలన ఖచ్చితమైన ముందుసూచననే తీసుకోవడ కాదు. ఈ దశలో ఇంతచాలు.

ఇంతవరకు మీరు పరిచయం చేసుకొన్న 'గణిత ఆకృతీకరణ' యొక్క దశలు మీరు అర్థం చేసుకున్నారు. దానిని ఇష్టపడతారని భావించాము దానికొరకు నిత్యం కొన్ని సమస్యలను అభ్యాములో ఇవ్వబడినవి ప్రయత్నించి, ఆనందించండి.

అభ్యాసం A2.2

1. ఒలంపిక్ క్రీడలలో 400మీ॥ పరుగు పందెము 1964 నుండి జరుగుతోంది. ఇందులో '(స్వర్ల) పదకం' విజేతలు తీసుకున్న కాల పరిమాణంను పట్టికలో కలదు ఈ క్రీడాకారులు తీసుకున్న కాలం మరియు పందెం జరిగిన సంవత్సరం ఉపయోగించి 'గణిత సమూనా' రచించి దీని ఆధారంలో తదుపరి ఒలంపిక్స్‌లో 'స్వర్ణ పదకం' విజేత తీసుకొని, కాలపరిమాణాన్ని అందాజు వేయండి.

ఒలంపిక్ క్రీలు 4 సం॥లకు ఒకసారి జరుగుతాయి

పట్టిక A2.6

సంవత్సరం	తీసుకున్న కాలపరిమాణం (స్వర్ణపదక విజేతలు) (సెకనులలో)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.4 గణిత నమూనా తయారి దాని ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు

గణిత నమూనాలతో కూడిన అంశాలను ఉదాహరణల ద్వారా చర్చించడాన్ని ముగిద్దాం. ఇదివరకు వివిధ ఘటకాల (విభాగాల) నేపథ్యంలో సంక్షిప్తంగా ఈ ప్రక్రియను పర్యావలోకనం మనకు సాధ్యమవుతుంది.

దశ 1 : సూత్రీకరణం : విభాగం A2.2 యొక్క ఉదాహరణ – 1 మరియు విభాగంలోని వ్యత్యాసాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. విభాగం A2.2 లో అన్ని సిద్ధంగా ఉన్నాయి. అయితే

A2.3 ఉదాహరణలో అలా లేదు. మరియు గణిత సూత్రాన్ని (సమీకరణాన్ని) రూపించడానికి కొంచెం సమయం పట్టేది. సమీకరణం (1)ని రచించి, పరిష్కరించి, పరీక్షించినపుడు అది సమీకరణం (2)కన్నా ఉత్తమంగా లేదు అని తెలుసు. నిజ జీవన సన్నివేశాలలో సమీకరణం (1)ని పరిశీలించినపుడు సూత్రం (1)యొక్క అభివృద్ధి అవసరమనిపిస్తుంది. ఇది అత్యంత సాధారణం. మీరు నిజజీవన సమస్యలు, సన్నివేశాలును నివారించునప్పుడు సూత్రీకరణకు ఎక్కువ సమయం కావలసి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు న్యూటన్ యొక్క మూడు గమన నియమాలను తీసుకుందాం.

ఇవి గమనముయొక్క గణిత నిరూపణలు మరియు నిరూపించడానికి సులభంగా (సరళం గా)వున్నాయి.

ఈ నియమాలను నిరూపించడానికి ముందు న్యూటన్ చాలా ప్రయోగాలను చేసి కనుగొన్న దత్తాంశాలను, అలాగే వారికి ముందు శాస్త్రవేత్తలు చేసిన అధ్యయనంను అభ్యసించారు. సూత్రీకరణనుకింది మూడు దశలతో కూడి ఉంటుంది.

(i) సమస్యను పేర్కొనడం (నిరూపించడం) : అనేక సమయాలలో 'సమస్య' అస్పష్టంగా నిరూపిత మవుతుంది.

