कर्नाटक सरकार

गणित

MATHEMATICS

10

भाग - 1

PART - 1

इयत्ता दहावी

TENTH STANDARD

मराठी माध्यम

MARATHI MEDIUM

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विद्यया ऽ मृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरबिंदो मार्ग नवी दिल्ली

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
15 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, Professor of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, Professor and Head (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, PGT, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, Professor and Head, DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, Professor, RIE, Mysore

Jayanti Datta, PGT, Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, Lecturer (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, Professor (Retd.) & Consultant, DESM, NCERT

Rama Balaji, TGT, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, Teacher and Member, Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, Professor (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, TGT, Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, TGT, Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, TGT, Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, TGT, Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, TGT, D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, TGT, Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, TGT, Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, TGT, Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, TGT, Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, Lecturer, Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, Emeritus Professor, IIT, New Delhi; Monika Singh, Lecturer, Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar,

New Delhi; G. Sri Hari Babu, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, TGT, Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, TGT, S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head (Retd.), DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Purnendu Kumar Barik, Copy Editor; Naresh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators; Yogita Sharma, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ 10ನೇ ತರಗತಿ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಮರಾಠಿ ಭಾಷೆಗೆ ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಅನುವಾದಿಸಿ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 2018–19 ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಆಂಗ್ಲ ಮಾಧ್ಯಮದ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷ್, ಹಿಂದಿ ಮತ್ತು ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆದು ಭಾಗ–1 ಮತ್ತು ಭಾಗ–2 ಎಂಬುದಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು 2005 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲಾ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಚಿಂತನಾಶೀಲರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯ ವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005 ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸುಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅನುಮತಿ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ ಹಾಗೂ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ಎಲ್ಲ ಅಧಿಕಾರಿ, ಸಿಬ್ಬಂದಿಗಳಿಗೆ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗೆ, ಸುಂದರವಾಗಿ ಡಿಟಿಪಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿರುವ ಡಿಟಿಪಿ ಆಪರೇಟರ್ ಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ವಿತರಿಸಿರುವ ಮುದ್ರಕರುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀ ಎಂ. ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Marathi Translation Committee

Sri. P.C. Halgekar, Asst Teacher, Rangubai Bhosale High School, Belagavi.

Sri B.N. Toralkar, Retd. Teacher, Gajanan Maharaj Nagar, Shivaji Colony, Tilakwadi, Belagavi-06.

Sri. R.G. Kulkarni, Retd.Teacher, Ghode Galli, Khanapur Taluk. Belagavi Dist.

Sri P.P. Kashid, Asst Teacher, Maratha Mandal's Higher Secondary School, Khanapur, Belagavi.

Sri. V.N. Patil, Asst Teacher, Mahila Vidyalay High School, Belagavi.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Advise and Guidance

Sri M. P. Madegowda, Managing Director, KTBS Bengaluru.

Smt. M. D. Usha, Deputy Director, KTBS Bengaluru.

Programme Co-Ordinator

Smt. Bhagyalakshmi, Assistant Director, KTBS, Bengaluru.

अनुक्रमणिका

भाग - 1

J8H5J8

अ.नं.	प्रकरण	पृष्ठ क्रमांक
1	वास्तव संख्या	1-10
2	बहुपदी	11-24
3	दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणांची जोडी	25-39
4	वर्गसमीकरणे	40-51
5	अंकगणिती क्रम	52-75
6	त्रिकोण	76-100
7	सहनिर्देशक भूमिती	101-114
A1	गणितातील उपपत्ती	115-140
	उत्तरे	141-152

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

वास्तव संख्या

REAL NUMBERS

G6G7U5

1

1.1 परिचय :

तुम्ही इयत्ता 9वी मध्ये वास्तव संख्येंच्या विश्वाच्या विस्ताराची सुरूवात केली आहे. या प्रक्रियेत तुम्हाळा अपरिमेय संख्येबरोबर ओळख झाली. या प्रकरणात आपण वास्तव संख्यावरील चर्चा चालू ठेवणार आहोत. ही चर्चा भाग 1.2 आणि 1.3 यामधील धन पुर्णांक संख्यांच्या आत्यंत महत्वाच्या दोन गुणधर्मांने सुरू करणार आहोत. युक्लिडचा 'भागाकार अल्गॅरिथम आणि अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय' हे ते दोन गुणधर्म आहेत.

नावावरून असे समजते की, युक्लिडचा भागाकार अल्गॅरिथम पुर्णांक संख्यांच्या भागाकाराशी संबंधित आहे. तो सर्वसामान्यपणे असा आहे की, a ही कोणतीही धन पुर्णांक संख्या असून तिला b या पुर्णांक संख्येने भागले असता r ही बाकी मिळते जी b पेक्षा लहान असते. आपण काही जण कदाचित या पध्दतीला दिर्घ भागाकार पध्दत या नावाने ओळखत असणार. परंतु या पध्दतीने येणारे परिणाम समजावून घ्यायला सोपे व सरळ आहेत. पुर्णांक विभाज्यता गुणधर्माशी संबंधितयाचे अनेक उपयोग आहेत. यातील काही उपयोगावर आपण प्रकाश टाकणार आहोत. परंतु याचा मुख्य उपयोग दोन धन पुर्णांकाचा म.सा.वि (HCF) काढण्यासाठी करणार आहोत.

दुसऱ्या बाजुला, अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय हे धन पुर्णांक संख्यांच्या गुणाकाराशी संबंधित आहेत. तुम्हाला अगोदरच माहित आहे की, प्रत्येक संयुक्त संख्या ही मुळ संख्येच्या अवयवाच्या अद्वितीय रूपात मांडली जाते. येथे महत्वाचे तत्व अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय आहे पुन्हा याचे येणारे परिणाम (result) समजावून घ्यायला सोपे व सरळ आहेत. परंतु याचे गणिताच्या क्षेत्रात अनेक व्यापक आणि महत्वाचे उपयोग आहेत. आम्ही अंकगणितातील मूलभुत प्रमेयाचे दोन मुख्य उपयोग पाहणार आहोत. एक उपयोग इयत्ता 9 मध्ये अभ्यास, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ आणि $\sqrt{5}$ या अपरिमेय संख्यांची सिध्दता सिध्द करण्यासाठी केलेला आहे. $\frac{p}{q}$ मधील छेद q चे मूळ अवयव पाहून आपण समजू शकतो. तुम्ही पाहिला असाल की q च्या मूळ अवयवावरून $\frac{p}{q}$ या दशांश विस्ताराची माहिती मिळेल. म्हणून आता आपण शोध सुरू करूया.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 अंकगाणितातील मूलभूत प्रमेय (The Fundamental Theorem of Arithmatic):

मागील इयत्तेत तुम्ही पाहिले आहे की, कोणतीही नैसर्गिक संख्या ही मुळ अवयवाच्या गुणाकाराच स्वरूपात लिहिता येते. उदाहरणार्थ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ इत्यादी. आता आपण नैसर्गिक संख्याचा वेगळया रितीने विचार करण्याच्या प्रयत्न करू. मूळ संख्यांचा गुणाकार करून नैसर्गिक संख्या मिळते का ? ते पाहू.

मूळ संख्यां संग्रह घ्या **उदाहरण.** समजा 2, 3, 7, 11 आणि 23 जर आम्ही यामधील काही संख्या किंवा सर्व संख्याचा अशाप्रकारे गुणाकार करू की त्यांची कितीही वेळा, पुनरावर्ती घेऊ शकतो. त्यामुळे पूर्णांक संख्यांचा एक मोठा समूह निर्माण करू शकतो.

यामधील काहिंची यादी करू:

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

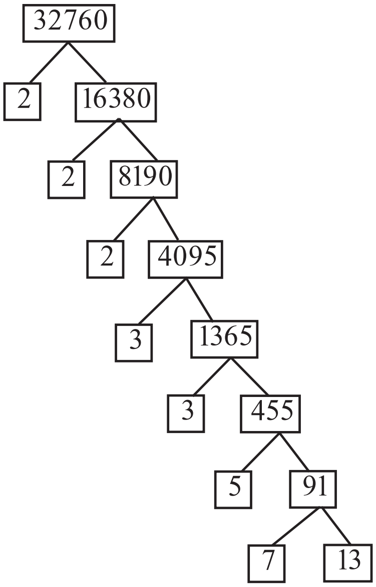
$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ इत्यादी.

आता समजा तुमच्या समुहात सर्व संभाव्य मूळ संख्या आहेत? या समुहातील आकाराबाबत तुमचे अनुमान काय आहे? यामध्ये फक्त मर्यादीत पुर्णांक किंवा अमर्यदित पुर्णांक संख्या आहेत का? कदाचित यात अमर्यादित मुळ संख्या आहेत. म्हणून जर आम्ही शक्य त्या मार्गानी सर्व मुळ संख्या जमा केल्या तर आपल्याला मूळ संख्या आणि संख्यांचे शक्य गुणाकार असा अमर्याद संख्यांचा संग्रह मिळेल. प्रश्न येतो, सर्व संयुक्त संख्या या प्रकारात आपण तयार करतो? तुम्ही काय विचार करता? तुम्ही असा विचार करता की तिथे संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या घातांकाचा गुणाकारात नाही? आम्ही उत्तर देण्याच्या अगोदर धन पुर्णाकांचे अवयव पाडू जे आता पर्यंत केले त्याच्या उलटे करू.

आता आम्ही तुम्हाला माहीत असलेल्या अवयव वृक्षाचा उपयोग करू. एक मोठी संख्या 32760 घ्या. त्याचे अवयव खाली दाखविले आहेत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



म्हणून आम्ही 32760 चे अवयव मूळ संख्यांच्या स्वरूपात $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ मांडले आहेत. $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ हे मूळ संख्यांच्या घाताकांच्या स्वरूपात आहेत, आणखी एक संख्या 123456789 घेऊन प्रयत्न करू. समजा ही $3^2 \times 3803 \times 3607$ या स्वरूपात लिहिता येते निःसंदेह तुम्ही 3803 आणि 3607 या मूळ संख्या आहेत हे तपासू शकता. (अशा अनेक नैसर्गिक संख्या घेऊन तुम्ही प्रयत्न करा) याचे अनुमान आपण असे काढू शकतो कि प्रत्येक संयुक्त संख्या या मूळ संख्यांच्या घातांकाच्या स्वरूपात लिहिता येतात. वास्तविक हे वाक्य खरे आहे याच कारणामुळे याला अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय असे म्हणतात. आता आपण हे प्रमेय औपचारिक स्वरूपात व्यक्त करू.

प्रमेय 1.2 अंकगणितातील मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmeatic)

प्रत्येक संयुक्त संख्या ही मुळ अवयवांच्या गुणाकारात व्यक्त करतात आणि येणाऱ्या मुळ अवयवांचा क्रम सोडून हे अवयवीकरण अद्वितीय (वेगळे) आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय प्रसिध्द होण्याच्या अगोदर प्रमेय 5.2 चे जवळजवळ सर्व वर्णन सर्वप्रथम 'युक्लिड' यांच्या 'युक्लिड' इलिमेंटस IX' या पुस्तकात सिद्धांत - 14 स्वरूपात आले होते. तथापि, कार्ल फ्रेड्रिच गॉस यांनी 'Disquestiones Arithmeticae' या पुस्तकात प्रथम याची सिद्धता दिली.

कार्ल फ्रेड्रिच गॉस यांना गणितज्ञांचा राजकुमार असे संबोधले जाते आणि त्यांचे नाव त्या काळातील तीन गणितज्ञामध्ये घेतले जाते, ज्यात आर्किमिडीज आणि न्युटन सुध्दा सामील आहेत. त्यानी गणित अणि विज्ञान या दोन्हीमध्ये मौलीक योगदान दिले आहे.

कार्ल फ्रेड्रिच गॉस
(1777-1855)

प्रत्येक संयुक्त संख्येचे अवयवीकरण हे मूळ संख्यांच्या **गुणाकाराच्या** स्वरूपात केले जाते. वास्तव मध्ये आणखी काही सांगावयाचे आहे. ते म्हणतात दिलेल्या कोणत्याही संयुक्त संख्येचे अवयवीकरण मूळ संख्यांच्या गुणाकारांच्या स्वरूपात अद्वितीय (वेगळे) केले जाते. शिवाय मूळ अवयवांचा क्रम साडून म्हणजेच दिलेल्या कोणत्याही संयुक्त संख्येचे अवयवीकरण हे मूळ संख्यांच्या गुणाकाराचा स्वरूपात एक आणि एकाच मार्गाने केले जाते. जो पर्यंत आपण मूळ संख्यांच्या क्रमावर विचार करत नाही. उदाहरणार्थ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ला आपण $3 \times 5 \times 7 \times 2$ असेही मानतो. किवा कोणत्याही क्रमाने मूळ संख्या आपण लिहू शकतो. हे सत्य आपण खालीलप्रमाणे सुद्धा लिहू शकतो.

अवयवांचा क्रम विचारात न घेता नैसर्गिक संख्येंचे मूळ अवयव एकमेव असतात.

सर्व सामान्यपणे, दिलेल्या x या संयुक्त संख्येचे अवयव आपण $x = p_1, p_2 \ldots. p_n$ जेथे $p_1, p_2 \ldots. p_n$ या मूळ संख्या असून त्या चढत्या क्रमात लिहितात. म्हणून $p \leq p_2 \leq \ldots. p_n$ जर आम्ही समान मूळ संख्या एकत्र केल्या तर मूळ संख्यांचे घातांक मिळतात.

उदाहरण $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

एक वेळ आपण ठरवले कि क्रम चढत्या क्रमात असतील तर अवयव संख्या अद्वीतीय असतील.

अंकगणितातील मूलभूत प्रमेयांचे गणित आणि इत्तर क्षेत्रात अनेक उपयोग आहेत. याची काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 5: 4^n या संख्येवर विचार करा. जेथे n ही नैसर्गिक संख्या आहे. तपासा कि, n ची अशी काही किंमत आहे की 4^n ही संख्या शून्य (0) वर समाप्त होईल.

उकल: कोणत्याही n साठी संख्या 4^n ही शून्य वर समाप्त होत असेल तर तीला 5 ने भाग जाते. म्हणुन 4^n या संख्येच्या मूळ अवयवात 5 ही संख्या यायला पाहीजे हेशक्यनाही. कारण $4^n = (2)^{2n}$ आहे म्हणून 4^n चा मूळ अवयव 2 आहे. अंकगणितातील मुलभूत प्रमेयाची अद्वितीयता अशी सांगते की 4^n चे मूळ अवयव 2 शिवाय कोणतेही नाहीत म्हणून, अशी कोणतीही n ही संख्या नाही जी

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4^n साठी शून्य (0) वर शेवट होते.

तुम्ही मागील वर्गात दोन धनपुर्णांकांचा मसावि आणि लसावि अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय वापरून कसे काढतात हे शिकला आहात. हे करताना याप्रमेयाच्या नावाचा उल्लेख केला नहता. या पध्दतीला मूळ अवयव पध्दती असे ही म्हणतात. खालील उदाहरणावरून ही पद्धत आठवू.

उदाहरण 6: मूळ अवयव पध्दतीने 6 आणि 20 ची मसावि अणि लसावि काढा.

उकल: $6 = 2^1 \times 3^1$ आणि $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

तुम्हांला मिळेल मसावि (6, 20) = 2 आणि

लसावि $(6,20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ हे तुम्ही मागील वर्गात शिकला आहात.

सुचना : मसावि $(6, 20) = 2^1 =$ **संख्येतील सामाईक मूळ अवयवांच्या प्रत्येकी लहान घाताकांचा गुणाकार**

लसावि $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$ **संख्येतील सामाईक मूळ अवयवांच्या प्रत्येकी मोठ्या घाताकांचा गुणाकार.**

वरील उदाहरणावरून तुम्हाला समजले असणार की मसावि (6, 20) × लसावि (6, 20) = 6 × 20. वास्तवीक कोणत्याही **a आणि b या दोन धन पुर्णांकासाठी, मसावि (a, b) × लसावि (a, b) = a × b.** हे सुत्र वापरून, जर दोन धन पुर्णांकाचा मसावि दिलेला असेल तर त्या दोन धन पुर्णांकांचा लसावि काढू शकतो.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

उदाहरण 7: मुळ अवयव पध्दतीने 96 आणि 404 यांची मसावि काढा आणि नंतर लसावि काढा.

उकल: 96 आणि 404 चे मूळ अवयव

$\mathbf{96 = 2^5 \times 3, 404 = 2^2 \times 101}$

म्हणून या दोन पुर्णांकांचा मसावी आहे $2^2 = 4$

तसेच, $\text{लसावि } (96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{मसावी } (96, 404)}$

$$= \frac{96 \times 404}{4}$$

$$= 9696$$

उदाहरण 8 : मूळ अवयव पध्दत वापरूत 6, 72 आणि 120 यांचा मसावि आणि लसावि काढा.

उकल: $6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

येथे साधारण अवयव 2 आणि 3 चा लहान घातांक अनुक्रमे 2^1 आणि 3^1 आहे. म्हणून, मसावि $(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

तीन संख्येमध्ये साधारण अवयव 2, 3 व 5 चे मोठे घातांक अनुक्रमे $2^3, 3^2, 5^1$ आहेत म्हणून, लसावि $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

टीप : $6 \times 72 \times 120 \neq$ मसावि (6, 72, 120) × लसावि (6, 72, 120) अर्थात तीन संख्यांचा गुणाकार हा त्यांचा मसावि आणि लसावि यांच्या गुणाकाराइतका नसतो.

स्वाध्याय 1.1

1. खालील प्रत्येक संख्या मूळ तच्या अवयवांचा गुणाकार आहे असे व्यक्त करा.

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. खालील पुर्णांकाच्या जोडीचा लसावि आणि मसावि काढून लसावि × मसावि = त्या दोन संख्यांचा गुणाकार. हे पडताळून पहा.

(i) 26 आणि 91 (ii) 510 आणि 92 (iii) 336 आणि 54

3. खालील पुर्णाकांचा लसावि आणि मसावि मुळ अवयवीकरण पद्धतीने काढा.

(i) 12, 15 आणि 21 (ii) 17, 23 आणि 29 (iii) 8, 9 आणि 25

4. मसावि (30, 657) = 9, दिलेला असेल तर लसावि (306, 657) काढा.

5. n कोणतीही नैसर्गिक संख्या असेल, तर 6^n चा शेवट 0(शून्य) अंकाने होतो का हे तपासा.

6. $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ आणि $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ या संयुक्त संख्या आहेत हे स्पष्ट करा.

7. खेळाच्या मैदानासभोवती वर्तुळाकार रस्ता आहे. सोनियाला त्या रस्त्यावरून एक फेरी मारण्यासाठी 18 मिनिटे लागतात. त्यावेळी त्याच कामासाठी रविला 12 मिनिटे लागतात. समजा जर दोघांनी एकाच ठिकाणाहून सुरुवात केली आणि एकाच वेळी आणि एकाच दिशेने जात असतील तर किती मिनिटानंतर ते दोघे एकत्र सुरूवातीच्या मूळ ठिकाणाहून भेटतील?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.3 अपरिमेय संख्यांची पुनर्भेट (Revisiting Irrational Numbers)

इयत्ता 9 च्या वर्गात अपरिमेय संख्या आणि त्यांचे अनेक गुणधर्म यांची ओळख तुम्हाला झाली आहे. तुम्ही त्यांचे अस्तित्व आणि परिमेय आणि अपरिमेय संख्या एकत्र येऊन वास्तव संख्या कशा बनतात याचाही अभ्यास केला आहात. तुम्ही संख्यारेषेवर अपरिमेय संख्यांचे स्थान केसे निश्चीत करतात हे पण शिकला आहात. तथापि, त्या अपरिमेय संख्या आहेत हे सिद्ध केले नाही. या भागात आपण $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ आणि सर्वसामान्यपणे $\sqrt{p}$ अपरिमेय संख्या आहेत हे सिध्द करु. जेथे $\sqrt{p}$ एक मूळ संख्या आहे. अंकगणितातील मूलभूत प्रमेय या प्रमेयाचा आपण उपयोग करणार आहोत.

आठवा, एक संख्या 'S' ला अपरिमेय संख्या म्हणतात जर ती $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहिता येत नाही. जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$.

तुम्हाला अगोदरच माहीत असलेली काही उदाहरणे :$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110 इत्यादी.

$\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सिध्द करण्याच्या अगोदर, आपणांला खालील प्रमेयाची आवश्यकता आहे त्यांची सिध्दता ही अंकगणितातील मूलभूत प्रमेयावर आधारित आहे.

प्रमेय 1.3:

समजा p ही मूळ संख्या आहे. जर a^2 ला p ने भाग जातो, तर a ला p ने भाग जातो. जेथे हो a धन पुर्णांक आहे.

***सिध्दता:** समजा a चे मूळ अवयव खालील प्रमाणे आहेत.

$a = p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ जेथे $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ मूळसंख्या आहेत पण वेगवेगळ्या नाहीत.

म्हणून $a^2 = (p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n)(p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n) = p^2{}_1\, p^2{}_2 \ldots\ldots p^2{}_n$

आता, आम्हाला दिले आहे की a^2 ला p ने भाग जातो. म्हणून अंकगणितातील मूलभूत प्रमेयानुसार, a^2 चा, p हा एक मूळ अवयव आहे तथापि, अंकगणितातील मूलभूत प्रमेयातील अद्वितीयता गुणधर्म वापरून आपण असे म्हणू शकतो कि a^2 चे मूळ अवयव $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$ आहेत म्हणून p हे $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$ यामधीलच एक आहे.

आता, $a = p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$. a ला p ने भाग जातो.

आम्ही आता $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे याची सिध्दता करू शकतो.

ही सिद्धता ''विरोधाभासद्वारे सिद्धता'' या तंत्रावर आधारित आहे (या तत्रांची काही विस्तृत चर्चा आपण परिशिष्ट 1 मध्ये केली आहे)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 1.3: $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

सिध्दता: या विरूध्द आपण असे मानू की $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या आहे. म्हणून, r आणि s $(\neq 0)$ पुर्णांक अशाप्रकारे आढळतात की

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{r}{s}$$

समजा, 1 सोडून r व s चे सामाईक अवयव आहेत. नंतर आम्ही सामाईक अवयवाने भागाकर करून आपल्याला मिळते $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ जेथे, हे a आणि b सहअविभाज्य आहेत.

$$\therefore b\sqrt{2} = a$$

* हे परिक्षेच्या दृष्टींने महत्वाचे नाही.

दोन्ही बाजुला वर्ग करून आणि मांडणी करून आपल्याला मिळते $2b^2 = a^2$

म्हणून a^2 ला 2 ने भाग जातो,

आता प्रमेय 8.3 नुसार a ला 2 ने भाग जातो असे समजते म्हणुन, आम्ही असे लिहू शकतो $a = 2c$ जेथे c हा एक पूर्णांक आहे.

a ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळेल,

$2b^2 = 4c^2$ अर्थात $b^2 = 2c^2$

म्हणजेच b^2 ला 2 ने भाग जातो, आणि म्हणून b ला 2 ने भाग जातो (प्रमेय 1.3 पुन्हा वापरून $p = 2$ घेऊन) म्हणून, a आणि b चा कमीतकमी 2 हा सामाईक अवयव आहे.

परंतु हा विरोधाभास आहे, खरे तर a आणि b चा 1 शिवाय कोणताही सामाईक अवयव नाही.

हा विरोधाभास आला आहे कारण आपण $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे हे चुकिचे गृहीत मानले होते. म्हणुन आम्ही सिध्द केले की $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5: $\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सिध्द करा.

उकल: या विरुध्द आपण असे मानु कि, $\sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे. म्हणून a आणि $b(\neq 0)$ पुर्णांक अशाप्रकारे आढळतात कि, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

समजा 1 सोडून a आणि b चे सामाईक अवयव आहेत. नंतर, आम्ही सामाईक अवयवाने भागाकार करू आणि समजा a आणि b हे सह-अविभाज्य आहेत म्हणून

$$\therefore b\sqrt{3} = a$$

दोन्ही बाजुला वर्ग करून आणि मांडणी करून आपल्याला मिळते $3b^2 = a^2$

म्हणून, 3 ने a^2 ला भाग जातो. प्रमेय 5.3 नुसार a ला 3 ने भाग जातो हे समजते. म्हणून आम्ही असे लिहू शकतो $a = 3c$ जेथे c हा एक पुर्णांक. a ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळेल

$$\therefore 3b^2 = 9c^2 \text{ अर्थात } b^2 = 3c^2$$

अर्थात b^2 ला 3 ने भाग जातो अणि म्हणून b ला 3 ने भाग जातो (प्रमेय 8.3 वापरून, $p = 3$ घेऊन)

म्हणून a आणि b चा कमीतकमी 3 हा सामाईक अवयव आहे. परंतु हा विरोधाभास आहे खरे तर a आणि b हे सहअविभाज्य आहेत. हा विरोधाभास आला आहे कारण $\sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे हे चुकिचे गृहित मानले होते.

म्हणून, आम्ही सिध्द केले की $\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

इयत्ता नववीमध्ये आम्ही असा उल्लेख केला आहे की,

- परिमेय आणि अपरिमेय संख्या यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही अपरिमेय संख्या असते.
- शून्यरहित परिमेय आणि अपरिमेय संख्या यांचा गुणाकार किंवा भागाकार अपरिमेय संख्या असते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6: $5 - \sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असे दाखवा.

उकल: या विरुद्ध आम्ही असे मानू कि, $5 - \sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे.

म्हणून, a आणि b $(b \neq 0)$ हे सहअविभाज्य काढू आम्हाला मिळेल $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$

म्हणून, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$

पुन्हा मांडणी करून आपल्याला मिळेल,

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$$

a आणि b पुर्णांक आहेत. आपल्याला मिळेल $5 - \frac{a}{b}$ परिमेय आहे,आणि म्हणून $\sqrt{3}$ परिमेय आहे. परंतु हा विरोधाभास आहे. वास्तवात $\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

हा विरोधाभास आला आहे कारण $5 - \sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या हे चुकिचे गृहीत मानले होते.

म्हणून आम्ही सिध्द केले का $5 - \sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

उदाहरण 7: $3\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असे दाखवा

उकल: या विरुध्द आम्ही असे मानू कि $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या आहे. म्हणून, a आणि b $(b \neq 0)$ सह अविभाज्य काढू. $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

पुन्हा मांडणी करून आपल्याला मिळेल $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

म्हणून, 3a आणि b पुर्णांक आहेत, $\frac{a}{3b}$ परिमेय आहे आणि म्हणून $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे. परंतु, हा विरोधाभास आहे, वास्तवात $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

म्हणून, आम्ही सिद्ध केले की $3\sqrt{2}$ हो अपरिमेय संख्या आहे.

स्वाध्याय 1.2

1. $\sqrt{5}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असे सिध्द करा.
2. $3+2\sqrt{5}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असे सिध्द करा.
3. खालील संख्या अपरिमेय संख्या आहेत असे सिध्द करा.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

   हा आवर्ती दशांश किंवा अनावर्ती विस्तार असतो.

1.4 सारांश (Summary):

1. अंकगणितातील मुलभूत प्रमेय: प्रत्येक संयुक्त संख्या ही मुळ अवयवांच्या गुणाकार स्वरूपात व्यक्त करता येते आणि हे अवयवीकरण अद्वितीय आहे.
2. जर p ही मूळ संख्या असेल आणि a^2 ला p ने भाग जातो, तर a ला p ने भाग जातो जेथे a ही धन पुर्णांक आहे.
3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ या अपरिमये संख्या आहे हे सिध्द करणे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वाचकांसाठी सूचना

तुम्ही पाहिला आहात कि,

मसावी (p, q, r) × लसावि (p, q, r) ≠ p × q × r. जेथे p, q, r, धन पुर्णांक आहेत (उदाहरण 8 पहा). तथापि p, q, आणि r या तीन संख्यासाठी खालील सुत्र योग्य आहे.

$$\text{ल.सा.वि } (p, q, r) = \frac{p \times q \times r \times \text{म.सा.वि } (p, q, r)}{\text{म.सा.वि } (p, q). \times \text{म.सा.वि } (q, r). \times \text{म.सा.वि } (p, r)}$$

$$\text{म.सा.वि } (p, q, r) = \frac{p \times q \times r \times \text{ल.सा.वि } (p, q, r)}{\text{ल.सा.वि } (p, q). \times \text{ल.सा.वि } (q, r). \times \text{ल.सा.वि } (p, r)}$$

***

बहुपदी

POLYNOMIALS

C2Y4I5

2

2.1 परिचय:

इयत्ता IX मध्ये तुम्ही एक चलपद आणि त्याचे घातांक असलेल्या बहुपदींचा अभ्यास केला आहे याचे स्मरण करा. जर $P(x)$ ही x चलपद असलेली बहुपदी असेल तर $P(x)$ मधील x च्या मोठयात - मोठया घाताकांला $P(x)$ या बहुपदीची कोटी असे म्हणतात. उदा. $4x+2$ या बहुपदीमध्ये x या चलपदाची कोटी 1; $2y^2 - 3y + 4$ या बहुपदीमध्ये y या चलपदाची कोटी 2; $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ या बहुपदीमध्ये x या चलपदाची कोटी 3 आणि $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ या बहुपदीमध्ये u या चलपदाची कोटी 6 आहे. समीकरणे $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 - m^2x + 3}$ इत्यादीमध्ये बहुपदी नाहीत.

कोटी 1 असलेल्या बहुपदीला **रेषीय बहुपदी (linear polynomial)** म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $2x - 3$, $\sqrt{3x} + 5$, $4 + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$ इत्यादी या सर्व रेषीय बहुपदी आहेत. बहुपदी $2x + 5 - x^2$, x^3+1 इत्यादी या रेषीय बहुपदी नाहीत.

कोटी 2 असलेल्या बहुपदीला **वर्ग बहुपदी** (quadratic polynomial) म्हणतात. 'quadratic' हा शब्द 'quadrate' या शब्दापासून घेतला आहे. याचाच अर्थ 'square' असा होतो. $2x^2 + 5 - 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 - \sqrt{3x}$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}\,v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$, ही काही वर्ग बहुपदीची (ज्यांचा सहगुणक वास्तव संख्या आहे) उदाहरणे आहेत. सर्वसामान्यपणे x चलपदांची कोणतीही वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c$, जेथे a,b,c वास्तवसंख्या आणि $a \neq 0$ या स्वरूपात असते. कोटी 3 असलेल्या बहुपदीला **घन बहुपदी** (cubic polynomial) म्हणतात. $2 - x^3$, $\sqrt{2}\,x^3$, $3 - x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ ही घन बहुपदीची काही उदाहरणे आहेत. घन बहुपदीचा सर्वसामान्य नमुना आहे.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

येथे a, b, c, d या वास्तव संख्या आहेत आणि $a \neq 0$. आता बहुपदी $P(x) = x^2 - 3x - 4$ पाहू. जर $x = 2$ बहुपदीमध्ये घेतले तर आपल्याला मिळते $P(2) = (2)^2 - 3(2) - 4 = -6$, $x^2 - 3x - 4$ यामध्ये x च्या ऐवजी 2 घेऊन आपल्याला - 6 मिळाले. ही किंमत $x = 2$ घेऊन $x^2 - 3x - 4$ ची आहे. त्याचप्रमाणे $P(x)$ मध्ये $x = 0$ घेऊन, $P(0)$ ची किंमत -4 येते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जर $P(x)$ ही x ची बहुपदी आहे आणि k ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल तर $P(x)$ मध्ये x ऐवजी k घेतले तर $P(x)$ ची किंमत $x = k$ मिळते. त्याला $P(x)$ ची किंमत म्हणतात आणि ती P(k) ने दर्शवितात.

$P(x) = x^2 - 3x - 4$,

$x = -1$ घेतले तर किंमत किती असेल?

आपल्याला मिळेल

$P(-1) = (-1)^2 - \{3x(-1)\} - 4 = 0$

हे सुद्धा लक्षात ठेवा, $P(4) = (4)^2 - 3(4) - 4 = 0$

$P(-1) = 0$ आणि $P(4) = 0$, -1 आणि 4 ला वर्गबहुपदी $x^2 - 3x - 4$ ची शून्ये असे म्हणतात. सर्वसामान्यपणे, वास्तव संख्या K ला बहुपदी $P(x)$ ची शून्ये असे म्हणतात जर $P(K) = 0$ असेल.

रेषीय बहुपदीची शून्ये कशी काढली जातात हे तुम्ही इयत्ता IX च्यावर्गात अगोदरच शिकला आहात. उदाहरण जर K हा $p(x) = 2x + 3$ चा शून्य आहे. तर $P(k) = 0$ आपल्याला मिळेल. $2k + 3 = 0$ म्हणून $k = \frac{-3}{2}$. सामान्यपणे, K हा $P(x) = ax + b$ चा शून्य आहे. तर $p(k) = ak + b = 0$ म्हणून $k = \frac{-b}{a}$.

म्हणून रेषीय बहुपदी $ax + b$ चा शून्य आहे $\frac{-b}{a} = \frac{-(\text{स्थिरपद})}{x \text{ चा सहगुणक}}$

म्हणून, रेषीय बहुपदीचा शून्य हा त्याच्या सहगुणकाशी संबंधीत असतो. अशाच प्रकारे दुसऱ्या बहुपदीमध्ये सुद्धा असते का? उदा: वर्ग बहुपदीचे शून्य हे सुद्धा त्याच्या सहगुणकाशी संबंधीत आहे का?

या प्रकरणात आम्ही या प्रश्नांची उत्तरे देण्याचा प्रयत्न करू. आम्ही बहुपदींचा भागाकार अल्गोरिथम्' चा पण अभ्यास करणार आहोत.

2.2 बहुपदींच्या शून्यांचा भौमितीक अर्थ

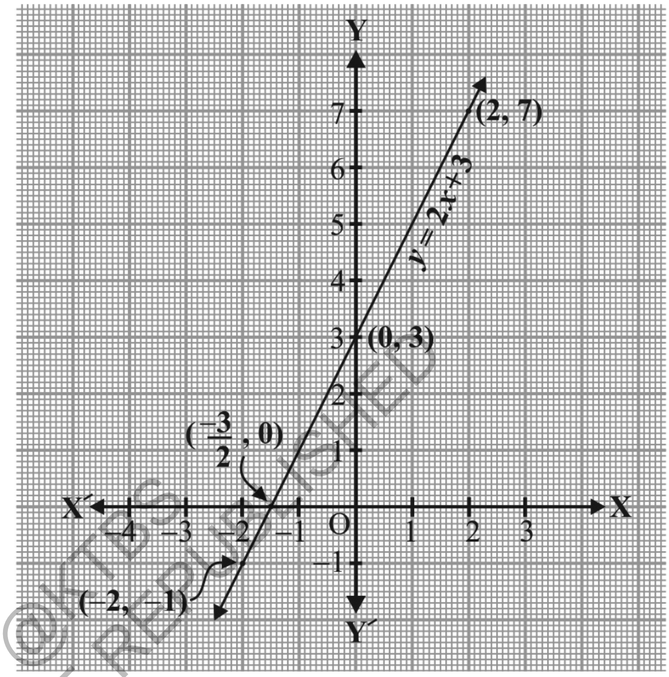
(Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomials)

तुम्हांला माहीत आहेच की, बहुपदी $P(x)$ चा शून्य वास्तव संख्या K आहे. जर $P(k) = 0$. परंतु बहुपदीची शून्ये इतकी महत्वाची का आहेत? याचे उत्तर देण्यासाठी प्रथम आपण रेषीय व वर्ग बहुपदीच्या **भौमितीक प्रतिकृती** आणि त्यांच्या शून्याचा भौमितीक अर्थ पाहू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रथम रेषीय बहुपदी ax = b पाहू, (a $\neq$ 0). इयत्ता IX मध्ये शिकला आहात की y = ax + b चा आलेख एक सरळ रेषा असते. उदाहरणर्थ y = 2x + 3 चा आलेख एक सरळ रेषा असून ती (-2, -1) आणि (2.7) या बिंदुतून जाते.

x	-2	2
y = 2 x + 3	-1	7



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 2.1

आकृती 9.1 वरून y= 2x + 3 हा आलेख x - अक्षाला x = -1 आणि x = -2 यांच्या मध्यभागी छेदतो म्हणजेच बिंदू $(-\frac{3}{2}, 0)$

तुम्हाला हे सुद्धा माहीत आहे कि 2x + 3 चे शून्य $-\frac{3}{2}$ आहे. म्हणूनच बहुपदी 2x + 3 चे शून्य हे x - अक्षाचा सहनिर्देशक असतो. जेथे y=2x+3 हा आलेख x - अक्षाला छेदतो.

सामान्यपणे, रेषीय बहुपदी ax + b, (a $\neq$ 0) ला y = ax + b हा आलेख सरळरेषा आहे जो x - अक्षाला एका बिंदूत छेदतो. तो बिंदू $(-\frac{b}{a}, 0)$, म्हणून रेषीय बहुपदी ax + b, (a $\neq$ 0) ला बरोबर एकच शून्य आहे तो म्हणजे y = ax + b आलेख x अक्षाला ज्या बिंदूत छेदतो त्या बिंदूचा x सहनिर्देशक होय.

आता आपण वर्ग बहुपदीच्या शून्यांचा भौमितीक अर्थ पाहू. वर्ग बहुपदी x^2 - 3x - 4 पहा. पहिल्यांदा आपण y = x^2 - 3x - 4* चा आलेख कसा दिसतो ते पाहू. आता y = x^2 - 3x - 4 च्या काही किंमती तक्ता 2.1 मध्ये दिल्या आहेत.

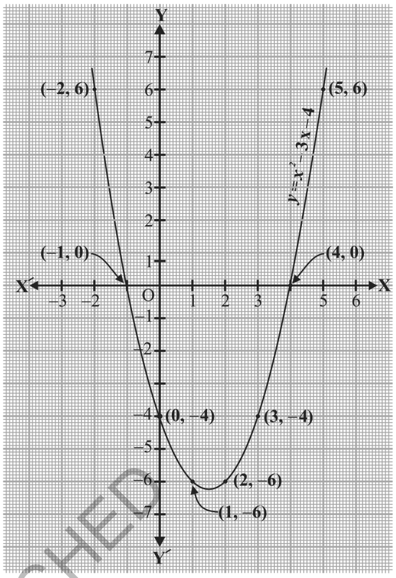
तक्ता 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = x^2 - 3x - 4	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

* वर्ग किंवा घन बहुपदींचे आलेख विद्यार्थ्यांकडून काढून घेण्यासाठी नाहीत. तसेच त्याची तपासणीही आवश्यक नाही.

जर आम्ही वर दिलेले बिंदू आलेख पेपरवर घेऊन आलेख काढला तर तो आकृती 2.2 प्रमाणे दिसेल.

कोणत्याही वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ चा आलेख $y = ax^2 + bx + c$ या समीकरणाशी संबंधीत आहे हा एक तर वरच्या बाजुला उघडा जसा $\cup$ किंवा खालच्या बाजुला उघडा जसा $\cap$ या आकारापैकी एक आकार असतो. जेथे $a < 0$ किंवा $a > 0$ (या दोन्ही वक्रभागांना अन्वस्त किंवा परवलय (Parabola) असे म्हणतात.)



आकृती 2.2

तक्ता 2.1 पहा -1 आणि 4 ही वर्गबहुपदीची शून्ये आहेत हे लक्षात ठेवा. आकृती 9.2 मध्ये -1 आणि 4 हे बिंदुचे सहनिर्देशक आहेत. जेथे $y = x^2 - 3x - 4$ हा आलेख x - अक्षाला छेदतो. म्हणून वर्ग बहुपदी $x^2 - 3x - 4$ ची शून्ये ही बिंदूतील x - सहनिर्देशक आहेत, जेथे $y = x^2 - 3x - 4$ हा आलेख x - अक्षाला छेदतो.

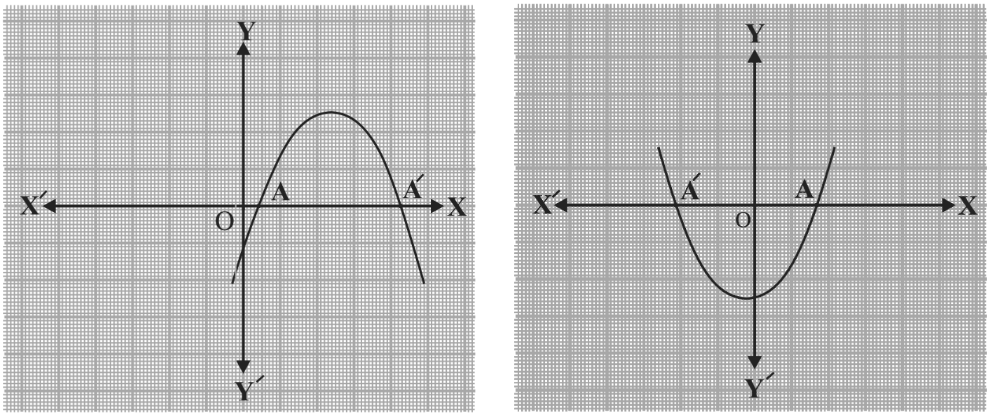
हे तत्व कोणत्याही वर्ग बहुपदीसाठी सत्य आहे. म्हणून, वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ची शून्ये ही बिंदूतील बहुमुल्य x - सहनिर्देशक आहेत जेथे अन्वस्त (parabola) हा $y = ax^2 + bx + c$ ला x - अक्षाला छेदतो.

$y = ax^2 + bx + c$ च्या आलेखाच्या आकाराबाबत वरील निरीक्षणानुसार खालील तीन स्थिती घडू शकतात.

स्थिती (i) : येथे आलेख x-अक्षाला A आणि A^1 या दोन भिन्न बिंदूत छेदतो.

या स्थितीत A आणि A^1 चे सहनिर्देशक हे वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c$ ची दोन शून्ये आहेत. (आकृती 2.3 पहा)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

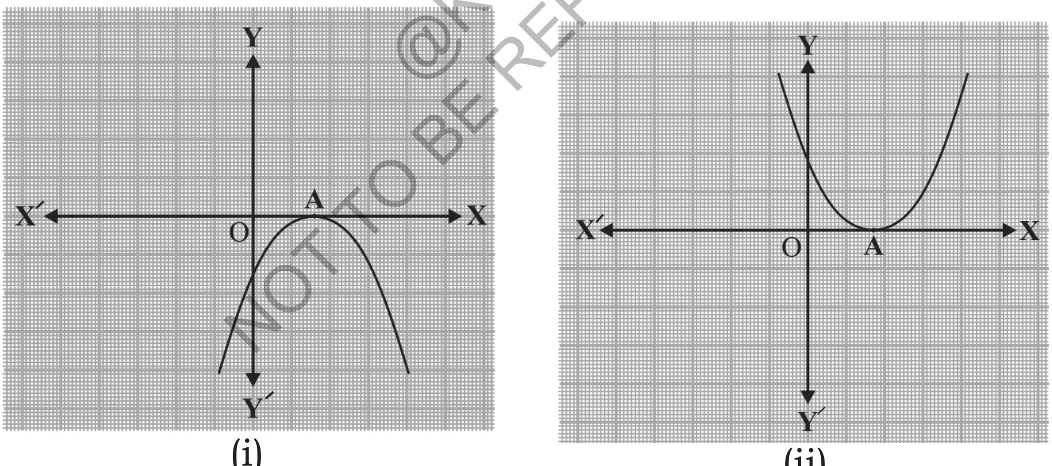


(i) (ii)

आकृती 2.3

स्थिती (ii) : येथे आलेख x-अक्षाला बरोबर एका बिंदूत छेदतो. अर्थात दोन संपाती बिंदू म्हणून स्थिती (i) मधील दोन बिंदू A आणि A^1 येथे एक संपात होऊन एक बिंदू A बनतो (आकृती 2.4 पहा.)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

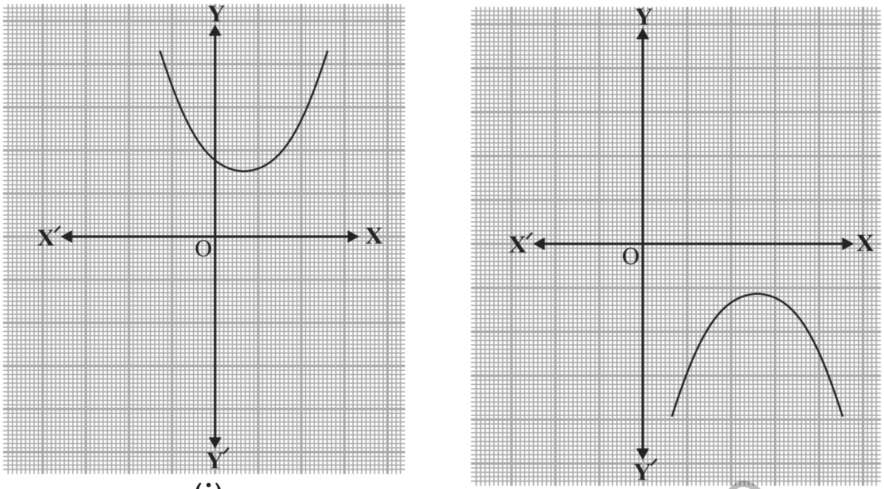


(i) (ii)

आकृती 2.4

या स्थितीत A चा x - सहनिर्देशक वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c$ चे केवळ एकच शून्य आहे.