ఉదాహరణకు బాల-బాలికల దాఖలాతి సమానంగా వుండడానికి సంబంధించిన విస్తృత లక్ష్యం. దీని అర్థం (తత్వం) పాఠశాలకు వెళ్ళవలసిన వయస్సు కలిగిన పిల్లలు 50% బాలికలు మరియు 50% బాలురు నమోదు కానేకావాలనే అర్థం రావచ్చు. మరొక అర్థం నమోదైన విధ్యార్థులలో 50% బాలికళు ఉండాలి అనుట. మనం రెండవ అంశమైన పాఠశాలలో నమోదైన పిల్లలో 50% బాలికలుండాలని పరిగణించాము.

(ii) సుసంబద్ధమైన అంశాలను గుర్తించడం :

మన సమస్యకు ఏవి ముఖ్యమైన సంబంధాలు మరియు పరిమాణాలు అని నిర్ధారించాలి. అలాగే ఏవి ముఖ్యంకాదు, వేటిని నిర్లక్షించాలి అనికూడా నిర్ధారించాలి. ఉదాహరణకు ప్రాథమికపాఠశాల పిల్లలు నమోదు (దాఖలాతి)కు సంబంధించినటు వంటి మునుపటి సంవత్సరపు దాఖలాతి ప్రమాణం పై ప్రభావం చూపవచ్చు. ఇది ఎందుకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలో బాలికలు పాఠశాలకు దఅఖలవుటను చూపిన తల్లిదండ్రులు తమ ఆడపిల్లలను కూడా పాఠశాలకు దాఖలు చేయడానికి ముందుకు వచ్చునట్లు చేయడం అయితే మనం ఈ అంశాన్ని గమనించడం లేదు. ఎందుకంటే శాత ప్రమాణం యొక్క నిర్ధిష్టదశను దాటువరకు ఈ విషయం (అంశం) ముఖ్యంకాదు. అదే కాకుండా ఈ అంశాన్ని చేర్చడం ద్వారా మన సమస్య మరింత జటిలమవుతుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) గణిత వివరణ :

మనకు ఈ సమస్య మరియు దాని ఏ అంశాలు ముఖ్యమైనవి అని సుస్పష్టమైనవని అనుకుందాం. సమస్యలోని పరస్పరం సంబంధంగల అంశాల ఆధారంగా మనమిప్పుడు ఒక సమీకరణాన్ని రాయాలి. లేదా ఒక గ్రాఫ్‌ను లేదా ఇంకేదైనా గణిత వివరణ అది సమీకరణం అయితే ఒక చరాంశాన్ని (variable) తప్పకుండా కలిగి వుండాలి. ఇది చాలా ముఖ్యమైన అంశం.

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

గణిత సూత్రీకరణమే పరిష్కారాన్ని ఇవ్వదు. మనం ఈ సమీకరణ గణన అంశాలను పరిష్కరించాలి మీ గణిత జ్ఞానం ఇక్కడ ఉపయోగపడుతుంది.

దశ 3 : పరిష్కారం యొక్క విశ్లేషణ

గణిత పరిహారం అంటే నమూనాలోని చరరాశులకు ఒకటి, అంతకంటే ఎక్కువ విలువలు నిర్ధారిత మగుట. చరరాశుల ఈ విలువలతో మనం తిరిగి నిజ జీవిత సమస్యకు వెళ్ళి ఈ విలువలు ఏ అర్థం ఇస్తాయో చూడాలి.

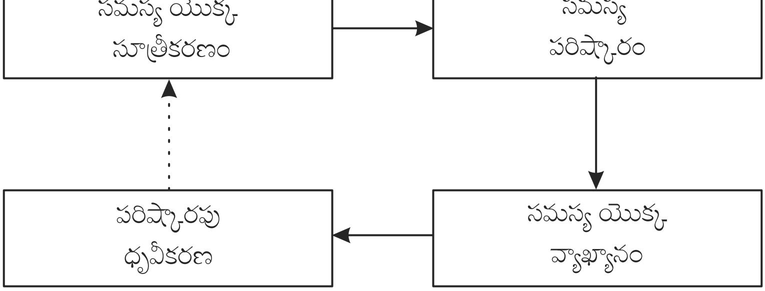
దశ 4 : మౌల్యీకరణం

విభాగం A.2.3 లో మనం గమనించినట్లు పరిష్కారాన్ని కనుగొన్న తర్వాత వాస్తవంగా ఇది ఎంత వరకు ఇది సరిపోతుందో అని చూస్తాము. ఇది సరిపోతే గణిత నమూన అంగీకారానికి అర్థమవుతుంది పరిష్కారం సరిపోకపోతే సమస్యను తిరిగి రచించు ప్రక్రియలో పూనుకుంటాము.

ఈ చివరి దశ పదసమస్యలు (Word Problem)ను పరిష్కరించడానికి గణిత నమూనా పరిష్కారానికి గల అత్యంత ముఖ్యమైన (ప్రధానమైన) వ్యత్యాసం. గణిత నమూన ముఖ్యమైన ఈ దశ పదసమస్యలలో లేనటువంటి అత్యంత ముఖ్యమైన దశ. కొన్ని నిజ జీవిత విషయాలలో సాధ్యమైననూ, మనం అన్ని సమస్యల జవాబులు (పరిష్కారాన్ని) ధృవీకరించం. ఎందుకంటే అలాంటి సమస్యలు సులభంగా మరియు పరిష్కారం సరైన రీతిలో ఉంటుంది.

A2.3 లో మనం తీసుకున్న ఉదాహరణ ఇలాంటిది.

క్రింది చిత్రం A2.2 లో గణిత నమూనా ఎలా సాగుతుంది అను సారాంశాన్ని చిత్రించినది ధృవీకరణ దశనుండి సూత్రీకరణ దశకు 'చుక్కల బాణం' ద్వారా చూపబడింది. ఈ దశను మరలా ప్రారంభించ వలసి రావచ్చు అని తెలపడమే దీని ఉద్దేశ్యం.



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మీరు ఇప్పుడు గణిత నమూనాదశలను అభ్యసించారు. ఈ దశల ముఖ్యాంశాలను చర్చించి, పరిశీలిద్దాం.

గణిత నమూనా రచన యొక్క ధ్యేయం ఏమంటే నిత్య జీవిత సమస్యల గురించి, ఉపయుక్త సమాచారాలను సంగ్రహించడానికి ఆ సమస్యలను గణిత సమస్యగా మార్చడం. ఈ విధానం ప్రత్యక్ష పరిశీలన లేదా ప్రయోగాల ద్వారా సమాచారాల లాంటి. అధిక వ్యయ విధానాలకంటే లేదా సమాచార సంగ్రహణం అసాధ్యమనిపించు సందర్భాలలో ఉపయోగ పడుతుంది.

గణిత సమూనాను ఎందుకు రచించాలి అని మీకు ఆశ్చర్యం అనిపించవచ్చు.

గణిత నమూనా రచన యొక్క కొన్ని ప్రయోజనాలను గమనిద్దాం. మధురాలోని శుద్ధీకరణ కార్యాగారాలనుండి వచ్చే విషవాయువుయి తాజ్‌మహల్ యొక్క అమృత శిలను తిని వేయుచున్నవి. ఈ పరిణామాన్ని గురించి అధ్యయనం చేయ వలసి ఉన్నది. మనం నేరుగా తాజ్‌మహల్‌ను ఉపయోగించి ఈ అధ్యయనం చేయడాన్ని అపేక్షించము. ఎందుకంటే అలా చేయడం మంచిది కాదు అలా కావాలంటే దాని చిరు ప్రతిరూప నమూనాను తయారు చేయవచ్చు. అయితే దానికి విశేషమైన సౌకరాలు అవసరమవుతాయి. అధిక వ్యయంతో కూడుకొన్నది. గణిత నమూనా రచన ఇలాంటి విషయాలకు చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. మరొక విషయం మరో 5 సం॥ తరువాత మనకు ఎన్ని ప్రాథమిక పాఠశాలలు అవసరం అనడం కాని, కావాలనడం కాని దీనిని మనం గణిత నమూనా ఉపయోగించి పరిష్కారం కనుగొనవచ్చు. అదేవిధంగా అనేక సమాజ లేక సామాజిక ఘటన ల/ అద్భుతాలు ఉండుటను. నివారించడానికి శాస్త్రవేత్తలకు ఉపయోగ పడే ఏకైక మార్గం ఏమంటే గణిత సమూనా రచన.