स्थिती (iii) : येथे आलेख एकतर x-अक्षाच्या पूर्ण वर किंवा पूर्ण खाली आहे (आकृती 2.5 पहा)



आकृती 2.5

म्हणून, या स्थितीत बहुपदी $ax^2 + bx + c$ ला शून्ये नाहीत. म्हणून, तुम्ही पाहिला असणारच की, वर्ग बहुपदीला एकतर दोन शून्ये किंवा दोन समान शून्ये (1 शून्य) किंवा शून्ये नाहीत. याचा अर्थ असा होतो की 2 घातांक असलेल्या बहुपदीला नेहमी दोन शून्ये असतात.

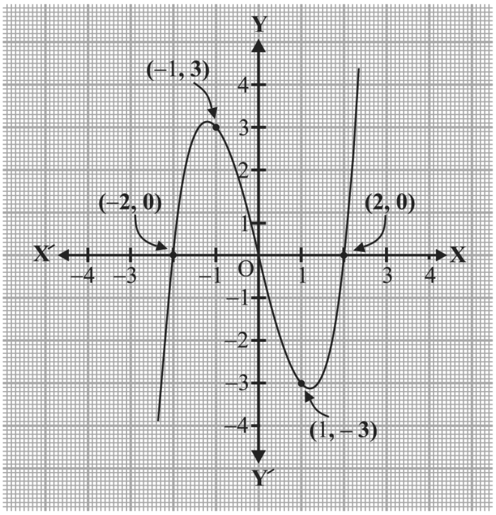
आता, बहुपदीच्या शून्याविषयी भौमितीक अर्थ तुम्ही कसा अपेक्षित करू शकता ? ते आता पाहू घनबहुपदी $x^3 - 4x$ पहा. $y = x^3 - 4x$ चा आलेख कसा दिसतो. x च्या काही किंमतीना y च्या किंमतीबरोबर तक्ता 2.2 मध्ये दाखविल्या आहेत.

तक्ता 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

तक्त्यामधील बिंदू आलेख पेपरवर घेऊ आणि आलेख काढू. आपल्याला $y = x^3 - 4x$ चा आलेख आकृती 2.6 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे दिसेल.

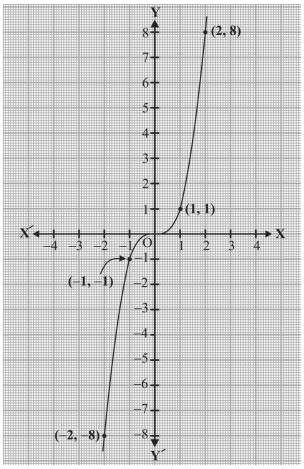
वरील तक्यावरून आपण पाहू शकतो कि -2, 0 आणि 2 हे घन बहुपदी $x^3 - 4x$ ची शून्ये आहेत. x -अक्षाला आलेख $y = x^3 - 4x$ जेथे छेदतो त्या बिंदूचा फक्त x - सहनिर्देशक आहे. म्हणून x -अक्षाला वक्ररेषा तीन बिंदूत छेदते त्या x - सहनिर्देशकांना बहुपदीची शून्ये म्हणतात.



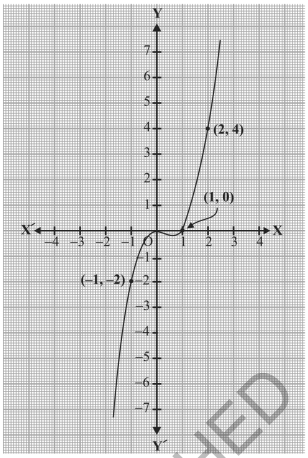
आकृती 2.6

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

आता आपण आणखी काही उदाहरणे घेऊ. घन बहुपदी x^3 आणि $x^3 - x^2$ घेऊ. $y = x^3$ आणि $y = x^3 - x^2$ चे आलेख अनुक्रमे आकृती 2.7 आणि आकृती 2.8 मध्ये आहेत.



आकृती 2.7



आकृती 2.8

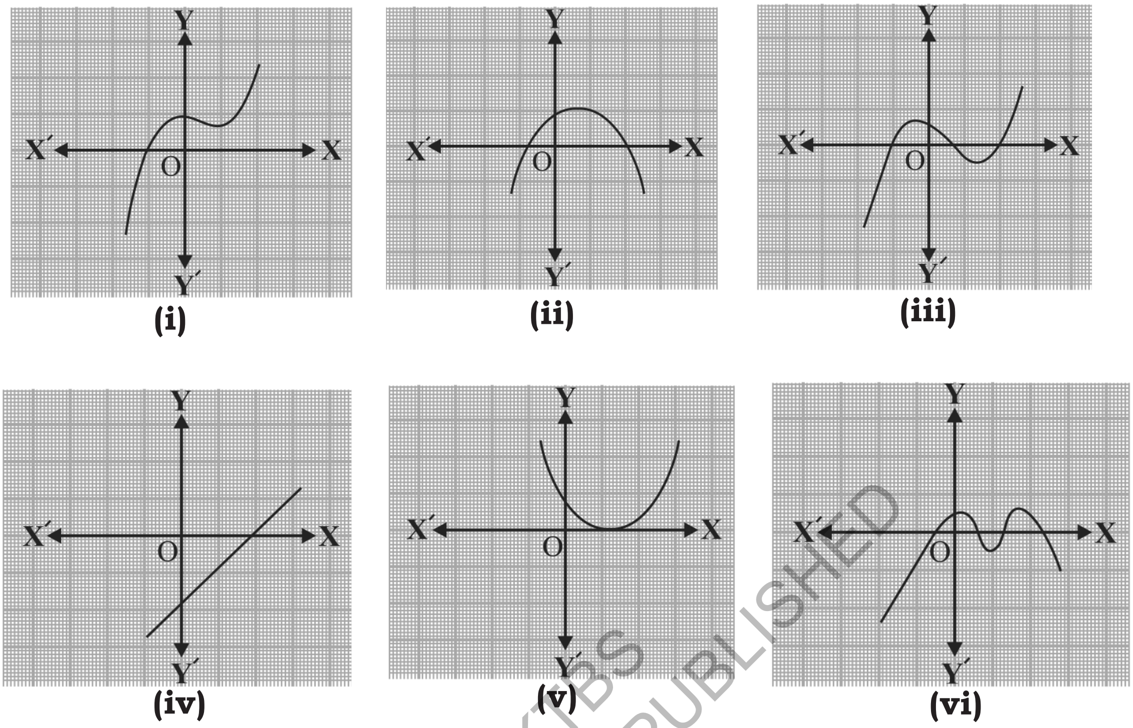
लक्षात ठेवा 0 हा फक्त बहुपदी x^3 चा शून्य आहे. आकृती 2.7 मध्ये सुद्धा तुम्ही पहा की 0 हा सहनिर्देशक असा बिंदू आहे की जेथे आलेख $y = x^3$ हा x-अक्षाला छेदतो. त्याचप्रमाणे, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, 0 आणि 1 ही फक्त बहुपदी $x^3 - x^2$ ची शून्ये आहेत. आकृती 2.8 वरून पहा कि, x चा बिंदू x-सहनिर्देशकाच्या किंमती आहेत. जेथे $y = x^3 - x^2$ हा आलेख x - अक्षाला छेदतो.

वरील उदाहरणावरून आपण पाहिले कि, कोणत्याही घन बहुपदीमध्ये जास्तीत जास्त 3 शून्ये असतात. दुसऱ्या शब्दात, घातांक 3 असलेल्या कोणत्याही बहुपदीला जास्तीत जास्त तीन शून्ये असतात.

टीप : सामान्यपणे, दिलेल्या n घातांक बहुपदी $P(x)$मध्ये, आलेख $y = P(x)$ हा x - अक्षाला जास्तीत जास्त n - बिंदूत छेदतो. म्हणून n घातांक बहुपदी $P(x)$ ला जास्तीतजास्त n शून्ये असतात.

उदाहरण 1 : आकृती 2.9 मध्ये दिलेला खालील आलेख पहा. प्रत्येक आलेखात $y = p(x)$ आहे जेथे बहुपदी आहे. प्रत्येक आलेखमधील $p(x)$ ची शून्याची संख्या शोधा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 2.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल :

(i) x - अक्षाला आलेख एकाच बिंदूत छेदतो म्हणून एकूण शून्यांची संख्या 1 आहे.

(ii) x - अक्षाला आलेख दोन बिंदूत छेदतो म्हणून एकूण शून्यांची संख्या 2 आहे.

(iii) एकूण शून्यांची संख्या 3 आहे. (का?)

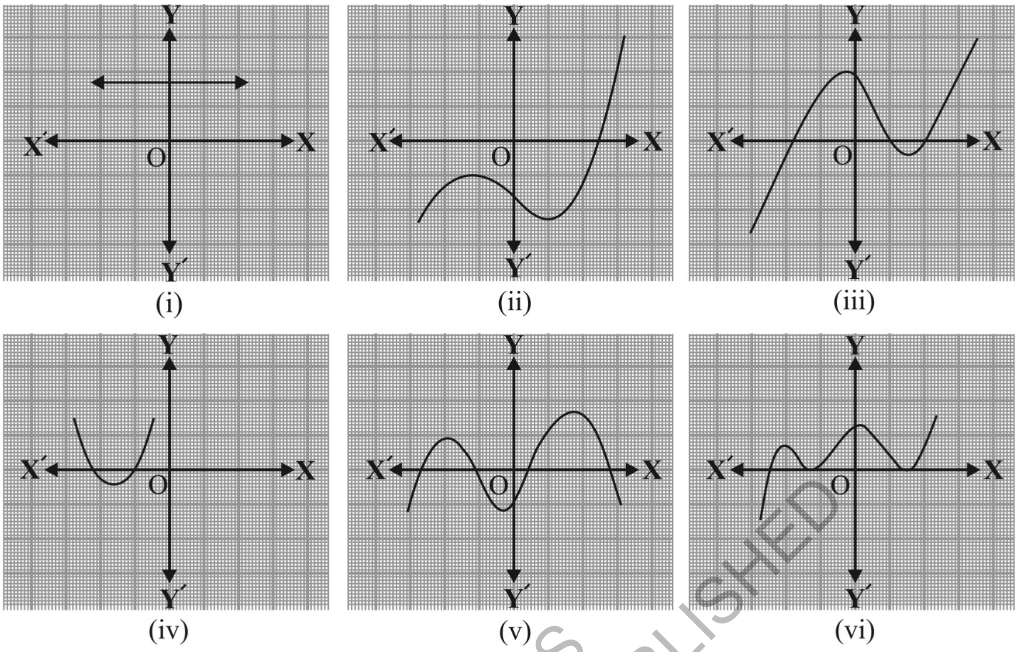
(iv) एकूण शून्यांची संख्या 1 आहे. (का?)

(v) एकूण शून्यांची संख्या 1 आहे. (का?)

(vi) एकूण शून्यांची संख्या 4 आहे. (का?)

स्वाध्याय 2.1

1. खालील आकृती 2.10 मध्ये काही बहुपदी $p(x)$ चा आलेख $y = p(x)$ दिला आहे. प्रत्येक आलेखमधील बहुपदी $p(x)$ च्या शून्यांची संख्या शोधा.



आकृती 2.10

2.3 शून्ये आणि बहुपदीचे सहगुणक यामधील संबंध

तुम्ही या अगोदर पाहिला आहात की, रेषीय बहुपदी $ax + b$ चे शून्य $-\frac{b}{a}$, आहे. भाग 9.1 मध्ये निर्माण झालेल्या शून्ये आणि वर्गबहुपदीचे सहगुणक यामधील संबंधाबाबत प्रश्नाचे उत्तर देण्याचा आम्ही आता प्रयत्न करू. यासाठी वर्ग बहुपदी समजा $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ घेऊ.

वर्गपदी मधील मधल्या पदाची फोड करून अवयवीकरण कसे करतात ते तुम्ही इयत्ता IX च्या वर्गात शिकला आहात. म्हणून, येथे दोन पदांची बेरीज ही मधील पद '$-8x$' येईल, आणि गुणाकार $6 \times 2x^2 = 12x^2$ येईल अशी फोड करण्याची गरज आहे. म्हणून आम्ही लिहू शकतो.

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)(x-3) \\ &= 2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

म्हणून, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ची किंमत 0 आहे जेव्हा $x - 1 = 0$ किंवा $x - 3 = 0$ अर्थात जेव्हा $x = 1$ किंवा $x = 3$ म्हणून, $2x^2 - 8x + 6$ ची शून्ये 1 आणि 3 आहेत.

निरिक्षण करा:

शून्यांची बेरीज $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

शून्यांचा गुणाकर $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{स्थिरपद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक.}}$

आता आपण आणखी एक वर्ग बहुपदी घेऊ. समजा $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ मधील पदाची फोड करण्याच्या पध्दतीने.

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2$$
$$= 3x\,(x + 2) - 1\,(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$$

पुढे, $3x^2 + 5x - 2$ ची किंमत शून्य येते. जेव्हा $3x - 1 = 0$

किंवा $x + 2 = 0$ अर्थात जेव्हा $x = \frac{1}{3}$ किवा $x = -2$

म्हणून $3x^2 + 5x - 2$ ची शून्ये $\frac{1}{3}$ आणि -2 आहेत.

निरीक्षण करा :

शून्यांची बेरीज $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शून्यांचा गुणकार $= = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{स्थिरपद}}{x^2 \text{ या सहगुणक}}$

सामान्यपणे, जर α^* आणि β^* हे वर्गबहुपदी $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, ची शून्ये आहेत तर तुम्हाला माहीत आहे की, $(x - \alpha)$ आणि $(x - \beta)$ हे $p(x)$ चे अवयव आहेत म्हणून,

$\therefore ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$ = जेथे k स्थिर आहे.

$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

दोन्ही बाजुला x^2, x आणि स्थिरपद यांची तुलना करून आपल्याला मिळते.

$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta)$ आणि $c = k\alpha\beta$ मिळते,

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

म्हणून, शून्यांची बेरीज $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शून्यांचा गुणाकार $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{स्थिरपद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

आणखी काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 2 : वर्ग बहुपदी $x^2 + 7x + 10$ ची शून्ये शोधा आणि शून्ये व सहगुणक यामधील संबंध पडताळा.

* α, β या ग्रीक शब्दाचा उच्चार अनुक्रमे अल्फा (Alpha) आणि बिटा (Beta) असा आहे. आणखी एक अक्षर आपण वापरणार आहोत γ चा उच्चार गॅमा '(gamma)' असा आहे.

उकल : $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

म्हणून, $x^2 + 7x + 10$ ची किंमत शून्य (0) जेव्हा

$x + 2 = 0$ किंवा $x + 5 = 0$ अर्थात् जेव्हा

$x = -2$ किंवा $x = -5$

म्हणून $x^2 + 7x + 10$ ची शून्ये -2 आणि -5 आहेत.

आता शुन्यांची बेरीज $= -2 + (-5) = -7 = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शुन्यांचा गुणाकार $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{स्थिरपद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

उदाहरण 3 : बहुपदी x^2-3 ची शून्ये शोधा आणि शून्ये व सहगुणक यामधील संबंध तपासून पहा.

उकल : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ हे नित्य समीकरण आठवा व हे वापरून आम्ही लिहू शकतो की,

$x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

म्हणून $x^2- 3$ ची किंमत 0 जेव्हा $x = \sqrt{3}$ किंवा $x = -\sqrt{3}$

म्हणून $x^2 - 3$ ची शून्ये $\sqrt{3}$ आणि $-\sqrt{3}$.

आता, शून्यांची बेरीज $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शून्यांचा गुणाकार $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{स्थिरपद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

उदाहरण 4 : शून्यांची बेरीज आणि गुणाकार अनुक्रमे -3 आणि 2 असेल तर वर्ग बहुपदी ओळखा.

उकल : वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c$, आणि याची शून्ये α आणि β मानू.

आपल्याला मिळेल.

$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$

आणि $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

जर $a = 1$, तर $b = 3$ आणि $c = 2$

म्हणून, दिलेल्या अटीमध्ये वर्ग-बहुपदी $x^2 + 3x + 2$ आहे.

कोणतीही वर्ग बहुपदी $K(x^2 + 3x + 2)$ या स्वरूपात आहे की नाही हे तुम्ही तपासू शकता.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे K वास्तव आहे.

आता घन बहुपदी पहा. घन बहुपदीची शून्ये आणि त्यांचे सहगुणक यामध्ये काही समान संबंध आहे असा विचार तुम्ही करत आहात का?

समजा $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$ साठी. $p(x) = 0$ हे तुम्ही तपासू शकता.

ज्याअर्थी, $p(x)$ ला जास्तीत जास्त तीन शून्ये आहेत. हिच $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ची शून्ये आहेत.

आता शून्यांची बेरीज $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ चा सहगुणक})}{x^3 \text{ चा सहगुणक}}$

शून्यांचा गुणाकर $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{स्थिरपद}}{x^3 \text{ चा सहगुणक}}$

तथापी, येथे आणखी एक संबंध आहे एकावेळी दोन शून्ये घेऊन शून्यांच्या गुणाकारांच्या बेरजेचा घेतल्यास आपल्याला मिळते,

$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = 8 - 1 + 2$

$= -7$

$= \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ चा सहगुणक}}{x^3 \text{ चा सहगुणक}}$

सामान्यपणे, हे सिद्ध होते की, जर घन बहुपदी $ax^3 + bx^3 + cx + d$ ची $\alpha, \beta,$ आणि γ ही शून्ये असतील तर,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

आता उदाहरणे पाहू-

उदाहरण 5* : घन बहुपदी $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ची शून्ये $3, -1, -\frac{1}{3}$ आहेत हे तपासा. आणि शून्ये आणि सहगुणक यामधील संबंध सुद्धा तपासा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीची तुलना $ax^3 + bx^3 + cx + d$ करुन आपल्याला मिळेल.

$a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$

$\therefore p(3) = 3 \times 3^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$= 81 - 45 - 33 - 3$

$= 0$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3$

$= -3 - 5 + 11 - 3$

$= 0$

$p(-\frac{1}{3}) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$

$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$

$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

$= 0$

म्हणून, 3, –1 आणि $-\frac{1}{3}$ ही $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ची शून्ये आहेत

म्हणून आम्ही घेऊ. $\alpha = 3$, $\beta = 1$ आणि $\gamma = -\frac{1}{3}$

आता,

$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3(-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = (3) \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 2.2

1. खालील वर्ग बहुपदीची शून्ये ओळखा. तसेच शून्ये आणि सहगुणक यामधील संबंध तपासून पहा.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. खाली दिलेल्या संख्या प्रत्येक वर्ग बहुपदीच्या शून्यांची अनुक्रमे बेरीज आणि गुणाकार आहेत तर ती वर्ग बहुपदी ओळखा.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

* परिक्षेच्या दृष्टीने उपयुक्त नाही.

2.5 सारांश (Summary) :

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. बहुपदीची कोटी 1, 2 आणि 3 असणाऱ्या बहुपदींना अनुक्रमे रेषीय, वर्ग आणि घन बहुपदी म्हणतात.
2. x चलपदाची वास्तव सहगुणक असलेली वर्गबहुपदी $ax^2 + bx + c$ स्वरूपात असते जेथे a, b,c या वास्तव संख्या त्याबरोबर $a \neq 0$.

* हा स्वाध्याय परिक्षेच्या दृष्टीने महत्वाचा नाही.

3. बहुपदी $p(x)$ ची शून्ये नेहमी बिंदूचा x– सहनिर्देशक असतात जेथे $y = p(x)$ हा आलेख x– अक्षाला छेदतो.
4. वर्ग बहुपदीला जास्तीत जास्त 2 शून्ये आणि घन बहुपदीला जास्तीतजास्त 3 शून्ये असतात.
5. जर वर्गबहुपदी $ax^2 + bx + c$ ची शून्ये α आणि β असतील तर

   $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

6. जर घनबहुपदी $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ची शून्ये α, β आणि γ असतील तर

   $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

   $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

   आणि $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* * *

दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणांची जोडी
PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

A9Q3S3

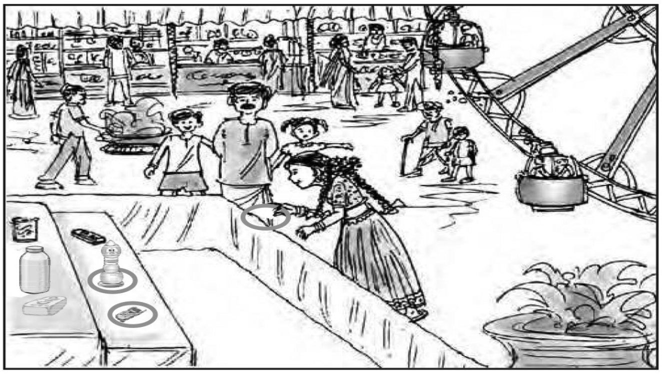
3

3.1 परिचय :

आपण या स्थितीशी कधीतरी आवश्य सामना केलेला आहे, जी एक खाली दिली आहे:

अखिला आपल्या गावातील जत्रेला गेली होती. ती चक्राकार पाळणा आणि हुपला (या खेळात एका फळीवर वस्तू ठेवलेल्या असतात व काही अंतरावरून रिंग फेकावी लागते. ती रिंग एखाद्या वस्तूवर संपूर्णतः पडली तर ती वस्तू तुमची होते.) खेळणार होती. जितक्या वेळा ती हुपला हा खेळ खेळली त्याच्या निम्मया वेळा ती चक्राकार पाळणा खेळली. जर प्रत्येक वेळी चक्राकार पाळणा खेळायला ₹ 3 आणि हुपला खेळ खेळायला प्रत्येक वेळी ₹ 4 पडत असतील आणि तिच्या जवळील ₹ 20 तिने यासाठी खर्च केले, तर ती किती वेळा चक्राकार पाळणा आणि किती वेळा हुपला खेळ खेळली हे तुम्ही कसे काढू शकाल?

वेगवेगळ्या घटनांचा विचार करून याचे उत्तर काढण्याचा प्रयत्न कराल! जर ती एक वेळा पाळणा खेळली हे शक्य आहे का? दोन वेळा पाळणा खेळली हे शक्य आहे का? का ती अनेक वेळा खेळली? अशाप्रकारे तुम्ही इयत्ता 9 वी मध्ये घेतलेले ज्ञान वापरून या स्थितीत दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे वापरून दर्शवू शकता.



आकृती 3.1

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ही प्रक्रिया समजून घेऊ.

आखिला चक्राकार पाळणा खेळली हे x वेळा मानू आणि हुपला खेळली हे y वेळा मानू. आता दिलेल्या घटना दोन समीकरणात दाखविता येतात.

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

या दोन समीकरणांची उकल आम्ही काढू शकतो का? हे सोडविण्याचे अनेक मार्ग आहेत जे आपण या प्रकरणात अभ्यासणार आहोत.

/मागील भागात आपण पाहीले की दोन रेषीय समीकरणाच्या आलेखीय पद्धतीने दोन रेषा कशा काढतात. तुम्ही हे ही पाहिला कि रेषा छेदते किंवा ती समांतर किंवा ती एकरेषीय असते त्यांना आपण प्रत्येक स्थितीत सोडवू शकतो? आणि जर हो तर कसे? या भागात आम्ही या प्रश्नाचे उत्तर भौमितीक दृष्टीने देण्याचा प्रयत्न करू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.2 दोन रेषीय समीकरणांच्या जोडीची आलेख पद्धतीने उकल:

दोन रेषीय समीकरणाच्या जोडीला कोणताही समाईक उकल नाही म्हणुन यांना **न जुळणारी (Inconsistent) रेषीय समीकरणांची जोडी** म्हणतात.

दोन रेषीय समीकरणांच्या जोडीला उकल असेल तर त्यांना **जुळणारी (A consistent) रेषीय समीकरणांची जोडी** म्हणतात.

रेषीय समीकरणांची जोडी जी समान असून अमर्याद अनेक उकल असतात अशा रेषीय समीकरणांच्या जोडीला **अवलंबून असणारी (dependent) रेषीय समीकरणांची जोडी** म्हणतात. लक्षात ठेवा अवलंबून असणारी समीकरणे नेहमी जुळणारी असतात.

दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणांच्या रेषेचे गुणधर्म आम्ही आता सारांश रूपात मांडू.

(i) एका बिंदूमध्ये रेषा छेदत आहेत. त्या स्थितीत समीकरणाच्या जोडीची उकल अद्वितीय असते (समीकरणाची जोडी जुळणारी असते)

(ii) रेषा समांतर आहेत त्या स्थितीत समीकरणाला उकल नसते (समीकरणांची जोडी न जुळणारी असते)

(iii) रेषा एकरेषीय आहेत त्या स्थितीत समीकरणाला अनेक उकल असतात (समीकरणांची जोडी अवलंबून असते)

उदाहरण 1,2 आणि 3 मध्ये मिळालेल्या रेषीय समीकरणाच्या जोडीकडे पाठीमागे जाऊ आणि भौमितीकरित्या कोणत्या प्रकारच्या जोडया आहेत त्याची नोंद करू.

(i) $x - 2y = 0$ आणि $3x + 4y - 20 = 0$ (रेषा छेदतात)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ आणि $4x + 6y - 18 = 0$ (रेषा एकरेषीय आहेत)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ आणि $2x + 4y - 12 = 0$ (रेषा समांतर आहेत)

आता सर्व तीन उदहरणातील $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ आणि $\frac{c_1}{c_2}$ या किंमती लिहून तुलना करू. यथे a_1, b_1, c_1 आणि a_2, b_2, c_2 यांना सामान्य स्वरूपात दिलेले समीकरणाचे सहगुणक म्हणतात.3.2

तक्ता 3.1

अ. क्र.	रेषांची जोडी	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	गुणोत्तर तुलना	भौमितीक प्रतीनिधीत्व	बैजीक स्पष्टीकरण
1	$x - 2y = 0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	छेदणाऱ्या रेषा	एक उकल (अद्वितीय)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	एकरेषीय रेषा	अनंत (अनेक) उकल
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेषा	उकल नाही

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील तक्त्यामध्ये तुम्ही निरीक्षण केला असेल कि जर रेषा समीकरणाचे प्रतीनिधित्व करत असेल तर

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

आणि $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

(i) छेदणाऱ्या $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) एकरेषीय $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) समांतर $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

वास्तविक, उलटी क्रिया सुद्धा कोणत्याही रेषेच्या जोडीला सत्य आहे. तुम्ही काही उदाहरणे घेऊन ते सिद्ध करू शकता.

आता आणखी काही उदाहरणे घेऊन स्पष्टीकरण करू.

उदाहरण 1 : समीकरणाची जोडी जुळणारी आहे का हे आलेखाने तपासा. जर आहे तर आलेखाने सोडवा.

$$x + 3y = 6 \qquad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \qquad (2)$$

उकल : समीकरण (1) आणि (2) चे आलेख काढण्यासाठी आम्ही प्रत्येक समीकरणाच्या दोन किंमती काढू आणि त्या तक्ता 3.2 मध्ये दिल्या आहेत.

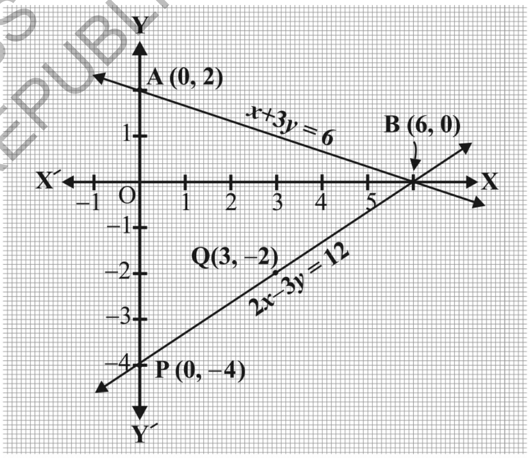
तक्ता 3.2

x	0	6
$y = \frac{6 - x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x - 12}{3}$	-4	-2

आलेख पेपरवर बिंदू A(0,2), B(6,0), P(0,-4), आणि Q (3, −2) काढून बिंदू जोडल्यास AB आणि PQ रेषा मिळतात हे आकृती 3.1 मध्ये दाखविले आहे.

AB आणि PQ या दोन्ही रेषांचा B (6, 0) हा बिंदू सामाईक आहे हे निरीक्षणावरून दिसते. म्हणून रेषांच्या जोडीची उकल आहे $x = 6$ अणि $y = 0$ म्हणून समीकरणाची जोडी जुळणारी आहे.



आकृती 3.1

उदाहरण 2 : खालील समीकरणांच्या जोडीला उकल नाही, एकच उकल किंवा अनेक उकल आहेत हे आलेखाने शोधा.

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

उकल : समीकरण (2) ला $\frac{5}{3}$ ने गुणून, आपल्याला मिळेल $5x-8y+1=0$. परंतू हे समीकरण (1) प्रमाणेच आहे.

शेवटी समीकरण(1) आणि (2) ची रेषा ही एकसंपाती आहे. म्हणून समीकरण (1) आणि (2) ला अनेक उकली आहेत. म्हणून आलेखावर काही बिंदू घेऊन तुम्ही सिद्ध करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : चंपाने कपड्याच्या सेलला जाऊन काही पॅन्ट आणि स्कर्ट खरेदी केले. जेव्हा तिच्या मैत्रिणिने विचारले की, त्यापैकी एक प्रत्येकी कितीला खरेदी केली? तेव्हा तिने उत्तरे दिले स्कर्टची एकूण संख्या ही एकूण खरेदी केलेल्या पॅन्टच्या संख्येच्या दुप्पटी पेक्षा 2 ने कमी आहे, आणि स्कर्टची एकूण संख्या ही एकूण खरेदी केलेल्या पॅन्टच्या संख्येच्या चार पट पेक्षा 4 ने कमी आहे चंपाने किती स्कर्ट आणि पँन्ट खरेदी केले हे काढण्यासाठी तिच्या मैत्रिणिला मदत करा.

उकल : पॅन्टची संख्या x आणि स्कर्टची संख्या y मानू, नंतर समीकरणे अशी तयार होतात.

$y = 2x - 2$ (1)

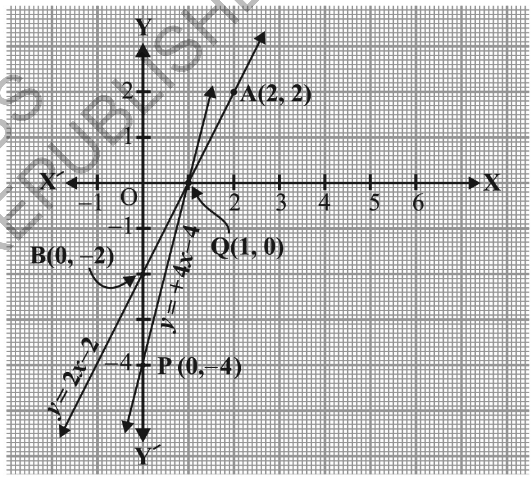
आणि $y = 4x - 4$ (2)

समीकरण (1) आणि (2) चा आलेख प्रत्येक समीकरणाच्या दोन किमती घेऊन काढू त्या तक्ता 3.3 मध्ये दिल्या आहेत.

तक्ता 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



आकृती 3.2

बिंदू आलेखवर घेऊन समीकरणाचे प्रतिनिधीत्व करणाऱ्या रेषा काढल्या हे आकृती 3.2 मध्ये दाखविले आहे.

दोन रेषा बिंदू (1,0) मध्ये छेदतात म्हणून $x = 1, y = 0$ हे रेषीय समीकरणाच्या जोडीची हवी असलेली उकल आहे. म्हणून तिने पँन्ट 1 खरेदी केली आणि स्कर्ट खरेदी केलेच नाहीत.

दिलेल्या उदाहरणातील अटी लागू पडतात का ते पडताळा.

स्वाध्याय 3.1

1. खालील उदाहरणातील रेषीय समीकरणांच्या जोडींची उकल आलेखाने शोधा.

   i) इयत्ता 10 च्या वर्गातील 10 विद्यार्थ्यांनी गणितच्या प्रश्नमंजुषेमध्ये भाग घेतला, जर मुलींची संख्या ही मुलांच्या संख्येपेक्षा 4 ने जास्त असेल तर प्रश्नमंजुषेमध्ये भाग घेतलेल्या एकूण मुले आणि मुलींची संख्या काढा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ii) 5 पेन्सिल आणि 7 पेन यांची मिळून किंमत आहे ₹ 50. आणि 7 पेन्सिल आणि 5 पेन यांची मिळून किंमत आहे ₹ 46 तर 1 पेन्सिल व 1 पेनची किंमत काढा.

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$, आणि $\frac{c_1}{c_2}$ गुणोत्तरे तुलना करून खालील रेषीय समीकरणांच्या जोड्यांच्या प्रतिनिधीत्व

करणाऱ्या रेषा एका बिंदूत छेदतात, समांतर आहेत किंवा एकरेषीय आहेत हे शोधा.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ आणि $\frac{c_1}{c_2}$ चे गुणोत्तर तुलना करून खालील रेषीय समीकरणाच्या जोडया सुसंगत (consistent) किंवा असंगत (Inconsisent) आहेत का ते ओळखा.

(i) $3x + 2y = 5 ; 2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8 ; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7 ; 9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11 ; -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8 ; 2x + 3y = 12$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. खालील रेषीय समीकरणांच्या कोणत्या जोड्या सुसंगत / असंगत आहेत? जर सुसंगत असतील तर त्यांची उकल आलेखाने काढा.

(i) $x + y = 5, 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8, 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0 \quad 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0 \quad 4x - 4y - 5 = 0$

5. एका आयताकृती बागेची लांबी ही तिच्या रूंदीच्या 4 m ने जास्त आहे. तिची अर्धपरिमिती 36 m असेल तर बागेची लांबी व रुंदी काढा.

6. $2x + 3y - 8 = 0$ हे रेषीय समीकरण दिले आहे. खालील प्रमाणे आलेखाची उकल येण्यासाठी दोन चलपदांचे आणखी एक रेषीय समीकरण लिहा.

(i) छेदणाऱ्या रेषा (ii) समांतर रेषा (iii) एकरेषीय रेषा.

7. समीकरण $x - y + 1 = 0$ आणि $3x + 2y - 12 = 0$ चा आलेख काढा. या दोन रेषा आणि x - अक्ष रेषांनी बनलेल्या त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे सहनिर्देशक ओळखा तसेच त्रिकोणाची आकृती छायांकित करा.

3.3 रेषीय समीकरणांची जोडी सोडविण्याची बैजीक पद्धत :

मागील भागात आपण रेषीय समीकरणांच्या जोड्या आलेख पद्धतीने कशा सोडवितात याची चर्चा केली. जेव्हा रेषीय समीकरणाची उकल ही त्यांचे सहनिर्देशक हे पुर्णांक नसतील जसे $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, (-1.75, 3.3), $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ इत्यादी तर आलेख पद्धत उपयोगाची नाही. अशाप्रकारचे सहनिर्देशक वाचताना चुका होण्याची जास्त शक्यता असते. उकल काढण्यासाठी आणखी वेगळी पद्धत आहे का? अनेक बैजीक पद्धती आहेत. ज्यांची आपण आता चर्चा करणार आहोत.

3.3.1 पर्यायी पद्धत (Substitution Method)

काही उदाहरणे घेऊन आम्ही पर्यायी पद्धत पाहू.

उदाहरण 4 : खालील समीकरणाची जोडी पर्यायी पद्धतीने सोडवा.

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

उकल :

पायरी 1 : आम्ही एक समीकरण घेऊ आणि एक चलपद एका बाजुला व इतर पदे एका बाजुला घ्या. समीकरण (2) घेऊन.

$$x + 2y = 3$$

आणि हे असे लिहा $\quad x = 3 - 3y \qquad (3)$

पायरी 2 : समीकरण (1) मध्ये x ची किमत घेऊन आपल्याला मिळते.

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$21 - 14y - 15y = 2$$

म्हणून $\quad -29y = -19$

म्हणून $\quad y = \frac{19}{29}$

पायरी 3 : समीकरण (3) मध्ये y ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळेल.

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$\therefore$ उकल $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$

$x = \frac{49}{29}$ आणि $y = \frac{19}{29}$ किंमत घालून समीकरण (1) आणि (2) लागू आहे हे तपासा.

पर्यायी पद्धत स्पष्ट समजण्यासाठी खालील पायऱ्या पहा:

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

पायरी 1 : एक चलपद समजा y ची किंमत ही दुसरे चलपद समजा x शी काढा जी तुम्हाला सोईस्कर आहे.

पायरी 2 : y ची किंमत दुसऱ्या समीकरणात घ्या आणि एक चलपद समीकरणात रूपांतर करा म्हणजे चलपद x सोडविता येते. काहीवेळा खाली दिलेली उदाहरणे 9 आणि 10 मध्ये चलपद नाही असे वाक्य मिळते. जर हे वाक्य बरोबर असेल तर रेषीय समीकरणाची जोडी अनंत उकली आहेत हे सिद्ध होते. जर वाक्य चुक असेल तर रेषीय समीकरणाची जोडी न जुळणारी म्हणजे विसंगत आहे.

पायरी 3 : पायरी 2 मध्ये मिळालेल्या समीकरणात x (किंवा y) ची किंमत घाला आणि पायरी (1) वापरून दुसऱ्या चलपदाची किंमत मिळवा.

टीप : रेषीय समीकरण सोडविण्यासाठी एका चलपदाची किंमत दुसऱ्या चलपदात रूपांतर होते म्हणूनच या पद्धतीला **पर्यायी पद्धत** म्हणतात.

उदाहरण 5 : स्वाध्याय 3.1 मधील उदाहरण 1 पर्यायी पद्धतीने सोडवा.

उकल : आफताब आणि त्याची मुलगी यांचे वय अनुक्रमे s आणि t मानू.

तर रेषीय समीकरणाची जोडी जी वरील घटना दर्शविते.

$s - 7 = 7(t - 7)$, म्हणजे $s - 7t + 42 = 0$ (1)

आणि $S + 3 = 3(t + 3)$, म्हणजे $s - 3t = 6$ (2)

समीकरण (2) वापरून आपल्याला मिळते.

$s = 3t + 6$

समीकरणा (1) मध्ये s ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळते.

$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$

$4t = 48$ मिळते $t = 12$

समीकरण (2) मध्ये t ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळते,

$s = 3(12) + 6 = 42$

म्हणून, आफताब आणि त्याची मुलगी यांची वये अनुक्रमे 42 आणि 12 वर्षे आहेत.

दिलेल्या उदाहरणातील अटी लागू पडतात का ते उत्तराने पडताळा.

उदाहरण 6 : भाग 3.3 मधील उदाहरण 2 पहा. 2 पेन्सील आणि 3 खोडरबर यांची किमत ₹ 9 आणि 4 पेन्सिल आणि 6 खोडरबर यांची किंमत ₹ 18 आहे. तर 1 पेन्सिल व 1 खोडरबरची किंमत काढा.

उकल : रेषीय समीकरणाची जोडी अशी बनते.

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

समीकरण $2x + 3y = 9$ मध्ये आम्ही x ची किमत

y स्वरूपात घेऊन आपल्याला मिळते

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \qquad (3)$$

आता, समीकरण (2) मध्ये x ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळते.

$$x = \frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

म्हणून, $18 - 6y + 6y = 18$

म्हणून, $18 = 18$

y च्या किंमतीसाठी हे वाक्य बरोबर आहे. तथापि आपणाला y ची नक्की किंमत उकल म्हणून मिळाली नाही. त्यामुळे आम्हाला x ची पण नक्की किंमत मिळत नाही. दिलेली दोन्ही समीकरणे समान असल्यामुळे ही समस्या उद्‌भवली आहे. म्हणून समीकरण (1) आणि (2) याना अनंत उकली आहेत. निरीक्षण करा की समान उकल आपल्याला आलेखाने सुद्धा मिळाली आहे (भाग 3.2 मधील आकृती 3.3 पहा) आपणाला पेन्सिल आणि खोडरबरची कोणतीही बरोबर किंमत मिळाली नाही कारण तेथे अनेक सामाईक उकली दिलेल्या स्थितीत आहेत.

उदाहरण 7 : रेल्वे रूल एकमेकाना क्रॉस होतील का?

उकल : रेषीय समीकरणाची जोडी तयार होते,

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 18 \qquad (2)$$

समीकरण (1) वरून x ची किमत y स्वरूपात घेऊन

$$x = 4 - 2y$$

आता समीकरण (2) मध्ये x ची किंमत घेऊन आपल्याला मिळते.

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

म्हणून $8 - 12 = 0$

म्हणून $-4 = 0$

हे विधान चुक आहे.

म्हणून, समीकरणांना समाईक उकल नाही म्हणून दोन रेल्वे रूळ एकमेकाना क्रॉस होत नाहीत.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 3.2

1. खालील रेषीय समीकरणाच्या जोड्या पर्यायी पद्धतीने सोडवा.

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{2} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ आणि $2x - 4y = -24$ सोडवा आणि $y = mx + 3$ मधील m ची किंमत शोधा.

3. खालील उदाहरणातील रेषीय समीकरणाच्या जोडयांची उकल पर्यायी पद्धतीने सोडवा.

(i) दोन संख्येमधील फरक 26 आहे आणि एक संख्या ही दुसऱ्या संख्येच्या तिप्पट आहे. तर त्या संख्या ओळखा.

(ii) दोन पूरक कोनामधील मोठा कोन हा लहान कोनापेक्षा 18^0 ने मोठा आहे. तर लहान कोन ओळखा.

(iii) एका क्रिकेट संघाच्या प्रशिक्षकाने 7 बॅट आणि 6 बॉल ₹ 3800 ला विकत घेतल्या. नंतर त्याने 5 बॅट आणि 3 बॉल ₹ 1750 ला विकत घेतल्या. तर प्रत्येक बॅट व बॉलची किंमत काढा.

(iv) एका शहरात टॅक्सीचे भाडे गेलेल्या अंतरासाठी ठराविक (विशिष्ट) आहे. 10km अंतरासाठी भाडे ₹ 105 आणि 15 km अंतरासाठी भाडे ₹ 155 आहे. तर ठराविक भाडे व 1 km चे भाडे किती आहे? एखाद्या माणसाला 25 km अंतर प्रवास करण्यासाठी किती भाडे द्यावे लागेल?

(v) एका अपूर्णाकांत अंश व छेदामध्ये 2 मिळविले तर $\frac{9}{11}$ हा अपूर्णांक मिळतो. जर अंश व छेदामध्ये 3 मिळविले तर $\frac{5}{6}$ हा अपूर्णाक मिळतो. तर तो अपूर्णांक ओळखा.

(vi) पाच वर्षानंतर जेकॉबचे वय त्यांच्या मुलाच्या वयाच्या 3 पट होईल. पाच वर्षापूर्वी जेकॉबचे वय त्यांच्या मुलाच्या वयाच्या 7 पट होते. तर त्यांची आजची वये काय असतील?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.3.2 लोप पद्धत (निरसन पद्धत) (Elimination Method)

आता एक चलपद काढून टाकणे ही पद्धत पाहू. पर्यायी पद्धतीपेक्षा ही पद्धत जास्त सोईची आहे. ही पद्धत कशी कार्य करते ते पाहू.

उदाहरण 8 : दोन व्यक्तींच्या उत्पन्नाचे गुणोत्तर 9:7 आहे आणि खर्च करण्याचे गुणोत्तर 4:3 आहे. जर ते महिन्याला ₹ 2000 ठेवत असतील तर प्रत्येकाचे एका महिन्याचे उत्पन्न किती?

उकल : दोन व्यक्तींचे उत्पन्न अनुक्रमे ₹ $9x$ व ₹ $7x$ आणि खर्च ₹ 4y व ₹ 3y मानू.
दिलेल्या स्थितीनुसार समीकरण तयार होते.

$9x - 4y = 2000$ (1)

आणि $7x - 3y = 2000$ (2)

पायरी 1 : समीकरण (1) ला 3 ने आणि समीकरण (2) ला 4 ने गुणून त्यामुळे y - चा सहगुणक समान होतो आपल्याला समीकरण मिळते-

$27x - 12y = 6000$ (3)

$28x - 12y = 8000$ (4)

पायरी 2 : समीकरण (4) मधून समीकरण (3) वजा केल्यास y लोप होते कारण y चे सहगुणक समान होतात म्हणून आपल्याला मिळते.