రెండవ విభాగము : A2.3 లో మనం పరిష్కారాన్ని మెరుగు పరచడానికి ఇంకా మంచి విధానాన్ని అమలు చేసి ఉండవచ్చు ఈ దశలో మనకు గణిత పరికరాలు లేనందువల్ల నిలప వలసి వచ్చింది. నిజ జీవితంలో ఇలానే అవుతుంది. అనేక సమయాలలో మీరు లభ్యమైన ఇంచుమించు జవాబులతో సంతృప్తి పొందవలసివస్తుంది ఎందుకంటే వేరే విధమైన (సాధనాలు)గణిత పరికరాలు. లేనందు వల్ల.

ఉదాహరణకు వాతావరణ సూచనను దృఢీకరించు 'వాతావరణగణిత నమూనా' అత్యంత జఠిలమైనది మరియు అత్యత ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని పొందుటకు ఇంకనూ గణిత పరికరాలు లభ్యంకావు.

మన నమూనాను మెరుగు పరచడానికి ఎన్ని ప్రయత్నాలు కావాలి అని ఆశ్చర్యం కలగవచ్చు సాదారణంగా నమూనాను మెరుగు పరచడానికి మనం ఇంకా ఎక్కువ అంశాలు పరిగణన లోకి తీసుకోవలసి వస్తుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇలా చేసినపుడు మన గణిత సూత్రాలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో చర రాశులను చేర్చవలసి వస్తుంది అప్పుడు మనకు ఉపయోగించడానికి క్లిష్టమగు నమూనా లభిస్తుంది. ఒక ఉత్తమ గణిత నమూనా రెండు అంశాల సంతులనం కలిగి ఉండాలి.

1. ఖచ్చితత్వం (వాస్తవానికి సాధ్యమైనంత దగ్గరగా).
2. వాడుకలో సౌలభ్యం.

ఉదాహరణ న్యూటన్ గమన నియమాల సూత్రాలు చాలా సరళంగా ఉంటాయి అయితే అనేక భౌతిక సన్నివేశాలలో నమూనాలు సమర్ధవంతంగా ఉంటాయి. అలా గైతే మన సమస్యలన్నింటికి గణిత నమూనాలే పరిష్కారమా? దాదాపుగా! దాని పరిమితులకు లోబడి ఉంటుంది.

అందువలన మనం గమనించవలసినది ఏమనగా

1. గణిత నమూనా నిత్యజీవితంలో సమస్యల సరలీకరణం.
2. నిత్య జీతంలోని సమస్యలు మరియు నమూనాలు రెండూ ఒకటే కాదు. దీనిని దేశ భూపటంలో ప్రకృతి యొక్క లక్షణాలను చూడటానికి నిజమైన దేశానికి గల వ్యత్యాసంతో పోల్చవచ్చు.

భూపటంలో ఒక ప్రదేశంలోని పర్వతాల ఎత్తును, సముద్ర మట్టాన్ని, తెలుసుకోవచ్చు. కాని, అక్కడి ప్రజల లక్షణాలను తెలుసుకోవడం సాధ్యం కాదు.

కనుక ఈ భూపటం యొక్క నమూనా అది దేని కోసమైతే తయారు చేయబడిందో దానికోసమే ఉపయోగించాలి మరియు నమూనా తయారు చేయునపుడు దేశానికి సంబందించిన అంశాలన్నిము అందులో చేర్చ బడవు అని గమనించాలి.

అనేక అంశాలను నిర్లక్ష్యం చేసి ఉంటామని గమనించాలి మనం నమూనా దానిని అన్వయించడానికి సాధ్యమైన పరిమితి లోనే ఉపయోగించాలి. ఈ అంశాన్ని పైతరగతులలో వివరంగా అభ్యాసిస్తారు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాం A2.3

1. పాఠ్య పుస్తకంలోని పద సమస్యలను పరిష్కరించడం గణిత నమూనా రచనా ప్రక్రియనుండి పరిష్కరించడానికి గల వ్యత్యాసం ఏమిటి?
2. నాలుగు రోడ్ల కూడలిలో వాహనాలు స్తంభించినప్పుడు మనం వేచి ఉండు సమయాన్ని తగ్గించడానికి కింది వాటిలో ముఖ్య మైన కారకాలు ఏవి? కానివి ఏవి?
   (i) పెట్రోలు దర
   (ii) నాలుగుదిక్కుల నుండి వచ్చు వాహనాల ప్రమాణం
   (iii) సైకిలు, రిక్షా, మొదలుగు తక్కువ వేగము వాహనాలు మరియు కారు, మోటారు బైకు వంటి వేగవంతమైన వాహనాల నిష్పత్తి.

A.2.5. సారాంశము

ఈ అనుబందములో క్రింది అంశాలను అభ్యసించినారు,

1. పద సమస్య పరిష్కాలలో అలవర్చుకొన్న దశలు
2. కొన్ని గణిత నమూనాల నిర్మాణం.
3. గణిత నమూనాలో అలవర్చిన దశలు అవి క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

1. సూత్రీకరణం : (i) ప్రశ్నను పేర్కొనడం (ii) సంబంధించిన అంశాలన జాబితా తయారు చేయడం (iii) గణిత శాస్త్ర వివరణ 2. పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం. 3. పరిష్కారాన్ని నిజ జీవిత సమస్యలతో వ్యాఖ్యానించడం. 4. అభ్యసించడానికి తీసుకొన్న సమస్యకు ఎంతవరకు నమూనా సంబద్ధ మైనది అని ధృవీకరించడం.

4. గణిత నమూనా ధ్యేయం, ఉపయోగం పరయు పరిమితులు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

జవాబులు / సూచనలు

అభ్యాసం 7.1

1. అన్ని సమానము

6. $\angle BAC = \angle DAE$

అభ్యాసం 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. ప్రతి యొక్క కోణం 45°

అభ్యాసం 7.3

3. (ii) నుండి (i), $\angle ABM = \angle PQN$

అభ్యాసం 8.1

1. (i) Δ DAC మరియు Δ BCA నుండి, $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు $\angle ACD = \angle CAB$ మొదలగునవి చూపండి.

   (ii) సిద్ధాంతం 8.4 నుండి $\angle BAC = \angle BCA$ ను చూపండి.

అభ్యాసం 8.2

1. PQRS ను సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి అలాగే. PQ||AC మరియు PS||BD అని కూడా చూపండి దాననుండి $\angle P = 90°$

2. AECF ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దానినుండి. AF||CE మొదలగునవి.

అభ్యాసం 9.1

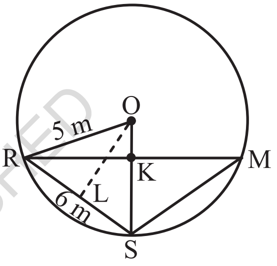
1. జ్యా మరియు అనురూప వృత్తాలను తీసుకొని సిద్ధాంతం 9. 1 లో ఉన్నట్టు సాధించండి.

2. SAS త్రిభుజపు స్వయం స్వీకృతిని ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలను అనురూప త్రిభుజాలని చూపండి.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 9.2

1. 6 cm,మొదట వృత్త కేంద్రాలను చేర్చు రేఖల చిన్న వృత్తపు వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉన్నది. మరియు తరువాత సామాన్య జ్యా చిన్న వృత్తపు వ్యాసమని చూపండి.
2. O వృత్త కేంద్రం గల వృత్తపు AB, CD సమాన జ్యాలు E బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి OM $\perp$ AB మరియు ON $\perp$ CD ను గీయండి. OE ని కలపండి లంభకోణ త్రిభుజం OME మరియు ONE అనురూప వృత్తాలని చూపండి.
3. ఉదాహరణ 2 లో వున్నట్లు.
4. AD కి OM లంబ రేఖను గీతండి..
5. రేష్మ, సల్మా, మందీప్ లను R,S,M అని క్రమంగా గుర్తించండి. KR = x m వుండాలి (చిత్రం చూడండి).



Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2} x \times 5$

Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4x$ ను.
కనుగొనండి మరియు RM ను కూడా.