$(28x - 27x) - (12y + 12y) = 8000 - 6000$

म्हणून, $x = 2000$

पायरी 3 : समीकरण (1) मध्ये x ची किंमत घेऊन, आपल्याला मिळते -

$9 (2000) - 4y = 2000$

म्हणून, $y = 4000$

म्हणून, समीकरणाची उकल $x = 2000$, $y = 4000$ आहे. म्हणून दोन व्यक्तींचे एका माहिन्याचे उत्पन्न अनुक्रमे ₹ 18000 आणि ₹14,000 आहे.

पडताळा : 18000 : 140000 = 9 : 7

तसेच खर्च करण्याचे गुणोत्तर = 18000 - 2000 : 14000 - 2000

= 16000 : 12000 = 4 : 3

टीप :

1. वरील उदाहरण सोडविण्यासाठी वापरलेल्या पद्धतीला **लोप पद्धत** म्हणतात. कारण आम्ही प्रथम एक चलपद लोप केले. त्यामुळे एक चलपद रेषीय समीकरण मिळाले. उदाहरणात, आपण y लोप केले. आम्ही x लोप केले तरी चालते. असा प्रयत्न तुम्ही करा.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2. तुम्ही पर्यायी पद्धत किंवा आलेख पद्धत सुद्धा हे उदाहरण सोडाविण्यासाठी वापरू शकता. कोणती पद्धत तुम्हांला योग्य वाटते ते पहा व प्रयत्न करा.

आता आपण लोप पद्धतीच्या पायऱ्या पाहू :

पायरी 1 : प्रथम दोन्ही समीकरणांना योग्य अशा शून्येत्तर संख्येने गुणल्यास एक चलपदाचा सहगुणक (x किंवा y) समान होतो.

पायरी 2 : नंतर एका समीकरणातून दुसरे समीकरण बेरीज किंवा बजाबाकी करा त्यामुळे एक चलपद लोप होते. जर तुम्हाला एक चलपद समीकरण मिळाले तर तिसऱ्या पायरीकडे चला.

जर पायरी 2 मध्ये आम्हाला विधान खरे मिळाले तर त्यामध्ये चलपद नसते तेव्हा मुळ समीकरणा ची जर पायरी 2 मध्ये, आम्हांला चुक विधान मिळाले तर त्यामध्ये चलपदे नसते तर मुळ समीकरणाच्या जोडीला अनंत अनेक उकली असतात.

जर पायरी 2 मध्ये आम्हाला चुक विधान मिळाले, त्यामध्ये चलपद नसते तर मुळ समीकरणाच्या जोडीला उकल नसते म्हणून ती समीकरणे असंगत आहेत.

पायरी 3 : एक चलपद समीकरण (x किंवा y) सोडवा म्हणजे त्यांची किंमत मिळते.

पायरी 4 :x (किंवा y) ची किंमत मुळ समीकरणात घेऊन दुसऱ्या चलपदांची किंमत मिळते.

आता हे समजुन घेण्यासाठी काही उदाहरणे आपण सोडवू.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 9 : लोप पद्धत वापरून खालील रेषीय समीकरणांच्या जोडीच्या शक्य तेवढ्या किंमती काढा.

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

उकल :

पायरी 1 : समीकरण (1) ला 2 ने आणि समीकरण (2) ला 1 ने गुणले असता x चे सहगुणक समान होतील त्यामुळे आपल्याला समीकरण असे मिळते

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$
$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

पायरी 2 : समीकरण (3) मधून समीकरण (4) वजा करा.

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

म्हणून $0 = 9$ हे विधान चुक आहे.

म्हणून समीकरणाच्या जोडीला एक ही उकल नाही.

उदाहरण 10 : एका दोन अंकी संख्येतील स्थानमूल्यांची बेरीज आणि त्या संख्येच्या अंकांची अदला-बदल करून स्थानमूलांची बेरीज 66 आहे. जर दोन अंकामध्ये 2 चा फरक असेल तर ती संख्या ओळखा?

उकल : समजा पहिल्या संख्येतील दशक अंक x आणि सुटे अंक y मानू. म्हणून पहिली संख्या $10x + y$ अशी लिहू शकतो. विस्तारीत स्वरूपात (उदाहरण 56=10(5) + 6)

जेव्हा अंक उलट करतो तेव्हा x हा सुटे आणि y हा दशक अंक बनतो. ही संख्या विस्तारीत स्वरूपात आहे $10y + x$ (उदाहरण जे 56 उलट केल्याने आपल्याला मिळते 65 = 10(6) + 5)

दिलेल्या अटीनुसार

$(10x + y) + (10y + x) = 66$

$11(x + y) = 66$

$x + y = 6$ (1)

आपल्याला त्यामधील फरक 2 दिलेला आहे म्हणून

$x - y = 2$ (2)

किवा $y - x = 2$ (3)

जर $x - y = 2$ तर लोप पद्धतीने समीकरण (1) व समीकरण (2) सोडविल्यास आपल्याला मिळतात

$x = 4$ आणि $y = 2$

या क्रियेत आपल्याला संख्या मिळते 42

जर $y - x = 2$ तर लोप पद्धतीने समी (1) व समीकरण (3) सोडविल्यास आपल्याला मिळतात

$x = 2$ आणि $y = 4$ या क्रियेत आपल्याला संख्या मिळते 24

42 आणि 24 या त्या दोन संख्या आहे.

पडताळा : येथे 42 + 24 = 66 आणि 4 - 2 = 2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 3.3

1. खालील रेषीय समीकरणांच्या जोड्या पर्यायी पद्धत आणि लोप पद्धत वापरून सोडवा.

(i) $x + y = 5$ आणि $2x - 3y = 4$

(ii) $3x + 4y = 10$ आणि $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ आणि $9x = 2y + 7$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ आणि $x - \frac{y}{3} = 3$

2. खालील उदाहरणातील रेषीय समीकरणांच्या जोडयांची उकल (समीकरण अस्तित्वात असेल तर) लोप पद्धतीने काढा:

(i) जर आम्ही अंशामध्ये 1 मिळविला आणि छेदामधून 1 वजा केला तर अपूर्णांक 1 बनतो. जर आम्ही छेदामध्ये 1 मिळविला तर तो $\frac{1}{2}$ बनतो. तर तो अपूर्णांक कोणता?

(ii) 5 वर्षापूर्वी नुरी ही सोनुच्या वयाच्या तीन पटीने मोठी होती. 10 वषानंतर नुरी ही सोनुच्या वयाच्या दुप्पट मोठी असेल तर आता नुरी आणि सोनूचे वय काय असेल?

(iii) दोन अंकी संख्येच्या अंकाची बेरीज 9 आहे. तसेच या संख्येची 9 पट या संख्येच्या अंकाची अदला बदल करून येणाऱ्या संख्येच्या दुपटी इतकी आहे तर ती संख्या काढा.

(iv) मीना बॅंकेत ₹ 2000 काढण्यास गेली. तिने कॅशियरला सांगितले की ₹ 50 आणि ₹ 100 च्याच नोटा द्या. मीनाला एकूण 25 नोटा मिळाल्या. तर तिला ₹ 50 व ₹ 100 च्या प्रत्येकी किती नोटा मिळाल्या ?

(v) एका प्रसिद्ध लायब्ररीची फी पहिल्या तीन दिवसाला स्थिर (ठराविक) रक्कम आणि पुढील प्रत्येक दिवसाला ज्यादा रक्कम आहे. सरीताने 7 दिवसासाठी ₹ 27 भरले, त्याचवेळी सुशाने 5 दिवसासाठी ₹ 21 भरले. तर स्थिर रक्कम व एका दिवसाची ज्यादा रक्कम काढा.

3.4 सारांश (Summary) :

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे अशी सोडविली जातात -

i) आलेख पद्धत ii) बैजीक पद्धत

2. आलेख पद्धत : दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणांच्या जोड्यांचा आलेख हा दोन रेषा दर्शवितो-

i) एका बिंदूमध्ये रेषा छेदत असतील तर तो बिंदू अद्वितीय उकल दर्शवितो या स्थितीत समीकरणांची जोडी सुसंगत असते.

ii) जर रेषा एकरेषीय असतील तर तेथे अनंत अनेक उकली असतात. रेषेवरील प्रत्येक बिंदू ही उकल असते. या स्थितीत समीकरणांची जोडी सुसंगत असते.

iii) जर रेषा समांतर असतील तर समीकरणाच्या जोड्यांना उकल नसते. या स्थितीत् समीकरणाची जोडी असंगत असते.

3. बैजीक पद्धत : या पद्धतीत रेषीय समीकरणांची उकल काढण्यासाठी खालील पद्धतीची चर्चा केली.

i) पर्यायी पद्धत ii) लोप पद्धत

4. जर रेषीय समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ आणि $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दिलेले असेल तर खालील स्थिती येतात -

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ या स्थितीत समीकरणांची जोडी सुसंगत असते

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ या स्थितीत रेषीय समीकरणांची जोडी असंगत असते.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ या स्थितीत रेषीय समीकरणांची जोडी दुसऱ्यावर अवलंबून आणि सुसंगत असते.

5. अशा अनेक स्थिती असतात की गणिती स्वरूपात दोन समीकरणे असतात पण ती रेषीय नसतात. परंतु त्यांना दुरूस्त करून त्यांचे रेषीय समीकरणात रूपांतर करता येते.

***

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

वर्गसमीकरणे
QUADRATIC EQUATIONS

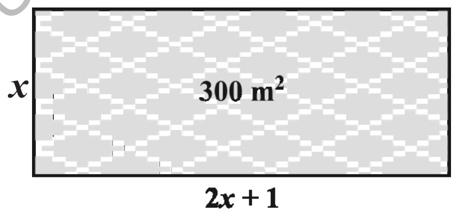
H5P2P5

4

4.1 परिचय:

प्रकरण 9 मध्ये तुम्ही वेगवेगळ्या प्रकारच्या बहुपदींविषयी शिकला आहात. $ax^2+bx+c=0, a\neq0$ या स्वरूपात असणारी त्यापैकी एक बहुपदी आहे. जेव्हां आपण ही बहुपदी शून्याशी समान करतो- तेव्हा आपणास वर्ग समीरकण मिळते. आपल्या नित्य जीवनात सुध्दा वर्ग समीकरणांचे विस्तृत असे उपयोग आहेत.

उदाहरणार्थ , समजा एका धर्मादाय विश्वस्ताने 300 m^2 क्षेत्रफळाच्या जमिनीवर एक प्रार्थना सभागृह बांधण्याचा निर्धार केलेला आहे. त्याची लांबी त्याच्या रूंदीच्या दुप्पटीपेक्षा 1m अधिक आहे. तर सभागृहाची, लांबी व रुंदी किती असेल ?



आकृती 4.1

सभागृहाची रूंदी x m. मानू

तर त्याची लांबी $(2x+1)$ m. होईल.

त्याचे क्षेत्रफळ = $x(2x+1)$ m^2

$x(2x+1) = 300$ (क्षेत्रफळ दिलेले)

ही माहिती आकृती 4.1 मध्ये दर्शविली आहे.

$\therefore 2x^2+x = 300$

$2x^2+x-300=0$ हे वर्ग समीकरण असून सभागृहाची रुंदी या समीकरणाची पूर्तता करते.

अनेक लोकांचा असा समज आहे की बॅबीलोनीयन्सनी सर्वप्रथम वर्गसमीकरणे सोडविली, उदा. धन बेरजेवरून व धन गुणाकारावरून x दोन धन संख्या कशा काढतात हे त्यांना माहीत

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

होते आणि हा प्रश्न $x^2+px+q = 0$ या स्वरूपांतील वर्गसमीकरण सोडविण्याशी समान होता. ग्रीक गणितज्ञ युक्लिड याने भौमितीक दृष्टीकोनाचा विकास करून लांबी शोधून काढली हे दुसरे कांही नसून वर्ग समीकरणे सोडविण्याची उकल आहे. सामान्य स्वरूपातील वर्ग समीकरणे सोडविण्याचे श्रेय नेहमी प्राचीन गणित तज्ञ ब्रम्हगुप्त (इ.स. 598-665) आणि श्रीधराचार्य (इ.स.1025) यांना जाते. ब्रम्हगुप्तने $ax^2+bx = c$ च्या स्वरूपातील वर्गसमिकरणे सोडविण्याचे नक्की सुत्र दिले. आता हे वर्गसुत्र म्हणून ओळखले जाते. अरब गणित तज्ञ अल-ख्वारिझ्मी (सुमारे इ.स.800) यांनी सुद्धा वर्ग समीकरणांचा वेगवेगळ्या प्रकाराने अभ्यास केला होता. अब्राहम बार हिय्याहा-नासी यांनी इ.स 1145 मध्ये युरोपात प्रकाशित केलेल्या त्यांच्या लिबर एम्बार्डोरम (Liberembardorum) या पुस्तकात वेगवेगळ्या वर्ग समीकरणांच्या संपूर्ण उकली दिलेल्या आहेत.

या प्रकरणांत तुम्ही वर्गसमीकरणे, त्यांची बीजे काढण्याच्या विविध पध्दती आणि दैनंदिन जीवनात वर्गसमीकरणांचा उपयोग यांचा अभ्यास करणार आहात.

4.2 वर्ग समीकरणे (*Quadratic Equations*)

x हे चलपद असणारे $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपातील वर्गसमीकरण आहे, येथे a,b वा c या वास्तव संख्या असून $a \neq 0$. उदा $2x^2 + x - 300 = 0$ हे वर्ग समीकरण आहे त्याचप्रमाणे $2x^2 + 3x + 1 = 0$, $4x + 3x^2 + 2 = 0$ आणि $1 - x^2 + 300 = 0$ ही सुद्धा वर्गसमीकरणे आहेत. तथापी $P(x) = 0$ च्या स्वरूपातील कोणतेही समीकरण जेथे $P(x)$ ही 2 घातांकाची बहूपदी आहे त्याला वर्गसमीकरण म्हणतात. परंतु $P(x)$ ची घटकपदे त्यांच्या घातांकाच्या उतरत्या क्रमात मांडली तर आपणांस वर्गसमीकरणाचा प्रमाणित नमुना मिळतो.

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ याला वर्गसमीकरणाचा प्रमाणित (Standard) नमुना म्हणतात.

आपल्याला गणितातील अनेक क्षेत्रात वर्गसमीकरणे उपलब्ध होतात.

कांही उदाहरणांचा आपण विचार करू.

उदाहरण 1: खालील घटना गणितामध्ये मांडा.

(i) जॉन आणि जीवंता या दोघाकडे मिळून 45 गोटया आहेत. दोघांच्याही प्रत्येकी 5 गोट्या हरवितात. आता त्यांच्याजवळ असणाऱ्या गोटयांच्या संख्यांचा गुणाकार 124 आहे तर त्यांच्याजवळ सुरवातीला किती किती गोट्या होत्या ते आम्हाला शोधावे लागेल ?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) एका गृहउद्योगामध्ये-एका दिवसाला कांही संख्येंची खेळणी बनवितात. प्रत्येक खेळण्यांचा उत्पादनखर्च (₹ मध्ये) 55 मधून दर दिवशी तयार होणाऱ्या खेळण्यांची संख्या वजा केल्यास मिळतो. एका ठराविक दिवशी एकूण उत्पादन खर्च ₹ 750 झाला, तर त्या दिवशी तयार झालेल्या खेळण्यांची संख्या काढावयाची आहे.

उकल (1) समजा जॉनकडे x गोट्या आहेत असे मानू

तर जीवंतीकडे असणाऱ्या गोट्यांची संख्या $45 - x$ (का ?)

5 गोट्या हरवल्यानंतर जॉनकडे राहिलेल्या गोटया = $x - 5$

5 गोट्या हरवल्यानंतर जीवंतीकडे राहिलेल्या गोट्या = $45 - x - 5 = 40 - x$

म्हणून, त्यांचा गुणाकार = $(x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

$-x^2 + 45x - 200 = 124$ (गुणाकार = 124)

$-x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$

$-x^2 + 45x - 324 = 0$

$+x^2 - 45x + 324 = 0$

म्हणून दोघाकडे असणाऱ्या गोट्या म्हणजे, $x^2 - 45x + 324 = 0$. या वर्ग समीकरणाची सत्यता सिद्ध करतात. ही गणितातील मांडणी आहे.

(ii) एका दिवसाला उत्पादित होणारी खेळणी x मानू

∴ त्या दिवसाचा एका खेळण्याचा उत्पादन खर्च (₹) = $55-x$

∴ त्या दिवसाचा एकूण उत्पादन खर्च = $x(55-x)$

∴ $x(55-x) = 750$

$55x-x^2=750$

$-x^2+55x-750=0$

$x^2-55x+750=0$

यावरून एका दिवसाला उत्पादीत खेळण्यांची संख्या वर्गसमीकरण $x^2 - 55x + 750 = 0$. या समीकरणाची सत्यता पूर्ण करते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हीच गणितातील मांडणी आहे.

उदाहरण 2 : खालील समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत का ते तपासा

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(x+3)= x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

उकळ :

(i) डावी बाजू (LHS) $=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

म्हणून $(x-2)^2+1=2x-3$ खालीलप्रमाणे लिहिल्यास

$x^2-4x+5=2x-3$

म्हणजे, $x^2-6x+8=0$

हे $ax^2-bx+c=0$ या प्रमाणित नमुन्यात आहे

∴ दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.

(ii) $x(x+1)+8=x^2+x+8$ आणि $(x+2)(x-2)=x^2-4$

म्हणून $x^2+x+8=x^2-4$

म्हणजे $x+12=0$

हे समीकरण $ax^2+bx+c=0$ या स्वरूपात (प्रमाणित नमुन्यात) नाही म्हणून दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण नाही

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) येथे डावी बाजू LHS = $x(2x+3)+2x^2+3x$

तर $x(2x+3)=x^2+1$

$2x^2+3x=x^2+1$ हे असे लिहिले जाते.

म्हणून $x^2+3x-1=0$

हे समीकरण $ax^2+bx+c=0$ या प्रमाणित नमुन्यात आहे

म्हणून दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण आहे

(iv) येथे डावी बाजू (LHS) $=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

म्हणून $(x+2)^3=x^3-4$ असे लिहिले जाते

$x^3+6x^2+12x+8=x^3-4$

$6x^2 + 12x + 12 = 0$ किंवा $x^2 + 2x + 2 = 0$

हे $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपात आहे

म्हणून दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण आहे

टीप : काळजीपुर्वक पहा उदा (ii) मध्ये दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण आहे असे वाटते परंतू ते वर्गसमीकरण नाही.

उदा (iv) मध्ये दिलेले समीकरण घन समीकरण (3 घातांकाचे समीकरण) आहे असे वाटते, परंतु त्याचे रूपांतर वर्गसमीकरणात होते. येथे आपणास दिसून येते की, दिलेल्या समीकरणांना सरळरूप दिल्यानंतरच ते वर्गसमीकरण आहे किंवा नाही हे ठरवावे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 4.1

1. खालील समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत का ते तपासा.

(i) $(x+1)^2=2(x-3)$

(ii) $x^2-2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

(vi) $x^2+3x+1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

(iv) $x^3-4x^2-x+1 = (x-2)^3$

2. खालील उदाहरणे वर्गसमीकरणाच्या रूपात मांडा.

(i) एका आयताकृती जमिनीचे क्षेत्रफळ 528 m^2 आहे त्याची लांबी रूंदीच्या दुप्पटीपेक्षा 1m ने अधिक आहे तर आयताकृती जमिनीची लांबी व रूंदी आपणास काढावयाची आहे.

(ii) दोन क्रमवार धन संख्यांचा गुणाकार 306 आहे. तर त्या संख्या शोधा

(iii) रोहनच्या आईचे वय सध्या त्याच्या वयापेक्षा 26 वर्षानी जास्त आहे 3 वर्षानंतर त्यांच्या वयांचा गुणाकार 360 होईल. तर रोहनचे आजचे वय आपणांस शोधावे लागेल.

(iv) एक आगगाडी 480 कि.मी. अंतर एक समान वेगाने जाते जर आगगाडीचा वेग 8 कि.मी/तास ने कमी केल्यास तेच अंतर जाण्यासाठी 3 तास जादा वेळ लागतो आपणांस गाडीचा वेग काढण्याची गरज आहे.

4.3 अवयव पध्दतीने वर्गसमीकरणांची उकल

(Solution of a Quadratic Equation by Factorisation)

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ या वर्गसमीकरणाचा विचार करू. जर आपण समीकरणाच्या डाव्या बाजूस (LHS) x चलपदाच्या ठिकाणी 1 घेतल्यास $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = उजवी बाजू (RHS) मिळते. आम्ही म्हणू शकतो की 1 हे $2x^2 - 3x + 1 = 0$ या समीकरणाचे बीज (root) आहे. 1 हे $2x^2 - 3x + 1$ वर्ग बहूपदीचे शून्य .आहे.

सामान्यपणे α या वास्तव संख्येला वर्गसमीकरणाचे बीज म्हणतात. जर $a\alpha^2 - b\alpha + c = 0$ तर α या वास्तव संख्येला वर्गसमीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ $a \neq 0$ याचे बीज (root) असे म्हणतात. आम्ही असेही म्हणू शकतो कीं, **$x = \alpha$ ही वर्गसमीकरणाची उकल आहे किंवा α वर्ग समीकरणाची सत्यता करतो**

लक्षात घ्या : वर्ग बहुपदीची शून्ये आणि $ax^2 + bx + c$ या वर्गबहुपदीची शून्ये आणि $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे समान असतात.

तुमच्या लक्षात आले असेल की प्रकरण 9 मध्ये, वर्ग बहूपदीना दोन शून्ये असतात त्याप्रमाणेच वर्गसमीकरणांची सुद्धा दोन बीजे असतात.

वर्ग बहुपदीचे अवयव त्यांच्या मधल्या पदाची फोड करून काढणे हे आम्ही इयत्ता 9 वी मध्ये शिकलेलो आहे. या ज्ञानाचा उपयोग करून आम्ही वर्गसमीकरणाची बीजे काढू शकतो.

उदाहरण 3 : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे अवयव पद्धतीने काढा.

उकळ : प्रथम मधले पद $-5x$ ची $-2x - 3x$ अशी फोड करा.

तर $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$

आता, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ हे $(2x-3)(x-1) = 0$ असे लिहू शकतो

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ यासाठीच्या x च्या किंमती या $(2x-3)(x-1) = 0$ शी समान आहेत.

म्हणून, $2x - 3 = 0$ किंवा $x - 1 = 0$

आता $2x - 3 = 0$ म्हणजेच $x = \frac{3}{2}$ देते आणि $x - 1 = 0$ म्हणजेच $x = 1$.

$x = \frac{3}{2}$ अणि $x = 1$ या समीकरणाच्या उकल आहेत. दुसऱ्या शब्दात 1 आणि $\frac{3}{2}$ ही $2x^2 - 5x + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे आहेत.

ही बीजे दिलेल्या समीकरणाची बीजे आहेत याचा पडताळा पहा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लक्षात घ्या : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे आपण $2x^2 - 5x + 3$ या राशीचे दोन अवयव काढून आणि त्या प्रत्येक अवयवाची बरोबरी शून्यांशी केली.

उदाहरण 4 : $6x^2 - x - 2 = 0$ या वर्ग समीकरणाची बीजे अवयव पध्दतीने काढा.

उकल : $6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$

$= (3x - 2)(2x + 1)$

$6x^2 - x - 2 = 0$ य़ा वर्गसमीकरणाची बीजे म्हणजे x च्या किमंती हेाय.

जशा $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

$\therefore \quad 3x - 2 = 0$ किंवा $2x + 1 = 0$

म्हणजे, $x = \frac{2}{3}$ किंवा $x = -\frac{1}{2}$

म्हणून $6x^2 - x - 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे $\frac{2}{3}$ आणि $-\frac{1}{2}$ ही आहेत.

उदाहरण 5 : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे काढा

उकल : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$

$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$

समीकरणाची बीजे म्हणजे x च्या किंमती हेाय

$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \sqrt{3x} - \sqrt{2} = 0$

$\therefore x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

तर ही बीजे सारखीच आहेत कारण दोन्ही अवयव सारखेच ($\sqrt{3}x - \sqrt{2}$) आहेत म्हणून प्रत्येक पुन्हा आलेल्या अवयवासाठी ($\sqrt{3}x - \sqrt{2}$) एक याप्रमाणे बीजांची दोनदा पुनरावृत्ती होते.

$\therefore\ 3x^2 - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे समान $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ अशी आहेत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 : विभाग 4.1 मधील चर्चेतील प्रार्थना सभागृहाची मापे काढा

उकल: 10.1 मध्ये सभागृहाची रूंदी x m आहे तर x हे वर्गसमीकरण $2x^2 + x - 300 = 0$ याची सत्यता सिध्द करणे. अवयव पध्दतीचा अवलंब केल्यास आपण समीकरण खालीलप्रमाणे मांडू शकतो.

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

म्हणजे $(2x + 25)(x - 12) = 0$

म्हणून दिलेल्या समीकरणाची बीजे $x = 12$ किंवा $x = -12.5$ अशी आहेत परंतू x ही समागृहाची रूंदी आहे ती ऋण असू शकत नाही

म्हणून सभागृहाची रूंदी 12 m आहे

आणि त्याची लांबी = $2x + 1 = 2 \times 12 + 1 = 25$ m.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 4.2

1. खालील वर्गसमीकरणांची बीजे अवयव पध्दतीने काढा

   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 - x - 6 = 0$

   (iii) $\sqrt{2}\,x^2 - 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. उदाहरण 1 मध्ये दिलेली गणिते सोडवा,

3. दोन संख्यांची बेरीज 27 आणि त्यांचा गुणाकार 182 आहे, तर त्या धन संख्या शोधा.

4. दोन क्रमवार संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 365 आहे, तर त्या संख्या शोधा.

5. एका काटकोन त्रिकोणाची लंबउंची त्याच्या पायाच्या लांबीपेक्षा 7 सें.मी.ने कमी आहे, जर कर्णांची बाजू 13 सें.मी असल्यास काटकोन त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजू काढा.

6. एका गृहउद्योग कारखान्यात दररोज काही कुंभारी वस्तु बनवितात. एक दिवस असे आढळून आले की प्रत्येक वस्तुचा उत्पादन खर्च (₹ मध्ये) हा त्या दिवशी उत्पादित वस्तुच्या दुप्पटीपेक्षा 3 ने अधिक आहे जर त्या दिवशीचा एकूण उत्पादन खर्च ₹ 90 असेल तर तयार होणाऱ्या वस्तुंची संख्या व प्रत्येक वस्तुची किंमत काढा.

बीजांचे स्वरूप :

या अगोदर $ax^2 - bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे पाहिली आहेत ती खाली दिल्याप्रमाणे.

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

जर $b^2 - 4ac > 0$ आपणांस दोन स्वतंत्र बीजे मिळतात.

$$\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \text{ आणि } \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

जर $b^2 - 4ac = 0$, तर $x = \frac{-b}{2a} \pm 0$

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ किंवा } x = -\frac{b}{2a}$$

म्हणून $ax^2 - bx + c = 0$ या समीकरणाची दोन्ही बीजे $-\frac{b}{2a}$ आहेत.

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, $ax^2 - bx + c = 0$ या समीकरणाची या बाबतीत दोन समान बीजे आहेत

जर $b^2 - 4ac$ तर समीकरणाची दोन बीजे स्पष्ट असून वास्तव असतात

जर $b^2 - 4ac < 0$ तर येथ दोन वास्तव संख्या नाहीत ज्याचे $b^2 - 4ac$ समीकरणाची बीजे वास्तव नाहीत

$ax^2 - bx + c = 0$ याच्या बीजांचे स्वरूप $b^2 - 4ac$ च्या राशीच्या किंमतीने शोधता येते म्हणून $b^2 - 4ac$ ला वर्ग समीकरणाचे **विवेचक** (discriminant) म्हणतात.

1) जर $b^2 - 4ac > 0$ समीकरणाची बीजे स्पष्ट व वास्तव आहेत.

2) जर $b^2 - 4ac = 0$ समीकरणाची दोन वास्तव व समान बीजे आहेत.

3) जर $b^2 - 4ac < 0$ समीकरणाची बीजे वास्तव नाहीत (संकीर्ण आहे)

काही उदाहरणे पाहूं

उदाहरण 7 : $2x^2 - 4x + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे विवेचक शोधा आणि बीजांचे स्वरूप सांगा.

उकल : दिलेले समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ या स्वरूपात असून $a = 2, b = -4$ आणि $c = 3$

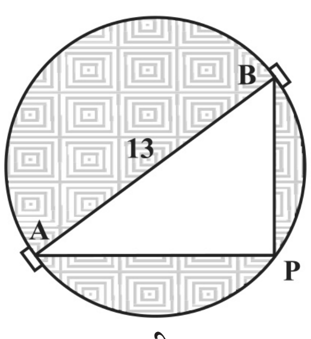
$\therefore$ विवेचक $b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3)$

$= 16 - 24 = -8 < 0$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांची बीजे वास्तव नाहीत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 8 : 13 m व्यासाच्या वर्तुळाकृती बागेत एक खांब एका कडेवर अशा रीतीने उभा केला आहे की व्यासाच्या दोन्ही बाजूस असणाऱ्या फाटका पासून त्याचे अंतरामध्ये 7 m चा फरक आहे. असे शक्य आहे का ? असल्यास दोन्ही फाटकापासून किती अंतरावर खांब उभा केला आहे?



आकृती 4.2

उकल : प्रथम आकृती 4.2 प्रमाणे आकृती काढू समजा P हा खांबाचा एक बिंदू आहे. खांबाचे B फाटकापासून अंतर BP = x मानू P बिंदू पासून दुसऱ्या फाटकाचे अंतर AP मानू. आता दोन्ही फाटकापासून खांबांच्या अंतरामधील फरक = AP – BP किंवा (B P– AP) = 7 m

$\therefore \quad AP = (x + 7)$ m

आता AB=13 मी ABव्यास आहे (का ?)

$\angle APB = 90^0$ (का ?)

$\therefore \quad AP^2 + PB^2 = AB^2$ (पायथ्यागोरस तत्व)

$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$x^2 + 14x + 49 + x^2 - 169$

$2x^2 + 14x - 120 = 0$

म्हणून x अंतर समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ ची सत्यता देते विवेचकाचा विचार करू.

$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

दिलेल्या समीकरणाची दोन वास्तव बीजे मिळतात व त्यामुळे बागेच्या सिमेवर खांब उभा करता येतो.

$x^2 + 7x - 60 = 0$ वर्ग समीकरणा सोडवून वर्ग सूत्राने

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$\therefore \quad x = 5$ किंवा -12

x हे खांब आणि फाटक B मधील अंतर आहे ते धन असले पाहीजे.

म्हणून $x = -12$ हे सोडून देण्यांत येते $\therefore x = 15$

यावरून खांब B फाटकापासून 5 m अंतरावर आणि A फाटकापासून 12 m अंतरावर उभा आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 9 : $3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$ या वर्गसमीकरणाचे विवेचक शोधा आणि त्या समीकरणाच्या बीजांचे स्वरूप जर ते वास्तव असतील तर शोधा.

उकल : येथे $a = 3, b = -2$, आणि $c = \frac{1}{3}$

म्हणून विवेचक $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3}$

$= 4 - 4 = 0$

म्हणून दिलेल्या वर्ग समीकरणाची दोन्ही बीजे समान व वास्तव आहेत.

बीजे $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a}$ आहेत

म्हणजे $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ म्हणजे $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

स्वाध्याय 4.3

1. खाली दिलेल्या वर्ग समीकरणांच्या बीजांचे स्वरूप ओळखा जर बीजे वास्तव असतील तर किंमत काढा.

   (i) $2x^2-3x+5=0$ (ii) $3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$

   (iii) $2x^2+6x+3=0$

2. खालील वर्ग समीकरणाची बीजे समान आहेत, तर K ची किंमत काढा.

   (i) $2x^2-Kx+3=0$ (ii) $Kx(x-2)+6=0$

3. एका आंब्याच्या वृक्षवाटीकायी लांबी तिय्या रूंदीच्या दुप्पट असून क्षेत्रफळ 800 m^2 असले तर ती आऱ्यलाकृती वृक्षवारीका तयार करने शक्य आहे का? असेल तर लांबी व रूंदी काढा.

4. खालील परिस्थिती शक्य आहे? जर असेल तर त्यांची आजची वये काढा. दोन मित्रांच्या वयांची बेरीज 20 वर्षे आहे. 4 वर्षापूर्वी त्यांच्या वयाचा गुणाकार 48 वर्षे आहे.

5. 80 m परिमिती आणि 400 m^2 क्षेत्रफळ असणारे आयताकृती बाग तयार करणे शक्य आहे काय? जर असेल तर त्याची रूंदी आणि लांबी काढा.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

4.5 सारांश (Summary)

या प्रकरणांत तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. x चलपद असणारे वर्गसमीकरणाचे सामान्य स्वरूप $ax^2 + bx + c = 0$ जेये a, b व c वास्तव संख्या आहेत आणि $a \neq 0$.

2. वास्तव संख्या K हे वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ चे बीज आहे. जर $ak^2 + bk + c = 0$. $ax^2 + bx + c$ या बहुपदीची शून्ये व वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ची बीजे समान असतात.

3. जर आपण $ax^2+bx+c, a \neq 0$ चे दोन रेषीय अवयवात रूपांतर केले तर वर्गसमीकरणांची बीजे त्याच्या अवयवांची बरोबरी शुन्यांशी करून मिळतात.

4. वर्ग सूत्र : वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ची बीजे $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ या सुत्राने काढता येतात $b^2 - 4ac > 0$ या अटीवर.

5. $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची बीजे

1. दोन स्पष्ट आणि वास्तव असतात जर $b^2 - 4ac > 0$
2. दोन समान बीजे असतात जर $b^2 - 4ac = 0$ आणि
3. वास्तव संख्या नसतात जर $b^2 - 4ac < 0$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वाचकासाठी टीप

लेखी प्रश्नांच्या बाबतीत उकलमध्ये आलेली किंमत पडताळा करण्यासाठी दिलेल्या अटीनुसार तयार झालेल्या मूळ समीकरणांत घालावी. (उदा. 11,13,19 ही प्रकरण 3 आणि उदा 10, 11, 12 ही प्रकरण 10 मधील)

✻ ✻ ✻

अंकगणिती क्रम
ARITHMETIC PROGRESSIONS

S8A8I1

5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.1 परिचय :

निसर्गात आपणास असे दिसून येते की, अनेक गोष्टी विशिष्ट पद्धतीमध्ये असतात. उदा: सुर्यफुलाच्या पाकळ्या, मधमाशांच्या पोळ्यातील छिद्रे, मक्याच्या कणसातील दाणे, अननसाचे गोल काप इ.

आता आम्ही जीवनात आढळणाऱ्या काही नमुन्या विषयी पाहू. अशी काही उदाहरणे आहेत,

i) रीनाने नोकरीसाठी अर्ज केला व त्यात तिची निवड झाली. तिला महिना ₹8000 पगारावर नोकरी देण्यात आली व वार्षिक ₹ 500 पगार वाढ देण्याचे ठरले. तिचा पगार (₹ मध्ये) पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या वर्षी अनुक्रमे 8000, 8500, 9000.....

ii) एका शिडीच्या आडव्या पायऱ्यांच्या दांडयांतील लांबी क्रमाने 2 cm. ने खालून वरपर्यंत कमी कमी होत जाते (आकृती 1.1). तळातील दांडा 45 cm. लांबीचा आहे. अनुक्रमे पहिला, दुसरा, तिसरा .... आठवा असे तळापासून वरपर्यंत खालील लांबीचे दांडे आहेत,

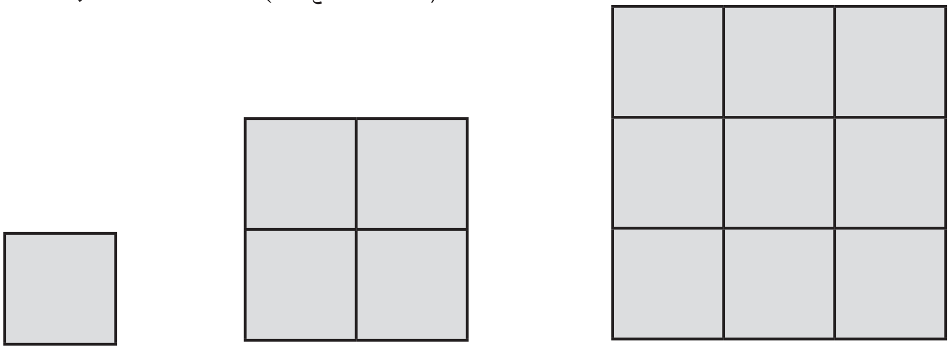
45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

आकृती 5.1

iii) एका बचत योजनेमध्ये रक्कम प्रत्येक तीन वर्षानी $\frac{5}{4}$ पट होते. जर ₹ 8000 गुंतविले तर प्रत्येक 3, 6, 9, आणि 12 वर्षानी पैसे देण्याच्या वेळेस रक्कम (₹ मध्ये) अनुक्रमे खालील प्रमाणे होईल.

10000, 12500, 15625, 19531.25

iv) दिलेल्या चौरसातील एकक चौरसांची संख्या त्यांच्या बाजुंची मापने अनुक्रमे 1,2,3... एकक असल्यास (आकृती. 1.2) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

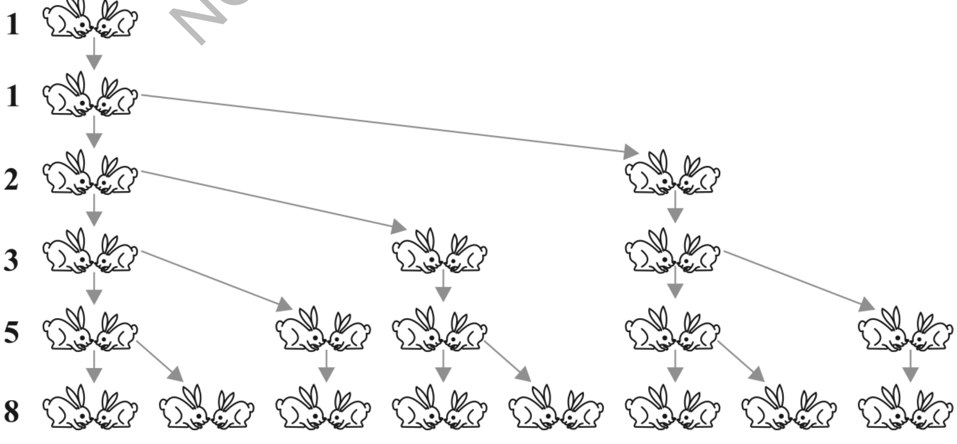


आकृती 5.2

v) शकिला आपल्या मुलीच्या पैशाच्या पेटीत ती मुलगी एक वर्षाची असताना ₹ 100 घालते आणि ती पुढे प्रत्येक वर्षी ₹ 50 नी वाढवून पैसे घालते. पेटी मधील प्रत्येक वर्षी जमा केलेली रक्कम तिच्या पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या व चौथ्या वाढदिवशी अनुक्रमे अशी होईल.

100, 150, 200, 250 ......

vi) सशांची एक जोडी पहिल्या महिन्यात फार लहान असून ती दुसरी जोडी तयार करत नाही. दुसऱ्या आणि पुढील प्रत्येक महिन्याला ती नविन जोडी तयार करते. नविन प्रत्येक जोडी सुद्धा त्यांच्या दुसऱ्या महिन्याला नवीन जोडी तयार करतात (आकृती. 5.3). ससे मरत नाहीत असे मानल्यास सश्यांच्या जोड्या सुरूवातीपासून पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या ..... सहाव्या महिन्याला अनुक्रमे 1, 1, 2, 3 , 5, 8 आहेत.



आकृती 5.3

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील उदाहरणामध्ये आम्ही काही नमुने पाहिले. आम्हाला असे दिसून आले की पुढचे पद हे मागील पदामध्ये एक समान संख्या मिळवून येते किंवा एका समान संख्येने गुणून येते.

या प्रकरणात आपण एका नमुन्याविषयी ज्या मध्ये पुढचे पद हे त्याच्या मागील संख्येत समान संख्या मिळविल्याने येते तसेच त्याचे n वे पद व n पदांची बेरीज कशी काढता येते ते पाहू आणि याचा वापर दैनंदिन जीवनांतील प्रश्न सोडविण्यासाठी करून घेऊ.

5.2 अंकगणिती क्रम (Arithmetic Progressions)

खालील उदागरणांचा विचार करु

(i) 1, 2, 3, 4, ...

(ii) 100, 70, 40, 10, ...

(iii) –3, –2, –1, 0 .....

(iv) 3, 3, 3, 3, ...

(v) –1, –1.5, –2.0, –2.5, ...

उदाहरणातील प्रत्येक संख्येला पद (term) म्हणतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील उदाहरणातील दिलेल्या पदांच्या पुढचे पद लिहू शकाल का? तसे असल्यास तुम्ही कसे लिहाल? कदाचित दिलेला नमुना पाहून किंवा विशिष्ट नियम अवलंबून. निरीक्षण करू आणि नियम लिहू.

उदा (i) मध्ये प्रत्येक पद त्याच्या मागील पदापेक्षा 1 ने मोठे आहे.

उदा (ii) मध्ये प्रत्येक पद त्याच्या मागील पदापेक्षा 30 ने कमी आहे.

उदा (iii) मध्ये प्रत्येक पद मागील पदापेक्षा 1ने मोठे आहे.

उदा (iv) मध्ये प्रत्येक पद समान 3 आहे. म्हणजेच प्रत्येक पदामध्ये 0 मिळवून किंवा वजा करून मिळविले आहे.

उदा (v) मध्ये प्रत्येक पद मागील पदापेक्षा 0.5 ने लहान आहे..

वरील उदाहरणावरून पुढील संख्या त्याच्या मागील संख्येत एक समान संख्या मिळविल्याने येते.

क्रमातील क्रमवार पदे समान (सारख्याच) संख्येने एक तर कमी किंवा वाढत असतील तर त्याला **अंकगणिती क्रम (AP)** म्हणतात.

अंकगणिती क्रम हा असा क्रम आहे की ज्यामध्ये प्रत्येक पुढील पद हे मागील पदामध्ये (पहिले पद सोडून) ठराविक संख्या मिळविल्याने मिळतो.

AP क्रमातील ठराविक संख्येला **सामान्य फरक** असे म्हणतात आणि तो d ने दर्शवितात. फरक धन, ऋण किंवा 0 असू शकतो हे ध्यानात ठेवा.

समजा AP चे पहिले पद a_1 दुसरे पद a_2, ...n वे पद a_n अशी दर्शवू, आणि सामान्य फरक d असेल तर a_1, a_2, a_3 ...... a_n असा अंकगणिती क्रम तयार होतो.

येथे $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$

अंकगणिती क्रमाची जादाची काही उदाहरणे

a) एका शाळेमध्ये सकाळच्या दैनंदिन परिपाठमध्ये रांगेत उभे असणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या उंची (cm मध्ये) 147, 148, 149 .... 157 अशा आहेत.

b) एका शहराचे जानेवारी महिन्यातील एका आठवड्याचे किमान तापमान (सेल्सीअस मध्ये) चढत्या क्रमात मांडले आहे,

-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5.

c) एकूण ₹1000 कर्जाची 5% रक्कम भरल्यानंतरची शिल्लक रक्कम (₹ मध्ये) प्रत्येक महिन्याची 950, 900, 850, 800, ... 50 आहे.

d) पहिली ते बारावी पर्यंतच्या प्रत्येक वर्गातील प्रथम येणाऱ्या विद्यार्थ्याला दिलेली रोख रक्कम (₹ मध्ये)200, 250, 300, 350, ... 750 आहे.

e) प्रत्येक महिन्याला ₹50 याप्रमाणे 10 महिन्यात ठेवलेली एकूण बचत शिल्लक 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 होते.

यावरून आम्हाला असे दिसून येते की, अंकगणिती क्रमाचे ‘a’ हे पहिले पद व ‘d’ हा सामान्य फरक असेल तर a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... हा अंकगणिती क्रम दर्शविते. याला अंकगणिती क्रमाचा सामान्य नमुना म्हणतात.

लक्षात घ्या की उदा: (a) ते (e) मधील उदाहरणाध्ये पदांची संख्या मर्यादीत आहे. AP मधील पदांची संख्या मोजता येत असेल तर त्याला **मर्यादीत अंकगणिती क्रम** (Finite A.P.) असे म्हणतात. उदा: (i) ते (v) मधील उदाहरणामध्ये पदांची संख्या मर्यादीत नाही. AP मधील पदांची संख्या मोजता येत नसेल तर त्याला **अमर्यादीत अंकगणिती क्रम** (Infinite A.P.) असे म्हणतात. मर्यादीत AP ला शेवटचे पद असते. अमर्यादीत AP ला शेवटचे पद नसते. आता AP समजण्यासाठी कमीत कमी कोणत्या माहितीची गरज आहे? फक्त पहिले पद माहीत असणे? किंवा फक्त सामान्य फरक माहीत असणे? तुम्हाला असे दिसून येईल की, पहिले पद ‘a’ अणि सामान्य फरक ‘d’ माहीत असणे गरजेचे आहे.

उदाहरणार्थ : जर पहिले पद a=6 आणि सामान्य फरक d = 3 असेल तर, AP 6, 9, 12, 15 ... आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जर a=6 व d=-3 असताना AP असा असतो,

6, 3, 0, -3 ....

त्याचप्रमाणे,

a = –7, d =–2 असताना, -7, -9, -11, -13, ... हा AP आहे.

a =1.0, d = 0.1 असताना, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, ... हा AP आहे.

a = 0, d = $1\frac{1}{2}$ असताना, 0, $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$, 6, ... हा AP आहे.

a = 2, d = 0 असताना, 2, 2, 2, 2, ... हा AP आहे.

म्हणून आपणास जर a आणि d माहीत झाल्यास AP लिहिता येतो. दुसऱ्या बाजूने विचार करता जर आपणांस संख्यांची यादी दिली तर तो AP आहे हे सांगू शकाल का? तसेच a व d च्या किंमती काढू शकाल का? 'a' हे पहिले पद लिहिता येते. आम्हला माहीत आहे की AP चे पुढील पद मागील पदामध्ये d मिळवून मिळविता येते. म्हणून d ची किंमत पुढील पदातून मागील पद वजा करून मिळवता येते. म्हणजे एका AP मध्ये हे सर्व ठिकाणी सारखेच असते.

उदाहरणार्थ: संख्याच्या 6, 9, 12, 15, ... या यादीसाठी

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

येथे प्रत्येक बाबतीत सलग दोन पदामधील फरक 3 आहे. म्हणून दिलेली यादी AP असून त्याचे पहिले पद a = 6 आणि सामान्य फरक d = 3.

6, 3, 0, -3, ... या यादीसाठी

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

त्याचप्रमाणे हा सुद्धा AP आहे ज्याचे पहिले पद 6 आणि सामान्य फरक -3 आहे.

सामान्यपणे a_1, a_2, a_3 .... a_n या AP साठी,

$$d = a_{k+1} - a_k$$

जेथे a_{k+1} आणि a_k ही (k+1) वे पद आणि k वे पद आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

दिलेल्या AP मधील d मिळविण्यासाठी आपणास प्रत्येकवेळी a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3 .... हे शोधणे गरजेचे नाही. यापैकी कोणतेही एक शोधा.

1, 1, 2, 3, 5, ... ही यादी पहा.

या यादीकडे पाहून आपणांस असे सांगता येईल की, क्रमागत दोन पदामधील फरक सारखाच नाही. म्हणून दिलेली यादी AP नाही.

लक्षात घ्या 6, 3, 0, -3, ... या AP चा d शोधण्यासाठी आपण 3 मधून 6 वजा केले आहे आणि 6 मधून 3 वजा केले नाही. म्हणून आम्ही (K+1) वे मधून K वे हे पद वजा केले पाहिजे जरी (K+1) वे पद लहान असले तरी.

उदाहरण 1 : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ .... या AP साठी पहिले पद a आणि सामान्य फरक d लिहा.

उकल : येथे $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

आपण d काढण्यासाठी दोन क्रमागत पदातील फरक लक्षात घ्या.

उदाहरण 2 : खालील पैकी कोणत्या संख्यांची यादी AP बनते ? जर AP बनत असेल तर तिची पुढील दोन पदे लिहा.

(i) 4, 10, 16, 22, ...

(ii) 1, -1, -3, -5, ...

(iii) -2, 2, -2, 2, -2 ....

(vi) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 .....

उकल : (i) $a_2-a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3-a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4-a_3 = 22 - 16 = 6$

$a_{k+1} - a_k$ हे प्रत्येक वेळी समान आहे. म्हणून दिलेली यादी AP आहे व सामान्य फरक d = 6 आहे. पुढील दोन पदे : 22 + 6 = 28 अणि 28 + 6 = 34

(ii) $a_2-a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3-a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4-a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$a_{k+1} - a_k$ प्रत्येक वेळी समान आहे म्हणून दिलेली यादी $d = -2$ या सामान्य फरकाने AP आहे. पुढील दोन पदे $-5 + (-2) = -7$ आणि $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

$\therefore a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ म्हणून दिलेली यादी AP नाही.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

येथे $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

म्हणून दिलेली यादी AP नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 5.1

1. खालील कोणत्या स्थितीत संख्यांची यादी AP बनते का?

(i) एका टॅक्सीचे भाडे प्रत्येक कि.मी. ला जेव्हा पहिल्या कि.मी.ला ₹15 व पुढील प्रत्येक कि.मी. ला ₹8 ने वाढते.

(ii) सिलींडरमध्ये असणारी हवा जेव्हा वाताकर्षक पंपाने $\frac{1}{4}$ राहिलेली हवा काढली असता.

(iii) एक विहिर खोदण्याची पहिल्या मीटरला मजुरी ₹150 आणि पुढील प्रत्येक मीटरला ₹50 ने वाढते. तर प्रत्येक मीटरची विहिर खोदण्याची मजूरी.

(iv) खात्यामध्ये ₹10,000 ठेव ठेवले असून पुढील प्रत्येक वर्षी 8% दराने चक्रवाढव्याजाने खात्यामध्ये प्रत्येक वर्षी जमा होणारी रक्कम.

2. पहिले पद a आणि सामान्य फरक d दिला असता AP ची पहिली चार पदे लिहा

(i) $a = 10,\ d = 10$ (ii) $a = -2,\ d = 0$

(iii) $a = 4,\ d = -3$ (iv) $a = -1,\ d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25,\ d = 0.25$

3. खालील AP मधील पहिले पद व सामान्य फरक लिहा.

(i) 3, 1, -1, -3..... (ii) -5, -1, 3, 7, ...

(iii) 1/3, 5/3, 9/3, 13/3 .... (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9 ....

4. खालील पैकी कोणते क्रम AP आहेत ? जर AP असतील तर सामान्य फरक d काढा आणि पुढील 4 पदे लिहा.

(i) 2, 4, 8, 16 ....
(ii) 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ ....
(iii) -1, 2, -3.2, -5.2, -7.2 ....
(iv) -10, -6, -2, 2 ....
(v) 3, $3+\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$, $3+3\sqrt{2}$ ....
(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222 ....
(vii) 0, -4, -8, -12 ....
(viii) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ ....
(ix) 1, 3, 9, 27 ....
(x) a, 2a, 3a, 4a ....
(xi) a, a^2, a^3, a^4 ....
(xii) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$ ....
(xiii) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{12}$ ....
(xiv) 1^2, 3^2, 5^2, 7^2 ....
(xv) 1^2, 5^2, 7^2, 73 ....

5.3 अंकगणिती क्रमा चे (AP चे) n वे पद.

5.1 मध्ये दिलेल्या उदाहरणाचा पुन्हा एकदा विचार करा. रीनाने नोकरीसाठी अर्ज केला व त्यात तिची निवड झाली. तिला महिना ₹8000 पगारावर नोकरी देण्यांत आली व वार्षिक पगारवाढ ₹ 500 देण्याचे ठरले. तर तिचा पाचव्या वर्षी महिना पगार किती?

रीनाचा दुसऱ्या वर्षीचा महिना पगार = ₹8000 + ₹500 = ₹8500 याच प्रमाणे आपण प्रत्येक 3 ऱ्या, 4 थ्या व 5 व्या वर्षीचा महिना पगार काढू शकतो.

म्हणून 3 ऱ्या वर्षीचा पगार = ₹ (8500 + 500)
= ₹ (8000 + 500 + 500)
= ₹ (8000 + 2 × 500)
= ₹ (8000 + (3 -1) × 500) (3 ऱ्या वर्षासाठी)
= ₹ 9000

4 थ्या वर्षीचा पगार = ₹ (9000 + 500)
= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)
= ₹ (8000 + 3 × 500)
= ₹ (8000 + (4-1) × 500) 4 थ्या वर्षासाठी
= ₹ 9500

5 व्या वर्षीचा पगार = ₹ (9500 + 500)
= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)
= ₹ (8000 + 4 × 500)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

= ₹ (8000 + (5-1) × 500) 5 व्या वर्षसाठी

= ₹ 10000

निरीक्षणावरून आम्हास संख्याची यादी मिळते,

8000, 8500, 9000, 9500, 10000

या संख्या AP मध्ये आहेत. (का ?)

वरील नमुन्यावरून तुम्ही तीचा 6 व्या वर्षीचा, 15 व्या वर्षीचा पगार काढू शकाल का? आणि ती नोकरीत आहे असे समजून तीचा 25 व्या वर्षीचा महिना पगार किती? प्रत्येक वर्षी ₹ 500 मागील वर्षीच्या पगारात मिळवून त्याचे उत्तर देता येते. ही प्रक्रिया संक्षिप्तरूपात करू शकाल का? कसे ते पाहू.

15 व्या वर्षीचा पगार = चौदाव्या वर्षीचा पगार + ₹ 500

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{\frac{500 + 500 + \ldots\ldots + 500}{13 \text{ वेळा}}}\right] + ₹ 500$$

= ₹ [8000 + 14 × 500]

= ₹ [8000 + (15–1) × 500] = ₹ 15000

म्हणजे पहिला पगार + (15-1) × वार्षीक पगारवाढ.

याच पद्धतीने तीचा 25 व्या वर्षीचा महिना पगार

= [8000 + (25–1) × 500] = ₹ 20000

= पहिला पगार + (25–1) × वार्षिक पगार वाढ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या उदाहरणा वरून 15 वे पद व 25 वे पद कसे लिहावे याची कल्पना मिळते. आणि सामान्यपणे AP चे n वे पद समजा a_1, a_2, a_3 .... ही AP आहे ज्याचे पहिले पद a_1 हे आहे व सामान्य फरक d आहे.

तेव्हा दुसरे पद $a_2 = a + d = a + (2-1)\ d$

तिसरे पद $a_3 = a_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3-1)\ d$

चौथे पद $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4-1)\ d$

वरील नमुना पाहून आपण n वे पद $a_n = a + (n - 1)d$ सांगू शकतो. म्हणून AP चे n वे पद ज्याचे पहिले पद a आणि सामान्य फरक d आहे.

$$\mathbf{a_n = a + (n - 1)d}.$$

a_n ला AP चे सामान्य पद म्हणतात. जर AP मध्ये m पदे असतील तर a_m हे शेवटचे पद असून ते कांही वेळा l ने दर्शवितात. काही उदाहरणांचा विचार करू.

उदाहरण 3 : 2, 7, 12, ... या AP चे 10 वे पद काढा.

उकल : येथे a = 2, d = 7 − 2 = 5 आणि n = 10

$a_n = a + (n - 1)d$

$= 2 + (10 - 1) 5 = 2 + 9 \times 5 = 2 + 45 = 47$

दिलेल्या AP चे 10 वे पद 47 आहे.

सूचना: $a_{10} = a + 9d$
$= 2 + 9 \times 5$
$= 2 + 45$
$= 47$

उदाहरण 4 : 21, 18, 15, ... या AP चे कितवे पद -81 आहे? त्यामध्ये 0 हे सुद्धा पद आहे का? उत्तर सकारण द्या.

उकल : येथे a = 21, d = 18 − 21 = −3 आणि a_n = 81 आपणांस n ची किंमत काढवयाची आहे.

$a_n = a + (n - 1)d$
$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$
$-81 = 24 - 3n$
$-105 = -3n$

म्हणून दिलेल्या AP चे - 81 हे पद 35 वे आहे.

पुढे आपणांस माहिती पाहिजे की जर कोणते पद n हे $a_n = 0$ आहे.

जर तसे n असेल, तर

$21 + (n - 1)(-3) = 0$
$3(n - 1) = 21$
$n = 24/3$
$n = 8$

किंवा

$(\not-3)(n - 1) = \not-21$
$n - 1 = \frac{\not{21}^{7}}{\not{3}}$
$n = 7 + 1$
$n = 8$

आठवे पद 0 आहे.

उदाहरण 5 : एका AP चे 3 रे पद 5 व 7 वे पद 9 असेल तर AP लिहा.

उकल : $a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2 = 5$ .... (1)

आणि $a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9$ .... (2)

रेषीय समीकरण (1) व (2) सोडवून

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$a = 3, d = 1$

∴ इच्छित AP 3, 4, 5, 6, 7 ………… आहे.

उदाहरण 6 : 5, 11, 17, 23, ….. या यादीमध्ये 301 हे पद आहे का?

उकल : $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$. K=1, 2, 3, इ. साठी $a_{K+1} - a_K$ ची किंमत सारखीच असते. दिलेली संख्यांची यादी AP आहे.

आता a=5 आणि d=5

समजा 301 एक पद आहे, AP चे n वे पद मानू

आपणास माहीत आहे. $a_n = a + (n-1)d$

$$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$301 = 6n - 1$$

$$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

परंतु n नेहमी धन संख्या असते (का?) म्हणून 301 ही दिलेल्या संख्यांच्या यादीत नाही.

उदाहरण 7 : 3 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या किती आहेत?

उकल : 3 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्यांची यादी खालील प्रमाणे आहे.

12, 15, 18, ……, 99

हा AP आहे. येथे $a = 12, d = 3, a_n = 99$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$99 = 12 + (n-1) \times 3$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 29 + 1 = 30$$

3 ने भाग जाणाऱ्या 2 अंकी संख्या 30 आहेत.

उदाहरण 8 : 10, 7, 4 ………, -62. या AP च्या शेवटच्या पदावरून मागील (पहिल्या पदाकडील) 11 वे पद शोधा.

उकल : येथे, $a = 10, d = 7 - 10 = -3$

$l = -62$

जेथे $l = a + (n-1)d$

शेवटच्या पदावरून मागील 11 वे पद काढण्यासाठी प्रथम AP च्या पदांची संख्या काढली पाहीजे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

$-72 = (n - 1)(-3)$

$n - 1 = 24$

$n = 25$

∴. दिलेल्या AP मध्ये 25 पदे आहेत.

15 व्या शेवटच्या पदावरून 11 वे पद

$a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3)$

$= 10 + 14 \times (-3)$

$= 10 - 42 = -32$

∴. शेवटच्या पदावरून 11 वे पद हे -32 आहे.

दुसरी उकल : जर दिलेली AP उलट क्रमाने लिहिल्यास

$a = -62$ आणि $d = 3$ (का?)

$a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3$

$= -62 + 30 = -32$

म्हणून शेवटच्या पदाकडून 11 वे पद -32 आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 9 : द.सा.द.से. 8 दराने ₹1000 सरळव्याजाने गुंतविले आहेत. तर प्रत्येक वर्षीचे व्याज काढा. या व्याजाच्या सख्यांनी AP बनतो का? तसे असेल तर 30 वर्षाच्या शेवटी व्याज काढा.

उकल : सरळव्याज काढवयाचे सुत्र आपणास माहीत आहे.

सरळव्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100}$

1 ल्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज $= \dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100} =$ ₹ 80

2 ऱ्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज $= \dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100} =$ ₹ 160

3 ऱ्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज = $= \dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100} =$ ₹ 240

या प्रमाणे आपण 4 थ्या, 5 व्या वर्षाशेवटी होणारे व्याज काढू शकतो.

म्हणून 1 ल्या, 2 ऱ्या, 3 ऱ्या .... वर्षीचे अनुक्रमे व्याज

80, 160, 240 ....

हा AP आहे. जसे क्रमागत पदामधील फरक 80 आहे.

$d = 80$ व $a = 80$

म्हणून 30 वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज शोघण्यासाठी आम्हाला a_{30} ची किंमत काढावी लागेल?

$\therefore a_{30} = a + (30-1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

$\therefore$ 30 वर्षाच्या शेवटी होणोर व्याज ₹ 2400 होईल.

उदाहरण 10 : एका फुल झाडांच्या पहिल्या रांगेत 23 गुलाब झाडे, दुसऱ्या रांगेत 21 गुलाब झाडे, 3 ऱ्या रांगेत 19 गुलाब झाडे व याप्रमाणे. शेवटच्या रांगेत 5 गुलाबझाडे असतील तर त्या फुलांच्या वाफ्यांत झाडांच्या एकूण किती रांगा आहेत?

उकल : 1 ल्या, 2 ऱ्या, 3 ऱ्या ...... रांगेत असणारी गुलाब झाडे 23, 21, 19....... 5

हा AP आहे. (का?) फुल झाडांच्या n रांगा आहेत असे मानू

तर $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

$a_n = a + (n-1)d$

$5 = 23 + (n-1)(-2)$

$-18 = (n-1)(-2)$

$n = 10$

म्हणजे फुल झाडांच्या 10 रांगा आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 5.2

1. दिलेल्या कोष्टकातील रिकाम्या जागा भरा. a हे पहिले पद व d सामान्य फरक आणि a_n हे AP चे n वे पद आहे.

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	....
(ii)	–18	....	10	0
(iii)	.....	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	......	3.6
(v)	3.5	0	105	.....

2. खालील पैकी योग्य पर्यायाची निवड करा व स्पष्ट करा.

(i) 10, 7, 4 ………. या AP चे 30 वे पद

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2,$ या AP चे 11 वे पद

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. खालील AP मध्ये चौकोनातील पदे शोधा.

(i) 2, ☐, 26

(ii) ☐, 13, ☐, 3

(iii) 5, ☐, ☐, $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, –22

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 3, 8, 13, 18, …… या AP चे 78 हे कितवे पद आहे?

5. खालील AP मध्ये असणारी पदांची संख्या काढा.

(i) 7, 13, 19 …… 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13$ …… 47

6. 11, 8, 5, 2 ……. या AP मध्ये150 हे पद आहे काय? शोधा.

7. एका AP चे 11 वे पद 38 आहे व 16 वे पद 73 आहे तर, त्याचे 31 वे पद काढा.

8. 50 पदांच्या AP मध्ये 3 रे पद 12 आणि शेवटचे पद 106 तर 29 वे पद काढा.

9. एका AP चे 3 रे आणि 9 वे पद अनुक्रमे 4 आणि -8 आहेत. तर याच AP चे '0' हे पद कितवे आहे काढा.

10. एका AP चे 17 वे पद हे 10 व्या पदापेक्षा 7 ने अधिक आहे. सामान्य फरक सांगा.

11. 3, 15, 27, 39 ….. या AP चे कितवे पद हे त्याच्या 54 व्या पदापेक्षा 132 ने अधिक आहे.

12. दोन AP चा सामान्य फरक सारखाच असून त्यांच्या 100 व्या पदातील फरक 100 आहे तर त्यांच्या 1000 व्या पदामधील फरक काढा?

13. 7 ने भाग जाणाऱ्या तीन अंकी संख्या किती आहेत?

14. 10 ते 250 मध्ये असणाऱ्या 4 च्या पटीतील संख्या किती?

15. n च्या कोणत्या किंमतीला AP: 63, 65, 67, ... आणि AP : 3, 10, 17 ..... चे n वे पद समान होते?

16. जर 3 रे पद 16 आणि 7 वे पद 5 व्या पदापेक्षा 12 ने मोठे आहे. तर तो अंकगणिती क्रम लिहा.

17. 3, 8, 13 ...... 253 या AP चे 20 वे पद शेवटच्या पदावरून काढा.

18. एका AP च्या 4 थ्या व 8 व्या पदांची बेरीज 24 आहे आणि 6 व्या व 10 व्या पदांची बेरीज 44 आहे. तर AP ची पहिली तीन पदे लिहा.

19. सुब्बारावने वार्षीक ₹ 5000 पगारावर 1995 ला काम सुरू केले आणि वर्षाला ₹ 200 पगार वाढ मिळाली. तर कोणत्या वर्षाला त्याचा पगार ₹ 7000 रू होतो?

20. रामकलीने वर्षाच्या पहिल्या आठवडयाला ₹ 5 ची बचत केली व त्यानंतर प्रत्येक आठवडयाला ₹ 1.75 बचत वाढवत गेली. जर तिची n^{th} आठवडयाला ₹ 20.75 बचत झाली. तर n ची किंमत काढा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.4 अंकगणिती क्रमातील पहिल्या n पदांची बेरीज

आपण 5.1 मध्ये असलेल्या परिस्थितीचा विचार करूं, ज्यामध्ये शकीलाने आपली मुलगी 1 वर्षाची होती तेव्हा मुलीच्या पैशाच्या पेटीत ₹ 100 ठेवले. नंतर मुलीच्या दुसऱ्या वाढदिवशी ₹ 150 आणि तिसऱ्या वाढदिवशी ₹ 200 याप्रमाणे प्रत्येक वाढदिवसाला पैसे ठेवत गेली. तर तिची मुलगी 21 वर्षाची झाली असताना पैशांच्या पेटीत किती रक्कम जमा होते?

येथे पैशाच्या पेटीत ठेवलेली रक्कम (₹ मध्ये) अनुक्रमे पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, चौथ्या वाढदिवशी 100, 150, 200, 250 ..... 21 व्या वर्षापर्यंत. पैशाच्या पेटीत जमा झालेली एकूण रक्कम काढण्यासाठी प्रत्येक वर्षी ठेवलेली रक्कम लिहून त्यांची बेरीज केली पाहीजे. असे करणे थोडे त्रासदायक होईल व वेळखाऊ होईल. यासाठी थोडक्यात लिहिण्याची पद्धत तयार करावी लागेल. हे करण्यासाठी बेरीज करण्याची पद्धत शोधावी लागेल?

गॉसला दिलेल्या प्रश्नाचा विचार करू. (प्रकरण 8 मध्ये) तो 10 वर्षाचा असताना त्याला 1 ते 100 पर्यंतच्या क्रमवार संख्यांची बेरीज करायल लावली. त्याने लगेच 5050 ही बेरीज सांगितली. त्याने कशी बेरीज केली?

त्याने असे लिहिले : $S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$

नंतर असे लिहिले : $S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$

दोन्हींची बेरीज $2S = (100 + 1) + (99 + 2) + ... + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$

$= 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101$ (100 वेळा)

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$\therefore$ बेरीज $= 5050$

हीच पद्धत AP च्या n पदांची बेरीज काढण्यासाठी वापरू.

$a, a + d, a + 2d$

AP चे n वे पद $a + (n - 1)d$ आहे व AP ची बेरीज S ने दर्शविली आहे

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + ... [a + (n -1)d] \quad (1)$$

उलट दिशेने पदे लिहून

$$S = [a + (n - 1)d]+ a + (n - 2)d]+ ....+ (a + d) + a \quad (2)$$

(1) व (2) ची बेरीज करून

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+ ......+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{n \text{ वेळा}}$$

किंवा $2S = n [2a + (n - 1)d]$

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$\therefore$ AP च्या पहिल्या n पदांची बेरीज $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

हे असेही लिहू शकतो $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1)d]$

$$\text{ie } S_n = \frac{n}{2} [a + a_n) \quad (3)$$

जेंव्हा AP मध्ये n पदे असतात तेंव्हा $a_n = l$ शेवटचे पद

$$(3) \text{ वरून } S = \frac{n}{2} [a + l] \quad (4)$$

जेंव्हा AP चे पहिले पद व शेवटचे पद दिले असता आणि सामान्य या सुत्राचा उपयोग होतो आणि सामान्य फरक दिलेला नसताना.

आता प्रथम दिलेल्या प्रश्नाकडे पाहू. शकीलाने तिच्या मुलीच्या पैशांच्या पेटीत तिच्या 1 ल्या, 2 ऱ्या, 3 ऱ्या, 4 थ्या वाढदिवशी अनुक्रमे 100, 150, 200, 250, ... असे पैसे ठेवले. हा AP आहे. आपणासा झालेली 21 व्या वाढदिवशी जमा रक्कम म्हणजेच 21 पदे असलेली AP ची हा बेरीज काढली पाहिने

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे a = 100, d = 150, आणि, n = 21 सुत्राचा वापर करून,

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21 - 1) \times 50] = [200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2}[1200] = 12600$$

21 व्या वाढदिवशी जमा झालेली रक्कम ₹12600 आहे.

असे प्रश्न सोडविण्यासाठी सुत्राचा वापर जादा सुलभ होतो की नाही? s ऐवजी n पदांची बेरीज S_n ने दर्शवितात. S_{20} हे AP च्या 20 पदांची बेरीज दर्शविते. या सुत्रामध्ये s, a, d आणि n अशी चार पदे आहेत यापैकी कोणत्याही तीन पदांची किंमत माहीत झाल्यास चौथ्या पदाची किंमत काढता येते.

टिप : AP चे n वे पद हे पहिल्या n पदांची बेरीज व पहिल्या (n-1) पदांची बेरीज यांच्या वजाबाकी एवढे असते.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 11 : 8, 3, -2, ... या AP च्या पहिल्या 22 पदांची बेरीज काढा.

उकल : येथे a = 8, b = 3 − 8 = −5, n = 22

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S = \frac{22}{2}[16+21(-5)]$$

$$= 11\ (16 - 105)$$

$$= 11\ (-89) = -979$$

∴ AP च्या 22 पदांची बेरीज -979 आहे.

उदाहरण 12 : AP च्या पहिल्या 14 पदांची बेरीज 1050 आणि पहिले पद 10 आहे, तर त्याचे 20 वे पद शोधा.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d]$$

$$1050 = 140 + 91d$$

$$910 = 91d$$

$$d = 10$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$

20 वे पद 200 आहे.

उदाहरण 13 : 24, 21, 18 ...... या AP च्या किती पदांची बरीज 78 होईल ?

उकल : येथे $a = 24$, $d = 21-24 = -3$, $S_n = 78$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}(51 - 3n)$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$(n - 4)(n - 13) = 0$$

$\therefore n = 4$ किंवा 13

दोन्ही किंमती ग्राहय आहेत. म्हणून AP च्या पदांची संख्या 4 किंवा 13

टिप:(1) या घटनेत 4 पदांची बेरीज = 13 पदांची बेरीज = 78

(2) दोन उत्तरे शक्य आहेत. कारण 54 व्या पदापासून 13 व्या पदापर्यंतची बेरीज शून्य आहे. याचे कारण a धन व d ऋण आहेत त्यामुळे काही पदे धन आणि काही दुसरी ऋण असल्याने ती एकमेकाशी नष्ट होतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 14 : बेरीज करा

(i) पहिल्या 1000 स्वाभाविक संख्यांची (ii) पहिल्या n स्वाभाविक संख्यांची

उकल : (i) $S = 1+2+3+ \ldots\ldots + 1000$

सुत्र वापरून $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}[1 + 1000]$$

$$S = 500 \times 1001 = 500500$$

$\therefore$ पहिल्या 1000 स्वाभाविक संख्यांची बेरीज 500500 आहे.

(ii) $S_n = 1+2+3+ \ldots\ldots + n$

येथे $a = 1$ आणि शेवटचे पद l हे n आहे.

म्हणून $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ किंवा $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

म्हणून n स्वाभाविक संख्यांची बेरीज

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

उदाहरण 15 : एका AP च्या पाहिल्या 24 पदांची बेरीज काढा ज्याचे n वे पद $a_n = 3 + 2n$ दिलेले आहे.

उकल : $a_n = 3 + 2n$

$a_1 = 3 + 2 \times 1 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$

∴ यादी अशी बनते 5, 7, 9, 11 ....

येथे $d = 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ....

∴ ही यादी AP बनते ज्याचा सामान्य फरक $d = 2$

आता S_{24} काढण्यासाठी $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$

म्हणून $S_{24} = \frac{24}{2} [2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12 [10 + 46] = 672$

∴ पहिल्या 24 पदांची बेरीज 672 आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 16 : एक टि.व्ही. उत्पादक कंपनी तिसऱ्या वर्षी 600 आणि 7 व्या वर्षी 700 संच तयार करते. उत्पादन समानतेने काही वर्षे वाढत गेल्यास (i) पहिल्या वर्षाचे उत्पादन (ii) 10 व्या वर्षी झालेले उत्पादन (iii) पहिल्या 7 वर्षात झालेले एकूण उत्पादन काढा.

उकल : ज्याअर्थी प्रत्येक वर्षी होणारे उत्पादन समान होते, टि.व्ही संचाचे 1 ल्या, 2 ऱ्या, 3 ऱ्या वर्षी झालेले टि.व्ही. चें उत्पादन a_n ने दर्शवू तेव्हा $a_3 = 600$ आणि $a_7 = 700$

किंवा $a + 2d = 600$

आणि $a + 6d = 700$

वरील समीकरणे सोडवून $d = 25$ आणि $a = 550$

म्हणून पहिल्या वर्षी झालेले TV चे उत्पादन 550 आहे.

(i) आता $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

म्हणून 10 व्या वर्षी झालेले उत्पादन 775 आहे.

(ii) $S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$= \frac{7}{2} [1100 + 150] = 4375$

म्हणून 7 वर्षात झालेले टि.व्ही. चें एकूण उत्पादन 4375.

स्वाध्याय 5.3

1. खालील AP ची बेरीज करा.

   i) 2, 7, 12 .... 10 पदापर्यंत

   ii) -37, -33, -29 .... 12 पदापर्यंत

   iii) 0.6, 1.7, 2.8 .... 100 पदापर्यंत

   iv) $\frac{7}{15}, \frac{7}{12}, \frac{7}{10}$ .... 11 पदापर्यंत

2. खालील बेरीज करा.

   i) $7 + 10\frac{7}{2} + 10 + ... + 84$ ii) $34 + 32 + 30 + ... + 10$

   iii) $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

3. AP मध्ये,

   i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ तर n आणि S_n शोधा.

   ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$ तर d आणि S_{13} शोधा.

   iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ तर a आणि S_{12} शोधा.

   iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ तर d आणि a_{10} शोधा.

   v) $d = 5$, $S_9 = 75$ तर a आणि a_9 शोधा.

   vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ तर n आणि a_n शोधा.

   vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ तर n आणि d शोधा.

   viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ तर n आणि a शोधा.

   ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ तर d शोधा.

   x) $l = 28$, $S = 144$ आणि $n = 9$ तर a शोधा.

4. 9, 17, 25, ... या AP तील किती पदांची बेरीज 636 येते ?

5. AP चे पहिले पद 5 व शेवटचे पद 45 आणि बेरीज 400 आहे. तर पदांची संख्या व सामान्य फरक काढा.

6. AP चे पहिले आणि शेवटचे पद अनुक्रमे 17 आणि 350 आहेत. जर सामान्य फरक 9 आहे तर AP मध्ये किती पदे आहेत आणि AP ची बेरीज काढा.

7. जर AP तील 22 वे पद 149, d=7 असेल तर 22 व्या पदांपर्यंतची बेरीज ओळखा.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

8. जर AP तील 2रे व तिसरे पद अनुक्रमि 14 व 18 असेल तर 51 व्या पदांपर्यंतची बेरीज ओळखा.

9. AP च्या पहिल्या 7 पदांची बेरीज 49 आहे आणि पहिल्या 17 पदांची बेरीज 289 आहे तर पहिल्या n पदांची बेरीज काढा.

10. $a_1, a_2, a_3 ..... a_n$ हे AP तयार होते जेंव्हा AP खाली दारवविल्या प्रमाणे आहे.

i) $a_n = 3 + 4n$ ii) $a_n = 9 - 5n$

प्रत्येक बाबतीत पहिल्या 15 पदांची बेरीज काढा.

11. जर AP च्या पहिल्या n पदांची बेरीज $4n-n^2$ आहे, तर पहिले पद कोणते (S_1)? पहिल्या दोन पदांची बेरीज किती? दुसरे पद कोणते? त्याचप्रमाणे 3 रे, 10 वे आणि n वे पद काढा.

12. 6 ने भाग जाणाऱ्या पहिल्या 40 पदांची बेरीज काढा.

13. 8 च्या पटीतील पहिल्या 15 संख्यांची बेरीज काढा.

14. 0 ते 50 मधील विषम संख्यांची बेरीज काढा.

15. एका कामाच्या पुर्ततेसाठी झालेल्या विलंबासाठी ठेकेदाराला खालील प्रमाणे दंड आहे. पहिल्या दिवशी ₹ 200, दुसऱ्या दिवसासाठी ₹ 250, तिसऱ्या दिवसासाठी ₹ 300 आहे. जर ठेकेदाराने कामांस 30 दिवस विलंब केला तर त्याला द्यावी लागणारी दंडाची एकूण रक्कम काढा.

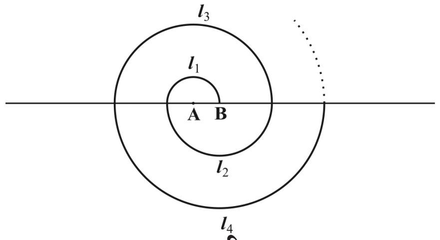
16. शाळेतील विद्यार्थ्यांना त्यांच्या शैक्षणिक प्रगतीसाठी एकूण ₹ 700 रोख रक्कम पारितोषीक म्हणून देण्यांत येते. जर प्रत्येक पारितोषीक ₹ 20 ने मागील पारितोषिकापेक्षा कमी होत असेल तर प्रत्येक पारितोषीकाची किंमत काढा.

17. एका शाळेतील विद्यार्थ्यांनी हवेतील प्रदूषण कमी करण्यासाठी शाळेच्या अवती भोवती झाडे लावण्याचे ठरविले. त्यानी असे ठरविले की प्रत्येक वर्गाने त्यांच्या वर्गाच्या संख्ये एवढी झाडे लावणे. उदा - पहिलीच्या एका वर्गाने एक झाड लावणे. दुसरीच्या एका वर्गाने 2 झाडे लावणे या प्रमाणे. त्या शाळेत इयत्ता पहिली ते बारावी पर्यंतचे वर्ग असून प्रत्येक वर्गाच्या तीन-तीन तुकड्या आहेत. तर विद्यार्थ्यी एकूण किती झाडे लावतील ?

18. एका मागोमाग एक अशा अर्धवर्तुळांनी मळसुत्र बनते. त्यांचा मध्य बिंदू A व B एका नंतर एक असून सुरूवातीचा मध्य बिंदू A असून त्यांची त्रिज्या अनुक्रमे 0.5cm, 1cm, 1.5cm, 2cm अशी आकृती 1.4 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आहे. तर अशा तेरा क्रमवार अर्धवर्तुळांनी बनलेल्या मळसुत्राची एकूण लांबी काढा ($\pi = \frac{22}{7}$).

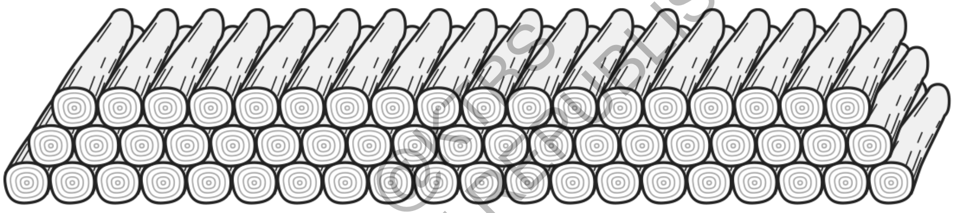
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

सूचना: क्रमवार अर्धवर्तुळांची लांबी l_1, l_2, l_3, l_4, ... आहे व त्यांचे मध्याबिंदू अनुक्रमे A, B, ... आहेत.



आकृती 5.4

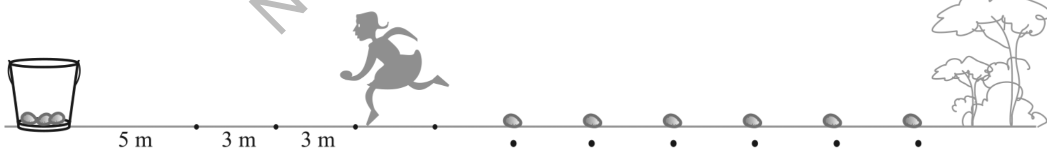
19. 200 ओंडके खालील प्रमाणे रचले आहेत. तळाच्या रांगेत 20 ओडंके, त्याच्या वरील रांगेत 20 ओंडके व त्याच्या वरील रांगेत 19 ओंडके (आकृती. 5.5) याप्रमाणे रचले आहेत. तर 200 ओंडके अशा प्रकारे किती रांगेत रचले आहेत आणि सर्वात वरच्या रांगेत किती ओंडके असतील?



आकृती 5.5

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

20. एका बटाट्याच्या शर्यतीत एक बादली सुरूवातीच्या ठिकाणी अशी ठेवली आहे की ती पहिल्या बटाट्यापासून 5 मी. अंतरावर आहे. इतर बटाटे एका रेषेत 3 मी. अंतरावर एक असे ठेवले आहेत. त्या ठिकाणी 10 बटाटे एका रेषेत ठेवले आहेत. (आकृती. 5.6 पहा)



आकृती 5.6

स्पर्धक बादली पासून सुरूवात करते. जवळचा बटाटा उचलते व परत मागे पळत जाऊन बादलीत बटाटा टाकते. पुन्हा दुसरा बटाटा उचलण्यासाठी पळते, बादलीत टाकण्यासाठी मागे पळते आणि असे ती पुढे याच पद्धतीने शेवटचा बटाटा बादलीत टाकेपर्यंत करत राहते. तर स्पर्धकाला एकूण किती अंतर धावावे लागते?

(**सूचना :** पहिला बटाटा उचलण्यासाठी आणि दुसरा बटाटा उचलण्यासाठी स्पर्धकाने धावलेले एकूण अंतर $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ मी. आहे.)

स्वाध्याय 5.4 (ऐच्छीक)*

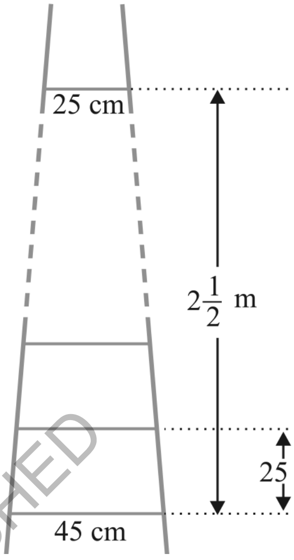
1. 121, 117, 113, ... या AP चे कितवे पद पहिले ऋण पद आहे ?

(सुचना : n ची किंमत काढा $a_n < 0$)

2. एका AP चे 3 रे पद व 7 वे पद यांची बेरीज 6 असून त्यांचा गुणाकार 8 आहे. तर पहिल्या 16 पदांची बेरीज काढा.

3. एका शिडीच्या दोन दांड्यामधील अंतर 25 cm आहे (आ 1.7 पहा) दांडयाची लांबी समानतेने कमी कमी होत जाते. सुरूवातीच्या दांडीची लांबी 45 cm असून शेवटच्या दांडीची लांबी 25 cm होईल अशी कमी होत जाते. जर तळाची आणि वरची दांडी एकमेकापासून $2\frac{1}{2}$ m अंतरावर असतील तर सर्व दांड्यासाठी एकूण किती लांबीचे लाकूड लागेत ?

(**सूचना :** एकूण दांड्या = $\frac{250}{25} + 1$)

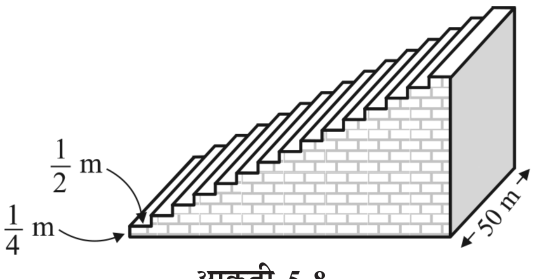


आकृती 5.7

4. एका गल्लीत असणाऱ्या घरांना क्रमाने 1 ते 49 नंबर दिले आहेत. त्यामध्ये एक x हे घर आहे असे की, x नंबरच्या घराच्या अगोदरच्या घरांच्या संख्यांची बेरीज ही x नंबरच्या घराच्या नंतर असलेल्या घरांच्या संख्याच्या बेरजे एवढी आहे. तर x ची किंमत काढा. (**सूचना :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$)

5. एका फुटबॉल मैदानातील प्रेक्षकासाठीची गच्ची 15 पायऱ्यांची आहे. प्रत्येक पायरी 5 m. लांब सिमेंट कॉंक्रीटने बांधली आहे. प्रत्येक पायरीची उंची $\frac{1}{4}$ m आणि पाय ठेवण्याची जागा $\frac{1}{2}$ m. आहे (आकृती. 5.8 पहा) तर एकूण किती घनफळाचे कॉंक्रीट गच्ची बांधण्यासाठी लागते ?

(**सूचना :** पहिली पायरी बांधण्यासाठी लागणाऱ्या क्रॉंक्रिटचे घनफळ = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50m^3$)



आकृती 5.8

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

5.5 सारांश (Summary):

या प्रकरणात आपण खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. अंकगणिती क्रम म्हणजे संख्यांची अशी यादी आहे की, ज्यामध्ये मिळणारे प्रत्येक पद हे एक निश्चित संख्या d ही मागील पदात मिळविली जाते पहिले पद सोडून. निश्चित संख्या d ला सामान्य फरक म्हणतात.

   A.P चा सामान्य नमूना a, a+d, a+2d, a+3d, ...

2. दिलेल्या संख्यांची यादी a_1, a_2, a_3 ही AP आहे जर त्यांचा फरक $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ समान असेल जर $a_{k+1} - a_k$ हे समान असते k च्या वेगवेगळ्या किंमतीसाठी.

3. पहिले पद a व सामान्य फरक d असणाऱ्या AP चे n वे पद $a_n = a + (n - 1)d$.

4. AP च्या पहिल्या n पदांची बेरीज

   $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

5. जर l हे AP चे शेवटचे पद असेल तर n पदांची बेरीज $S = \frac{n}{2}(a + l)$

वाचकाला टीप

जर a, b, c ही पदे AP ची आहेत तर $b = \frac{a + c}{2}$ आणि b ला a व c चा अंकगणिती मध्य म्हणतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

***

त्रिकोण

TRIANGLES

6

Z1W8Z9

6.1 परिचय:

तुम्ही इयत्ता 9 वी मध्ये त्रिकोण व त्याचे गुणधर्म याविषयी परिचित आहात. तुम्ही त्रिकोणाच्या एकरूपते विषयी अभ्यास केला आहे. आठवा, जर दोन आकृत्यांचा आकार व रूप सारखेच असेल तर त्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात. या प्रकरणामध्ये आपण अशा आकृत्यांचा अभ्यास करूया ज्यांचा आकार सारखा नसून त्यांचे रूप समान असेल. दोन आकृत्यांचे रूप समान असणाऱ्या (आकार समान असतीलच असे नाही) आकृत्यांना समरूप आकृत्या म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED
©KTBS

त्रिकोणांची समरूपता आणि त्यांचा उपयोग पायथॅगोरसच्या प्रमेयाची सिद्धता करण्यासाठी कसा केला जातो या माहितीची चर्चा करू.

तुम्ही विचार करू शकता का? पर्वतांची उंची (उदा. मांऊट एव्हरेस्ट) किंवा दूर अंतरावर असणाऱ्या वस्तुचे अंतर शोधू शकता का? हे मोजण्याच्या टेपने सरळपणे मोजता येईल का?

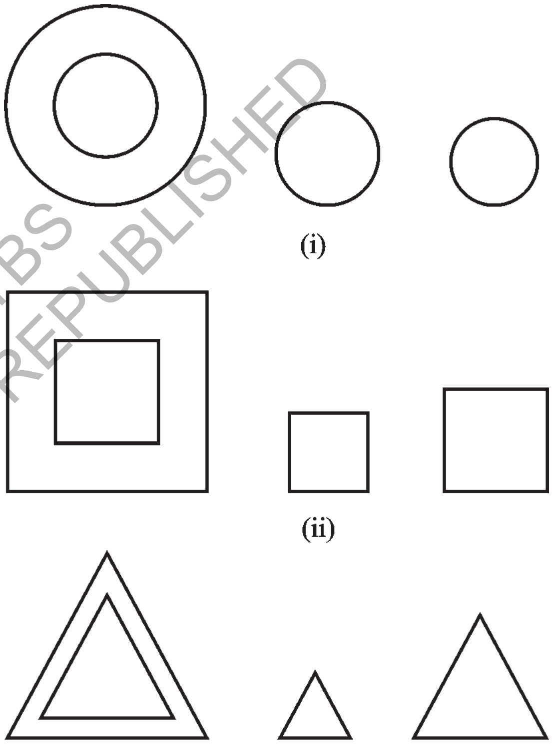
परंतू अशा प्रकारच्या उंची आणि अंतर सरळ प्रत्यक्ष मोजमापाने न करता काही कल्पनेंचा उपयोग करून ज्या आकृत्यांच्या समरूपतेवर आधारित आहेत. त्याने मोजता येते. (उदा: 7, प्रश्न 15 ही उदाहरणे स्वाध्याय 6.3 मध्ये पहा. तसेच प्रकरण 8 आपि 9 सुध्दा पहा)

6.2 समरूप आकृत्या :

इयत्ता 9 वी मध्ये तुम्ही पाहिला आहात की, समान त्रिज्या असणारी वर्तुळे एकरूप असतात, समान लांबीची बाजू असणारे चौरस एकरूप असतात. तसेच समान लांबीच्या बाजू असणारे समभुज चौकोन एकरूप असतात. आता दोन किंवा अधिक वर्तुळे (आकृती. 6.1 (i)) पहा ती एकरूप आहेत का? ज्या अर्थी त्यांच्या त्रिज्या समान नाहीत तेव्हा ती वर्तुळे एकरूप नाहीत. लक्षात घ्या त्यामध्ये काही एकरूप आहेत व काही एकरूप नाहीत. परंतु सर्वांचे रूप सारखेच आहे. म्हणून त्याना आपण समरूप म्हणतो. दोन समरूप आकृत्यांचे रूप समान असून त्यांचा आकार सम ान असेल असे नाही. म्हणून वरील वर्तुळे समरूप आहेत. दोन किंवा अधिक चौरस किंवा दोन किंवा अधिक समभुज चौकोन या बाबतीत काय? (आकृती 6.1 मध्ये ii व iii पहा) वरील निरीक्षणानुसार येथेही सर्व चौरस समरूप आहेत अणि सर्व समभुज त्रिकोण समरूप आहेत.

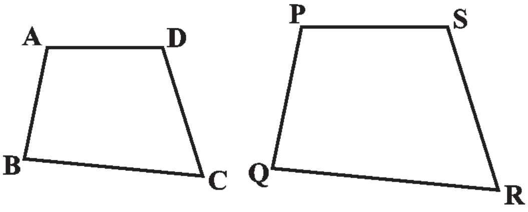
यावरून आपण असे म्हणू शकतो की, सर्व एकरूप आकृत्या समरूप आहेत परंतु समरूप आकृत्या एकरूप असतातच असे नाही.

एक वर्तुळ आणि एक चौरस समरूप असतात का? या प्रश्नाचे उत्तर आपणांस त्या आकृत्या पाहिल्यास मिळते. (आकृती. 6.1 पहा) उघडपणे या आकृत्या समरूप नाहीत (का ?)



आकृती 6.1

चौकोन ABCD आणि चौकोन PQRS यांच्याबध्दल तुम्ही काय सांगू शकाल? (आकृती 6.2 पहा) ते समरूप आहेत का? या आकृत्या समरूप आहेत अशा वाटतात पण त्याबद्धल



आकृती 6.2

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

आपण ठाम नाही. म्हणून आपण एक समरूप आकृत्यांची व्याख्या करतो आणि त्या व्याख्येवरून काही नियमानुसार दिलेल्या दोन आकृत्या समरूप आहेत किंवा नाहीत हे ठरवितो.

आकृती 6.3 मध्ये दिलेले फोटो पहा.

आकृती 6.3

तुम्ही पाहताक्षणीच सांगू शकता की हे फोटो एकाच स्मारकाचे आहेत (ताजमहाल). परंतु ते वेगवेगळ्या आकाराचे आहेत. तुम्ही सांगू शकता का हे तिन्ही फोटो समरूप आहेत? होय ते समरूप आहेत.

एकाच व्यक्तीचे दोन फोटो, एक 10 वर्षे वयाचा व दुसरा 40 वर्षे वयाचा असेल तेव्हाचे, या फोटोविषयी काय सांगाल? ते समरूप आहेत काय? हे फोटो एकाच आकाराचे आहेत पण ते कदापीही सारख्याच रूपाचे नाहीत. म्हणून ते फोटो समरूप नाहीत.

एका निगेटिव्ह फिल्मपासून वेगवेगळ्या आकाराचे फोटो छापताना फोटोग्राफर काय करतो? तुम्ही ऐकला असाल स्टँप साइज, पासपोर्टसाइज आणि पोस्टकार्ड साइज फोटो असतात. सामान्यपणे फोटोग्राफर 35mm आकाराच्या फिल्म वर फोटो घेतात व नंतर 45mm (किंवा 55mm) या मोठ्या आकारात छापतात. यावरून आपण लहान फोटोचा एक रेषाखंड हा त्याच्या मोठ्या फोटोच्या संगत रेषाखंडाशी विचार केल्यास गुणोत्तर $\left(\frac{45}{35}\right)$ किंवा $\left(\frac{55}{35}\right)$ येईल. म्हणजेच लहान फोटोचा प्रत्येक रेषाखंड 35:45 (किंवा 35:55) या गुणोत्तरात फोटो मोठा करतात. हे असे ही म्हणू शकतो की, मोठा फोटो 45:35 किंवा 55:35 या गुणोत्तरात आकारात करू शकतात.

यापुढे कोणत्याही दोन रेषाखंडाच्या जोडीत असणाऱ्या कोनाचा विचार करू. दोन वेगवेगळ्या आकाराच्या फोटोमध्ये दोन रेषाखंडातील कोन समान असतात. हे दोन समरूप आकृत्यासाठी गरजेचे आहे.

समान बाजुच्या दोन बहुभुजाकृती समरूप असतात जेव्हा

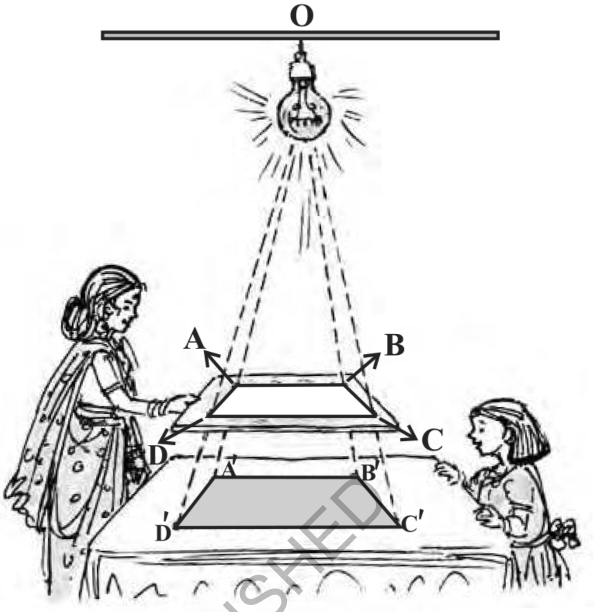
(i) त्यांचे संगत कोन समान असतात आणि (ii) त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणांत असतात.

संगत बाजुंचे समान प्रमाण हे प्रमाण म्हणून बहुभुजाकृतीसाठी वापरतात. जगाचा नकाशा, इमारतीचा आराखडा तयार करताना या योग्य प्रमाणांचा उपयोग करतात.

आकृत्यांची समरूपता चांगल्या प्रकारे समजण्यासाठी पुढील कृती करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कृती 1 : O या ठिकाणी विद्युत दिवा पेटता ठेवा व त्याच्या बरोबर खाली तुमच्या वर्गातील टेबल ठेवा. एका कार्डबोर्डचा ABCD असा बहुभुजाकृती चौकोन कापून घ्या व हा चौकोनी कार्डबोर्ड टेबल व वरचा दिवा यामध्ये समांतर धरा. ABCD बोर्डाची छाया टेबलावर पडते. सावलीची सिमारेषा पेन्सिलीने आखा (आकृती 6.4 पहा). ABCD चौकोनाची विस्तारीत झालेली आकृती A′B′C′D′ चौकोन आहे. कारण प्रकाश सरळरेषेत प्रवास करतो. तसेच A′ हे किरण OA वर व B′ किरण OB वर, C′ हे किरण OC वर आणि D′ हे किरण OD वर आहेत. म्हणून चौकोन A′ B′ C′ D′ व चौकोन ABCD हे समान रूपाचे पण वेगवेगळ्या आकाराचे आहेत. म्हणून चौकोन A′ B′ C′ D′ आणी चौकोन ABCD हे समरूप चौकोन आहेत.



आकृती 6.4

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

शिरोबिंदू A′ चा संगत शिरोबिंदू A, शिरोबिंदू B′ चा संगत शिरोबिंदू B, शिरोबिंदू C′ चा संगत शिरोबिंदू C आणि शिरोबिंदू D′ चा संगत शिरोबिंदू D आहे. वरील संगत शिरोबिंदू चिन्हाने असे दर्शावितात A′ ↔ A, B′ ↔ B, C′ ↔ C आणि D′ ↔D. प्रत्यक्ष कोन व बाजुंची मोजमापे केल्यास तुम्हाला असा पडताळा येईल. (i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ आणि

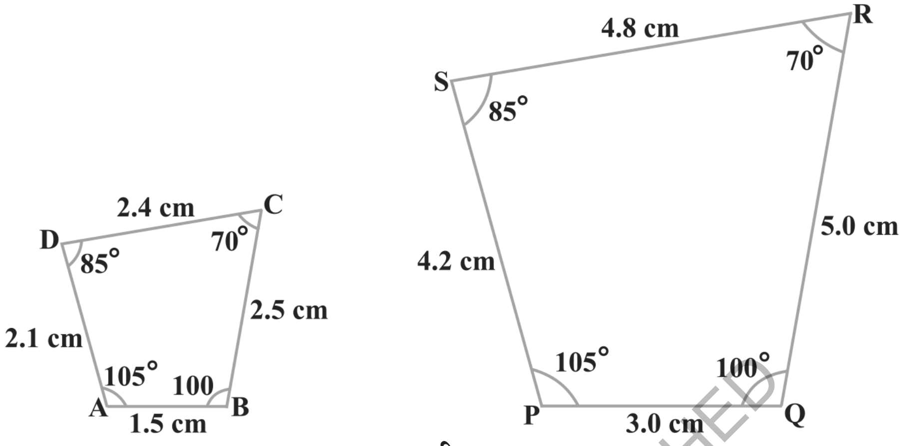
$$\text{(ii)} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

यावरून दोन समान बाजुंच्या बहुभुजाकृती मध्ये,

(i) सर्व संगत कोन समान असतील आणि

(ii) संगत बाजू प्रमाणात असतील तर त्या दोन बहुभुजाकृती समरूप असतात.

वरील विधानावरून चौकोन ABCD आणि चौकोन PQRS हे समरूप आहेत. (आकृती 6.5) हे सहजपणे सांगू शकता.

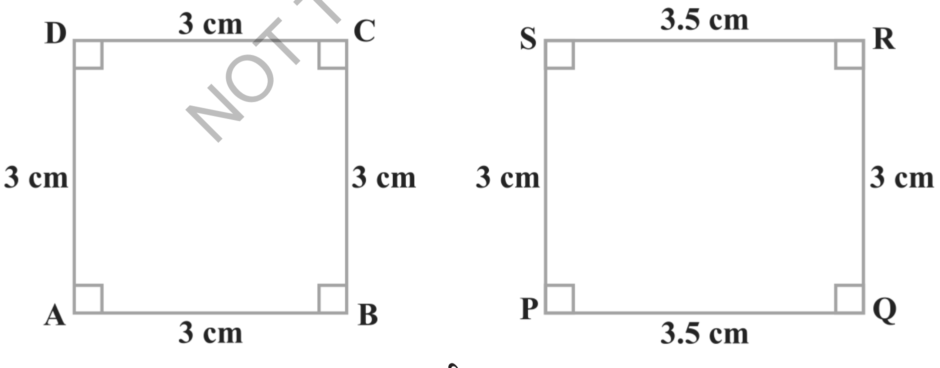


आकृती 6.5

टीप : एक बहुभुजाकृती दुसऱ्या बहुभुजाकृतीशी समरूप आहे व दुसरी बहुभुजाकृती तिसऱ्या बहुभुजाकृतीशी समरूप आहे, तेव्हा पहिली बहुभुजाकृती ही तिसऱ्या बहुभुजाकृतीशी समरूप आहे.

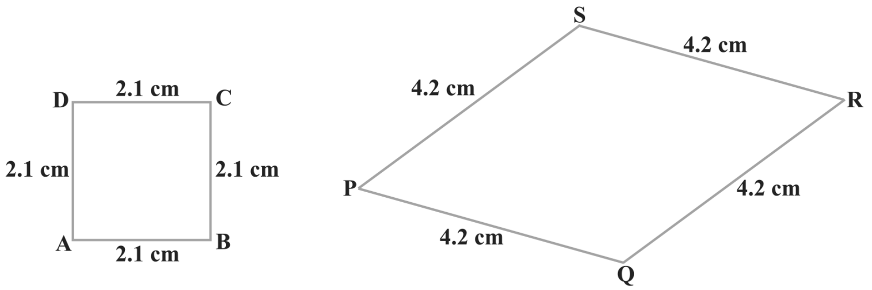
तुमच्या लक्षात आले असेल की, दोन चौकोन (चौरस आणि आयत) आकृती. 6.6 मध्ये दाखविल्या प्रमाणे त्यांचे संगत कोन समान आहेत, परंतू त्यांच्या संगत बाजू सारख्याच प्रमाणात नाहीत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 6.6

म्हणून, हे दोन चौकोन समरूप नाहीत. याप्रमाणे लक्षात घ्या की दोन चौकोन (चौरस आणि समभुज चौकोन) आकृती 6.7 मध्ये दाखविले आहेत. यामध्ये संगत बाजू प्रमाणात आहेत पण संगतकोन समान नाहीत. म्हणून हे दोन चौकोन समरूप नाहीत.



आकृती 6.7

यावरून समरूपतेच्या अटी (i) व (ii) पैकी कोणतीही एक अट बहुभुजाकृतींच्या समरूपतेला पुरेशी नाही.

स्वाध्याय 6.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. रिकाम्या जागा भरा.

(i) सर्व वर्तुळे ____________ असतात. (एकरूप, समरूप)

(ii) सर्व चौरस ____________ असतात. (समरूप, एकरूप)

(iii) सर्व ____________ त्रिकोण समरूप असतात. (समद्विभुज, समभुज)

(iv) बाजूंची संख्या समान असणाऱ्या दोन बहुभुजाकृती समरूप असतात, जर

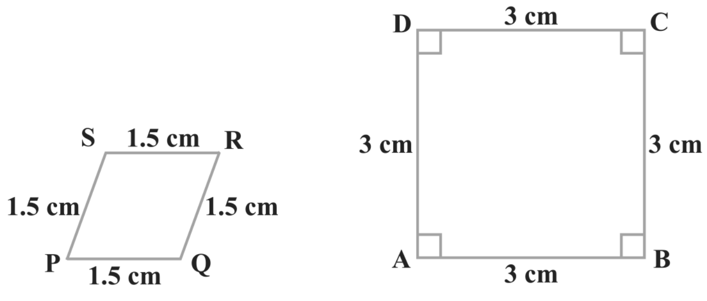
(a) त्यांचे संगत कोन ____________ असतात आणि

(b) त्यांच्या संगत बाजू ____________(समान, प्रमाणात) असतात.

2. प्रत्येकाची दोन वेगवेगळी उदाहरणे द्या.

(i) समरूप आकृत्या (ii) समरूप नसलेल्या आकृत्या

3. खालील चौकोन समरूप आहेत किंवा नाहीत ते सांगा.



आकृती 6.8

6.3 त्रिकोणांची समरूपता (Similarity of Triangles)

दोन त्रिकोणाच्या समरूपतेविषयी तुम्ही काय सांगाल?

दोन त्रिकोण समरूप आहेत जर (i) त्यांचे संगत कोन समान असतात आणि (ii) त्यांच्या संगत बाजुंचे गुणोत्तर समान असतात. लक्षात घ्या जर दोन त्रिकोणांचे संगत कोन समान असतील तर त्याना समकोन त्रिकोण म्हणतात. समकोन त्रिकोणाविषयी ग्रीक गाणितज्ञ थेल्स यांनी एक महत्वाचे सत्य सांगितले आहे ते खालील प्रमाणे.

थेल्स
(640 - 546 B.C.)

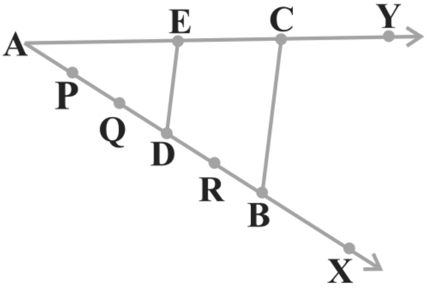
दोन समकोन त्रिकोणामध्ये कोणत्याही दोन संगत बाजुंचे गुणोत्तर नेहमी समान असते. याला मूलभूत प्रमाणाचा प्रमेय (आता थेल्सचा प्रमेय) म्हणून ओळखतात.

मूलभूत प्रमाणाचा प्रमेय समजून घेण्यासाठी खालील कृती करा.

कृती : कोन $\angle XAY$ काढा आणि त्याच्या एका AX बाजूवर 5 बिंदू घ्या. P, Q, D, R आणि B असे घ्या की, AP = PQ = QD = DR = RB.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता B मधून एक रेषा काढा ती AY ला C मध्ये मिळू द्या. (आकृती 6.9 पहा)



आकृती 6.9

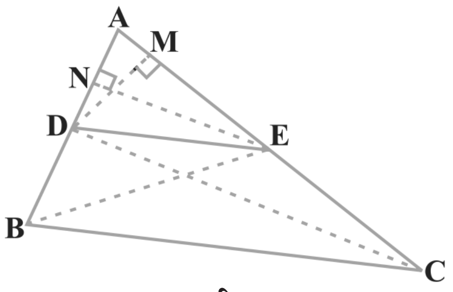
तसेच D बिंदूतून BC ला समांतर रेषा काढा ती AC ला E बिंदूत मिळू द्या. वरील रचनेवरून तुम्हाला असे दिसून येते की, $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? AE व EC मोजा. $\frac{AE}{EC} = ?$ असे दिसून येते कीं, $\frac{AE}{EC}$ ची किंमत सुध्दा आहे. यावरून आपणास असे दिसून येते की ΔABC मध्ये $DE \parallel BC$ आणि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

हा योगायोग आहे का? नाही, हे खालील प्रमेयामुळे आहे.

(याला मुलभूत प्रमाणाचा प्रमेय नावाने ओळखला जाते.)

प्रमेय 6.1 : त्रिकोणाच्या एका बाजूस समांतर असणारी रेषा इतर दोन बाजूना छेदत असेल तर ती रेषा त्या बाजूंना प्रमाणात विभागते.

सिद्धता : त्रिकोण ABC मध्ये DE रेषा BC ला समांतर असून AB आणि AC ला अनुक्रमे D आपि E मध्ये छेदते. (आकृती 6.10 पहा)



आकृती 6.10

आपणास सिद्ध करावयाचे आहे. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

BE आणि CD सांधा आणि DE || AC

आणि EN || AB काढा.

आता ΔADE चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया × उंची = $\frac{1}{2}AD \times EN$

इयत्ता IX वी मध्ये शिकल्याप्रमाणे ΔADE चे क्षेत्रफळ क्षेत्र (ADE) ने दर्शवितात.

म्हणून क्षेत्र. (ADE) = $\frac{1}{2}AD \times EN$

त्याचप्रमाणे क्षेत्र. (BDE) = $\frac{1}{2}DB \times EN$

क्षेत्र. ADE = $\frac{1}{2}AE \times DM$ आणि क्षेत्र. (DEC) = $\frac{1}{2}EC \times DM$

म्हणून $\frac{\text{क्षेत्र.(ADE)}}{\text{क्षेत्र.(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2}AD\times EN}{\frac{1}{2}EC\times DM} = \frac{AE}{EC}$ ....(1)

आणि $\frac{\text{क्षेत्र. (ADE)}}{\text{क्षेत्र. (DEC)}} = \frac{\frac{1}{2}AE\times DM}{\frac{1}{2}EC\times DM} = \frac{AE}{EC}$ ....(2)

लक्षात घ्या त्रिकोण BDE आणि त्रिकोण DEC हे DE या एकाच पायावर आणि BC || DE या समांतर रेषांच्या जोडीत आहेत

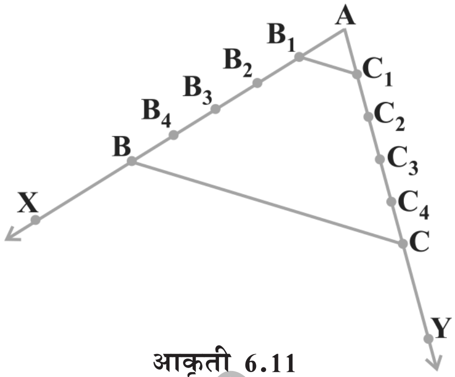
म्हणून क्षेत्र (BDA) = क्षेत्र (DEC) .... (3)

∴ सिद्धता (1), (2) आणि (3) वरून आपणास कळते

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

या प्रमेयाचा व्यत्यास सत्य आहे का? (व्यत्यासाचा अर्थ समजण्यासाठी परिशिष्ट 1 पहा). हे तपासण्यासाठी खालील कृती करा.



आकृती 6.11

कृती 3 : $\angle XAY$ काढ़ा आणि AX किरणांवर B_1, B_2, B_3, B_4 बिंदूंच्या खुणा करा अशा की $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ याचप्रमाणे AY किरणावर C_1, C_2, C_3, C_4 आणि $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$ या बिंदूंच्या खुणा करा. B_1C_1 आणी BC जोडा.

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC}{C_1C}$ (प्रत्येकाचे $\frac{1}{4}$ होते) हे दिसून येते.

तुम्हाला असे सुद्धा दिसून येईल B_1C_1 आणि BC एकमेकांस समांतर आहेत

म्हणजे, $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

त्याचप्रमाणे B_2C_2, B_3C_3 आणि B_4C_4 जोडल्यास

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \left[\frac{2}{3}\right]$ आणि $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{2}{3}$ आणि $B_1C_1 \parallel BC$ (3)

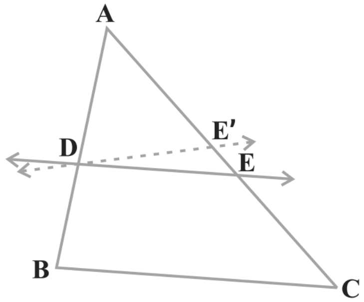
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ आणि $B_4C_4 \parallel BC$ (4)

(1), (2), (3) आणि (4) वरून आपणास असे दिसून येते की त्रिकोणाऱ्या दोन बाजूंना एखादी रेषा सारख्या प्रमाणात विभागत असेल तर ती रेषा तिसऱ्या बाजूस समांतर असते.

वरील कृती पुन्हा पुन्हा करा. त्रिकोण XAY ची वेगवेगळी मापे घेऊन आणि AX आणि AY वर कितीही संख्येचे समान भाग घेऊन प्रत्येक वेळी तुम्ही याच निष्कर्षाला पोचता. यावरून पुढील प्रमेय जो 6.1 चा व्यत्यास आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

प्रमेय 6.2 : जर त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंना एक रेषा समान प्रमाणात छेदत असेल तर ती रेषा तिसऱ्या बाजूला समांतर असते.



आकृती 6.12

हा प्रमेय सिद्ध करण्यासाठी रेषा DE अशी काढा की, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ आणि DE रेषा BC ला समांतर आहे असे मानू (आकृती 6.12 पहा.)

जर DE ही BC ला समांतर नसेल तर

DE′ रेषा BC ला समांतर काढा

म्हणून $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ (का ?)

म्हणून $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$ (का ?)

दोन्ही बाजूस 1 मिळवून आपणास असे दिसून येते की E आणि E′ एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात (का ?)

आता काही उदाहरणांचा विचार करू व वरील प्रमेयाचा उपयोग पाहू.

उदाहरण 1 : ΔABC च्या AB व AC बाजूंना एक रेषा अनुक्रमे D व E मध्ये छेदते आणि ती BC ला समांतर आहे.

तर सिद्ध करा $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{AC}$ (आकृती 6.13 पहा)

उकल : $DE \parallel BC$ (गृहित)

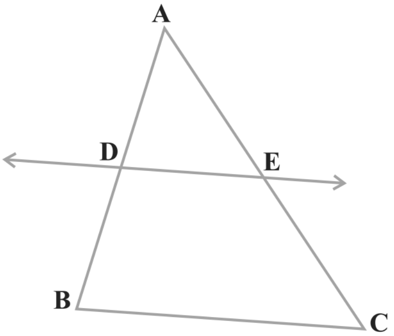
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \quad \text{(प्रमेय 2.1)}$$

किंवा $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ (व्यस्त)

किंवा $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$

किंवा $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

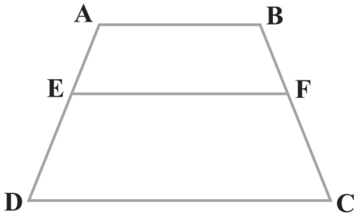
म्हणून $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



आकृती 6.13

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

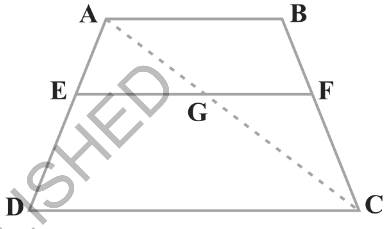
उदाहरण 2 : ABCD हा समलंब चौकोन असून AB || DC. E आणि F हे दोन बिंदू अनुक्रमे AD व BC या असमांतर बाजुवरील बिंदू असे आहेत की, EF ही AB ला समांतर आहे. (आकृती 6.14 पहा) तर $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ दाखवा.



आकृती 6.14

उकल : AC जोडा ती EF ला G मध्ये छेदू द्या.

(आ. 6.15 पहा)



आकृती 6.15

AB || DC आणि EF || AB (दिलेले)

म्हणून EF || DC

(एका रेषेला समांतर असणारी रेषा एकमेकाला समांतर असतात.)

आता ΔADC मध्ये

EG || DC (जसे EF || DC)

म्हणून $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (प्रमेय 6.1) (1)

त्याचप्रमाणे ΔCAB वरून

$$\frac{CG}{AG}=\frac{CF}{BF}$$

म्हणजे, $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ (2)

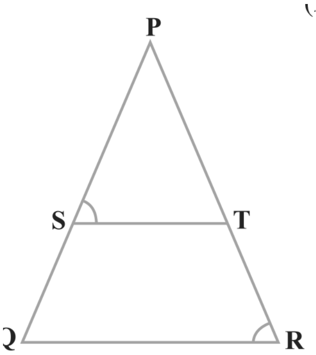
म्हणून (1) आणि (2) वरून

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

उदाहरण 3 : आकृती 6.16 मध्ये $\frac{PS}{SQ}=\frac{PT}{TR}$

आणि ∠PST = ∠PRQ

तर सिद्ध करा की ΔPQR हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.



आकृती 6.16

उकल : $\frac{PS}{SQ}=\frac{PT}{TR}$ (दिलेले आहे)

म्हणून ST || QR (प्रमेय 6.2)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून $\angle PST = \angle PRQ$ (संगत कोन) (1)

$\angle PST = \angle PRQ$ हे सुद्धा दिले आहे .... (2)

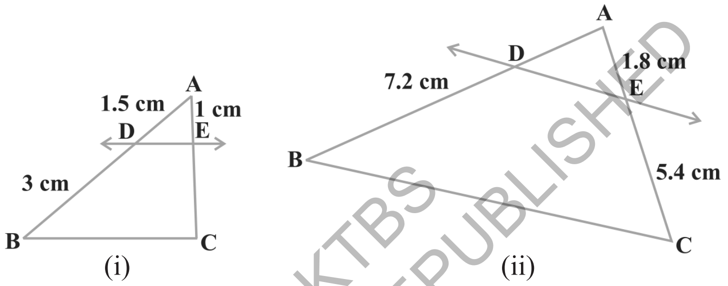
म्हणून $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) व (2) वरून]

म्हणून $PQ = PR$ (समान कोनांच्या विरुद्ध बाजू समान असतात)

ΔPQR हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

स्वाध्याय 6.2

1. आकृती 6.17. (i) आणि (ii) मध्ये $DE \parallel BC$, तर (i) मध्ये EC ची किंमत आणि (ii) मध्ये AD ची किंमत काढा.



आकृती 6.17

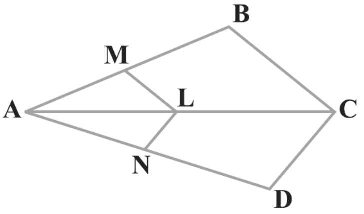
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ΔPQR मध्ये E आणि F हे अनुक्रमे PQ आणि PR वर असलेले बिंदू आहेत ΔPQR आहे. तर खालील प्रत्येकाच्या बाबतीत $EF \parallel QR$ आहे का?

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3cm, PF = 3.6 cm आणि FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm आणि RF = 9 cm

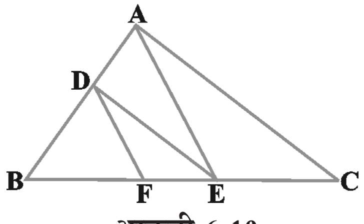
(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56cm, PE = 0.18 cm आणि PF = 0.36 cm



आकृती 6.18

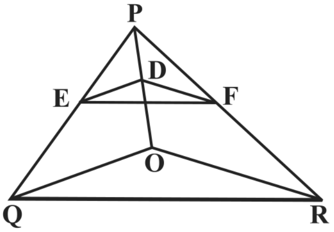
3. आकृती 6.18 मध्ये जार $LM \parallel CB$ आणि $LN \parallel CD$, तर सिद्ध करा $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$

4. आकृती 6.19 मध्ये $DE \parallel AC$ आणि $DF \parallel AE$ तर सिद्ध करा $\frac{BF}{FE}=\frac{BE}{EC}$



आकृती 6.19

5. आकृती 6.20 मध्ये $DE \parallel OQ$ आणि $DF \parallel OR$ असे दाखवा की $EF \parallel QR$

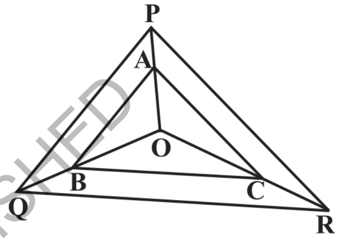


आकृती 6.20

6. आकृती 6.21 मध्ये A, B आणि C हे बिंदू अनुक्रमे OP, OQ अणि OR वर आहेत असे की, $AB \parallel PQ$ आणि $AC \parallel PR$ तर $BC \parallel QR$ असे दाखवा.

7. प्रमेय 6.1 चा उपयोग करून सिद्ध करा की, Δ च्या एका बाजुच्या मध्यातून जाणारी रेषा त्रिकोणाच्या दुसऱ्या बाजुला समांतर असते व ती तिसऱ्या बाजुस दुभागते.

8. प्रमेय 6.2 चा उपयोग करून सिद्ध करा की, Δ च्या कोणत्याही दोन बाजुंचे मध्यबिंदू जोडणारी रेषा तिसऱ्या बाजुस समांतर असते.



आकृती 6.21

9. ABCD हा समलंब चौकोन आहे. ज्यामध्ये $AB \parallel DC$ आणि त्याचे कर्ण एकमेकांस O बिंदूत छेदतात. तर दाखवा की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. ABCD चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस O बिंदूत छेदतात असे कीं, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ तर ABCD हा समलंब चौकोन आहे हे दाखवा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

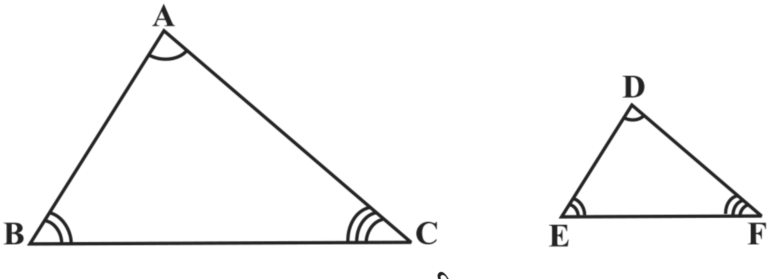
6.4 त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या कसोटी (Criteria for Similarity of Triangles)

या अगोदारच्या घटकामध्ये आपण असे सांगितले की, दोन त्रिकोण समरूप असतात जर (i) त्यांचे संगत कोन समान असतात. आणि (ii) त्यांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर समान असते.

म्हणून ΔABC आणि ΔDEF मध्ये जर,

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ आणि

(ii) $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ तर दोन त्रिकोण समरूप आहेत (आकृती 6.22 पहा)



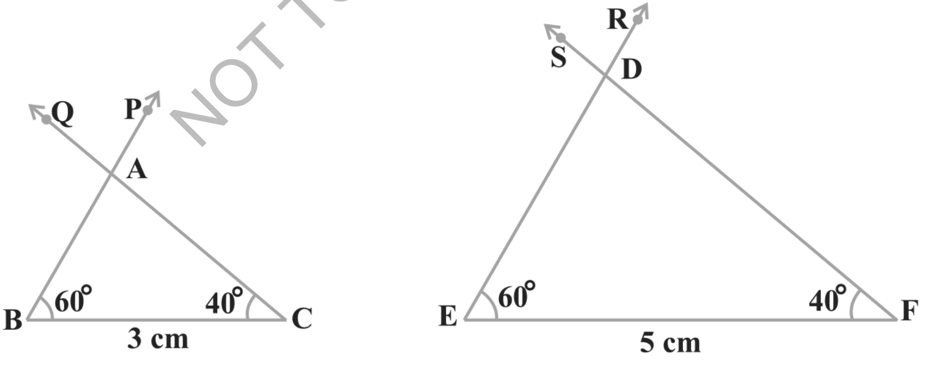
आकृती 6.22

येथे शिरोबिंदू A चा संगत शिरोबिंदू D, B चा संगत शिरोबिंदू E आणि C चा संगत शिरोबिंदू F म्हणून या दोन त्रिकोणांची समरूपता चिन्हाने अशी दर्शावितात. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ म्हणजे त्रिकोण ABC हा ΔDEF शी समरूप आहे. हे $\sim$ चिन्ह समरूपता दर्शविते. नववीच्या वर्गात आपण '$\cong$' हे चिन्ह एकरूपता दर्शविण्यासाठी वापरले होते.

येथे या गोष्टीवर आपण लक्ष दिले पाहिजे की त्रिकोणांच्या एकरूपतेमध्ये जसे केले होते तसेच त्रिकोणांच्या समरूपतेमध्ये सांकेतिक चिन्ह दर्शविण्यासाठी संगत घटक योग्य क्रमाने लिहिले पाहिजे. उदा: आकृती 6.22 मधील त्रिकोण ABC आणि त्रिकोण DEF साठी आम्ही $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ किंवा $\Delta ABC \sim \Delta FED$ लिहू शकत नाहीं. परंतु आम्ही $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ असे लिहू शकतो.

आता एक नैसर्गिक प्रश्न निर्माण होतो. दोन त्रिकोण ΔABC आणि ΔDEF यांची समरूपता तपासण्यासाठी, आपण नेहमी त्यांच्या संगत कोनांची समानता आणि त्यांच्या संगत बाजुंचे गुणोत्तर जसे ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) व $\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ पहावे का? चला तपासूया. तुम्ही 9 वी मध्ये एकरूपतेच्या कसोटीसाठी दोन त्रिकोणाच्या एकरूपतेत फक्त दोन त्रिकोणाच्या संगत तीन जोड्या मिळवतो. येथे सुध्दा दोन त्रिकोणांच्या समरूपतेची कसोटी मिळविण्यासाठी त्यांच्या संगत घटकांच्या कमीत कमी तीन जोड्या मिळविल्या पाहिजेत. यासाठी खालील कृत्ती करा.

कृती 4 : BC अणि EF वेगवेगळ्या लांबीचे रेषाखंड घ्या. समजा 3 cm आणि 5 cm प्रत्येकी. त्यानंतर B व C बिंदूशी $\angle PBC$ आणि $\angle QCB$ रचा समाजा 60^0 आणि 40^0. त्याचप्रमाणे E अणि F बिंदूशी $\angle REF$ आणि $\angle SFE$ अनुक्रमे 60^0 व 40^0 प्रत्येकी रचा (आकृती 6.23 पहा)



आकृती 6.23

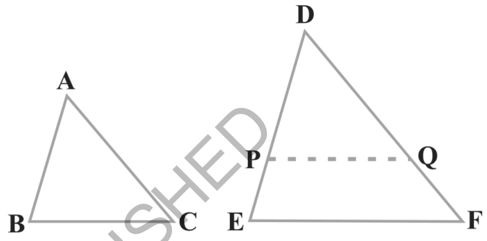
समजा किरण BP आणि CQ एकमेकांस A आणि किरण ER व FS एकमेकांस D मध्ये छेदतात. ABC आणि DEF या दोन त्रिकोणांत $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ आणि $\angle A = \angle D$ म्हणजेच या दोन त्रिकोणांचे संगत कोन समान आहेत. तुम्ही त्यांच्या संगत बाजू विषयी काय सांगाल? इथे $\frac{BC}{EF}=\frac{3}{5}=0.6$ आहे. तर $\frac{AB}{DE}$ अणि $\frac{CA}{FD}$ विषयी काय? AB, DE, CA आणि FD मोजून

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्ही $\frac{AB}{DE}$ अणि $\frac{CA}{FD}$ सुद्ध 0.6 आहे हे सांगू शकाल. यावरून $\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$. हिच कृती तुम्ही संगत कोन समान घेऊन अनेक त्रिकोणांची रचना करू शकाल. प्रत्येक वेळी तुम्हाला त्यांच्या संगत बाजुंचे गुणोत्तर समानच आढळेल या कृतीवरून आपण दोन त्रिकोणांची समरूपतेची कसोटी खालील प्रमाणे मिळवू.

प्रमेय 6.3: दोन त्रिकोणामध्ये जर तिन्ही संगत कोन समान असतील तर त्यांच्या संगत बाजू समान प्रमाणांत असतात, म्हणून ते त्रिकोण समरूप असतात.

ही कसोटी AAA (कोन, कोन, कोन) असून दोन त्रिकोणांच्या समरूपतेची कसोटी म्हणून ओळखली जाते. हा प्रमेय ΔABC अणि ΔDEF मध्ये $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ अणि $\angle C = \angle F$ असे घेऊन सिद्ध करता येतो. (आ. 6.24 पहा)



आकृती 6.24

DP = AB आणि DQ = AC असे घेऊन PQ जोडा.

जसे $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (का?)

$\angle B = \angle P = \angle E$ आणि $PQ \parallel EF$ (कसे?)

$\therefore \quad \frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}$ (का?)

म्हणजे $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (का?)

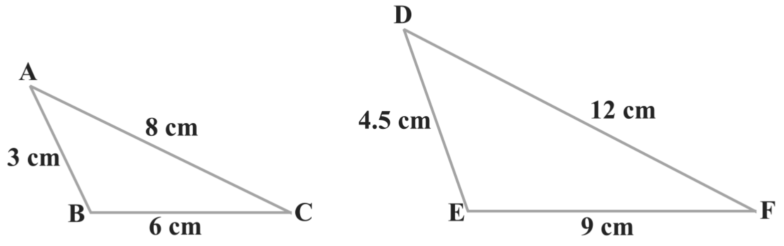
त्याचप्रमाणे $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ आणि म्हणून $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$

टीप : जर त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या अनुक्रमे दोन संगत कोनाशी समान असतील. तर कोनांच्या बेरीज नियमानुसार त्यांचा तिसरा कोन ही समान होतो. म्हणून AAA ही समरूपतेची कसोटी खालील प्रमाणे लिहिली जाते.

'एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या अनुक्रमे दोन संगत कोनांशी समान असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात'. ही दोन त्रिकोणांच्या समरूपतेची AA कसोटी म्हणून ओळखली जाते. तुम्ही पाहिला आहातच की, एका त्रिकोणाचे तीन कोन अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत कोनांशी समान असतील तर त्या दोन त्रिकोणाच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात. (म्हणजे समान गुणोत्तरात) याचे व्यत्यास विधान काय असेल? व्यत्यास सत्य आहे काय? दुसऱ्या शब्दांत, जर एका त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजुंशी प्रमाणांत असतील, तर हे खरे आहे का त्यांचे संगत कोन समान आहेत? खालील कृतीवरून तपासा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कृती 5 : ΔABC आणि ΔDEF असे रचा कीं $AB = 3$ cm आणि $BC = 6$ cm, $CA = 8$ cm, $DE = 4.5$ cm, $EF = 9$ cm आणि $FD = 12$ cm (आकृती 6.25 पहा)



आकृती 6.25

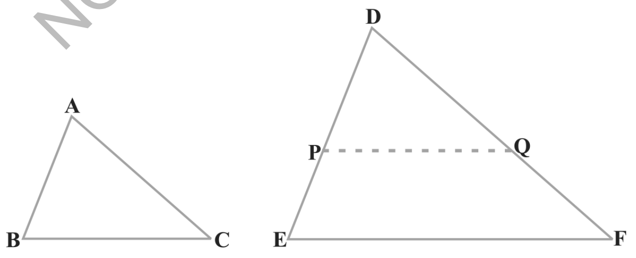
जसे $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ($\frac{2}{3}$ प्रत्येकी समान)

आता $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ अणि $\angle F$ मोजा. तुम्हाला असे दिसून येईल की, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$ म्हणजेच दोन त्रिकोणाचे संगत्त कोन समान आहेत. अशा प्रकारचे त्रिकोण रचून (बाजू प्रमाणात घेऊन) प्रत्येक वेळी तुम्ही पाहू शकाल की त्यांचे संगत कोन समान असतात. ते खालील समरूपतेच्या कसोटी प्रमाणे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 6.4 : दोन त्रिकोणात जर एका त्रिकोणाच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजूशी प्रमाणात असतील, तर त्याचे संगत कोन समान असून ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

ही दोन त्रिकोणाच्या समरूपतेची SSS (बाजू, बाजू, बाजू) कसोटी आहे. हा प्रमेय सिद्ध करता येतो जसे ΔABC आणि ΔDEF असे घेऊन कीं, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1)(आ. 6.26 पहा)



आकृती 6.26

$DP = AB$ आणि $DQ = AC$ असे होईल असे P व Q बिंदू घ्या आणि PQ जोडा.

असे दिसून येते कीं, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ आणि $PQ \parallel EF$ (कसे ?)

म्हणून $\angle P = \angle E$ आणि $\angle Q = \angle F$

म्हणून $\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{PQ}{EF}$

$\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{BC}{EF}$ (का?)

$BC = PQ$ (का?)

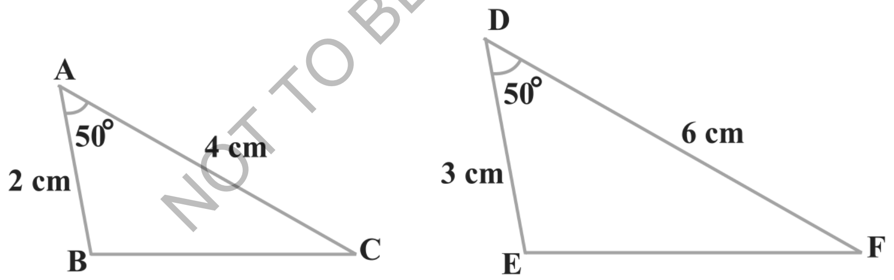
ज्याअर्थी $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (का?)

म्हणून $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$ (कसे ?)

टीप : तुम्ही स्मरण करा कोणत्याही दोन अटीविषयी (i) संगत कोन समान असतात आणि (ii) संगत बाजू सारख्याच प्रमाणात असतात. हे एवढेच दोन बहुभुजाकृती समरूप आहेत हे दाखविण्यासाठी पुरेसे नाही. प्रमेय 6.3 आणि प्रमेय 6.4 वरून दोन त्रिकोणांची समरूपता सांगू शकता. येथे दोन्ही अटी तपासण्याची गरज नाही. एक अट ही दुसरी अट सुचित करते.

इयत्ता 9 वी मधील दोन त्रिकोणांची एकरूपता कसोटीचे स्मरण करा SSS समरूपता कसोटीची तुलना SSS एकरूपतेच्या कसोटीशी करून पहा. यासाठी खालील कृती पहा.

कृती 6 : ΔABC आणि ΔDEF असे रचा की, $AB = 2$ cm $\angle A = 50^0$, $AC = 4$ cm, $DE = 3$ cm, $\angle D = 50^0$ आणि $DF = 6$ cm (आकृती 6.27 पहा)



आकृती 6.27

येथे आपण असे पाहू शकतो की, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (प्रत्येकी $\frac{2}{3}$) परंतु $\angle A$ (बाजु AB आणि AC चा अंतर्गत कोन) $= \angle D$ (बाजू DE आणि DF चा अंतर्गत कोन) आहे. एका त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कोनाबरोबर असून ते कोन सामाविष्ट करणाऱ्या बाजू प्रमाणात आहेत. आता $\angle B, \angle C, \angle E$ आणि $\angle F$ मोजा.

तुम्हाला असे दिसून येईल की, $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$ अर्थातच AAA समरूपता कसोटीवरून $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आहे. आपण अशा अनेक त्रिकोणांच्या जोड्या काढून त्यामध्ये एका

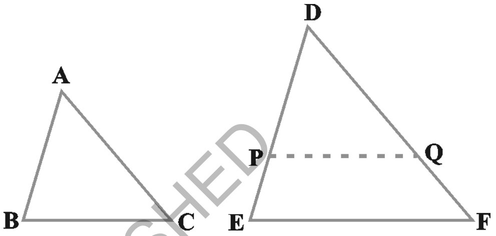
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एका कोनाशी समान होईल असे की, ते कोन सामाविष्ट करणाऱ्या बाजू प्रमाणात असतील. प्रत्येक वेळी आपणास दिसून येईल की ते त्रिकोण समरूप होतील. या त्रिकोणांची समरूपता खालील कसोटीच्या कारणामुळे आहे.

प्रमेय 6.5 : जर एका त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एका संगत कोनाशी समान असेल आणि त्या कोनांला समाविष्ट करणाऱ्या बाजू प्रमाणात असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

या कसोटीला SAS (बा.को.बा.) कसोटी म्हणतात.

पहिल्या प्रमाणेच या प्रमेयामध्ये दोन त्रिकोण ABC आणि DEF असे घ्या की, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) असतील आणि $\angle A = \angle D$ (आकृती 6.28 पहा) ΔDEF मध्ये $DP = AB$ आणि $DQ = AC$ असे होईल असे P व Q बिंदू घ्या व PQ जोडा.



आकृती 6.28

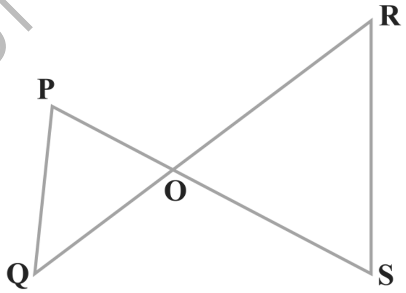
आता $PQ \parallel EF$ आणि $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कसे) ?

म्हणून $\angle A = \angle D, \angle B = \angle P$ आणि $\angle C = Q$ आहे

यासाठी $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (का ?)

या कसोटीच्या स्पष्टीकरणासाठी खालील उदाहरणे पाहू

उदाहरण 4 : आकृती 6.29 मध्ये जर $PQ \parallel RS$ आहे, तर सिद्ध करा की, $\Delta POR \sim \Delta SOR$



आकृती 6.29

उकल : $PQ \parallel RS$ (दिलेले आहे)

म्हणून $\angle P = \angle S$ (व्युत्क्रम कोन)

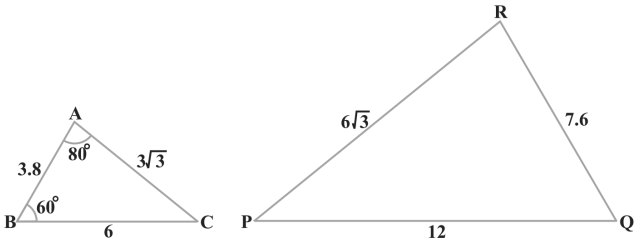
$\angle Q = \angle R$ (व्युत्क्रम कोन)

आणि $\angle POQ = \angle SOR$ (छेदन विरुद्ध कोन)

$\therefore \Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA समरूपता कसोटी)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5 : आकृती 6.30 मधील $\angle P$ ची किमंत काढा.



आकृती 6.30

उकल : ΔABC आणि ΔPQR यामध्ये,

$$\frac{AB}{RQ}=\frac{3.8}{7.6}=\frac{1}{2},\frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}, \text{ आणि } \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

अर्थात $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

म्हणून $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (SSS समरूपता कसोटी)

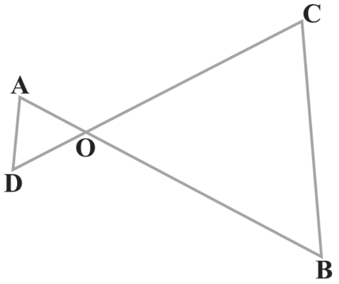
$\therefore$ $\angle C = \angle P$ (समरूप त्रिकोणाचे संगत कोन)

$\angle C = 180^0 - \angle A - \angle B$ (त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज गुणधर्म)

$= 180^0 - 80^0 - 60^0 = 40^0$

$\therefore$ $\angle C = \angle P = 40^0$

उदाहरण 6 : आ. 6.31 मध्ये $OA . OB = OC . OD$ तर सिद्ध करा कीं, $\angle A = \angle C$ आणि $\angle B = \angle D$



आकृती 6.31

उकल : $OA . OB = OC . OD$ (दिलेले आहे)

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

तसेच $\angle AOD = \angle COB$ (छेदनविरूध्द कोन) (2)

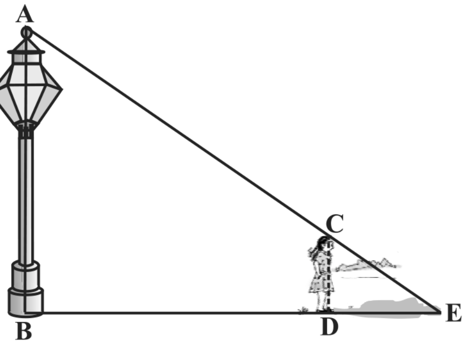
(1) व (2) वरून

$\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS समरूपता कसोटी)

$\therefore \angle A = \angle C$ आणि $\angle B = \angle D$ (समरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 7 : 90 cm उंची असलेली एक मुलगी विद्युत दिव्याच्या खांबाच्या पायापासून 1.2 m/s गतीने चालत जाते. जर दिवा जमिनीपासून 3.6 m उंचीवर असेल, तर 4 सेकंदानंतर त्या मुलीच्या सावलीची लांबी काढा.



आकृती 6.32

उकल : समजा दिवा असलेला खांब AB व मुलीची उंची CD असेल तर (आकृती 6.32 मध्ये पहा) 4 सेकंदानंतर DE ही मुलीच्या सावलीची लांबी आहे.

समजा DE = x मी. आहे.

आता BD = 1.2 मी. × 4 = 4.8 मी.

लक्ष द्या की, ΔABE आणि ΔCDE मध्ये

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येकी 90^0, कारण खांब व मुलगी दोन्ही जमिनीवर उभे आहेत.)

आणि $\angle E = \angle E$ (सामाईक कोन)

म्हणून $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA समरूपता कसोटी)

$$\therefore \quad \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} \qquad \left(90\text{ cm} = \frac{90}{100}\ 0.9\text{ m}\right)$$

$$4.8 + x = 4x$$

$$3x = 4.8$$

$$x = 1.6$$

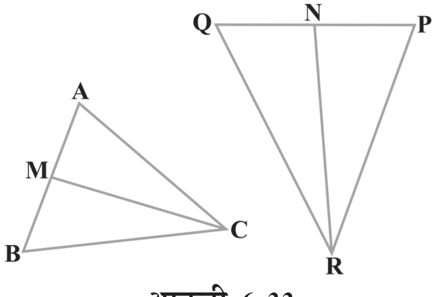
म्हणून 4 सेकंद चालल्यानंतर मुलगीच्या सावलीची लांबी 1.6 m आहे.

उदाहरण 8 : आकृती 6.33 मध्ये CM आणि RN या अनुक्रमेΔABC आणि ΔPQR या त्रिकोणाच्या मध्यगा आहेत. जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ तर सिद्ध करा

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta PNR$



आकृती 6.33

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उकल : (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

$\therefore \quad \frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$ (1)

आणि $\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q$ आणि $\angle C=\angle R$ (2)

परंतू $AB = 2\,AM$ आणि $PQ = 2\,PN$ (CM व RN या मध्यगा आहेत)

$\therefore$ (1) वरून $\frac{2AM}{2PN}=\frac{CA}{RP}$

म्हणजे $\frac{AM}{PN}=\frac{CA}{RP}$ (3)

तसेच $\angle MAC = \angle NPR$ (2) वरून (4)

म्हणून (3) व (4) वरून

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS समरूपता कसोटी) (5)

(ii) (5) करून $\frac{CM}{RN}=\frac{CA}{RP}$ (6)

परंतू $\frac{CA}{RP}=\frac{AB}{PQ}$ (1) पासून (7)

$\therefore \quad \frac{CM}{RN}=\frac{AB}{PQ}$ (6) आणि (7) पासून (8)

(iii) पुन्हा $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ (1 पासून)

$\therefore \quad \frac{CM}{RN}=\frac{BC}{QR}$ (8 पासून) (9)

$\frac{CM}{RN}=\frac{AB}{PQ}=\frac{2BM}{2QN}$

म्हणजे $\frac{CM}{RN}=\frac{BM}{QN}$ (10)

म्हणजे $\frac{CM}{RN}=\frac{BM}{QN}=\frac{BM}{QN}$ [(9) व (10) वरून]

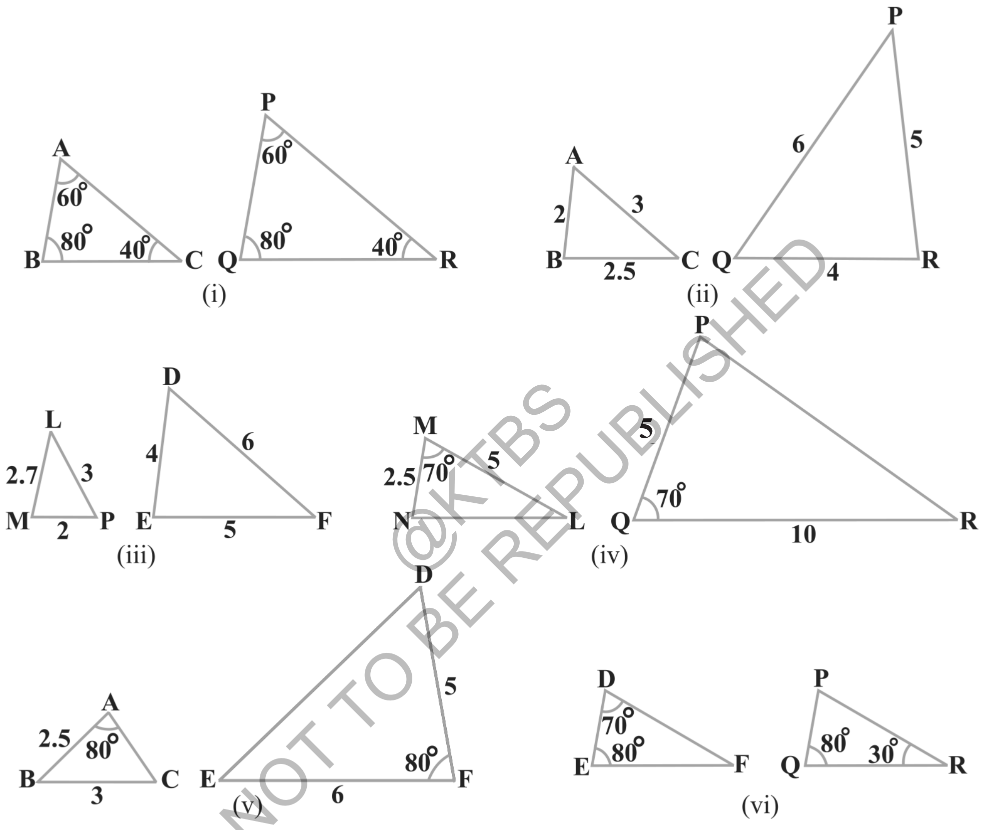
$\therefore \Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (बा बा बा समरूपता कसोटी)

(**टीप :** भाग (iii) ची सिद्धता भाग (i) चा वापर करून सिद्ध करता येते.)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 6.3

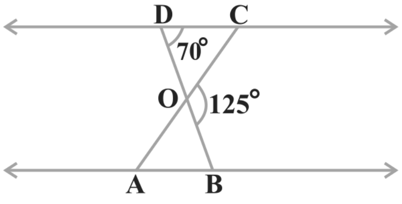
1. आकृती 6.34 मध्ये दिलेल्या त्रिकोणांच्या जोड्यामधून कोणकोणत्या जोड्या समरूप आहेत? यासाठी कोणत्या समरूपता कसोटीचा वापर केलेला आहे ते लिहा. समरूप Δ च्या जोड्या चिन्हे वापरून लिहा.



आकृती 6.34

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

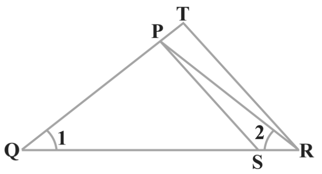
2. आकृती 6.35 मध्ये, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$. $\angle BOC = 125^0$ आणि $\angle CDO = 70^0$ आहे तर $\angle DOC$, $\angle DCO$ आणि $\angle OAB$ काढा.



आकृती 6.35

3. ABCD हा समलंब चौकोन आहे. ज्यामध्ये AB $\parallel$ DC आहे. कर्ण AC आणि BD परस्पर O मध्ये छेदेतात. दोन त्रिकोणांच्या समरूपता कसोटीचा उपयोग करून सिद्ध करा $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

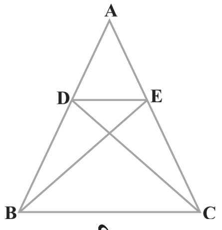
4. आकृती 6.36 मध्ये $\frac{QR}{QS}=\frac{QT}{PR}$ आणि $\angle 1 = \angle 2$ आहे. तर दाखवा की $\Delta POS \sim \Delta TQR$.



आकृती 6.36

5. ΔPQR च्या बाजू PQ आणि QR वर अनुक्रमे S आणि T हे दोन बिंदू आहेत की $\angle P = \angle RTS$. तर असे दाखवा की $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.

6. आकृती 6.37 मध्ये जर $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ तर $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ दाखवा.



आकृती 6.37

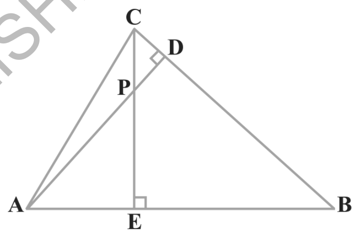
7. आकृती 6.38 मध्ये ΔABC चे शिरोलंब AD आणि CE एकमेकांस P बिंदूत छेदतात तर दाखवा.

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

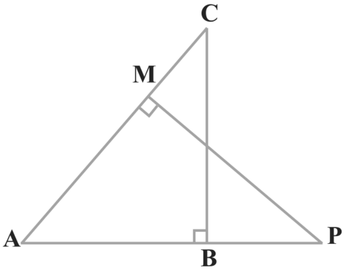


आकृती 6.38

8. समांतरभुज चौकोन ABCD ची बाजू AD वाढविली आहे. त्यावर E हा बिंदू आहे. आणि BE बाजू CD ला F मध्ये छेदते तर सिद्ध करा की $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9. आकृती 6.39 मध्ये ΔABC आपि ΔAMP हे दोन काटकोन त्रिकोण असून $\angle B$ आणि $\angle M$ हे अनुक्रमे काटकोन आहेत. तर सिद्ध करा (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA}=\frac{BC}{MP}$



आकृती 6.39

10. CD आणि GH हे अनुक्रमे $\angle ACB$ आणि $\angle EGF$ चे कोन दुभाजक आहेत असे की D आणि H हे अनुक्रमे ΔABC आणि ΔEFG च्या AB व FE बाजूवर आहेत. जर $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ तर दाखवा

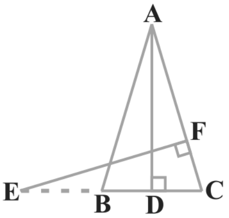
(i) $\frac{CD}{GH}=\frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

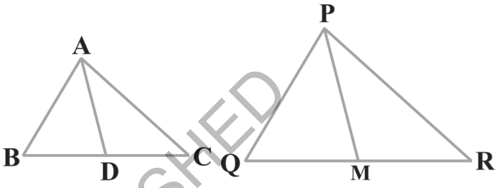
11. आकृती 6.40 मध्ये AB = AC असणारा एक समद्विभुज त्रिकोण ABC च्या CB बाजुवर E हा एक बिंदू आहे. जर $AD \perp BC$ आणि $EF \perp AC$ आहे तर सिद्ध करा $\Delta ABD \sim \Delta ECF$



आकृती 6.40

12. ΔABC च्या बाजू AB आणि BC व मध्यागा AD या अनुक्रमे दुसरा Δ PQR च्या बाजू PQ व QR आणि मध्यगा PM यांच्याशी प्रमाणात आहेत. तर सिद्ध करा. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. आकृती 6.41

13. ΔABC च्या BC बाजूवर D हा बिंदु असा आहे की, $\angle ADC = \angle BAC$ आहे. दाखवा की, $CA^2 = CB.CD$ आहे.



आकृती 6.41

14. ΔABC च्या बाजु AB आणि AC व मध्यगा AD हे दुसऱ्या ΔPQR च्या अनुक्रमे PQ आणि PR व मध्यगा PM यांच्याशी प्रमाणांत आहेत तर दाखवा $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ आहे.

15. एका 6 m उंचीच्या उभ्या खांबाची सावलीची लांबी 4 m आहे. याच वेळेला एका मनोऱ्याची सावलीची लांबी 28 मी आहे. तर मनोऱ्याची उंची काढा.

16. AD आणि PM या अनुक्रमे ΔABC आणि ΔPQR च्या मध्यगा आहेत. जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ आहेत, तर सिद्ध करा की, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

सारांश : या प्रकरणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. दोन आकृत्या सारख्याच रूपात असून समान मापात नसतील त्यांना समरूप आकृत्या म्हणतात.
2. सर्व एकरूप आकृत्या समरूप असतात पण व्यत्यास सत्य असत नाही.
3. दोन समान बाजु असणाऱ्या बहुभुजाकृती समरूप असतात जेव्हा.

   (i) त्यांचे संगत्त कोन समान असतात (ii) त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणांत असतात.
4. त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा इतर दोन बाजुंना प्रमाणात विभागते.
5. जर त्रिकोणाच्या दोन बाजूना प्रमाणात विभागणारी रेषा तिसऱ्या बाजूस समांतर असते.
6. जर दोन त्रिकोणात त्यांचे संगत कोन समान असतील तर त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात. म्हणून दोन त्रिकोण समरूप होतात (को को को समरूपता कसोटी).

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात. (को को समरूपता कसोटी)

8. दोन त्रिकोणात जर संगत बजू प्रमाणांत असतील तर त्यांचे संगत कोन समान असतात. म्हणजेच दोन्ही त्रिकोण समरूप असतात. (बा बा बा समरूपता कसोटी)

9. जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत कोनाशी व कोन सामाविष्ट करणाऱ्या बाजुंशी प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात. (SAS समरूपता कसोटी)

वाचकाना सूचना

जर दोन काटकोन त्रिकोणामध्ये एका त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचा कर्ण व संगत बाजू यांच्याशी प्रमाणात असतील, तर ते दोन काटकोण त्रिकोण समरूप असतात. यालाच RHS (कर्ण-भुजा) समरूपता कसोटी म्हणतात.

जर आपण या कसोटीचा वापर प्रकरण 8 मधील उदाहरण 2 मध्ये केला तर सिद्धता अजूनही सोपी होईल.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

***

सहनिर्देशक भूमिती
CO-ORDINATE GEOMETRY

E3N4Z2

7

7.1 परिचय :

इयत्ता 9 वी मध्ये शिकला आहात की, एका प्रतलावर बिंदूचे स्थान दर्शविणे हे आपण आणि त्यासाठी सहनिर्देशक अक्षांची आवश्यकता असते. ***y* - अक्षापासूनच्या** अंतरावरील असणाऱ्या बिंदूला ***x* - सहनिर्देशक** (abscissa) म्हणतात. तसेच ***x* - अक्षापासूनच्या** अंतरावरील असणाऱ्या बिंदूला ***y* - सहनिर्देशक** (ordinate) म्हणतात. ***x* - अक्षावरील** सहनिर्देशकांचे बिंदू (x, o) आणि ***y*** - अक्षावरील सहनिर्देशकांचे बिंदू (o, y) या स्वरूपात असतात.

तुमच्यासाठी येथे एक खेळ आहे. एका आलेखाच्या पेपरवर लंब असणारे दोन अक्ष काढा. आता दिलेल्या माहितीनुसार बिंदूंची स्थापना करा व या प्रमाणे जोडा . A(4,8) ला B(3,9) ला C(3,8) ला D(1,6) ला E(1,5) ला F(3,3) ला G(6,3) ला H(8,5) ला I (8,6) ला J (6,8), ला K (6,9), ला L (5,8) ला A बिंदू सांधा. त्यानंतर P (3. 5, 7), Q (3, 6) आणि R(4,6) बिंदू एकमेकांना त्रिकोणाच्या स्वरूपात जोडा. त्याचप्रमाणे X (5.5, 7), Y(5, 6) आणि Z (6, 6) बिंदू सुद्धा त्रिकोणाच्या स्वरूपात जोडा. आता Z(6, 6) बिंदू (0, 5) आणि (0, 6) आणि U हा बिंदू (9, 5) आणि (9, 6) जोडा. यावरून कोणत्या प्रकाराची आकृती तुम्हाला दिसेल?

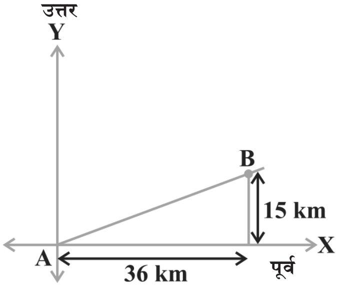
तसेच आपण $ax + by + c = 0$, (येथे a व $b \neq 0$). या स्वरूपात असलेली दोन चलपदीय रेषीय समीकरणे पाहू शकता. जेव्हा आलेखावर एक सरळ रेषा रचली जाते, तेव्हा, आपण $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ हा परवलय आलेखामध्ये दर्शवीला आहे असे वर्ग समीकरण प्रकरणात शिकला आहात. म्हणजेच भूमितीमधील आकृतीचा अभ्यास करून बीजगणिती तंत्र वापरून सहनिर्देशक भूमितीची प्रगती झाली आहे. कारण या सहनिर्देशक भूमितीचा भरपूर असा उपयोग अभियांत्रिकी (Engineeing), भौतिकशास्त्र (physics), जलपर्यटन (Navigation), भूकंप मापन यंत्र (Seismology) मध्ये केला जातो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या प्रकारणामध्ये आपण, सहनिर्देशक दिला असता दोन बिंदूमधील अंतर आणि बिंदू दिले असता त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढणे यांचा अभ्यास करणार आहात. तसेच एका सरळरेषावरील बिंदू आणि बिंदूंचे गुणोत्तर दिले असता सहनिर्देशक बिंदू शोधणे हे ही शिकणार आहात.

7.2 अंतराचे सूत्र (Distance Formula)

आता आपण पुढील स्थितीचे निरीक्षण करू. A या शहरापासून पूर्वेला 36 km आणि तेथून उत्तरेला 15 km अंतरावर B हे शहर आहे. कोणतेही मापण न घेता आपण A पासून B शहरापर्यंतचे अंतर काढू शकतो का? ही स्थिती आलेखामध्ये दर्शविलेली आहे आकृती 7.1 पहा. यासाठी आपण पायथॅगोरसचा प्रमेय उपयोग करू शकतो का?



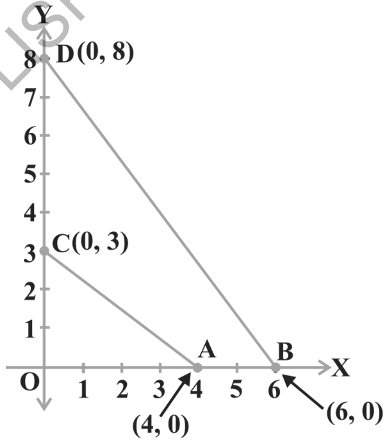
आकृती 7.1

आता, समजा x - अक्षावर दोन बिंदू आहेत. त्यामधी अंतर तुम्ही काढू शकाल? आकृती 7.2 मध्ये A (4, 0) आणि B(6, 0) हे दोन बिंदू घेऊ. हे दोन बिंदू x- अक्षावर आहेत.

आकृतीमध्ये, OA = 4 एकक आणि OB = 6 एकक पाहू शकता.

म्हणून. A पासून B पर्यंतचे अंतर AB = OB - OA = 6-4=2 एकक आहे.

म्हणून, जर x - अक्षावर दोन बिंदू असतील तर आपण सहज त्यामधील अंतर काढू शकतो.



आकृती 7.2

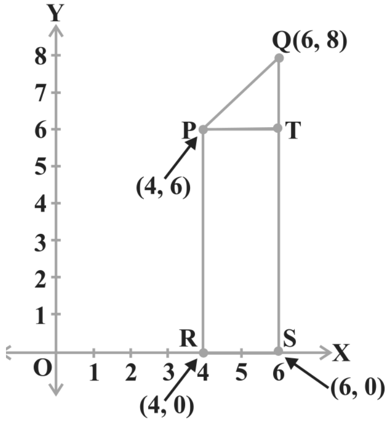
आता, y-अक्षावरील दोन बिंदू घेऊ. या दोन बिंदूचे अंतर आपण काढू शकता का? जर y-अक्षावर c (0, 3) आणि D (0, 8) असतील तर CD=8-3=5 एकक काढू शकतो (आकृती 7.2 पहा)

यानंतर, आपण c पासून A पर्यंतचे अंतर काढू शकाल का? (आकृती 7.2 मध्ये) जर OA=4 एकक आणि OC=3 एकक तर C पासून A पर्यंतचे अंतर AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5 एकक त्याचप्रमाणे B पासून D पर्यंतचे अंतर काढू शकता म्हणजेच BD=10 एकक.

आता, जर दोन बिंदू सहनिर्देशक अक्षावर असतील तर आपण त्यामधील अंतर काढू शकाल का? हो, पायथॅगोरस प्रमेयाचा उपयोग करून हे सोडवू शकतो. यासाठी पुढील उदाहरण सोडवूया.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 7.3मध्ये, पहिल्या चरणात P (4.6) आणि Q(6.8) हे बिंदू आहेत. यामधील अंतर काढण्यासाठी पायथॅगोरसचा प्रमेय कसा उपयोग करू शकतो? आता P आणि Q बिंदूतून X - अक्षावर PR आणि QS लंब कांढू. तसेच PT⊥QS रचा. त्यानंतर R व S चे (4, 0) आणि (6, 0) हे सहनिर्देशक बिंदू होतील. म्हणून RS=2 एकक. तसेच QS=8 एकक आणि TS=PR=6 एकक आहे.



आकृती 7.3

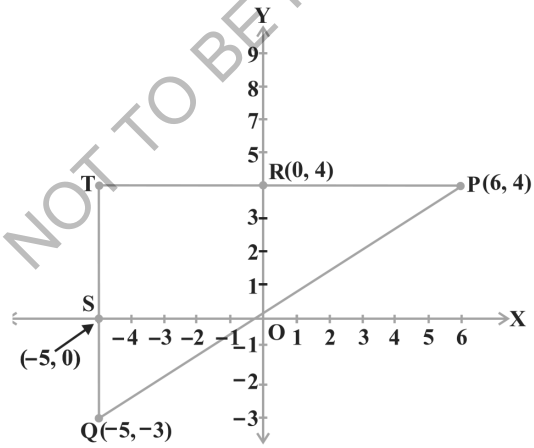
म्हणून, QT=2 एकक आणि PT = RS = 2 एकक. आता, पायथॅगोरसचा प्रमेय उपयोग करून

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

$\therefore$ PQ $= 2\sqrt{2}$ एकक

दोन भिन्न चरणातील दोन बिंदूतील अंतर कसे काढाल? आकृती 7.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे बिंदू P (6, 4) आणि Q (-5, -3) आहेत. x - अक्षाला लंब असणारी QS रेषा काढा 'P' या बिंदूतून QS वर PT हा लंब काढा की, जो y - अक्षवरील R बिंदूत मिळतो.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS



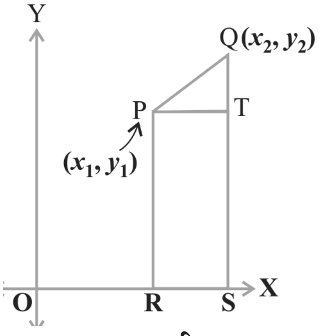
आकृती 7.4

PT =11 एकक, आणि QT = 7 एकक (का ?)

PTQ या काटकोन त्रिकोणासाठी पायथॅगोरसचा प्रमेय उपयोग करून,

PQ = $\sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ एकक.

आता, $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_1, y_1)$ या दोन बिंदूमधील अंतर शोधू. X-आवर PT व QS लंब काढा. तसेच $PT \perp QS$ रचा (आकृती 7.5 पहा.)



आकृती 7.5

तर, $OR = x_1$, $OS = x_2$, म्हणून, $RS = x_2 - x_1 = PT$.

तसेच, $SQ = y_2$, $ST = PR = y$, म्हणून $QT = y_2 - y_1$

आता, Δ PTQ, मध्ये पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

लक्षात ठेवा की, अंतर हे नेहमी धन असले पाहीजे. म्हणून फक्त धन वर्गमूळ आवश्यक असतात. म्हणून $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ बिंदूमधील अंतर.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

याला **अंतराचेसूत्र** (Distance Formula) म्हणतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप :

1. काही वेळेला O(0, 0) पासून P(x, y) बिंदू पर्यंतचे अंतर

   $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. हे असेही लिहू शकतो, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (का?)

उदाहरण 1 : (3, 2), (-2, -3) आणि (2, 3) हे बिंदू त्रिकोण तयार करू शकतात का? जर असतील तर त्या त्रिकोणाचा प्रकार सांगा.

उकल : PQ, QR आणि PR मधील अंतर काढण्यासाठी अंतराच्या सूत्राचा वापर करू. जेव्हा P (3, 2), Q (–2, –3) आणि R (2, 3) बिंदू दिले आहेत.

$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07$ (अंदाजे)

$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$ (अंदाजे)

$PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$ (अंदाजे)

या पैकी कोणत्याही दोन अंतरांची बेरीज ही तिसऱ्या अंतरा पेक्षा जास्त आहे. म्हणून बिंदू P, Q व R हे त्रिकोण तयार करू शकतात.

तसेच $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ पायथॅगोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासाप्रमाणे, आपणास $\angle P = 90^\circ$ माहीत आहे. म्हणून PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे.

उदाहरण 2 : (1, 7), (4, 2) (-1, -1) आणि (-4, 4) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत असे सिद्ध करा.

उकल : A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) व D (–4, 4) हे बिंदू दिलेले आहेत. चौरसाच्या गुणधर्मानुसार चार ही बाजू समान व कर्ण समान असेल तर ABCD हा चौरस आहे असे दाखवू शकतो. आता -

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

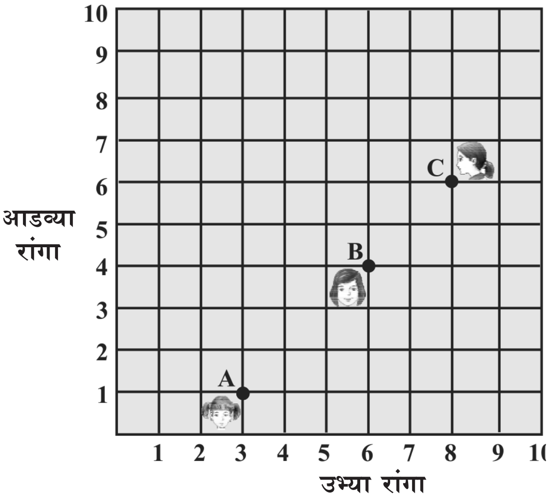
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

येथे AB = BC = CD = DA आणि AB = BD म्हणून कर्ण AC व BD समान असून चौकोनाचा चारही बाजू समान आहेत म्हणून ABCD हा चौरस आहे.

पर्यायी पद्धतः AC हा कर्ण समान असून चारही बाजू समान असतात. येथे $AC^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ म्हणून पायथॅगोरसच्या व्यत्यासाप्रमाणे $\angle D = 90^\circ$ एक कोन 90^0 आणि चारही बाजू समान असलेला चौकोन म्हणजेच चौरस होय. म्हणून ABCD हा चौरस आहे.

उदाहरण 3 : एका वर्गातील बैठकीची रचना आकृती 7.6 मध्ये दर्शविली आहे. आशिमा, भारती आणि कॅमेला अनुक्रमे A (3, 1), B (6, 4) व C (8, 6) या ठिकाणी बसल्या आहेत. त्या एकारेषेत बसल्या आहेत का? याचा विचार करून या उत्तराचे कारण लिहा.



आकृती 7.6

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उकल : अंतराच्या सूत्राचा उपयोग करून

$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(-1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

म्हणून, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ त्यामुळे बिंदू A, B व C हे एकासरळरेषेत आहेत. म्हणून तिन्हीही एक रेषीय आहेत.

उदाहरण 4 : बिंदू (7, 1) आणि (3, 5) च्या समान अंतरावर (x, y) असेल तर x आणि y मधील संबंध लिहा.

उकल : बिंदू A (7, 1) आणि B (3, 5) हे $P(x, y)$ च्या समान अंतरावर आहे.

दिले आहे की AP = BP हे संबंध दर्शविते.

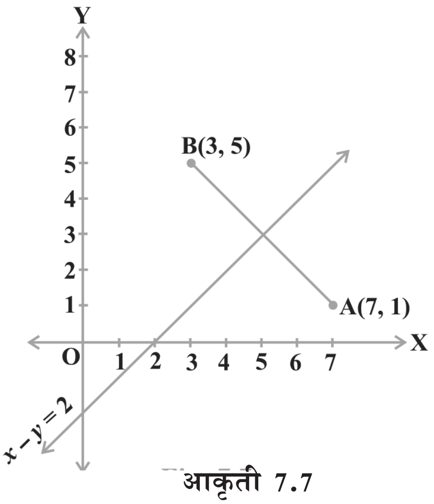
म्हणून, $AP^2 = BP^2$

$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

$x - y = 2$ हे संबंध दर्शविते.

टीप : $x - y = 2$ या समीकरणाचा आलेख सरळरेषीय आहे. AB या रेषाखंडावर लंब असणारे बिंदू A व B समान अंतरावर असतात हे आपण मागील इयतेत शिकला आहात. म्हणून AB या रेषाखंडावर $x - y = 2$ चा आलेख लंब असतो. (आकृती 7.7 पहा)



आकृती 7.7

उदाहरण 5 : बिंदू A (6, 5) आणि B (–4, 3) शी समान अंतरावर असणाऱ्या y – अक्षावरील बिंदू शोधा.

उकल : आपणास माहीत आहे की, y – अक्षावरील बिंदू (0, y) या स्वरूपात असतात. तसेच A व B शी समान अंतरावर असणारे P (0, y) बिंदू आहेत, तर

$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

$$\therefore 4y = 36$$

$$\therefore y = 9$$

म्हणून मिळालेले बिंदू (0, 9) आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल मिळालेले : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

टीप : वरील वापरलेला शेरा म्हणजेच, बिंदू (0,9) हा Y - अक्षाशी अंतरीत असून AB रेषाखंडाचा लंब दुभाजक आहे.

स्वाध्याय 7.1

1. खालील दिलेल्या प्रत्येक जोडीच्या बिंदूमधील अंतर काढा.

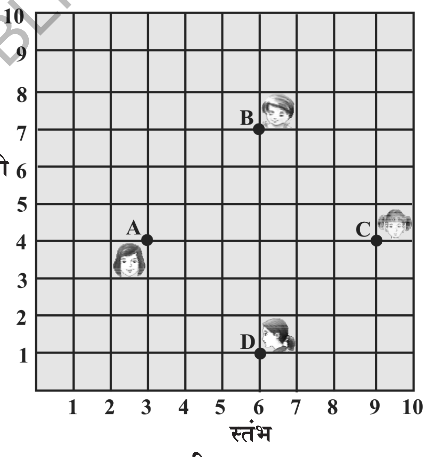
i) (2, 3), (4, 1) ii) (–5, 7), (–1, 3) iii) (a, b), (-a, -b)

2. (0, 0) आणि (36, 15) बिंदूमधील अंतर काढा. घटक 7.2 मधील चर्चा करण्यात येत असलेल्या A व B बिंदू मधील अंतर तुम्ही काढू शकता का?

3. बिंदू (1, 5) (2, 3) आणि (-2, -11) एकरेषीय आहेत हे सिद्ध करा.

4. बिंदू (1,5) (2,3) आणि (7, -2) समांतरभूज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत का? सिद्ध करा.

5. आकृती 7.8 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एकाच वर्गातील 4 मित्र A, B, C व D बिंदूत बसलेले आहेत. त्याचवेळी काही वेळानंतर चंपा आणि चमेली वर्गात प्रवेश करतात आणि चंपा चमेलीला म्हणते की ABCD हा चौरस आहे असे समजू नको? यावरून चमेली विचार करते. तर यापैकी कोण बरोबर बोलत आहे. यासाठी अंतराचे सूत्र उपयोग करून पडताळा.



आकृती 7.8

6. खालील बिंदूचा उपयोग करून चौकोनाचे प्रकार ओळखा आणि कारण सांगा.

i) (–1, 2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0) (1, 0)

ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, –4) iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. (2, -5) आणि (-2, 9) समान अंतरावर असणाऱ्या x–अक्षावरील बिंदू काढा.

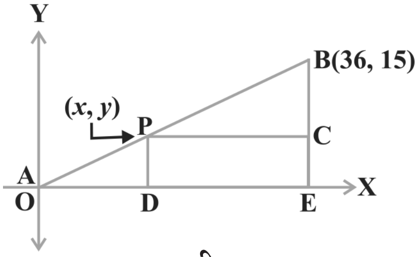
8. बिंदू P (2, -3) आणि Q (10, y) या मधील अंतर जर 10 एकक असेल तर 'y' ची किंमत काढा.

9. जर P (5, -3) आणि R (X, 6) पासून Q (0, 1) बिंदू समान अंतरावर असेल तर x ची किंमत काढा आणि QR व PR मधील अंतर काढा.

10. (3, 6) आणि (-3, 4) समान अंतरावर असणाऱ्या (x, y) बिंदूमधील x आणि y मधील संबंध ओळखा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.3 खंड सूत्र किंवा विभाजन सूत्र (**Section Formula**)



आकृती 7.9

आता 7.2 मधील स्थिती परत करू. येथे दूरध्वनीचा स्तंभ P हा A आणि B च्या मध्ये उभा आहे. म्हणजेच त्याची स्थिती अशी आहे की A पासूनचे अंतर B पर्यंत दुप्पट होईल. जर AB वर P बिंदू असेल तर P हा AB ला 1:2 प्रमाणात विभागतो. (आकृती 7.9 पहा). जर '0' मधूल A हा बिंदू घेतला आणि अक्षावर एकक म्हणजे 1 Km घेतले तर B चा सहनिर्देशक बिंदू (36, 15) होईल. जर आपणास स्तंभाची स्थिती ओळखायची असेल तर P सहनिर्देशक बिंदू काढावा लागेल. तर हे बिंदू कसे काढाल?

'P' चे सहनिर्देशक (x, y) मानू, P आणि B पासून x - अक्षावर लंब टाका जे x अक्षाला D व E मध्ये मिळतील. $PC \perp BE$ रचा. को. को. (AA) या समरूपतेच्या गृहितकावरून ΔPOD आणि ΔBPC समरूप आहेत.

म्हणजे, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, आणि $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

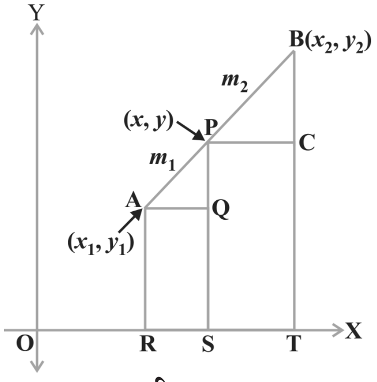
म्हणून, $\frac{x}{36 - x} = \frac{1}{2}$ आणि $\frac{y}{15 - y} = \frac{1}{2}$

या समीकरणावरून $x = 12$ आणि $y = 5$ मिळतात.

यावरून आपण सांगू शकतो की P (12, 5) या सहनिर्देशकापासून OP : PB = 1 : 2 मिळते.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

आता हे समजून घेण्यासाठी आणि यामध्ये सुधारणा करण्यासाठी आपण काही उदाहरणे सोडविण्यासाठी सुत्राची निर्मिती करू.



आकृती 7.10

समजा AB रेषा, बिंदू A (x_1, y_1) आणि B (x_2, y_2) यांना जोडते आणि P (x, y) बिंदू AB रेषाखंडाला $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात विभागतो.

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (आकृती 7.10 पहा)

x - अक्षावर लंब असणारे AR, PS व BT काढा.

तसेच x– अक्षाशी समांतर असणारे AQ व PC रचा.

AA समरूपता कसोटीनुसार $\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

म्हणून, $\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ (1)

आता, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

या किंमती (1) मध्ये घाडून

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ तर } x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

तसेच, $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \text{ तर } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

बिंदू A (x_1, y_1) आणि B (x_2, y_2) रेषेला दुभागणारा सहनिर्देशक बिंदू P (x, y) हा $m_1 : m_2$ या प्रमाणात असतो.

$$\left(\frac{\mathbf{m_1x_2 + m_2x_1}}{\mathbf{m_1 + m_2}}, \frac{\mathbf{m_1y_2 + m_2y_1}}{\mathbf{m_1 + m_2}}\right)$$

यालाच खंड सूत्र किंवा विभाजन सूत्र (Section Formula) म्हणतात.

हे y- अक्षावर लंब असणारे बिंदू A,P आणि B घेऊन खालील सूत्र सिद्ध करू शकता.

सहनिर्देशक बिंदू P चे AB शी प्रमाण k:1 असेल तर

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{k_1y_2 + y_1}{k + 1}\right)$$

विशेष स्थिती : जर P हा AB चा मध्यबिंदू असून त्याचे प्रमाण m:n = 1:1 असेल तर P चे सहनिर्देशक

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1 + 1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1 + 1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

यालाच **मध्यबिंदू सूत्र (mid point formula)** म्हणतात. आता काही खंड सूत्रावरून उदाहरणे सोडवू.

उदाहरण 6 : बिंदू (4, -3) आणि (8, 5) ला जोडणारी रेषा 3:1 गुणोत्तरात असेल तर बिंदुचे सहनिर्देशक काढा.

उकल : P (x, y) हा बिंदू घेतला आहे. यासाठी खंड सूत्रावरून.

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \; y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

म्हणून मिळालेला बिंदू (7, 3) आहेत.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 7 : बिंदू (-4, 6) हा बिंदू A (-6, 10) आणि बिंदू B (3, -8) यांना जोडणाऱ्या रेषेशी दुभागत असेल तर त्याचे गुणोत्तर काढा.

उकल : $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात (-4, 6) हा बिंदू AB ला विभागतो तर खंड सूत्रावरून

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \frac{-8m_1 + 6m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (1)$$

आठवा की, जर $(x, y) = (a, b)$ तर $x = a$ आणि $y = b$

म्हणून, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ आणि $6 = \frac{-8m_1 + 6m_2}{m_1 + m_2}$

$$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

आता, $$7m_1 = 2m_2$$

$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

असेच y – सहनिर्देशकावरील गुणोत्तर पडताळू शकता.

आता, $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2ने भागून)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

म्हणून, (-4, 6) हा बिंदू A (-6, 10) आणि B (3, -8) या जोडणाऱ्या रेषेशी प्रमाणात असून तो 2:7 या गुणोत्तरात विभागतो.

पर्यायी उकल : गुणोत्तर $m_1 : m_2$ हे $\frac{m_1}{m_2}$:1 या स्वरूपात लिहू शकतो किंवा K:1 जर K:1 गुणोत्तर AB या रेषेला (-4, 6) बिंदू विभागतो. तर खंडसूत्रावरून

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \text{ ..... } (2)$$

$$-4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$

$$7k = 2$$

$$\therefore K : 1 = 2 : 7$$

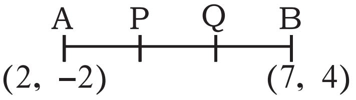
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यावरून y – सहनिर्देशक पाहू शकता.

म्हणून, (-4, 6) हा बिंदू A (-6, 10) आणि B (3, -8) या जोडणाऱ्या रेषेशी प्रमाणात असेल तर तो 2:7 या गुणोत्तरात विभागतो.

टीप : जेव्हा A, P व B हे एकरेषीय आहेत असे दिले असतांना आपण AP व PB यामधील अंतर काढण्यासाठी त्यामधील गुणोत्तराचा वापर करू शकतो.

उदाहरण 8 : बिंदू A(2, -2) आणि B(-7, 4) जोडणाऱ्या रेषेचे तीन समान असणारे सहनिर्देशक बिंदू काढा.



आ. 7.11

उकल : जर P व Q हे बिंदू AB चे तीन समान भाग करीत असतील तर AP = PQ = QB (आकृती 7.11)

AB ला P हा बिंदू 1:2 या गुणोत्तरात विभागतो. म्हणून, खंडसूत्रावरून P चे सहनिर्देशक बिंदू.

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) = (-1, 0)$$

आता AB ला Q हा बिंदू सुद्धा 2:1 गुणोत्तरात विभागतो.

$$\therefore \left(\frac{2(-7)+2(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) = (-4, 2)$$

म्हणून A व B ला जोडणाऱ्या रेषेचे तीन समान भाग करणारे (-1, 0) आणि (-4, 2) हे सहनिर्देशक बिंदू आहेत.

टीप : आपण जर विचार केला असता Q हा PB चा मध्यबिंदू आहे तर सहनिर्देशक बिंदू काढण्यासाठी मध्य बिंदू सूत्राचा उपयोग करावा.

उदाहरण 9 : बिंदू (5, -6) आणि (-1, -4) यांना जोडणारी रेषा Y-अक्षाला विभागत असेल तर गुणोत्तर काढा तसेच विभागणारा बिंदू काढा.

उकल : गुणोत्तर K:1 मानू. खंड सूत्रावरून, K:1 या गुणोत्तरवरून AB ला सहनिर्देशक बिंदू विभागत असेल तर, $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$ हा बिंदू Y-अक्षावरील आहे तेव्हा x-अक्ष निर्देशक 0 आहे.

तेव्हा, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

$k = 5$

म्हणून गुणोत्तर 5:1 आहे. k=5 किंमत ठेवून छेद बिंदूचे सहनिर्देशक $(0, \frac{-13}{3})$ मिळवू शकतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 10 : जर बिंदू A (6,1), B(8,2), C (9,4) आणि D (P, 3) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू असतील तर p ची किंमत काढा.

उकल : आपणास माहीत आहे की, समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण समान असतात.

म्हणून AC च्या मध्यबिंदूचे सहनिर्देशक = BD च्या मध्यबिंदूचे सहनिर्देशक

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{15}{2} = \left(\frac{8+p}{2}\right)$$

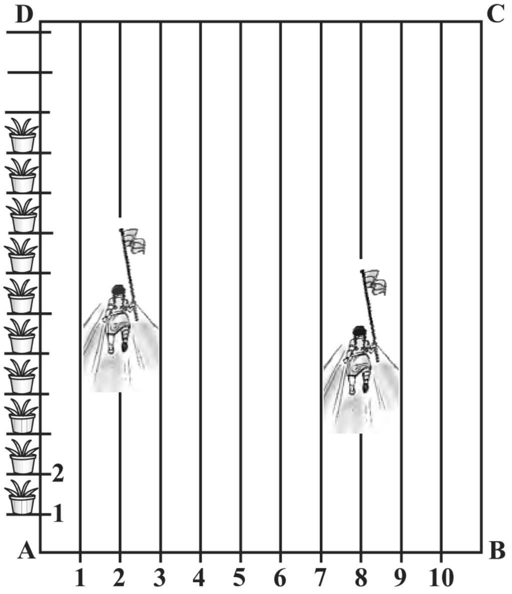
$$\therefore p = 7$$

स्वाध्याय 7.2

1. जर (-1, 7) आणि (4, -3) हे बिंदू जोडणारी रेषा 2:3 मध्ये विभागत असेल तर त्या रेषेचे सहनिर्देशक बिंदू काढा.

2. बिंदू (4, -1) आणि (-2, -3) यांना जोडणाऱ्या रेषेशी सम-त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूचे सहनिर्देशक काढा?

3. तुमच्या शाळेत वार्षिक क्रिडा स्पर्धा ABCD या आयताकार असणाऱ्या मैदानावर होत आहेत. त्या मैदानावर प्रती 1 m अंतरावर चुना पावडरने रेषा काढल्या आहेत. आकृती 7.12 मध्ये दर्शाविल्याप्रमाणे प्रत्येक 1m अंतरावर 100 फुलदाण्या AD बाजूवर ठेवण्यात आल्या. दुसऱ्या पंक्तीवरून निहारीका त्या AD रेषेचा $\frac{1}{4}$ भाग पळते आणि हिरव्या रंगाचा झेंडा रोवते. प्रीत आठव्या पंक्तीवरून AD रेषेचा $\frac{1}{5}$ भाग पळते आणि लाल झेंडा रोवते. त्या दोन्ही झेंड्यामधील अंतर किती? जर रश्मीला त्या दोन झेंड्यांच्यामध्यावर निळा झेंडा रोवायचा असेल तर तो झेंडा कोणत्या स्थानी ती रोवू शकते?



आकृती 7.12

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. जर बिंदू (-1, 6) हा बिंदू (-3, 10) आणि बिंदू (6, -8) यांना जोडणाऱ्या रेषेला विभागत असेल तर त्या रेषांचे गुणोत्तर काढा.

5. जर x अक्ष हा बिंदू A (1, -5) आणि B (-4, 5) यांना जोडणाऱ्या रेषेला विभागत असेल तर त्या रेषांचे गुणोत्तर काढा. तसेच विभागलेल्या बिंदूचे सहनिर्देशक ओळखा.

6. जर (1, 2), (4, y), (x, 6) आणि (3,5) हे समांतरभूज चौकोनाचे शिरोबिंदू असतील तर x आणि y काढा.

7. AB हा वर्तुळाचा व्यास असून वर्तुळमध्य (2, -3) आहे आणि B चे सहनिर्देशक (1,4) आहेत. तेव्हा बिंदू A चे सहनिर्देशक ओळखा.

8. जर A आणि B अनुक्रमे (-2, -2) आणि (2, 4) असून AB या रेषेवर P बिंदू आहे आणि $AP = \frac{3}{7}AB$ असेल तर बिंदू P चे सहनिर्देशक काढा.

9. जर बिंदू A (-2, 2) आणि बिंदू B(2, 8) यांना जोडणाऱ्या AB रेषेला चार समान भागात विभागत असलेल्या बिंदूचे सहनिर्देशक ओळखा.

10. (3, 0), (4, 5) (-1, 4) आणि (-2, -1) हे शिरोबिंदू असणाऱ्या समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा. (येथे समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ ×(कर्णांचा गुणाकार)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.5 सारांश (Summary)

या प्रकारणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे:

1. P (x_1, y_1) आणि Q (x_2, y_2) मधील अंतर $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ आहे.

2. आरंभ बिंदु पासून P (x, y) बिंदू चे अंतर $\sqrt{x^2 + y^2}$ असते.

3. बिंदू P (x, y) चे सहनिर्देशक बिंदू A (x_1, y_1) आणि बिंदू B (x_2, y_2) यांना जोडणाऱ्या रेषेला अंतरर्गतरित्या $m_1 : m_2$ प्रमाणात विभागत असतील तर P चे सहनिर्देशक

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

4. P (x_1, y_1) आणि Q (x_2, y_2) या दोन रेषांना जोडणाऱ्या रेषेचा मध्यबिंदू $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ आहे.

वाचकांना सूचना

विभाग 7.3 मध्ये A (x_1, y_1) आणि B (x_2, y_2) या दोन बिंदूना जोडणाऱ्या रेषेखंडाचे अंतर विभाजन $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात करणाऱ्या P(x, y) या बिंदूचे सहनिर्देशक खालीप्रमाणे असतात.

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \; y = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

हे आपण चर्चिले येथे PA : PB = $m_1 : m_2$

यद्यपी, जर P हा A व B यांच्या दरम्यान नसेल पण रेषा AB वर रेषाखंड AB च्या बाहेर असेल आणि PA : PB = $m_1 : m_2$ आपण म्हणतो P कि हा बिंदू A आणि B या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंड AB चे बाह्य विभाजन करतो. या स्थितित, खंडसूत्र (विभाजन सूत्र) चा अभ्यास तुम्ही वरच्या वर्गात कराल.

***

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

गणितातील उपपत्ती
PROOFS IN MATHEMATICS

A1

A1.1 परिचय :

आपल्या दैनंदिन जीवनात 'तर्क करणे' आणि 'स्पष्ट चिंतन करणे' या क्षमता आपल्याला खूप उपयोगी पडतात. उदाहरण घ्यावयाचे झाल्यास, समजा की एक नेता आपल्याला सांगतो की ''तुम्हाला जर स्वच्छ कारभार चालविणारे प्रामाणिक सरकार हवे असल्यास मला मते द्या.'' वास्तविकपणे तो आपल्या मनात असा विश्वास जागवू पहातो की जर आपण त्याला मते दिली नाहीत तर आम्हाला स्वच्छ आणि पारदर्शक शासन मिळणार नाही. त्याचप्रमाणे एकाद्या कंपनीच्या जाहिरातीमध्ये आपल्याला सांगितले जाते की, 'बुद्धीमान लोक XYZ कंपनीचे बुट वापरतात.' याचा अर्थ कंपनी आमच्यामध्ये असा समज दृढ करू पहाते की, जर आम्ही XYZ कंपनीचे बुट वापरलो नाही तर आपण बुद्धीमान व्यक्ती नाही आहोत. वरील दोन्ही उदाहरणावरून तुम्ही समजू शकता की वरील दोन्ही प्रकारात एक गोष्ट सामायिक आहे, ती म्हणजे दोन्ही प्रकारचे लोक आपल्याला आकर्षित करू इच्छितात. तेव्हा आपण जर योग्य प्रकारे तर्क करण्याच्या क्षमतेचा किंवा विचारपूर्वक निर्णय घेण्याच्या क्षमतेचा वापर केला तर अशा प्रकारच्या मोहजालात आपण अडकणार नाही.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

गणित विषयाचा मुळ आधार म्हणजे तार्किक चिंतन करणे. विशेषतः उपपत्तींचे प्रस्तूतीकरण करताना तार्किक चिंतनाला अधिक महत्त्व प्राप्त होते. इयत्ता 9 ची मध्ये तुम्हाला उपपत्तींच्या संकल्पनेची ओळख करून दिलेली आहे, आणि तुम्ही अनेक विधाने विशेषता भूमितीमधील विधाने सिद्ध करून पाहिली आहेत. आठवा की, एका उपपत्तीमध्ये अनेक गणिती विधाने (statements) असतात. ज्यामध्ये प्रत्येक विधान हे आदीच्या कथनाशी किंवा आदी सिद्ध केलेल्या प्रमेयाशी संबंधीत असते. उपपत्तींच्या रचनेत आपल्याला उपयोगी पडणारे प्रमुख साधन म्हणजे उद्गामी तार्किक क्षमता हेच आहे.

या पाठात आपण गणिती विधान म्हणजे काय यावर पुनर्विचार करूया. त्यानंतर आपण विविध उदाहरणाव्दारे तार्किक चिंतन कौशल्य अधिक सक्षम करण्यावर विचार करू. इथे आपण निषेधची

संकल्पना व एका दिलेल्या विधानातील नकाराबद्दल चर्चा करू. याबरोबर दिलेल्या विधानातील व्यत्यास ओळखणे. आपण इयत्ता 9 मध्ये शिकलेल्या काही उपपत्तीच्या गणितातील पुनर्विचार करूया.

A1.2 गणिती विधानांचे पुनरावलोकन

स्मरण करा की, 'विधान' एक अर्थपूर्ण वाक्य असते. ते आज्ञार्थी किंवा उद्गारवाचक नसून प्रश्नार्थकही नसते. उदा: 'विश्वचषक अंतिम सामन्यात कोणते दोन संघ खेळत आहेत ?' हा एक प्रश्न आहे, विधान नाही. 'जा तुम्ही तुमचा गृहपाठ पूर्ण करा' ही एक आज्ञा आहे. विधान नव्हे. 'वाह, काय सुंदर गोल केला!' हे सुद्धा 'विधान' नसून 'उद्गारवाचक' वाक्य आहे.

लक्षात असू द्या की, सर्वसामान्यपणे वाक्य हे खालीलपैकी एक असते.

* सत्य
* असत्य
* संदिग्ध

मागील इयत्तेत तुम्ही शिकला आहात की, गणितामध्ये, **'विधान' हे तेव्हाच स्विकारार्थ होते; जेव्हा ते सत्य किंवा असत्य असते.** तथापि संदिग्ध वाक्यांना गणिती 'विधान' म्हटले जाऊ शकत नाही.

चला आपण काही उदाहरणे पाहू आणि विधानांविषयी आधिक माहिती जाणून घेवू.

उदाहरण 01: खालील प्रत्येक वाक्य विधान सत्य, असत्य किंवा संदिग्ध आहे ते सांगा व कारण द्या.

(i) सूर्य पृथ्वीभोवती फिरतो.

(ii) वाहनाला चार चाके असतात.

(iii) प्रकाशाचा वेग 3×10^5 km/s असतो.

(iv) नोव्हेंबर ते मार्चपर्यंत कोलकता मार्ग बंद राहिल.

(v) सर्व मानव नाशवंत असतात.

उकल

(i) हे वाक्य असत्य आहे. कारण खगोल शास्त्रज्ञानी 'पृथ्वी सूर्याभोवती फिरते हे शोधाअंती सिद्ध केले आहे.' तर हे एक विधान आहे.

(ii) हे वाक्य संदिग्ध आहे. कारण आपण हे ठरवू शकत नाही की, हे सत्य व असत्य असू शकत नाही. कारण चाके किती असावी हे त्या त्या वाहनावर अवलंबून असते. वाहने 2, 3, 4, 6, 10 इ. चाकांची असू शकतात. हे एक विधान नाही.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) हे 'विधान' सत्य आहे कारण भौतशास्त्रज्ञांनी ते सिद्ध केले आहे. की, हे एक विधान आहे.

(iv) हे वाक्य 'संदिग्ध' आहे. कारण नेमका कोणता मार्ग हे आपण ठरवू शकत नाही. हे विधान नाही.

(v) हे वाक्य सर्वदा सत्य आहे. कारण प्रत्येक मानवाचा मृत्यू अटळ आहे. हे विधान आहे.

उदाहरण 2: खालील वाक्य सत्य व असत्य आहे का ते सांगा. तुमचे उत्तर तपासून पहा.

1. सर्व समभुज त्रिकोण समद्विभुज त्रिकोण असतात.
2. काही समद्विभुज त्रिकोण समभुज त्रिकोण असतात.
3. सर्व समद्विभुज त्रिकोण समभुज त्रिकोण असतात.
4. काही परिमेय संख्या पूर्णांकी असतात.
5. काही परिमेय संख्या पूर्णांकी असत नाहीत.
6. सर्व पूर्णांकी संख्या परिमेय संख्या नसतात.
7. कोणत्या ही दोन परिमेय संख्याच्यामध्ये एकही परिमेय संख्या असत नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल:

1. हे वाक्य सत्य आहे. कारण समभुज त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू समान असतात, त्यामुळे हे विधान आहे.
2. हे वाक्य सत्य आहे. कारण काही समाद्विभुज त्रिकोण ज्याचे आधार (पायालगतचे कोन) कोन 60^0 चे असतात ते समभुज त्रिकोण असतात.
3. हे वाक्य असत्य आहे. याचे आणखी एक उदाहरण द्या.
4. हे वाक्य सत्य आहे. कारण $\frac{p}{q}$ च्या रुपातील परिमेय संख्या, जिथे p पूर्णांक असतो आणि $q = 1$ पूर्णांक असतो (उदा: $3 = \frac{3}{1}$)
5. हे वाक्य सत्य आहे. कारण $\frac{p}{q}$ च्या स्वरूपातील अशा संख्या जिथे. p ला q विभाजीत नाही करु शकत. पूर्णांक नाही (उदा: $\frac{3}{2}$).
6. हे वाक्य या विधानाशी समान आहे. एक असा पूर्णांक आहे जो परिमेय संख्या नाही. हे वाक्य असत्य आहे. कारण सर्व पूर्णांक परिमेय संख्या असतात.

7. हे वाक्य असत्य आहे. जसे आपल्याला ठाऊक आहे की परिमेय संख्या r व s यांच्या मध्ये $\frac{r+s}{2}$ असते, जी परिमये संख्या आहे.

उदाहरण 03: जर $x < 4$ आहे तर खालील विधानामध्ये कोणती विधाने सत्य आहेत. आपले उत्तर तपासून पाहा.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

उकल:

(i) हे विधान असत्य आहे, उदाहरणार्थ $x = 3 < 4$, $2x > 8$ हे समाधानकरक नाही.

(ii) हे विधान असत्य आहे, उदाहरणार्थ $x = 3.5 < 4$, $2x > 6$ हे समाधानकारक नाही.

(ii) हे विधान सत्य आहे. कारण $x < 4$ आहे.

उदाहरण 04: योग्य प्रतिबंध लावून विधाने पुन्हा लिहा. ज्यामुळे विधाने सत्य होतील.

(i) जर चौरसाचे कर्ण समान असतील, तर तो एक आयत असतो.

(ii) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवरील बिंदूंना जोडणारी रेषा तिसऱ्या बाजूस समांतर असते.

(iii) सर्व धन पूर्णाक p साठी, $\sqrt{p}$ अपरिमेय असते.

(iv) सर्व वर्ग समीकरणांना दोन बीजे असतात.

उकल

1. जर एखाद्या समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण समान असतील तर तो एक आयत असतो.
2. एखाद्या त्रिकोणाच्या दोन बाजुंचे मध्य बिंदू जोडणारी रेषा तिसऱ्या बाजूला समांतर असते.
3. सर्व अविभाज्य संख्या p साठी $\sqrt{p}$ अपरिमेय असतात.
4. सर्व वर्ग समीकरणांना जास्तीत जास्त दोन बीजे असतात.

सूचना:

वरील विधानाचे पुनर्विधान अन्य प्रकारेही दिले जाऊ शकते.

(i) उदारणार्थ, ‘ $\sqrt{p}$ अपरिमेय आहे. जिथे p असा धन पूर्णांक आहे. जो पूर्ण वर्ग नाही’ चे पुन्हा विधान.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय A1.1

1. खालील प्रत्येक वाक्य 'विधान' आहे की नाही ते सांगा, जर विधान असेल तर ते सत्य की असत्य ते सांगा तुमचे उत्तर तपासा.

(i) गणिताची सर्व पाठ्यपुस्तके मनोरंजक असतात.

(ii) पृथ्वीचे सूर्यापासूनचे अंतर सुमारे 15×10^8 *km* आहे.

(iii) सर्व मनुष्य वृद्ध होतात.

(iv) उत्तरकाशी ते हार्सिलचा प्रवास भरपूर थकवा आणतो.

(v) एका महिलेने दुर्बिणीतून हत्ती पाहिला.

2. खालील प्रत्येक वाक्य विधान आहे की नाही ते सांगा तुमचे उत्तर तपासा.

(i) सर्व षटकोन बहुभुजाकृती असतात.

(ii) काही बहुभुजाकृती पंचकोन बहुभुजाकृती असतात.

(iii) सर्व सम संख्यांना 2ने भाग जात नाही.

(iv) काही नैसर्गिक संख्या अपरिमेय असतात.

(v) सर्व नैसर्गिक संख्या परिमेय नसतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

3. समजा, a व b वास्तव संख्या आहेत. जर $ab \neq 0$ आहे. तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे. तुमचे उत्तरे तपासा.

(i) a आणि b दोन्ही शून्य आहेत.

(ii) a आणि b दोन्ही शून्येतर संख्या आहेत.

(iii) a किंवा b शून्येतर असली पाहिजे.

4. उपयुक्त प्रतिबंध वापरून खालील विधाने पुन्हा लिहा जेणेकरून ती सत्य विधाने होतील.

(i) जर $a^2 > b^2$, तर $a > b.$

(ii) जर $x^2 = y^2$, तर $x = y.$

(iii) जर $(x + y^2), = x^2 + y^2$, तर $x = 0.$

(iv) चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

A1.3 आनुमानिक कारण (Deductive reasoning)

इयत्ता 9 वी मध्ये आपण आनुमानिक कारणांची संकल्पना समजून घेतली आहे. येथे आपण वेगवेगळ्या उदाहरणांच्या सहाय्याने आनुमानिक कारणांच्या उपयोगाने सत्य मानलेल्या विधानांचे निष्कर्ष कसे काढतात हे स्पष्ट करू. या सत्य विधानांना परिकल्पना किंवा आधार वाक्ये (Hypotheses or Premises) असे म्हणतात. काही उदाहरणांच्या सहय्याने आता आपण सुरूवात करू.

उदाहरण 05 : असे दिलेले आहे की, विजयपूर कर्नाटक राज्यात आहे आणि असे समजा की, शबाना विजयपूरमध्ये राहते. तर शबाना कोणत्या राज्यात राहते?

उकल:

येथे दोन परिकल्पना आहेत.

(i) विजयपूर हे कर्नाटक राज्यात आहे.

(ii) शबाना ही विजयपूरात राहते.

या दोन्ही परिकल्पना किंवा आधार वाक्यावरून आपल्याला असा निष्कर्ष होतो की शबाना कर्नाटक राज्यात राहते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 06: दिलेली अट अशी आहे की गणिताची सर्व पाठ्यपुस्तके मनोरंजक असतात आणि समजा की तुम्ही गणित पुस्तकाचे एक वाचक आहात. जे पाठ्यपुस्तक आपण वाचत आहात त्याबाबत तुम्ही काय निष्कर्ष काढू शकाल?

उकल :

दोन्ही परिकल्पनांचा विचार करताना आपल्याला असा निष्कर्ष होतो की तुम्ही एक मनोरंजक पुस्तक वाचत आहे.

उदाहरण 07: $y = -6x + 5$ दिलेले आहे आणि समजा की $x = 3$ आहे तर y ची किमत किती?

उकल :

दोन्ही परिकल्पनावरून आपल्याला असे दिसून येते की

$y = -6(3) + 5 = -18 + 5 = -13$

उदाहरण 8: ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. समजा AD = 5cm व AB = 7cm असल्यास BC व DC या बाजुंच्या लांबीबाबत तुम्ही काय निष्कर्ष काढू शकाल?

आकृती A 1.1

उकल

येथे आम्हाला ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन दिलेला आहे. आपल्याला असे समजून येते की ABCD या चौकोनामध्ये समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म आढळून येतात. समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समान असतात हा गुणधर्म ABCD या चौकोनाला लागू होतो. त्यामुळे AD = 5cm असल्यास, BC = 5cm आहे असे आपल्याला समजते. त्याच पद्धतीने AB = 7cm असल्यास, DC = 7cm असे समजून येते.

टीप :

या उदाहरणावरून आपल्याला असे दिसून येते की एका परिकल्पनेतील लपलेले गुणधर्म समजून घेऊन कशाप्रकारे लागू करता येतात व त्याची आवश्यकता काय हे समजून येते.

उदाहरण 09 :सर्व अविभाज्य संख्या p साठी $\sqrt{p}$ अपरिमेय आहे आणि समजा की 19423 ही अविभाज्य संख्या असेल तर $\sqrt{19423}$ या संख्येला अनुसरून आपण कोणता निष्कर्ष काढू शकता?

उकल

आपण $\sqrt{19423}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असा निष्कर्ष काढू शकतो.

वरील उदाहरणामध्ये एक गोष्ट आपल्या ध्यानात आलीअसेल की वरील परिकल्पना सत्य आहे अथवा नाही हे आपल्याला माहीत नाही. पण त्या सत्य आहेत असे मानून आपण आनुमानिक कारणांचा वापर करतो. उदा. 9 मध्ये आपण 19423 ही अविभाज्य संख्या आहे की नाही हे पडताळताना ही अविभाज्य आहे असे मानले आहे. या उताऱ्यामध्ये आपण या गोष्टीचा उहापोह करण्याचा प्रयल करित आहोत की, जर एक विधान दिलेले असल्यास एका निष्कर्षाप्रत पोहोचण्यासाठी आनुमानिक कारणांचा वापर कशाप्रकारे केला जातो. वास्तविकपणे येथे या गोष्टीला आधिक महत्त्व दिलेले आहे की, कारणांचा अचूकपणे वापर करणे. कारण ही प्रक्रिया परिकल्पनांच्या सत्य अथवा असत्यतेवर अवलंबून नसते. तरी सुद्धा आपण या गोष्टीकडे लक्ष दिले पाहिजे की आपण चुकीच्या परिकल्पनेने सुरवात केल्यास चुकीच्या निष्कर्षाप्रत पोहोचतो.

स्वाध्याय A1.2

1. दिले आहे असे की सर्व महिला नाशीवंत असतात. समजा A ही एक महिला असल्यास A च्या बाबत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो.

2. दोन परिमेय संख्यांचा गुणाकार परिमेय संख्याच येते हे दिले आहे. समजा a व b या परिमेय संख्या असल्यास ab च्या बाबतीत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. अपरिमेय संख्यांचा दशांश स्वरूपातील विस्तार अपुनरावर्ती (non-terminating) आणि अनावर्ती (non-recurring) असतो. जर $\sqrt{17}$ ही एक अपरिमेय संख्या असल्यास $\sqrt{17}$ या संख्येच्या दशांश स्वरूपातील विस्ताराबाबत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो?

4. $y = x^2 + 6$ आणि $x = -1$ असे दिलेले असल्यास y च्या किंमतीबाबत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो?

5. ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन असून $\angle B = 80^0$ आहे, तर समांतरभुज चौकोनाच्या इतर कोनांच्या बाबतीत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो?

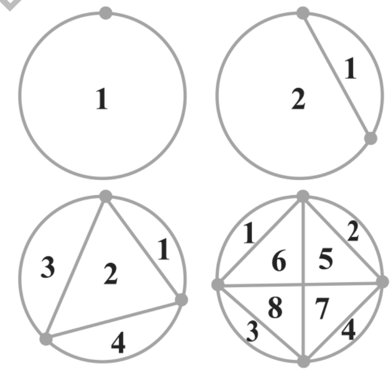
6. PQRS हा एक चक्रिय चौकोन असून त्याचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात. तर या चौकोनाच्या बाबतीत आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो?

7. सर्व अविभाज्य संख्या p साठी $\sqrt{p}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. 3721 ही एक अविभाज्य संख्या आहे. म्हणून $\sqrt{3721}$ ही अपरिमेय संख्या आहे असा निष्कर्ष आपण काढू शकतो का? आपला निष्कर्ष सत्य आहे का? नसल्यास का नाही?

A1.4 अनुमान (conjectures), प्रमेय, उपपत्ती आणि गणिती संकल्पना.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती A 1.2 चे निरीक्षण करा. पहिल्या वर्तुळावर 1 बिंदू आहे, दुसऱ्यामध्ये 2, तिसऱ्यामध्ये 3 बिंदू आहेत इत्यादी. प्रत्येक वर्तुळात बिंदू जोडण्याच्या सर्व संभाव्य रेषा आखलेल्या आहेत.



आकृती A 1.2

रेषा वर्तुळाला असमान क्षेत्रात विभागतात. या क्षेत्रांना आपण मोजू शकतो आणि सारणीबद्ध करू शकतो. जसे खाली दर्शविले आहे.

बिंदूची संख्या	क्षेत्रांची संख्या
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

आपल्यापैकी काही जणांना असे समजून येईल की बिंदूंची संख्या दिली असता क्षेत्रांची संख्या समजू शकते. आता आपल्याला आठवत असेल की इयत्ता 9 वी मध्ये असलेल्या अशाप्रकारच्या तर्कांना **अनुमान** (Conjecture) असे म्हणतात.

समजा आपले अनुमान असे आहे की एका वर्तुळत n बिंदू दिलेले आहेत. या सर्व बिंदूना सर्व संभाव्य रेषांनी जोडल्यास 2^{n-1} विभाग बनतात. हे एक तर्कसंगत अनुमान आहे. n = 5 दिले असता आम्हाला 16 क्षेत्रे प्राप्त होतात. n = 5 बिंदूंसाठी या सुत्राची पडताळणी करून आपण हे मान्य करता का की कोणत्यांही n बिंदूंसाठी 2^{n-1} इतके भाग होतात? जर असे शक्य असेल तर एखादी व्यक्ती आपल्याला विचारेल की n = 25 साठी वरील सुत्र कसे निश्चित कराल, तर यांसाठी तुमची प्रतिक्रीया काय असेल? अशा प्रश्नांचे उत्तर प्राप्त करण्यासाठी आपल्याला एका अशा उपपत्तीची आवश्यकता असते जी निःसंशय असे सांगेल कि हा परिणाम सत्य आहे किंवा असे सांगण्यासाठी काही n संख्यांसाठी हा परिणाम चूक होईल. अपवादात्मक उदाहरण म्हणून आपण n = 6 यासाठी वरूल सुत्र पडताळूत पाहिल्यास 31 भाग होतात आणि n = 7 साठी 57 होतात. अर्थात वरील अनुमानाचे n = 6 हे एक अपवादात्मक उदाहरण आहे. हे तथ्य अपवादात्मक उदाहरणाची महत्ती दर्शविले. तुम्हाला आठवत असेल की याबद्दल नवव्या इयत्तेत चर्चा केलेली आहे की, **एखाद्या विधानाला असत्य सिद्ध करण्यासाठी एखादे अपवादात्मक उदाहरण पुरेसे आहे.**

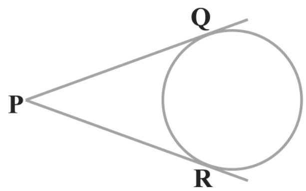
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आपल्याला असे लक्षात आले असेल की n = 1, 2, 3, 4 आणि 5 साठी परिणामांची पडताळणी केल्यानंतर आम्ही क्षेत्रांच्या संख्यांशी संबंधीत उपपत्तीच्या आवश्यकतेवर जोर दिला आहे. यानंतर आपण आणखी काही उदाहरणे पाहू. (प्रकरण 1 मध्ये दिल्याप्रमाणे) आपण खालील प्रमाणे दिलेल्या परिणामांशी परिचित व्हाल.

$$1+2+3+........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

याची मान्यता स्थापित करण्यासाठी n = 1, 2, 3 इत्यादीचे परिणाम पडताळणे पुरेसे नाही. कारण काही असेही n असू शकतील ज्यांच्यासाठी हा परिणाम असत्य असेल (जसे वरील n = 6 या उदाहरणाचा परिणाम असफल झाला आहे.) त्यासाठी आम्हाला एका अशा उपपत्तीची आवश्यकता आहे जी याची सत्यता निस्संदेह प्रस्थापित करेल. पुढील स्तरावर आपण यासंदर्भातील उपपत्तीचा अभ्यास कराल.

आता, आकृती A 1.3 पहा, येथे PQ आणि PR या P बिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या बाह्य स्पर्शिका आहेत.



आकृती A 1.3

आपण (प्रमेय 4.2 मध्ये) असे सिद्ध केले आहे की PQ = PR आहे. आपण अशाप्रकारच्या अनेक आकृत्या काढून संगत स्पर्शिकांची मोजलेल्या लांबीच्या आधारे प्रत्येक स्थितीतील परिणाम ावरून याची सिद्धता करून संतूष्ट झालो नव्हतो.

तुम्हाला आठवते का, की, उपपत्तीमध्ये काय काय होते? ही काही विधानांच्या क्रमाने (**जी मान्यताप्राप्त आहेत**) मिळून बनलेली होती. ज्यामध्ये प्रत्येक विधान हे पूर्वीच्या विधानाद्वारे अथवा स्वतंत्रपणे सिद्ध केलेल्या परिणामद्वारे गृहितकाद्वारे किंवा व्याख्येद्वारे किंवा आपण केलेल्या कल्पनाद्वारे प्राप्त झाले आहे. आणि आपण आपल्या उपपत्तीचे विधान $PQ = PR$ ने समाप्त करता, अर्थात त्या विधानाने जे आपण सिद्ध करू इच्छित होता.

उपपत्तीची रचना करावयाची ही एक पद्धत आहे. आता आपण काही उदाहरणांचा आणि प्रमेयांचा विचार करून आणि त्यांच्या उपपत्तींचे विश्लेषण करूया, ज्याद्वारे हे आपल्याला आधिक चांगल्या प्रकारे समजून घेण्यासाठी उपयोगी होईल की यांची रचना कोणत्या प्रकारे केली जाते.

सर्व प्रथम आपण उपपत्तीच्या तथाकथीत 'प्रत्यक्ष' किंवा आनुमानिक पद्धतीने सुरुवात करूया. या पद्धतीमध्ये आपण अनेक विधाने प्रस्तुत करतो. **प्रत्येक विधान मागील विधानावर अवलंबून असते.** जर प्रत्येक विधान तार्किक स्वरूपात सत्य आहे (अर्थात एक मान्यताप्राप्त तर्क आहे.), तर त्यापासून अचूक निष्कर्ष प्राप्त होतो.

उदाहरण 10: दोन परिमेय संख्यांची बेरीज एक परिमेय संख्याच असते.

उकल :

अ.क्र.	विधान	विश्लेषण / कारण
1.	x व y या परिमेय संख्या आहेत असे मानू.	परिणाम परिमेय संख्याबद्दल आहे म्हणून आपण x आणि y यांनी सुरू करतो ज्या परिमेय संख्या आहेत.
2.	$x = \frac{m}{n}$ जेथे $n \neq 0$ आणि $y = \frac{p}{q}$, जेथे $q \neq 0$ $m, n, p,$ व q हे पुर्णांक आहेत	परिमेय संख्याच्या व्याख्येनुसार
3.	$\therefore\ x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	परिणाम परिमेय संख्यांच्या बेरजे बाबत आहे. म्हणून आपण $x + y$ घेतले.
4.	पूर्णांकाचे गुणधर्म लागू केल्यानंतर आपण पहातो की $mq + np$ आणि nq हे पूर्णांकच आहेत.	पूर्णांकांच्या माहीत असलेल्या गुणधर्मांचा उपयोग करून.
5.	कारण $n \neq 0$ आणि $q \neq 0$ म्हणून $nq \neq 0$	पूर्णांकाच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून.
6.	म्हणून $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ ही एक परिमेय संख्या आहे.	परिमेय संख्येच्या व्याख्येचा उपयोग करून.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लक्षात ठेवा : वरील उपपत्तीमधील प्रत्येक विधान आधी प्रस्थापीत केलेल्या तथ्यावर किंवा व्याख्येवर आधरित आहे.

उदाहरण 11 : 3 पेक्षा मोठी प्रत्येक अविभाज्य संख्या $6K+1$ किंवा $6K+5$ या स्वरूपात असते. जेथे K एक पूर्णांक असतो.

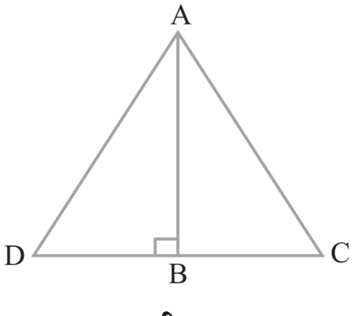
उकल :

क्र.सं.	विधान	विश्लेषण / कारण
1.	समजा, p ही 3 पेक्षा मोठी अविभाज्य संख्या आहे.	कारण परिणामाचा संबंध 3 पेक्षा मोठ्या अविभाज्य संख्येशी आहे. यासाठी आपण सर्वप्रथम या प्रकारच्या संख्येने सुरवात करतो.
2.	p ला 6 ने भागल्यास आपण पहातो की p चे स्वरूप $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, असे होऊ शकते, जेथे k एक पूर्णांक आहे.	युक्लिडच्या भागाकार प्रमेयाचा उपयोग करून
3.	परंतू $6K = 2(3K)$, $6K+2 = 2(3K+1)$ आणि $6K+4 = 2(3K+2)$ आणि $6K+3 = 3(2K+1)$ कारण या अविभाज्य संख्या नाहीत.	आता आपण बाकी उरलेल्या संख्यांचे विश्लेषण करू ज्यामुळे p ही अविभाज्य संख्या मिळेल.
4.	म्हणून p ला $6K+1$ किंवा $6K+5$ असणे आनिवार्य आहे, जेथे K एक पूर्णांक आहे.	इतर पर्यायांचे निराकरण केल्यानंतर आम्ही या निष्कर्षाप्रत पोहचतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप : वरील उदाहरणातील विविध पर्यायांचे निराकरण केल्यानंतर आम्ही निष्कर्षाप्रत पोहोचतो. या प्रक्रियेला कधी कधी नि:शेषणद्वारा उपपत्ती (Proof by Exhaustion) म्हणतात.

प्रमेय A1.1 पायथॅगोरच्या प्रमेयाचा व्यत्यास : जर एका त्रिकोणामध्ये एका बाजुवरील चौरस हा इतर दोन बाजुवरील चौरसाच्या बेरजेइतका असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.



आकृती A 1.4

सिद्धता :

अ.क्र.	विधान	विश्लेषण / कारण
1.	समजा Δ ABC मध्ये $AC^2 = AB^2 + BC^2$	कारण आपण अशाप्रकारच्या त्रिकोणासंबंधीचे विधान सिद्ध करत आहे म्हणून आपण त्यापासूनच सुरुवात करू.
2	AB वर BD लंब रेषेची रचना अशी करा की, BD = BC होईल, AD जोडा.	आपण यापूर्वी सांगितल्याप्रमाणे याची आवश्यकता आम्हाला प्रमेय सिद्ध करताना होईल.
3.	रचनेनुसार Δ ABD हा एक काटकोन त्रिकोण आहे. आणि पायथॅगोरस प्रमेयानुसार $AD^2 = AB^2 + BD^2$	आम्ही पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचा वापर केला जाण्यापूर्वीच सिद्ध केलेले आहे.
4.	रचनेनुसार BD = BC आहे $\therefore AD^2 = AB^2 + BC^2$	तर्कसंगत अनुमान
5.	म्हणून $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	विधान क्र. (1) चा वापर करून.
6.	AC आणि AD धनात्मक असल्याने AC = AD	Δ च्या बाजू नेहमी धनात्मक असतात.
7.	आताच आपण असे सिद्ध केले आहे की, AC = AD BC = BD AB = AB $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ABD$	 ज्ञात प्रमेयानुसार. सामाईक बाजू बाजू-बाजू-बाजू गृहितकानुसार
8.	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ म्हणून $\angle ABC = \angle ABD = 90^0$	एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन समान असतात या विधानानुसार.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप : वर दिलेला प्रत्येक परिणाम क्रमबद्ध पायऱ्यानुसार सिद्ध केलेला आहे. यामध्ये क्रमाला महत्व आहे. उपपत्तीमधील प्रत्येक पायरी ही मागील पायरी व पूर्व गृहीत परिणामांपासून प्राप्त केलेली आहे. (प्रमेय 2.9 पहा).

स्वाध्याय A1.3

खाली दिलेल्या प्रत्येक उदाहरणासाठी एक विधान सिद्ध करावयास सांगितले आहे. प्रत्येक उपपत्तीमध्ये वापरलेल्या पायऱ्या व त्यांची कारणे लिहा.

1. दोन क्रमवार विषम संख्यांच्या बेरजेला 4 ने निःशेष भाग जातो असे सिद्ध करा.
2. दोन क्रमवार विषम संख्या घ्या. त्या संख्यांच्या वर्गांची बेरीज करा आणि आलेल्या उत्तरात 6 मिळवा. सिद्ध करा की प्राप्त झालेली नवी संख्या 8 ची विभाज्य संख्या असते.
3. जर $p \geq 5$ ही एक अविभाज्य संख्या असेल, तर $p^2 + 2$ ही संख्या 3 ची विभाज्य संख्या आहे असे दाखवा. (**सूचना :** सोडविलेल्या उदाहरण 11 चा उपयोग करा)
4. समजा x आणि y या परिमेय संख्या आहेत, तर xy ही एक परिमेय संख्या आहे असे दाखवा.
5. जर a आणि b हे धन पूर्णांक असतील तर आपल्याला माहीत आहे की $a = bq + r, o \leq r < b$ येथे q एक पूर्ण संख्या आहे. सिद्ध करा की, HCF (a, b) = HCF (b, r)

[**सूचना :** A1.1 समजा HCF $(b, r) = h$ आहे. म्हणून $b = k_1\ h$ आणि $r = k_2 h$ जेथे k_1 आणि k_2 सहअविभाज्य संख्या आहेत.]

6. त्रिकोण ABC मध्ये BC बाजूशी समांतर असलेली एक रेषा बाजू AB आणि AC ला क्रमशः D आणि E मध्ये छेदते, तर सिद्ध करा कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.5 विधानाचा नकार (Negation of a Statement)

या भागात आपण एखाद्या विधानाचा नकार म्हणजे काय? यावर चर्चा करू. चर्चेला सुरवात करण्यापूर्वी आपल्याला आम्ही काही संकेतांचा परिचय करून देणार आहोत. ज्याच्या मदतीने आम्हाला या संकल्पना सहजपणे समजतील. सर्वप्रथम आपण एक विधान हे एक एकक आहे असे समजून एक नाव देऊ. उदाहरणार्थ, 1 सप्टेंबर 2005 रोजी दिल्लीमध्ये पाऊस पडला होता. हे विधान आम्ही p ने दर्शवू. हे आपण असेही लिहू शकतो.

p : 1 सप्टेंबर 2005 रोजी दिल्लीमध्ये पाऊस पडला होता. याचप्रमाणे असेही आपण लिहू की,

q : सर्व शिक्षक महिला आहेत.

r : मायकेलच्या कुत्र्याचे शेपूट काळे आहे.

s : $2+2=4$

t : Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे.

वरील संकेत आम्हाला विधानांच्या गुणधर्मांबद्दल चर्चा करावयास मदत करतील. तसेच यासाठीही उपयोगी पडतील की, आपण त्यांचे संघटन कसे करू शकतो. सुरवातीला त्या विधानांचा अभ्यास करू ज्यांना आपण साधे विधान असे म्हणतो. आणि त्यानंतर मिश्र विधानांचा अभ्यास करू.

खालील दिलेल्या सारणीचा विचार करून त्यामध्ये दिलेल्या प्रत्येक विधानाला अनुसरून एका नविन विधानाची रचना करू.

मूळ विधान	नवे विधान
p:1 सप्टेंबर 2005 रोजी दिल्लीमध्ये पाऊस पडला होता.	$\sim p$: 1 सप्टेंबर 2005 रोजी दिल्लीत पाऊस पडला हे असत्य आहे.
q : सर्व शिक्षक महिला आहेत.	$\sim q$: सर्व शिक्षक महिला आहेत हे असत्य आहे.
r : मायकेलच्या कुत्र्याचे शेपूट काळे आहे.	$\sim r$: मायकेलच्या कुत्र्याचे शेपूट काळे आहे हे असत्य आहे.
s : $2 + 2 = 4$	$\sim s$: $2+2=4$ हे असत्य विधान आहे.
t : Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे.	$\sim t$: Δ ABC हा समभूज त्रिकोण आहे हे असत्य आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील सारणीमध्ये दिलेले प्रत्येक नविन विधान मूळ विधानांचा निषेध करते. अर्थात $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ आणि $\sim t$ अनुक्रमे p, q, r, s आणि t या विधानांचा निषेध करतात. येथे $\sim p$ ला,

'p नाही' (not p) असे वाचतात. $\sim p$ हे विधान निश्चयात्मक विधानाचा (assertion) निषेध करते ज्याला विधान p म्हणतो. लक्षात ठेवा की, सामान्यपणे बोलताना $\sim p$ चा अर्थ असा आहे की 1 सप्टेंबर 2005 रोजी दिल्लीमध्ये पाऊस पडला नव्हता'. परंतू असे करताना खूप दक्षता घेण्याची आवश्यकता असते. संभवत आपण असा विचार करू शकतो की दिलेल्या विधानाला उपयुक्त ठिकाणी केवळ 'नाही' हा शब्द लावून विधानाचा निषेध केला जाऊ शकतो. जेथे ही क्रिया p संदर्भात लागु होते. पण अडचण तेव्हा निर्माण होते. जेव्हा, आमचे विधान 'सर्व' या शब्दापासून सुरू होते. उदाहरणार्थ, विधान q सर्व शिक्षक महिला आहेत' याचा विचार करूया. आपण असे म्हटले आहे की या विधानाचा निषेध $\sim q$, म्हणजेच 'सर्व महिला शिक्षक आहेत हे असत्य आहे' हे

विधान 'काही शिक्षक पुरुष आहेत'. असे दर्शविते. ज्यावेळी आपण 'q नाही' ($\sim q$) असे लिहितो तेव्हा समजून घेताना आपल्या असे लक्षात येते की सर्व शिक्षक महिला नाहीत. किंवा आपण हे असेही लिहू शकतो की, 'नाही आहेत सर्व शिक्षक महिला.' पहिल्या विधानावरून लोक भ्रमात पडून असा अर्थ काढू शकतात की, 'सर्व शिक्षक पुरुष आहेत. (जर आम्ही 'सर्व' या शब्दावर जोर दिला तर) येथे निश्चितपणे q चा निषेध नाही. परंतू दुसऱ्या विधानामध्ये $\sim q$ चा अर्थ प्राप्त होतो. याचाच अर्थ असा की त्यातील कमित कमी एक शिक्षक असा आहे की जो महिला नाही. म्हणूनच एकाद्या विधानाचा निषेध लिहिताना अतिशय दक्षता घ्यावी लागते.

आता आपण याबाबत कसा निर्णय घेऊ शकतो की जो निषेध आम्ही प्राप्त केला आहे तो बरोबर आहे की चूक? यासाठी आम्ही खालील कसोटीचा प्रयोग करूया.

समजा p एक विधान आहे आणि $\sim p$ त्याचे निषेध विधान आहे. $\sim p$ हे तेव्हा असत्य असते जेव्हा p सत्य असते आणि $\sim p$ हे सत्य असते जेव्हा p असत्य असते.

उदाहरणार्थ : जर 'मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूटी काळी आहे' हे सत्य असल्यास 'मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूट काळी नाही' हे असत्य आहे. आणि जर 'मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूट काळी नाही' हे सत्य असल्यास 'मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूट काळी आहे' हे असत्य आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

याच प्रकारे s आणि t विधानांचा निषेध हा आहे.

s : $2+2=4$; निषेध $\sim s$: $2+2\neq 4$

t : ΔABC समभुज त्रिकोण आहे. निषेध $\sim t$: Δ ABC हा समभुज त्रिकोण नाही.

आता $\sim(\sim s)$ काय आहे? येथे $2+2=4$ होते जे s आहे.

आणि $\sim(\sim t)$ काय आहे? येथे Δ ABC समभुज त्रिकोण आहे. अर्थात t असेल.

वास्तविकपणे जर एखादे विधान p असेल तर $\sim(\sim p)$ चे विधान p हेच असते.

उदाहरण 12 - खालील विधानांचा निषेध सांगा.

i) मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूटी काळी नाही.

ii) सर्व अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या असतात.

iii) $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

iv) काही परिमेय संख्या पूर्णांक असतात.

v) सर्व शिक्षक पुरुष नाहीत.

vi) काही घोडे तपकिरी रंगाचे नाहीत.

vii) अशी कोणतीही वास्तव सख्या x नाही जेथे, $x^2 = -1$

उकल :

i) मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूटी काळी नाही हे असत्य आहे याचाच अर्थ असा की मायकेलच्या कुत्र्याची शेपूटी काळी आहे.

ii) सर्व अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या आहेत हे असत्य आहे याचाच अर्थ असा कि काही (कमित कमी एक) अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या नाहीत. या विधानाला या प्रकारे लिहू शकतो सर्व अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या नाहीत.

iii) $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे असत्य आहे. याचाच अर्थ असा की $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या नाही.

iv) काही परिमेय संख्या पूर्णांक असतात हे असत्य आहे याचाच अर्थ असा की कोणतीही परिमेय संख्या पूर्णांक नाही.

v) सर्व शिक्षक पुरुष नाहीत हे असत्य आहे. याचाच अर्थ असा की सर्व शिक्षक पुरुष आहेत.

vi) काही घोडे तपकिरी रंगाचे नाहीत हे असत्य आहे म्हणजे सर्व घोडे तपकिरी रंगाचे आहेत.

vii) अशी कोणतीही वास्तव संख्या x नाही जेथे $x^2 = -1$ हे असत्य आहे. याचाच अर्थ असा की कमित कमी एक वास्तव संख्या x आहे जेथे $x^2 = -1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टीप :

वरील चर्चेनुसार एखाद्या विधानाचा निषेध प्राप्त करण्याचा खालील प्रमाणे कार्यकारी नियम (Working Rule) प्राप्त करू शकतो.

i) प्रथम नाही (~) पासून विधानाची सुरवात करावी.

ii) जर काही संभ्रम असल्यास काही उपयुक्त बदल (परिवर्तन) (modification) करू शकता. विशेषकरून 'सर्व' किंवा 'काही' या संबंधीत विधानामध्ये.

स्वाध्याय A1.4

1. खालील विधानांचे निषेध लिहा.

(i) मनुष्य नश्वर (mortal) आहे.

(ii) रेषा l ही रेषा m शी समांतर आहे.

(iii) या प्रकरणामध्ये अनेक स्वाध्याय आहेत.

(iv) सर्व पूर्णांक परिमेय संख्या आहेत.

(v) काही अविभाज्य संख्या विषम आहेत.

(vi) कोणी विद्यार्थी आळशी नाही.

(vii) काही मांजर काळी नाहीत.

(viii) x अशी कोणतीही संख्या नाही जी $\sqrt{x} = -1$.

(ix) 2 ही संख्या धन पुर्णांक a ला विभागते.

(x) पूर्णांक a व b हे एकमेकांचे अविभाज्य आहेत.

2. खाली दिलेल्या प्रत्येक प्रश्नामध्ये दोन विधाने आहेत. दुसरे विधान हे पाहिल्या विधानाचा निषेध आहे की नाही ते सांगा.

(i) मुमताज भुकेलेली आहे. मुमताज भुकेलेली नाही.

(ii) काही मांजर काळी आहेत. काही मांजर तपकीरी आहेत.

(iii) सर्व हत्ती विशाल आहेत. एक हत्ती विशाल नाही.

(iv) सर्व अग्नीशामक यंत्रे लाल आहेत. सर्व अग्नीशामक यंत्रे लाल नाहीत.

(v) कोणताही मनुष्य गाय नाही. काही माणसे गाय आहेत.

A1.6 विधानाचा व्यत्यास (Convers of a Statement)

आता आपण विधानाच्या व्यत्यासाचा हेतू (notion) शोधूया. यासाठी आम्हाला संयुक्त (compound) विधानांची आवश्यकता असते जे एक किंवा अनेक सोप्या विधानांचे संयोजन असते. तसे पाहिले तर मिश्र विधान बनविण्याच्या अनेक पद्धती आहेत. परंतू येथे त्याच पद्धतीवर लक्ष देऊया ज्यामध्ये 'जर-तर' याद्वारे दोन विधाने जोडून प्राप्त करू शकतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विधान : जर पाऊस पडत असेल तर सायकलवरून जाणे कठीण आहे हे विधान दोन सोप्या विधानांनी बनलेले आहे.

p : पाऊस पडत आहे.

q : सायकलवरून जाणे कठिण आहे.

पूर्वी सांगितलेल्या संकेतांचा वापर करून आम्ही असे म्हणू शकतो की, जर p आहे, तर q आहे. आम्ही असेही म्हणू शकतो की, 'p मुळे q प्राप्त होते' आणि याला आपण $p \Rightarrow q$ असे दर्शवतो.

आता समजा की एक विधान असे आहे की जर पाण्याची टाकी काळी आहे तर त्यात पिण्याचे पाणी आहे. हे $p \Rightarrow q$ या स्वरूपात आहे जेथे परिकल्पना p आहे (पाण्याची टाकी काळी आहे) आणि निष्कर्ष q आहे (टाकीतील पाणी पिण्याचे आहे). समजा आम्ही परिकल्पना आणि निष्कर्षाची अदलाबदल (interchange) केली तर अशा स्थितीत आपल्याला काय समजते? आपल्याला $q \Rightarrow p$ मिळेल. अर्थात जर टाकीमध्ये पिण्याचे पाणी असेल तर टाकी अवश्य काळी असेल. या विधानाला $p \Rightarrow q$ चा व्यत्यास (convers) असे म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

व्यापक रूपात विधान $p \Rightarrow q$ चा व्यत्यास $q \Rightarrow p$ होतो. जेथे p आणि q विधाने आहेत. लक्षात ठेवा की $p \Rightarrow q$ आणि $q \Rightarrow p$ ही एकमेकांची व्यत्यास विधाने आहेत.

उदाहरण 13: खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा.

i) जर जमीला सायकल चालवत असेल, तर 17 ऑगष्ट रोजी रविवार येतो.

ii) जर 17 ऑगष्ट रोजी रविवार असेल, तर जमीला सायकल चालवत आहे.

iii) जर प्रौलिन क्रोधीत होत असेल, तर तिचा चेहरा लाल होतो.

iv) जर एका व्यक्तीकडे शिक्षणातील स्नातक पदवी असेल, तर त्याला शिकविण्याची अनुमती असते.

v) जर एखाद्या व्यक्तीला विषाणूचा संसर्ग असेल, तर त्याला खूप ताप असतो.

vi) जर अविनाश मुंबईमध्ये आहे, तर तो भारतात आहे.

vii) जर ΔABC समभुज आहे, तर त्याचे सर्व आंतरकोन कोन समान असतात.

viii) जर x ही एक अपरिमेय संख्या आहे. तर त्याचा दशांश रुपातील विस्तार अपुनरावर्ती (non terminating) व अनावर्ती (non-recuring) असतो.

ix) जर $x - a$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर $p(a) = 0$

उकल :

वर दिलेले प्रत्येक विधान $p \Rightarrow q$ या स्वरूपातील आहे. याचा व्यत्यास माहीत करून घेण्यासाठी प्रथम आपण p आणि q ओळखले पाहिजे, त्यानंतर आपण $q \Rightarrow p$ लिहितो.

i) p: जमिला सायकल चालवत आहे आणि q : 7 ऑगष्ट रविवारच्या दिवशी येतो. म्हणून व्यत्यास असा आहे की जर 17 ऑगष्ट रविवारी येतो तर जान्हवी सायकल चालवत आहे.

ii) हे विधान (i) चा व्यत्यास आहे. म्हणून याचा व्यत्यास (i) मध्ये दिलेला आहे.

iii) जर प्रौलिनचा चेहरा लाल होत असेल, तर ती क्रोधीत आहे.

iv) जर एका व्यक्तीला शिकविण्याची अनुमती असेल, तर त्याच्याकडे शिक्षणाची स्नातक पदवी असते.

v) जर एका व्यक्तीला खूप ताप असेल, तर त्याला विषाणूंचा संसर्ग झालेला आहे.

vi) जर अविनाश भारतात असेल, तर तो मुंबईत आहे.

vii) जर ΔABC मधील आंतरकोन समान आहेत, तर तो समभुज त्रिकोण आहे.

viii) जर दशांश रुपातील विस्तार अपुनरावर्ती व अनावर्ती आहे, तर x ही एक परिमेय संख्या आहे.

ix) जर $p(a) = 0$, तर $x - a$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव आहे. लक्षात ठेवा विधान सत्य आहे कि असत्य याबाबत चिंता न करता आपण वर दिलेल्या प्रत्येक विधानाचे केवळ व्यत्यास करून लिहिले आहे. उदाहरणार्थ पुढील विधानावर विचार करा. जर अविनाश मुंबईमध्ये आहे, तर तो भारतात आहे. हे विधान सत्य आहे. आता आपण त्याचा व्यत्यास पाहू. जर अविनाश भारतात आहे, तर तो मुंबईमध्ये आहे. येथे सत्यच असले पाहिजे याची आवश्यकता नाही की तो भारताच्या कोणत्याही भागात राहू शकतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

गणितामध्ये विशेषत:, भूमितीमध्ये असे अनेक संदर्भ आपल्याला मिळतील जेथे $p \Rightarrow q$ सत्य असते आणि आपल्याला त्याचा व्यत्यास अर्थात $q \Rightarrow p$ हे सुद्धा सत्य आहे असे सिद्ध करावे लागते.

उदाहरण 14: खालील विधानांचा व्यत्यास सांगा. प्रत्येक संदर्भात त्यांचा व्यत्यास सत्य आहे की असत्य ते ही सांगा.

i) जर n हा एक सम अपूर्णांक असेल त्तर $2n + 1$ एक विषम अपूर्णांक असतो.

ii) जर एका वास्तव संख्येचा दशांश स्वरूप तील विस्तार पुनरावर्ती (terminating) असेल तर ती संख्या परिमेय आहे.

iii) जर एक छेदिका दोन समांतर रेषांना छेदत असेल, तर संगत कोनांची प्रत्येक जोडी समान असते.

iv) जर एक चौकोनामध्ये समोरासमोरील बांजूची प्रत्येक जोडी समान असेल तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

v) जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांचे संगत कोन समान असतात.

उकल:

i) व्यत्यास असा आहे की जर $2n+1$ हा एक विषमपूर्णांक आहे, तर n एक पूर्णांक असतो हे एक असत्य विधान आहे (उदाहरणार्थ 15=2(7)+1 आणि 7 विषम आहे).

ii) जर एक वास्तव संख्या परिमेय आहे. तर त्याचा दशांश विस्तार पुनरावर्ती असतो हे व्यत्यास आहे. हे एक असत्य विधान आहे कारण परिमेय संख्येचा एक अपुनरावर्ती दशांश विस्तार सुद्धा असू शकतो.

iii) व्यत्यास असा आहे की, जर एक छेदिका दोन रेषांना अशा प्रकारे छेदते की संगत कोनांची प्रत्येक जोडी समान होते, तर त्या दोन्ही रेषा समांतर असतात. इयता नववीच्या पाठ्य पुस्तकातील गृहीतक 6.4 नुसार आम्हाला असे समजले आहे की हे विधान सत्य आहे.

iv) जर एक चौकोन समांतरभुज चौकोन असेल तर त्याच्या समोरासमोरील बाजूंची प्रत्येक जोडी समान असते. हा व्यत्यास सत्य आहे (प्रमेय 8.1 इयत्ता 9 वी).

v) जर दोन त्रिकोणांचे संगत कोन समान असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात. हा व्यत्यास आहे. हे विधान असत्य आहे. याच्यासाठी एक योग्य उदाहरण देण्याची जबाबदारी आम्ही आपल्यावर सोपवित आहोत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A1.5

1. खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा.

(i) जर टोकीओमध्ये उष्णता असेल, तर शरनच्या शरीरातून अधिक घाम येतो.

(ii) जर शालिनी भुकेलेली असेल, तर तिच्या पोटात कलकलते.

(iii) जर यशला शिष्यवृत्ती मिळत असेल, तर त्याला एक पदवी मिळेल.

(iv) जर रोपट्याला फुले फुलली असतील, तर ते रोप सजीव असते.

(v) जर जनावर मांजर असेल, तर त्याला एक शेपूट असते.

2. खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा व प्रत्येक स्थितीत व्यत्यास सत्य आहे की असत्य आहे ते सांगा.

(i) जर ΔABC समद्विभुज त्रिकोण असेल, तर त्याच्या पायावरील दोन्ही कोन समान असतात.

(ii) जर एक पूर्णांक विषम असेल, तर त्याचा वर्ग सुद्धा विषमच असतो.

(iii) जर $x^2 = 1$, तर $x = 1$

(iv) जर ABCD हा समांतरभुज चौकोन असेल, तर AC व BD हे त्याचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

(v) जर a, b व c या पूर्ण संख्या असतील, तर $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) जर x आणि y या दोन विषम संख्या असतील, तर $x + y$ ही एक सम संख्या असते.

(vii) जर PQRS या समांतरभुज चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एका वर्तुळाच्या परिघावर असतील तर तो आयत असतो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.7 विरोधात्मक उपपत्ती (Proof by Contradiction)

आतापर्यत तुम्ही सर्वच उदाहरणामध्ये परिणामांची सत्यता स्थापीत करण्यासाठी प्रत्यक्ष तर्कचा वापर केला होता आता आपण अप्रत्यक्ष तर्कांचा विशेषत: गणितातील एक अति शक्तीशाली साधन म्हणजेच विरोधात्मक उपपत्ती (Proof by Contradiction) याचा वापर करू.

या पध्दतीचा वापर आम्ही पहिल्या प्रकरणामध्ये अनेक संख्याची अपरिमेयता स्थापित करण्यासाठी तसेच अन्य प्रकरणामध्ये काही प्रमेयांची सिद्धता करण्यासाठी केला आहे. येथे आपण हा युक्तीवाद स्पष्ट करण्यासाठी काही उदाहरणे घेऊया.

पुढील अभ्यास करण्यापूर्वी आपण यावर चर्चा करू या की विरोधात्मक पद्धती काय आहे. गणितामध्ये विरोध तेव्हाच होतो जेव्हा आम्हाला असे एक विधान p मिळते, की p सत्य असते आणि त्याचा निषेध $\sim p$ सुद्धा सत्य असतो.

p: जेथे a आणि b या परस्पर अविभाज्य संख्या आहेत

q: संख्या 2 'a' आणि 'b' ला विभागते.

जर आम्ही असे मानले की p सत्य आहे आणि आपण q सुद्धा सत्य आहे असे सिद्ध करू शकलो तर आम्हाला एक विरोधी मतप्राप्त होते. कारण q चे तात्पर्य असे की p चा निषेध सत्य आहे. जर आपल्याला आठवत असेल कि ही घटना त्यावेळी घटली होती ज्यावेळी आम्ही $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सिद्ध कराण्याचा प्रयत्न करत होतो. (अध्याय 1 पहा)

विरोधात्मक उपपती कशाप्रकारे कार्य करते ? एक विशिष्ट उदाहरण घेवून यावर आपण विचार करू. खालील प्रमाणे दिलेले वाक्य लक्षात घ्या.

सर्व महिला नश्वर असतात. A ही एक महिला आहे. सिद्ध करा की A ही महिला नश्वर आहे. जरी हे एक सोपे उदाहरण असले तरी सुद्धा विरोधात्मक पद्धतीने ते कसे सिद्ध करता येईल ते आपण पाहू.

- आता आपण असे समजू की विधान p ची सत्यता स्थापित करू इच्छितो आहोत (येथे आपण p : 'महिला A नश्वर आहे' हे सत्य आहे असे दाखवू इच्छितो).
- सर्व प्रथम आपण असे मानू की विधान सत्य नाही. म्हणजे आम्ही मान्य करतो की p चे निषेध विधान सत्य आहे (महिला A नश्वर नाही आहे.)
- तेव्हा आपण p च्या निषेध विधानाच्या सत्यतेवर आधारित अनेक तर्कसंगात विचार करतो (कारण महिला A नश्वर नाही म्हणून आपल्याला 'सर्व महिला नश्वर आहेत' या विधानाचे एक प्रति उदाहरण प्राप्त होते म्हणून हे असत्य आहे की सर्व महिला नश्वर आहेत).
- जर यापासून विरोधी विचार उत्पन्न होतो, तर हा विरोधी विचार आपली सदोष मान्यता 'p सत्य नाही' यामुळे होते (हा एक विरोधी विचार आहे. कारण आम्ही हे दर्शविले आहे की विधान 'सर्व महिला नश्वर आहेत' आणि याचे निषेध विधान सर्व महिला नश्वर नाहीत. हे सत्य आहे हा विरोधाभास यासाठी होतो की आम्ही A नश्वर नाही असे गृहीत धरून राहिलो.)
- म्हणूनच आपली कल्पना चुकीची आहे. अर्थात p हे विधान सत्य असायलाच हवे. (म्हणजेच A नश्वर आहे.)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 15: एक शुन्येतर परिमेय संख्या आणि एक अपरिमेय संख्या यांचा गुणाकार अपरिमेय असतो.

विधान	विश्लेषण / कारण
आपण विरोधात्मक रितीने उपपत्तीचा वापर करू, समजा r एक शुन्येतर परिमेय संख्या आहे आणि x एक अपरिमेय संख्या आहे . समजा $r=\frac{m}{n}$ जेथे m आणि n हे पूर्णांक आहेत व $m \neq 0, n \neq 0,$ आम्हला असे सिद्ध करावयाचे आहे की rx ही अपरिमेय संख्या आहे.	
rx ही परीमेय संख्या आहे असे मानू.	येथे आपण त्या विधानाचा निषेध सत्य मानत आहोत जे आपल्याला सिद्ध करावयाचे आहे.
$rx=\frac{p}{q}$, जेथे $q \neq 0$, p आणि q हे पूर्णांक आहेत.	हे आधीचे विधान आणि परिमेय संख्याच्या व्याख्येनुसार मिळते.
समीकरण $rx=\frac{p}{q}$, जेथे $q \neq 0$ आणि $r=\frac{m}{n}$ याचा वापर केल्यानंतर आपल्याला $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{nq}$ मिळेल.	
कारण np आणि mq हे पूर्णांक आहेत आणि $mq \neq 0,$ म्हणून x एक परिमेय संख्या आहे.	पूर्णांकाचे गुणधर्म आणि परिमेय संख्येची व्याख्या यांचा वापर करून
हा एक विरोधाभास आहे कारण आम्ही x ला परिमेय दाखविले आहे. परंतू आपल्या परिकल्पनेनुसार x परिमेय आहे.	या विरोधी उक्तीचा आपण शोध घेत होतो.
rx परिमेय संख्या आहे या दोषपुर्ण कल्पनेमुळे हा विरोधाभास निर्माण होतो.	तर्कसंगत आनुमान

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण उदाहरण 11 सिद्ध करुया, परंतू आपण यावेळी विरोधात्मक उपपत्तीचा उपयोग करूया. परिणाम खाली दिलेला आहे.

विधान	विश्लेषण/कारण
आपण असे मानूया की विधान सत्य नाही.	जसे आपण यापूर्वी पाहिले आहे की विरोधात्मक उपपतिच्या मदतीने तर्क करण्याची सुरवात करुया
आता आपण असे मानूया की एक अशी अविभाज्य संख्या $p > 3$ असते जी $6n + 1$ किंवा $6n + 5$ या स्वरूपातील असते, जेथे n एक पूर्ण संख्या आहे	हा परिणामाच्या विधानाचा निषेध आहे.
6 च्या विभाज्यतेवरील युक्लीडच्या विभाजन प्रमेयाचाचा वापर करून आणि p, $6n + 1$ किंवा $6n + 5$ या स्वरूपात नाही. या तथ्याचा वापर करून आपल्याला $p = 6n$ किंवा $6n + 2$ किंवा $6n + 3$ किंवा $6n + 4$ मिळते.	पूर्वी सिद्ध केलेल्या परिणामांचा वापर करून.
म्हणून p हे 2 किंवा 3 चे भाज्य आहे.	तर्कसंगत आनुमान
यासाठी p अविभाज्य नाही	तर्कसंगत आनुमान
हा एक विरोधाभास आहे, कारण आमच्या परिकल्पनेनुसार p अविभाज्य आहे.	जसे आपल्याला हे हवे आहे.
विरोधाभास यासाठी होतो की आधी असे मानून चाललो होतो की एक अशी अविभाच्य संख्या $p > 3$ असते, जी $6n + 1$ किंवा $6n + 5$ या स्वरूपात नसते.	
परिणामी 3 पेक्षा मोठी प्रत्येक अविभाज्य संख्या $6n + 1$ किंवा $6n + 5$ या स्वरूपातील असते.	या निष्कर्षावर आपण पोहचतो.

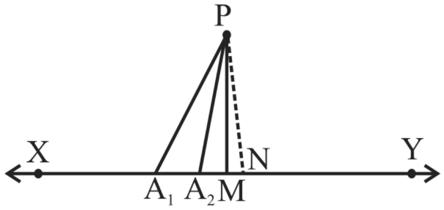
टीप: वरील उपपत्तीच्या उदाहरणावरून आपल्याला असे समजते की एक परिणाम अनेक पद्धतीने सिद्ध केला जाऊ शकतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

प्रमेय A1.2

एक रेषा आणि त्या रेषेबाहेरील एक बिंदू यामथील कमीत कमी अंतर म्हणजे त्यामधील लंबांतर असते.

सिद्धता :



आकृती A 1.5

विधान	विश्लेषण / कारण
समजा XY ही दिलेली रेषा आहे. आणि P हा त्या रेषेवर नसलेला एक बिंदू आहे. तसेच PM, PA_1, PA_2,... इ. बिंदू P पासून XY पर्यंत काढलेले रेषाखंड आहेत. यामध्ये PM हा सर्वात लहान रेषाखंड आहे. (आकृती A1.5 पहा)	कारण आपल्याला असे सिद्ध करावयाचे आहे की सर्व रेषाखंडामध्ये सर्वात लहान रेषाखंड हा XY वर लंब असतो, म्हणून आम्ही हे रेषाखंड घेतो.
समजा PM हा XY रेषेवर लंब नाही.	हा विरोधात्मक पद्धतीद्वारे सिद्ध केल्या जाणाऱ्या विधानाचा निषेध आहे.
XY रेषेवर PN हा लंब काढा जसे आकृतीत तुटक रेषेने दाखविले आहे.	इच्छित परिणाम सिद्ध करण्यासाठी आपल्याला रचना कराण्याची आवश्यकता पडते.
सर्व रेषाखंड PM, PN, PA_1, PA_2, PA_3 आदी मध्ये PN हा सर्वात लहान रेषाखंड आहे याचाच अर्थ असा की $PN < PM$	काटकोन त्रिकोणाची एक बाजू त्याच्या कर्णपिक्षा लहान असते आणि संख्याच्या ज्ञात गुणधर्मावरून.
हा आपल्या या परिकल्पनेचा विरोधाभास आहे की अशा सर्व रेषाखंडामध्ये PM हा सर्वात लहान रेषाखंड आहे.	जसे आपल्याला पाहिजे होते.
म्हणून PM हा रेषाखंड XY वर लंब आहे.	या निष्कर्षावर आपण पोहचतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A1.6

1. समजा $A + B = C + D$, आणि $A < C$ असेल, तर विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करून असे सिद्ध करा की $B > D$.
2. समजा r एक परिमेय संख्या आहे आणि x ही एक अपरिमेय संख्या आहे. तर विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करुन असे सिद्ध करा कि $r + x$ एक अपरिमेथ संख्या आहे.
3. विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करून असे सिद्ध करा की पूर्णांक a साठी a^2 समसंख्या आहे, तर a सुद्धा समसंख्या असते.

   (सूचना : समजा a सम नाही आहे. अर्थात $2n + 1$ या स्वरूपात आहे जेथे n पूर्णांक आहे. येथून पुढे जा)
4. विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करून असे सिद्ध करा की जर पूर्णांक a साठी a^2, 3 ने विभाज्य असल्यास, a सुद्धा 3 ने विभाज्य असतो.
5. विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करून असे सिद्ध करा की n ची अशी कोणतीही किंमत नाही ज्यामध्ये 6^n चा अंतिम अंक 0 असतो.
6. विरोधात्मक उपपत्तीचा वापर करून असे सिद्ध करा की एकाच प्रतलातील दोन सरळ रेषा एकमेकींना एक पेक्षा जास्त बिंदूत छेदू शकत नाहीत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.8 सारांश (Summary) :

या परिशिष्टमध्ये तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला आहे.

1. कोणत्याही उपपत्तीची विभिन्न अंगे आणि इयता नववीमध्ये अभ्यासलेल्या संबंधीत संकल्पना.
2. विधानाचा निषेध
3. विधानाचा व्यत्यास
4. विरोधात्मक उपपत्तीद्वारे सिद्धता.

***

उत्तरे
(ANSWERS)

स्वाध्याय 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) ल. सा. वि. = 182; म. सा. वि. = 13

   (ii) ल. सा. वि. = 23460; म. सा. वि. = 2

   (iii) ल. सा. वि. = 3024; म. सा. वि. = 6

3. (i) ल. सा. वि. = 420; म. सा. वि. = 3

   (ii) ल. सा. वि. = 11339; म. सा. वि. = 1

   (iii) ल. सा. वि. = 1800; म. सा. वि. = 1

4. 22338

5. 36 मिनिटे

बहुपदी : स्वाध्याय 2.1

1. (i) शून्य नाही (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 2.2

1. (i) -2, 4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) -2, 0 (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 - \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

स्वाध्याय 3.1

1. i) रेषीय समीकरणांची आवश्यक जोडी

$x + y = 10$, $x - y = 4$ येथे x ही मुलींची संख्या आणि y ही मुलांची संख्या. आलेखाने सोडविण्यासाठी या समीकरणांचे आलेख, आलेखकागदावर त्याच अक्षावर काढा.

मुली = 7, मुलगे = 3

(ii) रेषीय समीकरणांची जोडी

$5x + 7y = 50$, $7x + 5y = 46$, येथे x आणि या अनुक्रमे एक पेन व एक पोन्सिल यांच्या किंमती (₹ मध्ये) आहेत. आलेखाने दर्शविण्यासाठी या समीकरणांचे आलेख आलेखकागदावर त्याच अक्षांवर काढा. एक पोन्सिलची किंमत = ₹ 3, एका पेनची किंमत = ₹ 5.

2. (i) एका बिंदूत छेदतात (ii) एक रेषीय आहेत (iii) समांतर

3. (iv) सुसंगत (ii) असंगत (iii) सुसंगत (iv) सुसंगत (v) सुसंगत

4. (i) संगत (ii) असंगत (iii) सुसंगत (iv) असंगत

वरील (i) ची उकल $y = 5 - x$ दिलेली आहे. येथे x ची किंमत कोणतीही घेऊ शकतो म्हणून येथे असंख्य उकली आहेत.

वरील (iii) ची उकल $x = 2, y = 2$ आहे. ही एकमेव उकल आहे.

5. लांबी = 20m आणि रुंदी = 16m

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. तीन भागासाठी एक शक्य उत्तर

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (-1,0), (4, 0) आणि (2, 3)

स्वाध्याय 3.2

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $S = 9, t = 5$ (iii) $y = 3x - 3$

येथे x ची किंमत कोणतीही घेता येते म्हणून अनेक उकली आहेत.

(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0,$ (vi) $x = 2, y = 3$

2. $x = -2, y = 5; m = -1$

3. (i) $x - y = 26, x = 3y,$ येथे x आणि y या दोन संख्या आहेत $(x > y)$; $x = 39, y = 13$

(ii) $x - y = 18, x + y = 180,$ येथे x आणि y या दोन कोनांचे अंशामधील मोजमापे आहेत. $x = 99, y = 81,$

(iii) $7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750,$ येथे x आणि y या एक बॅट आणि एक बॉलच्या अनुक्रमे किंमती (₹ मध्ये) आहेत; $x = 500, y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105, x + 15y = 155,$ येथे x हा निश्चित दर (₹ मध्ये) आणि y (₹ मध्ये दर km भाडे आहे), $x = 5, y = 10$, ₹ 255.

v) $11x - 9y + 4 = 0, 6x - 5y + 3 = 0,$ येथे x आणि y हे अपूर्णांकाचे अनुक्रमे अंश व छेद आहेत. $\frac{7}{9}(x = 7, y = 9)$

vi) $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0,$ येथे x आणि y हे अनुक्रमे जेकॉब आणि त्याचा मुलगा यांचे वय आहे, $x = 40, y = 10$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 3.3

1. i) $x=\frac{19}{5}, y=\frac{6}{5}$ ii) $x = 2, y = 1$ iii) $x=\frac{9}{13}, y=\frac{-5}{3}$ iv) $x = 2, y = -3$

2. i) $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0$, येथे x आणि y हे $\frac{3}{5}$ चे अंश व छेद आहेत.

ii) $x - 3y + 10 = 0, x - 2y - 10 = 0$, येथे x आणि y अनुक्रमे नूरी आणि सोनू यांची वये (वर्षामध्ये) आहेत. नूरीचे वय $(x) = 50$ वर्षे, सोनूचे वय $(y) = 20$ वर्षे.

iii) $x + y = 9, 8x - y = 0$, येथे x आणि y हे अनुक्रमे 18 संख्येचे दशक व सुटे आहेत.

iv) $x + 2y = 40, x + y = 25$, येथे x आणि y हे अनुक्रमे ₹50 व ₹100 च्या नोटांची संख्या आहे; $x = 10, y = 15$.

v) $x + 4y = 27, x + 2y = 21$, येथे x हा निश्चित दर (₹ मध्ये) आणि y हा अतिरिक्त दर (₹ मध्ये) प्रतिदिन, $x = 15, y = 3$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वर्गसमीकरणे : स्वाध्याय 4.1

1. (i) आहे (ii) आहे (iii) नाही (iv) आहे

(v) आहे (vi) नाही (vii) नाही (viii) आहे

2. i) $2x^2 + x - 528 = 0$, येथे x, भूखंडाची रुंदी (मीटरमध्ये)

ii) $x^2 + x - 306 = 0$, येथे x हा लहानात लहान पूर्णांक

iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, येथे x हे रोहनचे आताचे वय (वर्षामध्ये)

iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, येथे u हा [km/h मध्ये] आगगाडींचा वेग

स्वाध्याय 4.2

1. i) -2, 5 ii) $-2, \frac{3}{2}$ iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. i) 9, 36 ii) 25, 30

3. संख्या 13 व 14 आहेत.

4. धनपूर्णांक 13 व 14 आहेत

5. 5cm व 12cm

6. वस्तुंची संख्या 6, प्रत्येक वस्तूची किंमत = ₹15.

स्वाध्याय 4.3

1. i) वास्तव बीजांचे आस्तित्व नाही.

ii) समान बीजे, $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

iii) संकिर्ण बीजे : $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ ii) $k = 6$

3. होय, 40m, 20m

4. नाही

5. होय, 20m. 20m

अंकगणिती क्रम : स्वाध्याय 5.1

1. (i) होय. 15, 23, 31, ... हा A.P. आहे. कारण प्रत्येक पुढील पद हे मागील पदामध्ये 8 मिळवून मिळते.

(ii) नाही; घनफळ V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ V आहेत.

(iii) होय; 150, 200, 250.......... हा एक A.P. आहे.

(iv) नाही, रक्कम $10000\left[1+\frac{8}{100}\right], 10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^2, 10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^3$ आहेत.

2. i) 10, 20, 30, 40 ii) -2, -2, -2, -2 iii) 4, 1, -2, -5

iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ v) -1.25, -1.50, -1.75, -2.0

3. i) $a = 3, d = -2$ ii) $a = -5, d = 4$ iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ iv) $a = 0.6, d = 1.1$

4. i) नाही

ii) होय, $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

iii) होय, $d = -2$; -9.2, -11.2, -13.2

iv) होय, $d = 4$; 6, 10, 14

v) होय, $d = \sqrt{2}; 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

vi) नाही

vii) होय, $d = -4$; -16, -20, -24

viii) होय, $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

ix) नाही

x) होय, $d = a$; $5a, 6a, 7a$

xi) नाही

xii) होय, $d = \sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

xiii) नाही

xiv) नाही

xv) होय, $d = 24$; 97, 121, 145

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 5.2

1. i) $a_n = 28$ ii) $d = 2$ iii) $a = 46$ iv) $n = 10$ v) $a_n = 3.5$

2. i) C ii) B

3. i) $\boxed{14}$ ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$ iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 वे पद

5. i) 34 ii) 27 **6.** नाही **7.** 178 **8.** 64

9. 5 वे पद **10.** 1 **11.** 65 वे पद **12.** 100

13. 128 **14.** 60 **15.** 13

16. 4, 10, 16, 22,... **17.** अंतिम पदापासून 20 वे पद 158

18. -13, -8, -3 **19.** 11 वे वर्ष **20.** 10

स्वाध्याय 5.3

1. i) 245 ii) -180 iii) 5505 iv) $\frac{33}{20}$

2. i) $1046\frac{1}{2}$ ii) 286 iii) -8930

3. i) $n = 16, S_n = 440$ ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ iii) $a = 4, S_{12} = 246$

iv) $d = 1, a_{10} = 8$ v) $a = \frac{-35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ vi) $n = 5, a_n = 34$

vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ viii) $n = 7, a = -8$ ix) $d = 6$ x) $a = 4$

4. 12. सुत्र $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ मध्ये $a = 9$, $d = 8$, S = 636 घातल्यास आम्हाला $4n^2 + 5n - 636 = 0$ हे वर्गसमीकरण मिळते. सोडविल्यानंतर बीजे $n = -\frac{53}{4}, 12$, मिळतात. या दोन्ही बीजातील फक्त एक बीज 12 स्विकार्य आहे.

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, S = 6973

7. एकूण बेरीज = 1661 **8.** $S_{51} = 5610$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

9. n^2 10. (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1.$

$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 13. 960 14. 625 15. ₹27750

16. पुरस्कारांची किंमत (₹ मध्ये)) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 18. 143 cm

19. 16 रांगा. 5 ओंडके सर्वात वरील रांगेत ठेवतात. $S = 200, a = 20, d = -1$. सुत्र $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ मध्ये ठेवून आपण $41n - n^2 = 400n$ मिळविता, सोडविल्यानंतर $n = 16, 25$. म्हणून रांगाची संख्या 16 किंवा 25. $a_{25} = a + 24d = -4$ म्हणजे 25 व्या रांगेत ओंडक्यांची संख्या -4 हे अशक्य आहे. म्हणून $n = 25$ शक्य नाही. $n = 16, a_{16} = 5$, म्हणून रांगा 16 आहेत व सर्वात वरील रांगेत 5 ओंडके ठेवलेले आहेत.

20. 370m.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 5.4 (ऐच्छिक)*

1. (i) 32 वे पद 2. $S_{16} = 20, 76$ 3. 385 cm

4. 35 5. 750m^3

त्रिकोण : स्वाध्याय 6.1

1. (i) समरूप (ii) समरूप (iii) समभुज

(iv) समान, प्रमाणात 3. नाही

स्वाध्याय 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) नाही (ii) होय (iii) होय

9. 'O' मधून DC ला समांतर रेषा काढा जी AD आणि BC ला अनुक्रमे E व F बिंदूत छेदते.

स्वाध्याय 6.3

1. (i) होय. को.को.को. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) होय. बा.बा.बा. $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
(iii) नाही (iv) नाही. बा.बा.बा. $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
(v) नाही (vi) होय. को.को.को. $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. $55^0, 55^0, 55^0$

14. 'AD' ला E बिंदूपर्यंत वाढवा म्हणजे AD = DE आणि PM ला N बिंदू पर्यंत वाढवा म्हणजे PM = MN. EC आणि NR जोडा.

सहनिर्देशक भूमिती : स्वाध्याय 7.1

1. i) $2\sqrt{2}$ ii) $4\sqrt{2}$ iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km 3. नाही 4. होय

5. चंपा बरोबर आहे.

6. i) चौरस ii) चौकोन नाही iii) समांतरभुज चौकोन

7. i) (-7,0) 8. -9,3

9. ±4, QR=$\sqrt{41}$,PR=$\sqrt{82}$,$9\sqrt{2}$ QR=$\sqrt{41}$,PR=$\sqrt{82}$,$9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

स्वाध्याय 7.2

1. i) (1, 3) 2. $\left(2,-\frac{5}{3}\right);\left(0,-\frac{7}{3}\right)$ 3. $\sqrt{61}m$; 5 वी रेषा 22.5cm अंतरावर आहे

4. 2 : 7 5. $1:1;\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 6. $x = 6, y = 3$

7. (3, -10) 8. $\left(-\frac{2}{7},-\frac{20}{7}\right)$ 9. $\left(-1,\frac{7}{2}\right),(0,5),\left(1,\frac{13}{2}\right)$

10. 24 चौ. एकक

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1 गणितातील उपपत्ती : स्वाध्याय A1.1

1. i) संदिग्ध ii) सत्य iii) सत्य iv) संदिग्ध v) संदिग्ध

2. i) सत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) सत्य v) सत्य

3. केवळ (ii) ही सत्य आहे.

4. i) जर $a > 0$ आणि $a^2 > b^2$ तर $a > b$ ii) जर $xy \geq 0$ आणि $x^2 = y^2$, तर, $x = y$

iii) जर $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ आणि $y \neq 0$, तर $x = 0$

iv) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात.

स्वाध्याय A1.2

1. A नश्वर आहे

2. ab परिमेय संख्या आहे.

3. $\sqrt{17}$ चा दशांश विस्तार अपुनरावर्ती आणि अनावर्ती आहे.

4. $y = 7$

5. $\angle A = 100^0, \angle C = 100^0, \angle D = 180^0$

6. PQRS एक आयत आहे.

7. होय परिकल्पनेच्या आधारावर नाही; कारण $\sqrt{3761} = 61$ आहे जे अपरिमेय नाही. परिकल्पना चुकीची होती म्हणून निष्कर्ष असत्य आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 1.3

1. काही पूर्णांक साठी क्रमवार दोन विषम संख्या $2n + 1$ अणि $2n + 3$ घ्या.

स्वाध्याय A 1.4

1. i) मनुष्य नश्वर नाही.

ii) l रेषा m रेषाला समांतर नाही.

iii) प्रकरणात स्वाध्याय नाहीत.

iv) सर्व पूर्णांक परिमेय संख्या नाहीत.

v) सर्व अविभाज्य संख्या विषम संख्या नाहीत.

vi) काही विद्यार्थी आळशी आहेत.

vii) सर्व मांजरे काळी आहेत.

viii) कमीत कमी एक वास्तव संख्या x अशी आहे की $\sqrt{x} = -1$

ix) धन पूर्णांक a ल 2 ने भाग देऊ शकत नाही.

x) पूर्णांक a आणि b हे सहअविभाज्य आहेत.

2. i) होय ii) नाही iii) नाही iv) नाही v) होय.

स्वाध्याय A 1.5

1. i) जर शरनला घाम येत असेल, तर टोकीओमध्ये उष्णता आहे.

ii) जर शालिनीच्या पोटात कलकलत असेल, तर ती भुकेलेली आहे.

iii) जर जसवंत पदवी मिळवत असेल, तर, त्याला शिष्यवृती मिळते.

iv) जर वनस्पती जीवंत असेल तर तिल फुले असतात.

v) जर प्राण्याला शेपूट असेल तर ते मांजर आहे.

2. i) जर त्रिकोणचे पायालगतचे कोन समान असतील, तो समद्विभुज त्रिकोण आहे. सत्य

ii) जरा एका पूर्णांकाचा वर्ग विषम संख्या असेल, तर तो पूर्णांक सुध्दा विषम संख्या असते. हे सत्य.

iii) जर $x = 1$ तर $x^2 = 1$. सत्य

iv) जर AC व BD एकमेकास दुभागत असतील, तर ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. सत्य.

v) $a + (b + c) = (a + b) + c$, तर $a, b,$ व c या पूर्ण संख्या आहेत. असत्य.

vi) जर $x + y$ ही एक सम संख्या आहे, तर x व y या विषम संख्या असतात. असत्य.

vii) जर एक समांतरभुज चौकोन हा एक आयत असेल, तर त्याचे सर्व शिरोबिंदू वर्तुळ परिघावर स्थित असतात. सत्य.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 1.6

1. $b \leq d$ चे वेगळे मान घ्या.
3. प्रकरण 5 चे 10 वे उदाहरण पहा.
6. इयत्ता IX च्या गणित पुस्तकातील प्रमेय 5.1 पहा.

A2 गणिती नमुना : स्वाध्याय A 2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
2. $1cm^2$ क्षेत्रफळ घेऊन त्यातील बिंदूची संख्या मोजा. एकूण झाडांची संख्या, ही संख्या आणि क्षेत्रफळ (cm^2 मध्ये) यांचा गुणाकार इतकी होईल.
6. हप्ता योजने मधील व्याजाचा दर 17.74%, हा 18% पेक्षा कमी आहे.

स्वाध्याय A2.3

1. विद्यार्थ्यांनी स्वतः आपले उत्तर काढावे.

***

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Sexual Abuse of Children and Punishments under the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012

**As per Section 2(d) of the POCSO Act, 2012,
A "Child" means any person below the age of 18 years.**

Sexual Offence	Punishment
Penetrative Assault – Any person who commits penetrative sexual assault on a child. (Section 3)	Rigorous imprisonment not less than 10 years, which may extent to life imprisonment, and fine. (Section 4)
Aggravated Penetrative Sexual Assault – Penetrative sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 5)	Rigorous imprisonment not less than 20 years, which may extend to life imprisonment or death, and fine. (Section 6)
Sexual Assault – Touching the private parts of a child or making the child touch any person for sexual intent. (Section 7)	Imprisonment not less than 3 years, which many extents to 5 years, and fine. (Section 8)
Aggravated Sexual Assault – Sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 9)	Imprisonment not less than 5 years, which may extend to 7 years, and fine. (Section 10)
Sexual Harassment of a Child (Section 11)	Imprisonment which may extend to 3 years, and fine. (Section 12)
Use of a Child for Pornographic Purposes (Section 13)	Imprisonment up to 5 years and fine; higher punishment for subsequent offences. (Section 14)
Storage or Possession of Pornographic Material Involving a Child (Section 15)	Imprisonment and fine as prescribed, which may extend to 3 years.
Abetment of an Offence under POCSO (Section 16)	Punishment prescribed for the offence abetted. (Section 17)

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Necessary Steps to Be Taken in Case of Sexual Abuse of a Child

- Any person having knowledge of a sexual offence must report the matter immediately to the Special Juvenile Police Unit (SJPU) or the Local Police Station. (Section 19)
- The Child shall be produced before the Child Welfare Committee (CWC) or the Special Court within 24 hours for care and protection.
- The child shall be provided medical examination and treatment immediately, free of cost., at the nearest hospital.
- In case of a girl child, medical examination shall be conducted by a female doctor, as far as possible, in the presence of parents or a trusted person. (Section 27)
- The identity of the child shall not be disclosed through any media, including name, address, photograph, or any identifying details. (Section 23)
- As per Rule 7 of the Protection of Children from Sexual Offences Rules, 2020, where an interim compensation to meet the immediate needs of the child.
- As per Section 44 of the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012, the Karnataka State commission for Protection of Child Rights (KSCPCR) shall monitor the effective implementation of the provisions of the Act.

**Our Commitment
Towards a Violence-Free and Child-Sate Society**