6. సమబాహు త్రిభుజపు లక్షణాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అభ్యాసం 9.3

1. 45° 2. 150°, 30° 3. 10°

4. 80° 5. 110° 6. $\angle BCD = 80°$ మరియు $\angle ECD = 50°$

8. CD పై AM మరియు BN లంబ రేఖలను గీయండి (AB || CD మరియు AB < CD). Δ AMD $\perp$ Δ BMC అనిచూపి దీనినుండి $\angle C = \angle D$ మరియు $\angle A + \angle C = 180°$.

అభ్యాసం 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}\ m^2$

4. $21\sqrt{11}\ cm^2$ 5. 9000 cm^2 6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

అభ్యాసం 11.1

1. 165 cm^2 2. 1244.57 m^2 3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2
4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 5. 63 m 6. ₹ 1155
7. 5500 cm^2 8. ₹ 384.34 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2
2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2
3. 942 cm^2 4. 1:4 5. ₹ 27.72
6. 3.5 cm 7. 1:16 8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

అభ్యాసం 11.3

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}l$
3. 10 cm
4. 8 cm 5. 38.5 kl
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3 8. 240 π cm^3; 5: 12 9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

అభ్యాసం 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}\,cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (సుమారుగా)
2. (i) $11498\frac{2}{3}\,cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g (సుమారుగా) 4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 l (సుమారుగా) 6. 0.06348 m^3 (సుమారుగా)
7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (సుమారుగా)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (సుమారుగా)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 12.1

1. (ii) సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్యస్థితి.　　3. (ii) గుంపు A

4. (ii) పౌనః పుణ్యం బహుభుజి (iii) లేదు　　5. (ii) 184

వయసు్సు (సం ల లో)	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1=5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1=3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1=3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1=6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1=3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1=2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1=2$

ఇపుడు మీరు ఈ పొడవులను ఉపయోగించి హిస్టోగ్రాం గీయాలి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. (i)

అక్షరాల సంఖ్య	తరచుదనం	వర్గీకృత వ్యాప్తి	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు (పొడవు
1 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2=4$
4 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2=30$
6 8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2=44$
8 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2=8$
12 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2=1$

మీరిప్పుడు హిస్టోగ్రామ్ చిత్రం గీయవచ్చు.

(ii) 6−8

అభ్యాసం A .2.1

1. **దశ 1. సూత్రీకరణం**

ఒక కంప్యూటర్ ను వివిధ కాలాలో కోవడం జరిగింది మరియు రెండు విలువలు ఇవ్వ బడ్డాయి. కాని ఇక్కడ ముఖ్యంగా గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే కంప్యూటర్ దరలనూ లేదా కానడం లోనూ మార్పు లేదు. కావున వాటికి సంబంధించి జరిగిన మార్పులను గమనించాలి. మనం అన్ని తరాల కంప్యూటర్‌లను మరియు బ్రాండ్స్‌ను ఒకే విధంగా తీసుకోవడం జరిగింది. కాబట్టి ఈ బౌధం అనేది ప్రస్తుతం కంప్యూటర్ ను అద్దెకు తీసుకున్న దర x నెలలకు = 2000 x. దర అనేది కంప్యూటర్ కొనడానికి నిర్ధారింపిన నిజ ధర కంటే కూడ ఎక్కువ , కావున, మనం కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచింది అప్పుడు సమీకరణం $2000\,x = 25000$……(i)

దశ 2 : సాధన (1) ని సాధించగా, $x = \dfrac{25,000}{2000} = 12.5$

దశ 3 : విశ్లేషణ : కంప్యూటర్ ను 12 నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్న దర కన్నా కంప్యూటర్ నిజ దర చాలా తక్కువ కావున కంప్యూటర్ ను 12 నెలల కు మించి ఉపయోగించాలి అనుకుంటే కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచిది.

2. **దశ 1 : సూత్రీకరణం:**

రెండు కారు స్థిర వేగంలో ప్రయాణం చేస్తున్నాయి అనుకుంటే. అ ప్రస్తుతంగా కార్లు వేగం లో ఏమైన మార్పు జరిగింది అనుకుంటే. ఆ కార్లు x గంటల ప్రయాణం చేసిన తర్వాత ఎక్కడ కలుస్తాయి. ఒక కార్పు. A

స్థానంనుండి బయలు దేరి 40 x km ప్రయాణం చేస్తే మరియు రెండవకారు 30 $x$km కి .మీ. ప్రయాణంచెసింది. కాబట్టి వా మధ్య దూరం $(100 - 30x)$ km A నుండి

సమీకరణం. $40\,x = (100 - 30x)$km

కావున $70x = 100$ ……. (i)

దశ 2 : ఫలితము సమీకరణం ను సాదించంగా $x = \dfrac{100}{70} = \dfrac{10}{7}$

దశ 3 : **విశ్లేషణ** $\dfrac{100}{70}$ = అంటే దాదాపుగా 1.4 గంటలు.

కావున ఆ రెండు కార్లు 1.4 గంటల తర్వాత కలుస్తాయి.

3. **దశ 1 : సూత్రీకరణం** : చంద్రుడు భూమి చుట్టు తిరుగుటకు తీసుకునే వేగం = $\dfrac{\text{కక్ష్యపొడవు}}{\text{ఎట్టిన కాలం}} = \dfrac{C}{t}$

దశ 2 : సాధన: కక్ష్య దాదాపుగా వృత్తాకారంగా ఉంటుంది కావున దాని పొడవు

$= 2 \times \pi \times 38400km = 2411520\ km$

చంద్రుడు తన కక్ష్యలో ఒక సారి చుట్టి రావడానికి పడే కాలం 24 గంటలు.

కావున వేగం $= \dfrac{2411520}{24} = 100480\ km/hour$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దశ 3 : విశ్లేషణ : కావున వేగం = 100480 km/h

4. సూత్రీకరణం: వాటర్ హీటరను ఉపయోగించెనపుడు వాటి విద్యుత్ చార్జీలలో వచ్చే తేడా అనేది వాటిని ఉపయోగించిన కాలంపై ఆధారపడి ఉంటుంది అని ఊహిస్తే వాటర్ హీటర్ ను ఉపయోగించిన సరాసరి గంటలు = x గా తీసుకుంటే.

ఒక నెలలో ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ల మధ్య తేడా = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240

ఒక గంట వాటర్ హీటర్ ను వాడుటకు అయిన ఖర్చు = ₹ 8

అయితే ఒక నెలలో 30 రోజులు ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ యొక్క ఖర్చు = $8 \times 30 \times x$

అయితే ఒక వేళ 30 వాటర్ హీటర్లు ఉపయోగించిన గంటలో మధ్య తేడాపై బిల్లు ఆధారపడి ఉంటుంది. =

కావున 240 x = 240

సాధన : ఈ సమీకరణం నుండి $x = 1$

విశ్లేషణ : $x = 1$ నుండి ఒక రోజులో వాటర్ హీటర్ ను ఒక గంట సరాసరిగా వాడారు

అభ్యాసం A 2.2

1. ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకించి ఒకే పద్ధతిలో సాధన చేయాలి అని చర్చించ లేదు మీరు కావాలి అనుకుంటే ముందు ఉదాహరణలోని పద్ధతిలోనే సాధన చేయవచ్చు లేదా మరేదైనా సరిపోయే పద్ధతి ఉందా ఆలోచించండి.

అభ్యాసం A 2.3

1. మనం ముందు గానే చప్పినట్లు సూత్రీకరించిన విధానం పూర్తిగా మన నిజజీవితంలో ఒక సందర్భం. కావున సంఖ్యలలో సమాధానం చెప్పడం సరికాదు ఈ పద సమస్య మాత్రమే సరైన సమాధానం ఇది మన నిజజీవిత సందర్భంలో జరగాలని ఖశ్చితమైన సందర్భంగా చెప్పలేం. (లేదా మన నిజ జీవితం లో జరగాలి అని చెప్పాల్సిన అవసరం లేదు)
2. సమీకరణం (i) మరియు (ii) ముఖ్యమైన అంశాలు ఇక్కడ సమీకరణం (iii) సమస్య పై ప్రభావం చూపెను అది ఆంత ప్రధానం కాదు కావున సమీకరణం

   (i) అనేది ఎన్ని వాహనాలు అమ్ముడు పోయాయి అనే దానిపై ప్రభావం చూపదు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED