Government of Karnataka

गणित प्रकाश

कक्षा 6 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

HINDI TEXT BOOK

6

भाग 2



0675

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bangalore 560 003

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 2 25/09/2024 16:44:03

CONSTITUTION OF INDIA

Part III (Articles 12 – 35)
(Subject to certain conditions, some exceptions
and reasonable restrictions)

guarantees these

Fundamental Rights

Right to Equality

- before law and equal protection of laws;
- irrespective of religion, race, caste, sex or place of birth;
- of opportunity in public employment;
- by abolition of untouchability and titles.

Right to Freedom

- of expression, assembly, association, movement, residence and profession;
- of certain protections in respect of conviction for offences;
- of protection of life and personal liberty;
- of free and compulsory education for children between the age of six and fourteen years;
- of protection against arrest and detention in certain cases.

Right against Exploitation

- for prohibition of traffic in human beings and forced labour;
- for prohibition of employment of children in hazardous jobs.

Right to Freedom of Religion

- freedom of conscience and free profession, practice and propagation of religion;
- freedom to manage religious affairs;
- freedom as to payment of taxes for promotion of any particular religion;
- freedom as to attendance at religious instruction or religious worship in educational institutions wholly maintained by the State.

Cultural and Educational Rights

- for protection of interests of minorities to conserve their language, script and culture;
- for minorities to establish and administer educational institutions of their choice.

Right to Constitutional Remedies

- by issuance of directions or orders or writs by the Supreme Court and High Courts for enforcement of these Fundamental Rights.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

0 Prelims.indd 3 01/10/2024 17:13:14

विषय-सूची

अध्याय 6
परिमाप और क्षेत्रफल 01

अध्याय 7
भिन्न 23

अध्याय 8
रचनाओं के साथ खेलना 59

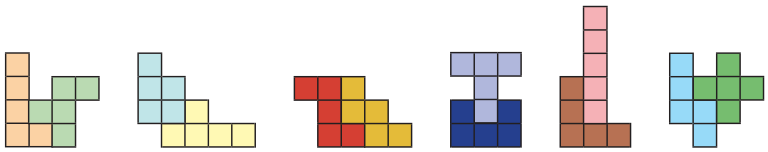
अध्याय 9
सममिति 89

अध्याय 10
शून्य के दूसरी ओर 114

अधिगम सामग्री पत्रक (शीट) 144

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 4 03/10/2024 15:27:53



6 परिमाप और क्षेत्रफल

0675CH06

6.1 परिमाप

क्या आपको याद है कि एक संवृत्त (बंद) समतल आकृति का परिमाप क्या होता है? आइए, हम अपनी समझ को ताज़ा करें।

किसी भी बंद समतल आकृति का परिमाप उसकी सीमा के साथ-साथ तय की गई वह दूरी है जब आप उसके चारों ओर एक चक्कर लगाते हैं। एक **बहुभुज** अर्थात् रेखाखंडों से बनी एक बंद समतल आकृति के लिए परिमाप इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है, जैसे— इसकी बाहरी सीमा के साथ-साथ कुल दूरी।

बहुभुज का परिमाप = उसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों का योगफल।

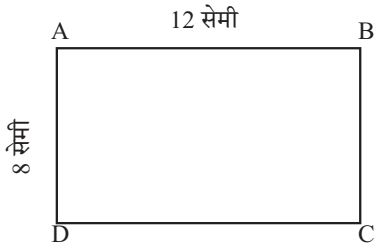
आइए, अब हम आयत, वर्ग और त्रिभुज के परिमाप के सूत्रों को दोहराते हैं।

आयत का परिमाप

एक आयत ABCD पर विचार कीजिए, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 12 सेमी और 8 सेमी है। इसका परिमाप क्या होगा?

आयत का परिमाप = आयत की चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

= AB + BC + CD + DA



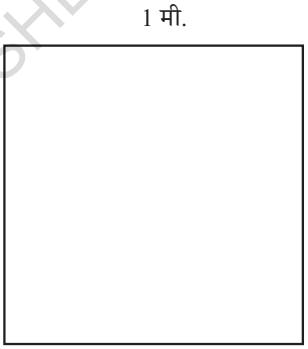
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

$= AB + BC + AB + BC$
$= 2 \times AB + 2 \times BC$
$= 2 \times (AB + BC)$
$= 2 \times (12 \text{ सेमी} + 8 \text{ सेमी})$
$= 2 \times (20 \text{ सेमी})$
$= 40 \text{ सेमी}$

आयत की आमने-सामने की भुजाएँ हमेशा एकसमान होती हैं। अत:
AB = CD और
AD = BC

इस उदाहरण से हम देखते हैं कि—
आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई
आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)
आयत का परिमाप उसकी लंबाई और चौड़ाई के योग का दोगुना होता है।

वर्ग का परिमाप



देबोजीत 1 मी. भुजा वाले वर्गाकार फोटो फ्रेम के चारों ओर एक रंगीन टेप लगाना चाहता है, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। उसे कितनी लंबी रंगीन टेप की आवश्यकता होगी? चूँकि देबोजीत वर्गाकार फोटो फ्रेम के चारों ओर रंगीन टेप लगाना चाहता है, इसलिए उसे वर्गाकार फोटो फ्रेम के परिमाप को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

इसलिए, आवश्यक टेप की लंबाई = वर्ग का परिमाप
= वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल
= 1 मी. + 1 मी. + 1 मी. + 1 मी. = 4 मी.

हम जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है। इसलिए प्रत्येक भुजा की लंबाई को जोड़ने के स्थान पर, हम वर्ग की एक भुजा की लंबाई को 4 से गुणा कर सकते हैं।

अतः आवश्यक टेप की लंबाई = 4 × 1 मी. = 4 मी.

इस उदाहरण से हम देखते हैं कि—

वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई।

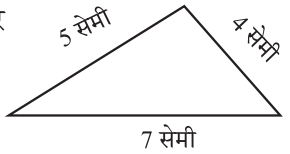
वर्ग का परिमाप उसकी एक भुजा की लंबाई का चौगुना (Quadruple) है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 130 20/09/2024 15:50:35

त्रिभुज का परिमाप

एक त्रिभुज पर विचार कीजिए जिसकी तीन भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 7 सेमी हैं। इस त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।



त्रिभुज का परिमाप = 4 सेमी + 5 सेमी + 7 सेमी

= 16 सेमी

त्रिभुज का परिमाप = उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल



उदाहरण— अक्षी 3 मी. लंबाई और 2 मी. चौड़ाई के एक आयताकार मेजपोश (टेबल कवर) के चारों और एक फीता (लेस) लगाना चाहती है। अक्षी को कितने लंबे फीते की आवश्यकता है?

हल

आयताकार मेजपोश की लंबाई = 3 मी.

आयताकार मेजपोश की चौड़ाई = 2 मी.

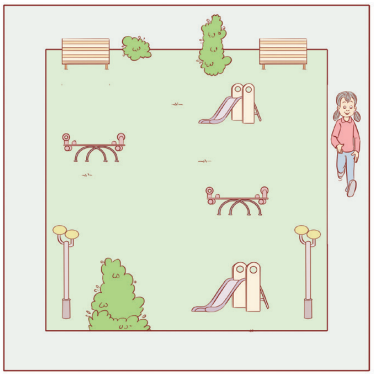
अक्षी मेजपोश के चारों ओर फीता लगाना चाहती है। इसलिए, आवश्यक फीते की लंबाई आयताकार मेजपोश के परिमाप के बराबर होगी।

अब, आयताकार मेजपोश का परिमाप = 2×(लंबाई + चौड़ाई)

= 2 (3 मी. + 2 मी.) = 2 × 5 मी. = 10 मी.

अतः आवश्यक फीते की लंबाई 10 मी. है।

उदाहरण— ऊषा 75 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क के चारों ओर तीन चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल

वर्गाकार पार्क का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई

= 4 × 75 मी. = 300 मी.

ऊषा द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = 300 मी.

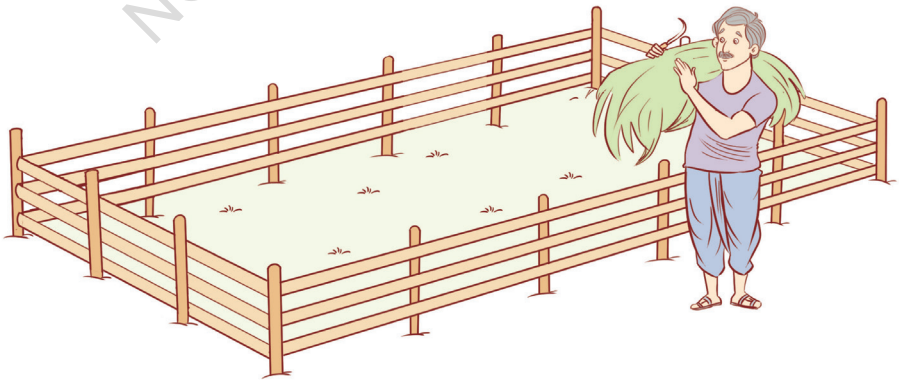
इसलिए, ऊषा द्वारा तीन चक्करों में तय की गई कुल दूरी = 3 × 300 मी. = 900 मी.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 131 20/09/2024 15:50:36

आइए, पता लगाएँ

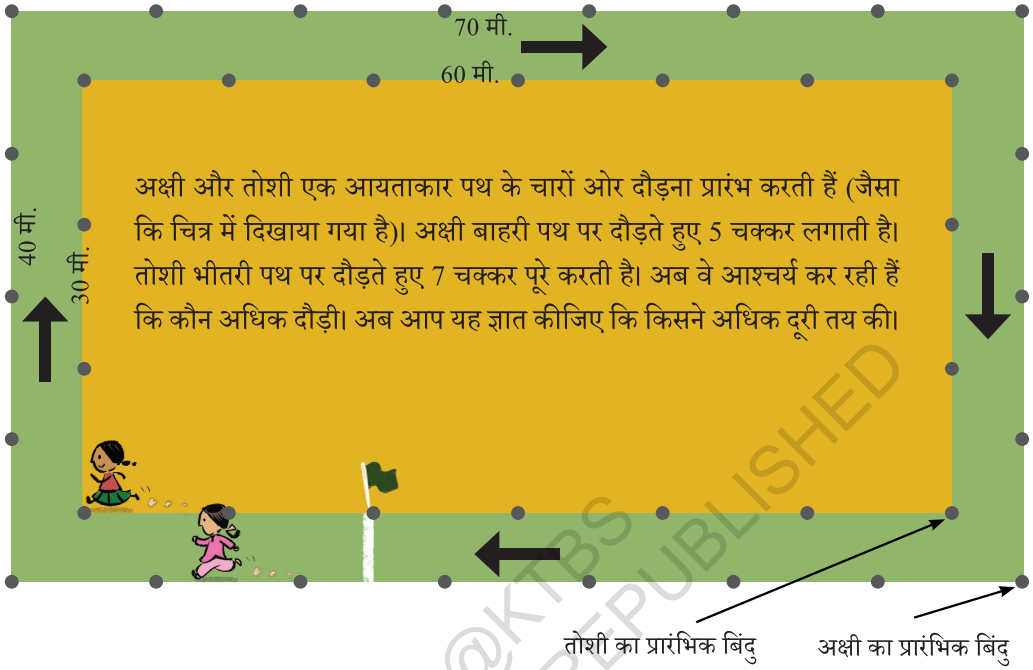
1. लुप्त पदों को ज्ञात कीजिए—
   a. आयत का परिमाप = 14 सेमी; चौड़ाई = 2 सेमी; लंबाई = _____?
   b. वर्ग का परिमाप = एक भुजा की लंबाई 20 सेमी = _____?
   c. आयत का परिमाप = लंबाई 12 मी. = चौड़ाई 3 मी. = _____?.
2. तार के टुकड़े का प्रयोग करके एक आयत बनाया गया है जिसकी भुजाओं की लंबाई 5 सेमी और 3 सेमी है। यदि तार को सीधा करके एक वर्ग बनाया जाए, तब वर्ग की एक भुजा की लंबाई क्या होगी?
3. यदि एक त्रिभुज का परिमाप 55 सेमी है और दो भुजाओं की लंबाई क्रमश: 20 सेमी और 14 सेमी है, तो तीसरी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. एक आयताकार पार्क जिसकी लंबाई 150 मी. और चौड़ाई 120 मी. है, पार्क के चारों ओर ₹40 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
5. एक धागे के टुकड़े की लंबाई 36 सेमी है। प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी, यदि इस धागे से बनाया जाता है—
   a. एक वर्ग
   b. एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हों, और
   c. एक सम षट्भुज (छ: भुजाओं वाली बंद आकृति जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हों)?
6. एक किसान के आयताकार भूखंड की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 230 मी. तथा 160 मी. है। वह भूखंड के चारों ओर रस्सी द्वारा तीन पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। किसान के द्वारा प्रयोग की गई रस्सी की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 132 20/09/2024 15:50:36

माथा-पच्ची!



प्रत्येक पथ एक आयत है। अक्षी के पथ की लंबाई 70 मी. और चौड़ाई 40 मी. है। इस पथ पर एक पूरा चक्कर लगाने पर 220 मी. की दूरी तय होगी, अर्थात् $2 \times (70+40)$ मी. $= 220$ मी.। यह अक्षी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी है।

आइए, पता लगाएँ

1. अक्षी द्वारा 5 चक्करों में तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।
2. तोशी द्वारा 7 चक्करों में तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए। अक्षी और तोशी में से किसने अधिक दूरी तय की?
3. सोचिए और निर्देशानुसार स्थितियों को चिह्नित कीजिए—
   a. अक्षी 250 मी. दौड़ने के पश्चात् जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'A' चिह्नित कीजिए।
   b. 500 मी. दौड़ने के पश्चात् अक्षी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'B' चिह्नित कीजिए।
   c. अब, अक्षी 1000 मी. दौड़ चुकी है। अब बताइए, उसने अपने पथ पर कितने चक्कर पूरे लगाए? उसकी इस स्थिति के बिंदु पर 'C' चिह्नित कीजिए।
   d. 250 मी. दौड़ने के पश्चात् तोशी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'X' चिह्नित कीजिए।

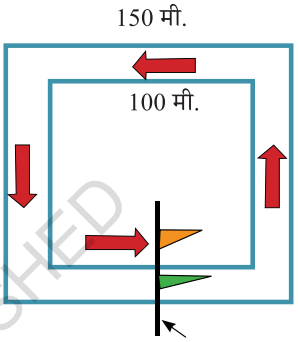
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 133 20/09/2024 15:50:37

e. 500 मी. दौड़ने के पश्चात् तोशी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'Y' चिह्नित कीजिए।

f. अब, तोशी 1000 मी. दौड़ चुकी है। उसने अपने पथ पर कितने चक्कर पूरे किए? उसकी स्थिति के बिंदु पर 'Z' चिह्नित कीजिए।

गहन सोच— सामान्यत: दौड़ में सभी धावकों के लिए एक समान अंतिम रेखा होती है। यहाँ दो वर्गाकार दौड़-पथ है, जिसमें भीतरी पथ की प्रत्येक भुजा 100 मी. है तथा बाहरी पथ की प्रत्येक भुजा 150 मी. है। दोनों धावकों के लिए समापन रेखा को चित्र में झंडों द्वारा दर्शाया गया है, जो पथों की भुजाओं में से एक भुजा के मध्य में हैं।



उभयनिष्ठ समापन रेखा

यदि कुल दौड़ 350 मी. की है, तो हमें यह पता लगाना होगा कि इन दो पथों पर दोनों धावकों की प्रारंभिक स्थिति कहाँ होनी चाहिए ताकि 350 मी. दौड़ने के पश्चात् दोनों की समापन रेखा एक समान हो। भीतरी पथ पर धावक के प्रारंभिक या शुरुआती बिंदु को A के रूप में और बाहरी पथ पर धावक के शुरुआती या प्रारंभिक बिंदु को B के रूप में चिह्नित कीजिए।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

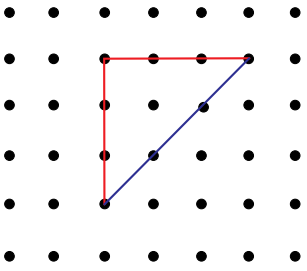
आकलन और सत्यापन करना



एक कागज या अखबार का टुकड़ा लीजिए। इस टुकड़े को अलग-अलग तरीकों से काटकर कुछ यादृच्छिक आकार बनाइए। प्रत्येक आकृति की सीमाओं की कुल लंबाई का अनुमान लगाइए। अब पैमाना (scale) अथवा मापन फीता (measuring tape) से प्रत्येक आकृति के परिमाप को मापिए और सत्यापन कीजिए।

अक्षी का कहना है कि इस त्रिभुज का परिमाप 9 इकाई है। तोशी का मानना है कि यह 9 इकाई नहीं हो सकती और परिमाप 9 इकाई से अधिक होगा। आप क्या सोचते हैं?



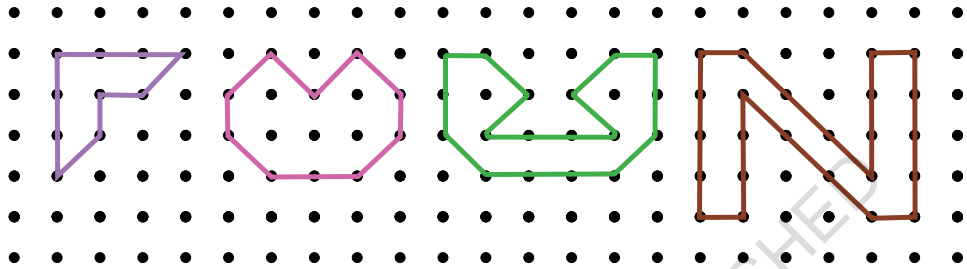




Chapter 6.indd 134 20/09/2024 15:50:38

इस आकृति में दो अलग-अलग इकाई की रेखाएँ हैं। लाल रेखा और नीली रेखा की लंबाई मापिए— क्या वे समान हैं? हम लाल रेखाओं को सीधी रेखाएँ और नीली रेखाओं को विकर्ण रेखाएँ कहेंगे। अतः इस त्रिभुज का परिमाप 6 सीधी इकाई + 3 विकर्ण इकाई है। इसे हम संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं— 6s + 3d इकाइयाँ।

नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप सीधी और विकर्ण रेखा इकाइयों का उपयोग करके निकालें।

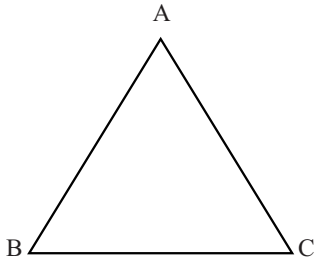


सम बहुभुज का परिमाप

वर्ग की तरह, बंद आकृतियाँ जिनकी सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर हों, **सम बहुभुज** कहलाते हैं। हमने अध्याय 1 में, 'आकृति अनुक्रम 1' सम बहुभुज का अध्ययन किया था। सम बहुभुजों के उदाहरण हैं— समबाहु त्रिभुज (जिसकी तीनों भुजाएँ और तीनों कोण बराबर होते हैं) और सम पंचभुज (जिसके पाँचों भुजाएँ और पाँचों कोण बराबर होते हैं)।

समबाहु त्रिभुज का परिमाप

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज का परिमाप उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग होता है।



इस अवधारणा का उपयोग करके, हम एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कर सकते हैं।

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = AB+BC+CA

= AB + BC + AC = AB + AB + AB

= एक भुजा की लंबाई का 3 गुना

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × एक भुजा की लंबाई

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 135 20/09/2024 15:50:38

एक वर्ग और एक समबाहु त्रिभुज के बीच क्या समानता है?

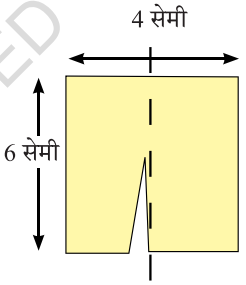
अपने आस-पास विभिन्न वस्तुएँ खोजिए जो कि सम आकृतियाँ हों और उनका परिमाप ज्ञात कीजिए। साथ ही अन्य सम बहुभुजों के परिमाप के लिए अपनी समझ को व्यापक (generalised) रूप दीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

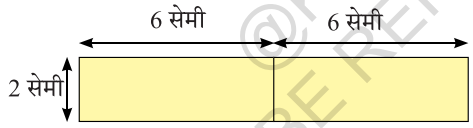
सम बहुभुजों के विषय में अधिक बातचीत कीजिए तथा विद्यार्थियों को सम बहुभुज के परिमाप के लिए एक सामान्य सूत्र (general formula) बनाने हेतु प्रोत्साहित कीजिए।

विभाजित कीजिए और फिर से जोड़िए

एक आयताकार कागज की पर्ची, जिसकी विमाएँ (भुजाएँ) 6 सेमी × 4 सेमी है, को दो बराबर टुकड़ों में काटा गया है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। इन दोनों टुकड़ों को विभिन्न तरीकों से जोड़ा जाता है।



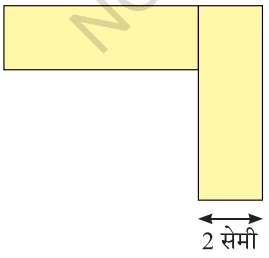
a.



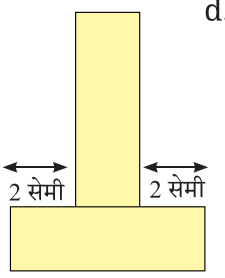
उदाहरण के लिए, व्यवस्था a. का परिमाप 28 सेमी हैं।

नीचे दी गई अन्य सभी व्यवस्थाओं की सीमा की लंबाई (अर्थात् परिमाप) ज्ञात कीजिए।

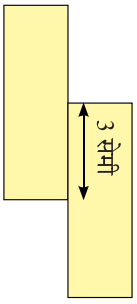
b.



c.



d.



उपर्युक्त चित्रित दोनों टुकड़ों को व्यवस्थित करके एक आकृति बनाइए जिसका परिमाप 22 सेमी हो।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 136 20/09/2024 15:50:38

6.2 क्षेत्रफल

पिछली कक्षाओं में हमने बंद (नियमित एवं अनियमित) आकृतियों के क्षेत्रफलों का अध्ययन किया है। आइए, इनके बारे में कुछ मुख्य बातें दोहराएँ।

किसी बंद आकृति से घिरे क्षेत्र का माप (की मात्रा) उस आकृति का **क्षेत्रफल** कहलाता है।

क्या आपको याद है कि पिछली कक्षाओं में हमने आयत और वर्ग के क्षेत्रफलों के सूत्र वर्गाकार खानों वाले कागज (ग्रिड पेपर) की सहायता से ज्ञात किए थे।

वर्ग का क्षेत्रफल = _____

आयत का क्षेत्रफल = _____

अध्यापक टिप्पणी

वर्गाकार खानों वाले कागज (ग्रिड पेपर) की सहायता से एक आयत और एक वर्ग के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में विद्यार्थियों की सहायता कीजिए। विद्यार्थियों को वर्गाकार ग्रिड पेपर दीजिए और उन्हें सूत्र तक पहुँचने दीजिए।

आइए, इन अवधारणाओं से जुड़ी वास्तविक जीवन की कुछ समस्याओं को देखते हैं—

उदाहरण— एक फर्श 5 मी. लंबा और 4 मी. चौड़ा है। 3 मी. भुजा की वर्गाकार कालीन फर्श पर बिछा दी जाती है। कालीन रहित फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल

फर्श की लंबाई = 5 मी.

फर्श की चौड़ाई = 4 मी.

फर्श का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 5 मी. × 4 मी. = 20 वर्ग मी.

वर्गाकार कालीन की लंबाई = 3 मी.

कालीन का क्षेत्रफल = लंबाई × लंबाई = 3 मी. × 3 मी. = 9 वर्ग मी.

अत: कालीन बिछे हुए फर्श का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी. है।

इसलिए, फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल जिस पर कालीन नहीं बिछा है, वह है— फर्श का क्षेत्रफल–कालीन बिछे फर्श का क्षेत्रफल = 20 वर्ग मी. – 9 वर्ग मी. = 11 वर्ग मी.

उदाहरण— 12 मी. लंबे और 10 मी. चौड़े भूखंड के चारों कोनों पर 4 मी. भुजा की चार फूलों की वर्गाकार क्यारियाँ बनी हैं। क्यारियों को छोड़कर शेष भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 137 20/09/2024 15:50:38

हल

भूखंड की लंबाई (l) = 12 मी.

भूखंड की चौड़ाई (w) = 10 मी.

संपूर्ण भूखंड का क्षेत्रफल = लंबाई (l) × चौड़ाई (w) = 12 मी. × 10 मी. = 120 वर्ग मी.

चारों फूलों की क्यारियों में प्रत्येक क्यारी की भुजा की लंबाई (s) = 4 मी.

फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल = भुजा (s) × भुजा (s) = 4 मी. × 4 मी. = 16 वर्ग मी.

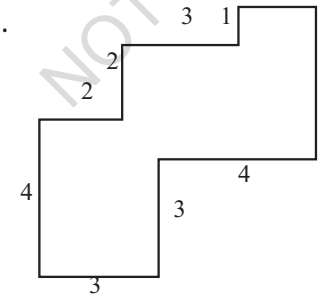
अतः 4 फूलों की क्यारियों का क्षेत्रफल = 4 × 16 वर्ग मी. = 64 वर्ग मी.

अतः शेष भूखंड का क्षेत्रफल है— संपूर्ण भूखंड का क्षेत्रफल – 4 फूलों की क्यारियों का क्षेत्रफल = 120 वर्ग मी. – 64 वर्ग मी. = 56 वर्ग मी.

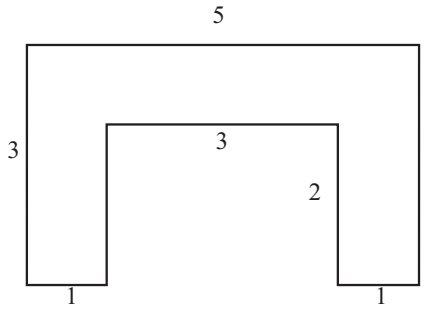
आइए, पता लगाएँ

1. 25 मी. लंबे आयताकार बाग का क्षेत्रफल 300 वर्ग मी. है। इस बाग की चौड़ाई क्या है?
2. 8 रुपये प्रति 100 वर्ग मी. की दर से 500 मी. लंबे और 200 मी. चौड़े आयताकार भूखंड पर टाइल लगाने की लागत क्या होगी?
3. एक आयताकार नारियल वाटिका 100 मी. लंबी और 50 मी. चौड़ी है। यदि प्रत्येक नारियल के पेड़ के लिए 25 वर्ग मी. जगह चाहिए, तो इस वाटिका में अधिकतम कितने पेड़ लगाए जा सकते हैं?
4. नीचे दी गई आकृतियों को आयताकार भागों में बाँटकर, उनके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (सभी माप मीटर में दिए गए हैं)।

a.



b.

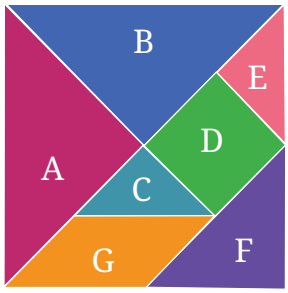


© RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 138 20/09/2024 15:50:38

आइए, पता लगाएँ

आपकी पाठ्यपुस्तक के अंत में दिए गए टैनग्राम के टुकड़े काटिए।



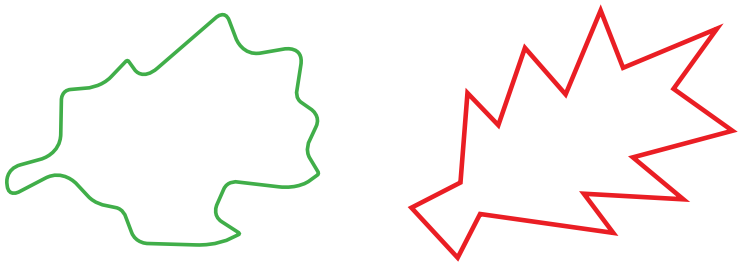
1. खोजिए और पता लगाइए कि कितने टुकड़ों का क्षेत्रफल एक समान है।
2. आकार D, आकार C की तुलना में कितने गुना बड़ा है? C, D और E में क्या संबंध है।
3. किस आकार का क्षेत्रफल अधिक है— आकार D या आकार F? अपने उत्तर का कारण बताइए।
4. किस आकार का क्षेत्रफल अधिक है— आकार F या G का? अपने उत्तर का कारण बताइए।
5. आकार G की तुलना में आकार A का क्षेत्रफल कितना है? क्या यह दोगुना बड़ा है? क्या यह चार गुना बड़ा है?

   संकेत— टैनग्राम के टुकड़ों को काटने के पश्चात् एक टुकड़े को दूसरे के ऊपर रखकर हमें ज्ञात होता हैं कि टुकड़े A और B का क्षेत्रफल एक समान है, टुकड़े C और E का क्षेत्रफल एक समान है। आप इन टुकड़ों से देख सकते हैं कि C और E टुकड़े, D को पूरा ढक लेते हैं। इसका अर्थ है कि, D का क्षेत्रफल C या E से दोगुना है।
6. क्या अब आप सातों टुकड़ों से बने बड़े वर्ग के क्षेत्रफल को C आकार के क्षेत्रफल के रूप में लिख सकते हैं?
7. इन सातों टुकड़ों को व्यवस्थित करके एक आयत बनाइए। अब इस आयत का क्षेत्रफल, आकार 'C' के क्षेत्रफल के रूप में लिखने पर क्या प्राप्त होता है? अपने उत्तर का कारण बताइए।
8. क्या इन सातों टुकड़ों से बने वर्ग और आयत के परिमाप भिन्न हैं या समान हैं? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

© RTES NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 139 20/09/2024 15:50:38

नीचे दी गई आकृतियों को देखिए और अनुमान लगाइए कि इनमें से किसका क्षेत्रफल बड़ा है?



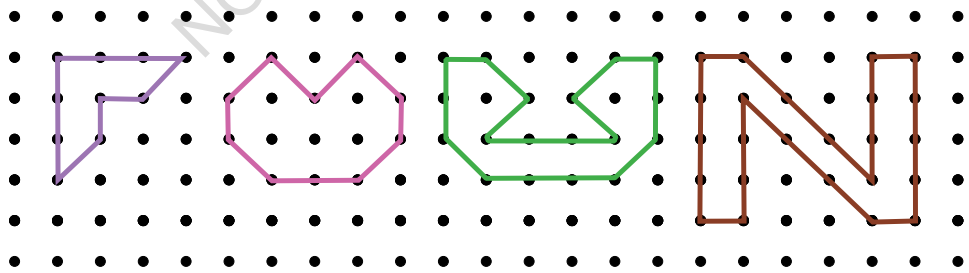
a. b.

हम वर्गांकित कागज (squared paper) या ग्राफ पेपर, जिसके प्रत्येक वर्ग का माप 1 इकाई × 1 इकाई या 1 वर्ग इकाई है, का प्रयोग करके किसी भी सरल बंद आकृति के क्षेत्रफल का आकलन कर सकते हैं।

क्षेत्रफल का आकलन करने के लिए हम आकार को एक पारदर्शी कागज पर ट्रेस (trace) करेंगे और इस कागज को वर्गांकित कागज या ग्राफ पेपर पर रखेंगे। इसके पश्चात् निम्न नियमों का पालन कीजिए—

1. एक वर्गांकित कागज या ग्राफ पेपर के एक पूरे छोटे वर्ग का क्षेत्रफल, एक वर्ग इकाई लिया जाता है।
2. आधे वर्ग से कम क्षेत्रफल को अनदेखा कीजिए।
3. यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग किसी क्षेत्र में है, तो उसे 1 वर्ग इकाई गिनिए।
4. यदि वर्ग का ठीक आधा भाग गिना जाए तो उसका क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लीजिए।

निम्न आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—



@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 140 20/09/2024 15:50:38

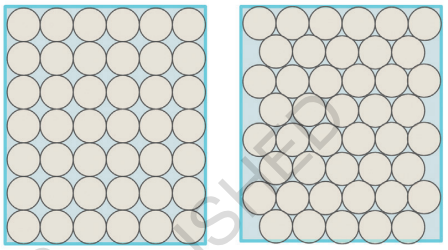
आइए खोजें!

सामान्यत: हम क्षेत्रफल को वर्गों से क्यों मापते हैं?



एक ग्राफ शीट पर 3 लंबाई के व्यास (चौड़ाई) वाला एक वृत्त बनाइए। वर्गों को गिनकर उनका प्रयोग वृत्तीय क्षेत्र (Circular region) के क्षेत्रफल के आकलन में कीजिए।

दर्शाई गई आकृति में हम देख सकते हैं कि वृत्तों को हम उनके बीच बिना जगह छोड़े पैक नहीं कर सकते हैं। अतः इकाई के रूप में वृत्तों का प्रयोग करके किसी क्षेत्रफल को बिल्कुल सही मापना, कठिन होगा। यहाँ आकृति में, दो समान आयतों को दो अलग-अलग तरीकों से वृत्तों द्वारा बंद किया गया है— पहले आयत में 42 वृत्त हैं और दूसरे में 44 वृत्त हैं।



© IITBS NOT TO BE REPUBLISHED

विभिन आकारों (त्रिभुज एवं आयत) का प्रयोग करके किसी दिए गए स्थान को (बिना आच्छादन या जगह छोड़े) भरने का प्रयास कीजिए और यह पता लगाइए कि क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किसी और आकृति की अपेक्षा एक वर्गाकार आकृति का प्रयोग करने पर क्या लाभ होते हैं। उन बिंदुओं को लिखिए जो यह दर्शाते हैं कि क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग ही सबसे सही आकार है।

1. गलियारे के बाहरी फर्श का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात कीजिए।
2. आपके विद्यालय के खेल के मैदान का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात कीजिए।

आइए खोजें!

गणित चर्चा

एक वर्गाकार ग्रिड पेपर (1 वर्ग = 1 वर्ग इकाई) पर, जितने संभव हों उतने आयत बनाइए जिनकी भुजाएँ पूर्ण संख्याएँ हों तथा जिनका क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई हो।

a. किस आयत का परिमाप सबसे अधिक है?
b. किस आयत का परिमाप सबसे कम है?

Chapter 6.indd 141 20/09/2024 15:50:39

c. यदि आप 32 वर्ग सेमी क्षेत्रफल का आयत लेते, तो आपका उत्तर क्या होता? किसी भी क्षेत्रफल को देखते हुए, अधिकतम और न्यूनतम परिमाप वाले आयत के आकार की पहचान बताना संभव है? अपने उत्तर के लिए उदाहरण और कारण दीजिए।

6.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

कागज के एक टुकड़े पर आयत खींचिए और इसका एक विकर्ण बनाइए। उस आयत को विकर्ण से काटते हुए दो त्रिभुज प्राप्त कीजिए।

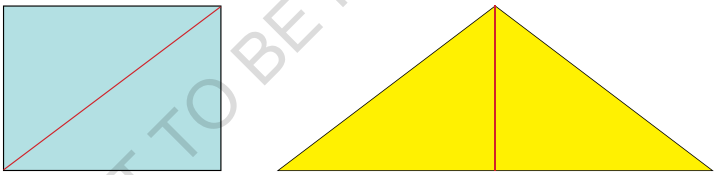
जाँच कीजिए क्या दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरी तरह आच्छादित (overlap) करते हैं। क्या उनका क्षेत्रफल एक समान है?

इसके साथ ही इस प्रक्रिया का प्रयोग करके आप एक वर्ग की भी जाँच सकते हैं।

क्या आप इस प्रक्रिया से कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? यहाँ लिखिए—

© CTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अब नीचे दी गई आकृतियों को देखिए। क्या नीले आयत का क्षेत्रफल, पीले त्रिभुज के क्षेत्रफल से बड़ा है या छोटा है या बराबर है? क्यों?



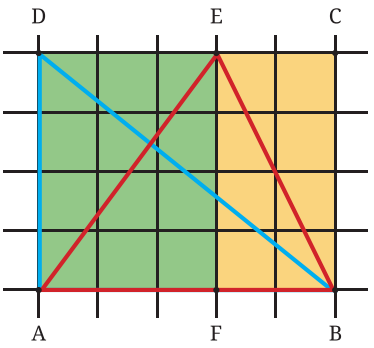
क्या तुम नीले आयत एवं पीले त्रिभुज के मध्य और इनके क्षेत्रफल में कुछ संबंध देख सकते हो? यहाँ संबंध लिखिए।

अध्यापक टिप्पणी

विद्यार्थियों को उनके निष्कर्षों को जोड़ने और जिन संबंधों का अवलोकन उन्होंने किया है उन्हें अपने शब्दों में लिखने में सहायता कीजिए। इससे वे एक साधारण कथन तक पहुँच जाएँगे। एक विकर्ण की परिभाषा को कक्षा में स्मरण करवाइए।

Chapter 6.indd 142 20/09/2024 15:50:39

दिए गए अभ्यासों का अवलोकन करने पर प्राप्त निष्कर्षों एवं संबंधों की जाँच के लिए ग्रिड पेपर पर कुछ उपयुक्त त्रिभुज बनाइए।



पिछली कक्षाओं की अपनी समझ का प्रयोग कर ग्रिड पेपर द्वारा किसी भी बंद आकृति के क्षेत्रफल की गणना कीजिए और—

1. नीले त्रिभुज BAD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   _____

2. लाल त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।.

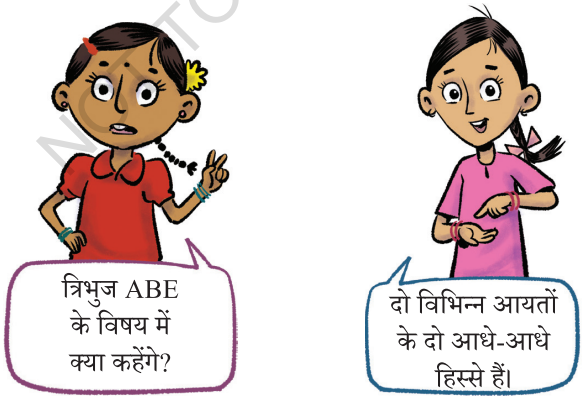
   _____



@KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

आयत ABCD का क्षेत्रफल = _____

अतः त्रिभुज BAD का क्षेत्रफल, आयत ABCD के क्षेत्रफल का आधा है।



त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = त्रिभुज AEF का क्षेत्रफल + त्रिभुज BEF का क्षेत्रफल।

यहाँ, त्रिभुज AEF का क्षेत्रफल = आयत AFED के क्षेत्रफल का आधा।

Chapter 6.indd 143 20/09/2024 15:50:40

इसी प्रकार, त्रिभुज BEF का क्षेत्रफल = आयत BFEC के क्षेत्रफल का आधा।

अतः, त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = आयत AFED के क्षेत्रफल का आधा + आयत BFEC के क्षेत्रफल का आधा

= आयत AFED और आयत BFEC के क्षेत्रफलों के योग का आधा

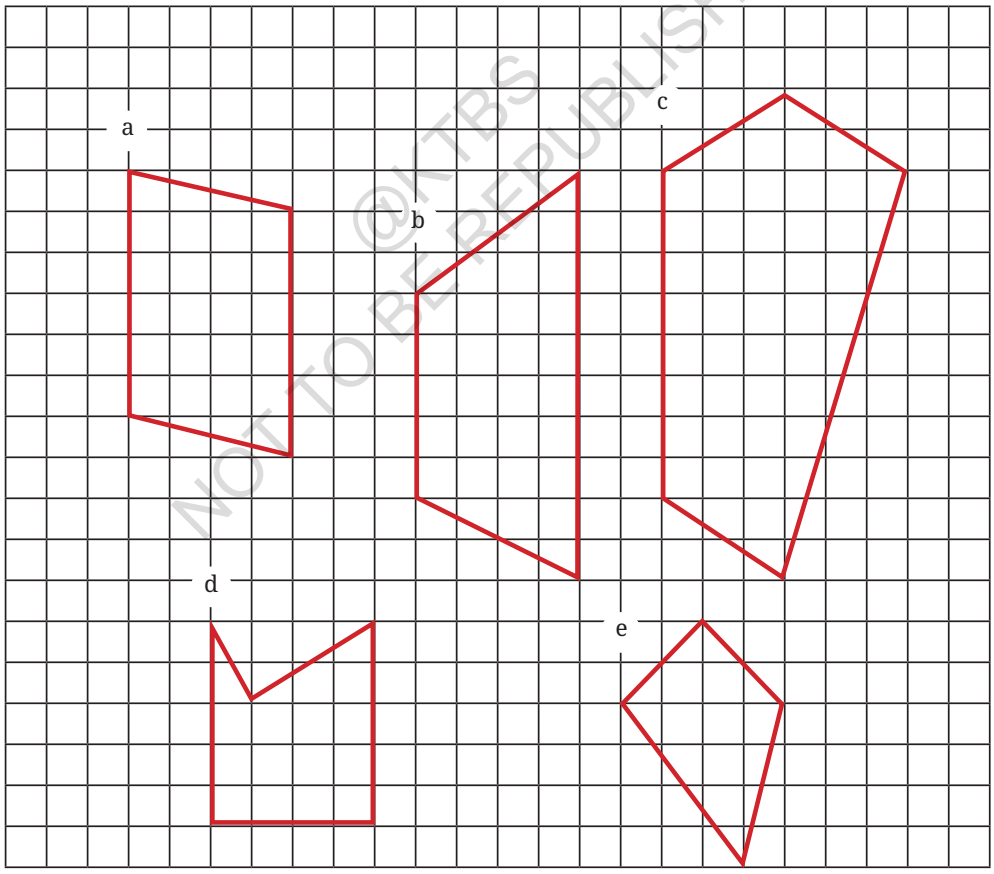
= आयत ABCD के क्षेत्रफल का आधा

निष्कर्ष _____

_____

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई आकृतियों को आयत और त्रिभुजों में विभाजित करके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

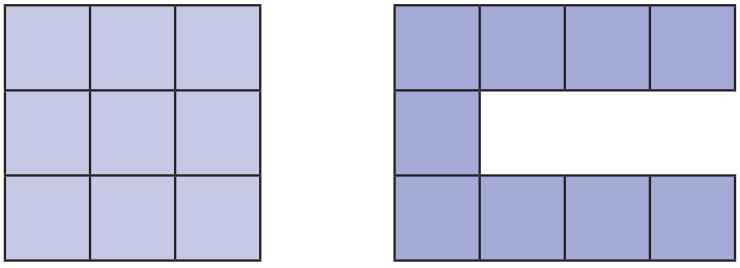


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 144 20/09/2024 15:50:40

'अधिक' या 'कम' बनाना

इन दो आकृतियों का अवलोकन कीजिए। क्या इनमें कोई समानता या भिन्नता है?



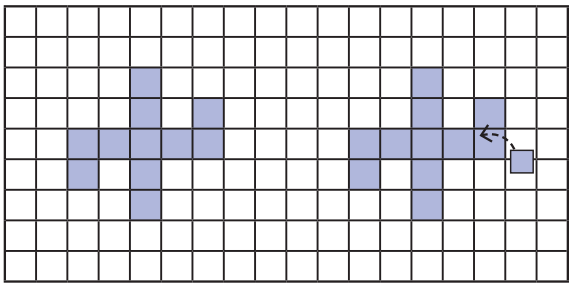
9 इकाई वर्गों (9 वर्ग इकाई के क्षेत्रफल) का प्रयोग करके हमने दो भिन्न परिमापों की आकृतियाँ बनाई हैं यहाँ पहली आकृति का परिमाप 12 इकाई है और दूसरी का परिमाप 20 इकाई है।

अन्य परिमाप प्राप्त करने के लिए 9 वर्ग इकाइयों वाली आकृतियाँ व्यवस्थित करें या बनाएँ। यह ध्यान रखिए कि वर्गों की भुजाएँ एक-दूसरे के साथ कम से कम एक दिशा पर पूरी तरह से संरेखित हों और सभी वर्गों को मिलाकर एक जुड़ी हुई आकृति बने।

- 9 इकाई वर्ग का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित को हल कीजिए—
  1. सबसे छोटा संभव परिमाप क्या होगा?
  2. सबसे बड़ा संभव परिमाप क्या होगा?
  3. 18 इकाई परिमाप वाली एक आकृति बनाइए।
  4. क्या आप उपरोक्त तीन परिमापों में से प्रत्येक के लिए अन्य आकार की आकृति बना सकते हैं या क्या उस परिमाप से केवल एक ही आकृति बन सकती है? आपका तर्क क्या होगा?

- आइए, कुछ पेचीदा करते हैं, नीचे एक आकृति दी गई है, जिसका परिमाप 24 इकाई है।

आकृति के पूरे परिमाप की पुनः गणना किए बिना अवलोकन कीजिए, विचार कीजिए और ज्ञात कीजिए कि यदि एक नया वर्ग आकृति में चित्रानुसार जोड़ दिया जाए, तो परिमाप में क्या परिवर्तन होगा?



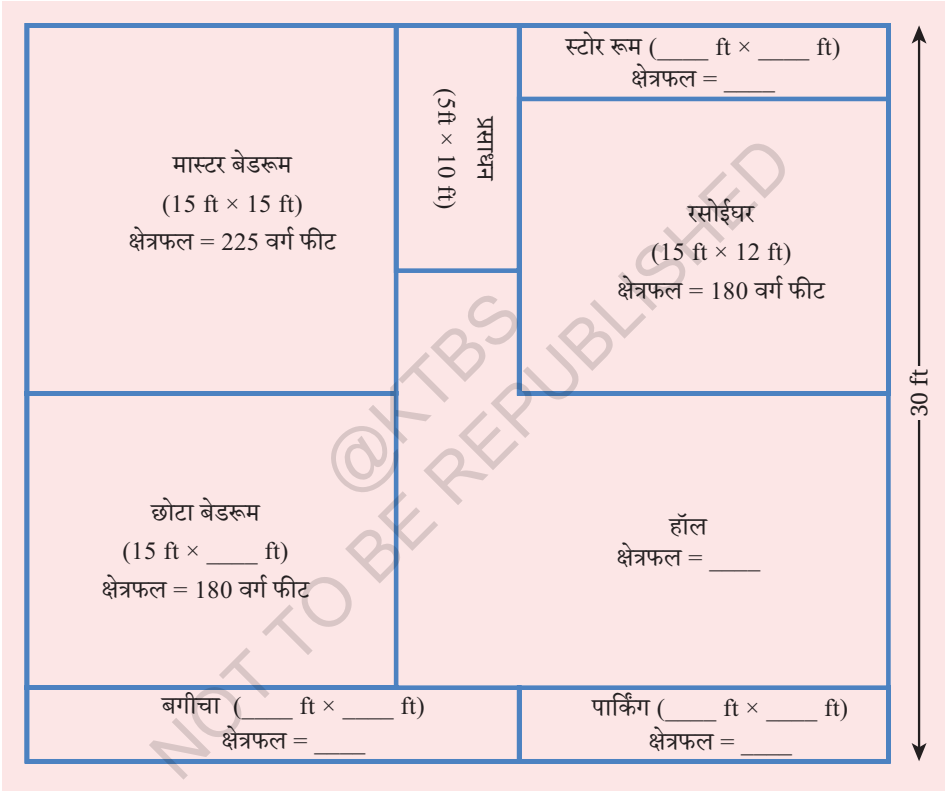
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 145 20/09/2024 15:50:40

नए वर्ग को भिन्न-भिन्न स्थानों पर रखिए और सोचिए कि परिमाप में क्या परिवर्तन हो रहे हैं।

क्या आप इस वर्ग को इस प्रकार रख सकते हैं कि परिमाप में— a) वृद्धि हो ; b) कमी हो; c) समान रहे?

❁ नीचे दी गई आकृति में चरण के घर का नक्शा दर्शाया गया है। यह एक आयताकार भूखंड (प्लॉट) है। इस नक्शे को देखिए। आपने क्या अवलोकन किया?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

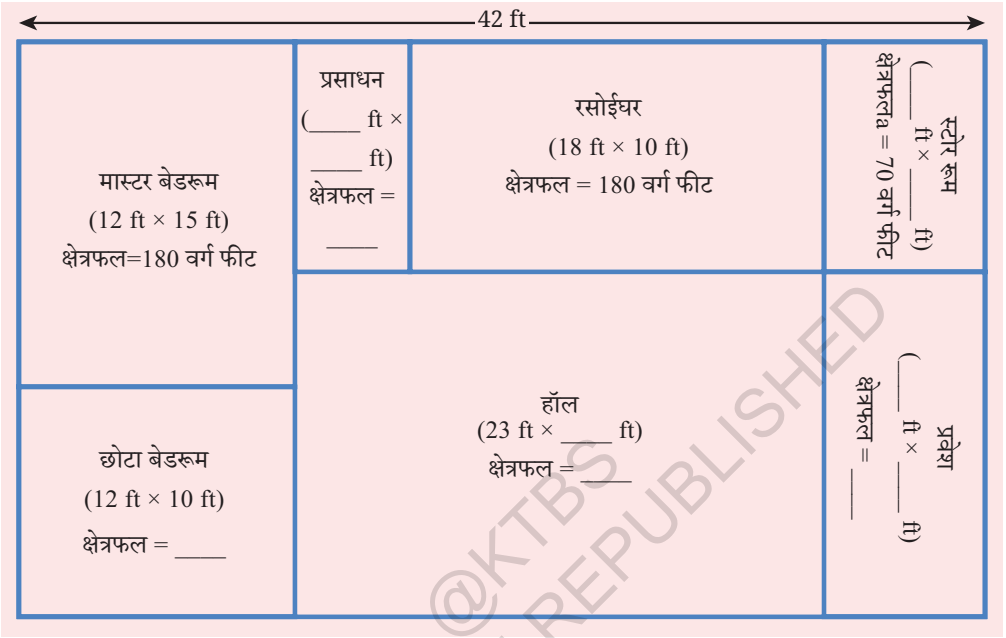
कुछ माप दिए गए हैं।

a. लुप्त माप की इकाई ज्ञात कीजिए।

b. उसके घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Chapter 6.indd 146 20/09/2024 15:50:40

अब, शरण के घर की लुप्त माप की इकाइयाँ और घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। नक्शा चित्र नीचे दिया गया है—



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कुछ माप दिए गए हैं—

a. लुप्त माप ज्ञात कीजिए।

b. उसके घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

शरण के घर में सभी कक्षों की विमाएँ क्या होंगी? शरण और चरण के घरों के क्षेत्रफलों और परिमापों की तुलना कीजिए।

Chapter 6.indd 147 20/09/2024 15:50:40

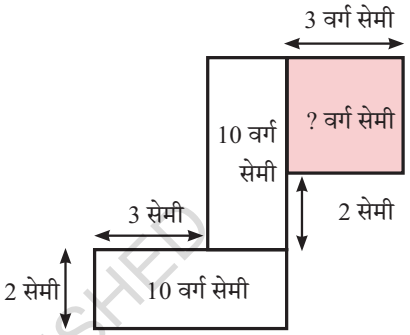
क्षेत्रफल पहेलियाँ

प्रत्येक हर आकृति में लुप्त, एक भुजा की लंबाई या एक क्षेत्र के क्षेत्रफल का मान ज्ञात कीजिए।

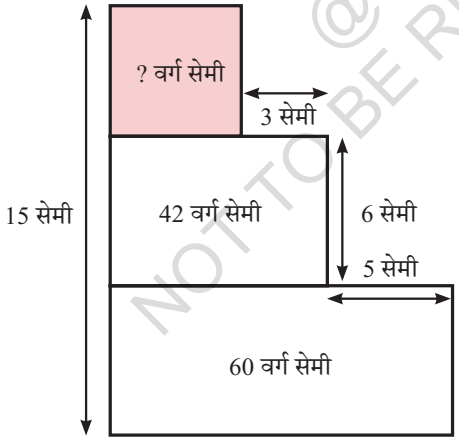
a.



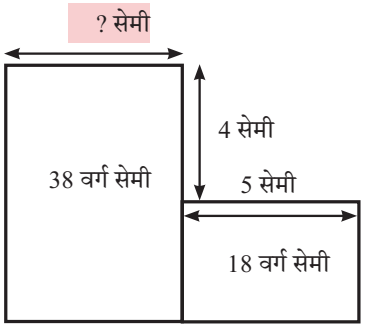
b.



c.



d.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 148 20/09/2024 15:50:40

आइए, पता लगाएँ

1. एक आयत की विमाएँ बताइए जिसका क्षेत्रफल उन दो आयतों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा, जिनकी विमाएँ 5 मी. × 10 मी. और 2 मी. × 7 मी. हैं।
2. 1000 वर्ग मी. क्षेत्रफल वाले आयताकार पार्क की लंबाई 50 मी. है, पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. एक कमरे के फर्श की लंबाई 5 मी. तथा चौड़ाई 4 मी. है। 3 मी. भुजा वाले एक वर्गाकार कालीन को फर्श पर बिछाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर कालीन नहीं बिछा है।
4. 15 मी. लंबे और 12 मी. चौड़े एक पार्क के चारों कोनों को खोद कर फूलों की क्यारियाँ बनाई गई हैं, जिनकी लंबाई व चौड़ाई क्रमश: 2 मी. और 1 मी. है। एक लॉन बनाने के लिए अब कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?
5. आकृति A और आकृति B के परिमाप का क्षेत्रफल क्रमश: 18 वर्ग इकाई और 20 वर्ग इकाई है। आकृति A का परिमाप आकृति B से बड़ा है। दी गई स्थिति को पूरा करती हुई दो आकृतियाँ बनाएँ।
6. अपनी पुस्तक के एक पृष्ठ पर एक आयताकार हाशिया (border) बनाएँ जो ऊपर और नीचे से 1 सेमी की दूरी पर हो और बाईं व दाईं ओर से 1.5 सेमी दूरी पर हो। हाशिये का परिमाप क्या होगा?
7. 12 इकाई × 8 इकाई आकार का एक आयत बनाइए। इसके अंदर एक अन्य आयत बनाइए जो बाह्य आयत को स्पर्श न करता हो और केवल आधा क्षेत्रफल घेरता हो।
8. एक वर्गाकार कागज को आधा मोड़ा गया। फिर मोड़ से वर्ग को दो आयतों में काटा गया। वर्ग के आकार को न देखते हुए, निम्न में से एक कथन हमेशा सत्य होगा। यहाँ कौन-सा कथन सत्य है?
   a. प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल, वर्ग के क्षेत्रफल से बड़ा होगा।
   b. वर्ग का परिमाप, दोनों आयतों के परिमापों के योग से बड़ा होगा।
   c. दोनों आयतों के परिमाप को साथ जोड़ने पर वह हमेशा वर्ग के परिमाप के $1\frac{1}{2}$ गुने के बराबर होगा।
   d. वर्ग का क्षेत्रफल हमेशा दोनों आयतों के क्षेत्रफलों को साथ जोड़ने पर प्राप्त क्षेत्रफल से तीन गुना बड़ा होगा।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

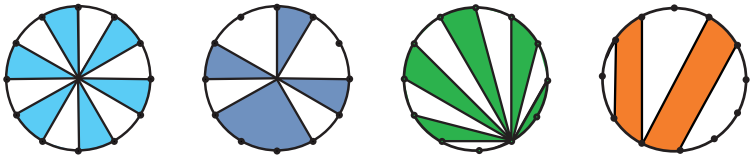
Chapter 6.indd 149 20/09/2024 15:50:41

सारांश

- एक बहुभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग के बराबर होता है।
  a. एक आयत का परिमाप, उसकी लंबाई और चौड़ाई के योग का दोगुना होता है।
  b. एक वर्ग का परिमाप, उसकी किसी एक भुजा की लंबाई का चार गुना होता है।
- किसी बंद आकृति द्वारा घेरे गए क्षेत्र के माप को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
- सामान्यत: क्षेत्रफल को वर्ग इकाई में मापा जाता है।
- एक आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणनफल होता है। वर्ग का क्षेत्रफल इसकी किसी एक भुजा की लंबाई को इसी से गुणा करके प्राप्त होता है।
- दो बंद आकृतियाँ, समान क्षेत्रफल वाली किंतु भिन्न परिमापों की या समान परिमाप की किंतु भिन्न क्षेत्रफलों वाली हो सकती हैं।
- क्षेत्रों के क्षेत्रफल का आकलन (निश्चित तौर पर निर्धारण) किया जा सकता है यदि ऐसे क्षेत्रों को इकाई वर्गों में या और अधिक सामान्य आकार वाले आयतों और त्रिभुजों में तोड़ा जाए, जिनके क्षेत्रफल की गणना की जा सके।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 6.indd 150 20/09/2024 15:50:42

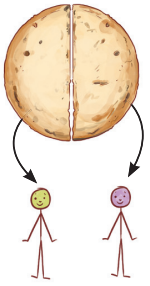


7 भिन्न

0675CH07

स्मरण कीजिए कि जब कुछ पूर्ण संख्या वाली वस्तुएँ समान रूप से साझा की जाती हैं, तो भिन्न हमें बताता है कि प्रत्येक का कितना भाग है।

शबनम— क्या आपको याद है, यदि एक रोटी दो बच्चों के बीच समान रूप से बाँटी जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी रोटी मिलेगी?



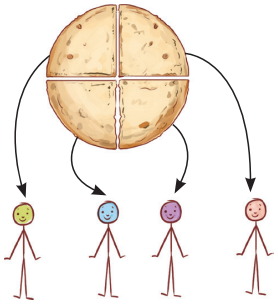
मुक्ता— प्रत्येक बच्चे को आधी रोटी मिलेगी।

शबनम— एक के आधे भाग को भिन्न में $\frac{1}{2}$ लिखा जाता है। हम कभी-कभी इसे 'एक बटा दो' भी पढ़ते हैं।

मुक्ता— यदि एक रोटी 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटी जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी रोटी मिलेगी?

शबनम— प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{4}$ रोटी मिलेगी।

मुक्ता— और कौन-सा भाग अधिक है, $\frac{1}{2}$ रोटी या $\frac{1}{4}$ रोटी?



शबनम— जब 2 बच्चे 1 रोटी को बराबर बाँटते हैं, तो प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{2}$ रोटी मिलेगी। जब 4 बच्चे एक रोटी को समान रूप से बाँटते हैं, तो प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{4}$ रोटी मिलेगी। चूँकि दूसरे समूह में अधिक बच्चे समान संख्या में रोटी बाँटते हैं, इसलिए प्रत्येक बच्चे को कम भाग मिलेगा। अत: $\frac{1}{2}$ रोटी $\frac{1}{4}$ रोटी से अधिक है।

$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7.1 भिन्नात्मक इकाइयाँ और समान भाग

बेनी— कौन-सा भिन्न बड़ा है? $\frac{1}{5}$ या $\frac{1}{9}$?

अरविन— 9 संख्या, 5 से बड़ी है। अत: मुझे लगता है कि $\frac{1}{9}$ संख्या $\frac{1}{5}$ से बड़ी है। क्या मैं सही हूँ?

बेनी— नहीं! यह एक सामान्य गलती है। इन भिन्नों को भागों के रूप में सोचिए।

अरविन— यदि एक रोटी को 5 बच्चों में बाँटा जाए तो प्रत्येक को रोटी का $\frac{1}{5}$ भाग मिलेगा। यदि रोटी को 9 बच्चों में बाँटा जाए, तो प्रत्येक को रोटी का $\frac{1}{9}$ भाग मिलेगा।

बेनी— बिल्कुल सही! अब पुन: सोचिए कौन-सा भाग अधिक हैं?

अरविन— यदि मैं किसी वस्तु को अधिक लोगों में बाँटता हूँ, तो मुझे कम भाग प्राप्त होगा। अत: $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$

बेनी— अब सही समझे!

ओह, तो $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$ से अधिक है!

जब एक इकाई को कई समान भागों में विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक भाग को **भिन्नात्मक इकाई** कहा जाता है। ये सभी भिन्नात्मक इकाइयाँ हैं—

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{50}, \ldots, \frac{1}{100}$, आदि।

हम कभी-कभी भिन्नात्मक इकाइयों को **इकाई भिन्न** भी कहते हैं।

आइए, पता लगाएँ

रिक्त स्थानों में भिन्न संख्याओं को भरिए—

1. तीन अमरूदों का भार 1 किग्रा है। यदि वे लगभग समान आकार के हों, तो प्रत्येक अमरूद का लगभग भार ____ किग्रा होगा।
2. एक थोक व्यापारी ने 1 किग्रा चावल को समान भार के चार पैकेटों में पैक किया। प्रत्येक पैकेट का भार ____ किग्रा है।
3. चार मित्रों ने 3 गिलास गन्ने का रस का आर्डर दिया और इसे आपस में बराबर-बराबर बाँटा। प्रत्येक ने ____ गिलास गन्ने का रस पिया।

गणित चर्चा

© TBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 152 20/09/2024 16:59:22

4. एक बड़ी मछली का भार $\frac{1}{2}$ किग्रा है। एक छोटी मछली का भार $\frac{1}{4}$ किग्रा है। दोनों का सम्मिलित वजन है _____ किग्रा।

गणित चर्चा

अतीत से ज्ञान!

भिन्न शब्द का प्रयोग और नामकरण भारत में प्राचीन काल से होता आ रहा है। *ऋग्वेद* में भिन्न $\frac{3}{4}$ को *त्रि-पद* कहा गया है। इसका वही अर्थ है जो आज कई भारतीय भाषाओं में $\frac{3}{4}$ के लिए प्रयुक्त शब्दों का होता है, जैसे— हिंदी में बोलचाल की भाषा, 'तीन पाव' और तमिल में 'मुक्काल'। वास्तव में भिन्न के लिए जो शब्द हम आज अनेक भारतीय भाषाओं में प्रयोग करते हैं वे प्राचीन समय से प्रचलित हैं।

आपके घर, नगर या राज्य में विभिन्न भाषाओं में भिन्नों के लिए उपयोग होने वाले शब्दों को खोजिए एवं उन पर चर्चा कीजिए। अपने दादा-दादी, माता-पिता, शिक्षकों और सहपाठियों से पूछिए कि वे विभिन्न भिन्नों के लिए कौन-कौन से शब्दों का उपयोग करते हैं, जैसे— एक और आधा, तीन चौथाई, एक चौथाई, आधा, चौथाई तथा दो और आधा, इन्हें यहाँ लिखिए—

_____ _____ _____ _____ _____ _____

5. दिए गए भिन्न शब्दों को छोटे से बड़े के क्रम में व्यवस्थित कीजिए और खाली बॉक्स में भरिए— एक और आधा, तीन चौथाई, एक चौथाई, आधा, चौथाई, दो और आधा

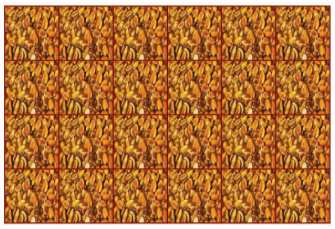
अपना उत्तर यहाँ लिखिए।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 153 20/09/2024 16:59:22

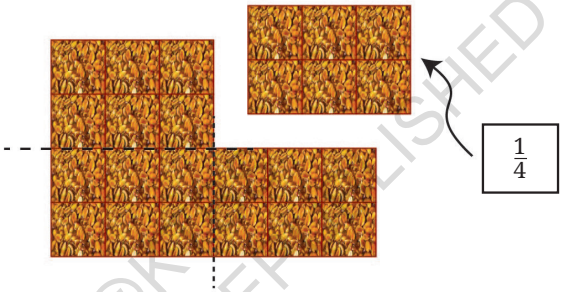
7.2 संपूर्ण के हिस्सों के रूप में भिन्नात्मक इकाइयाँ

दिए गए चित्र में एक संपूर्ण चिक्की दिखाई गई है।

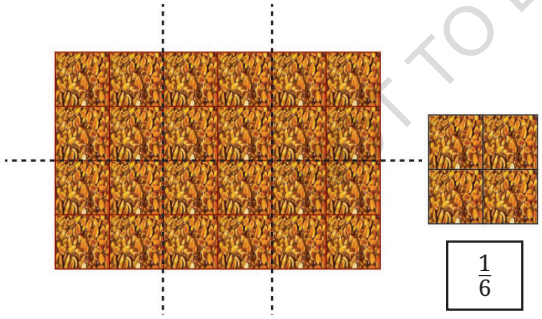


एक संपूर्ण चिक्की

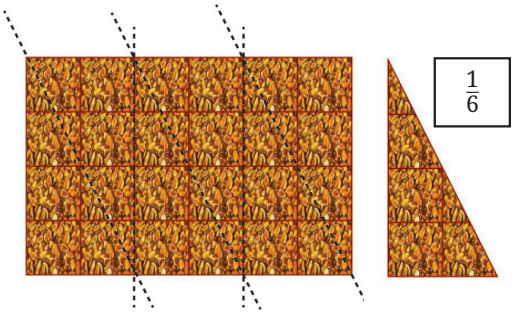
नीचे 2 हिस्सों में तोड़ी गई चिक्की का चित्र दिखाया गया है। प्रत्येक टुकड़ा मूल चिक्की का कितना हिस्सा है?



हम देख सकते हैं कि बड़े टुकड़े में $\frac{1}{4}$ चिक्की के 3 भाग हैं। अत: हम बड़े टुकड़े को भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{4}$ का उपयोग करके माप सकते हैं। हम देखते हैं कि बड़ा टुकड़ा $\frac{3}{4}$ चिक्की है।



6 बराबर टुकड़ों में काटी गई एक संपूर्ण चिक्की



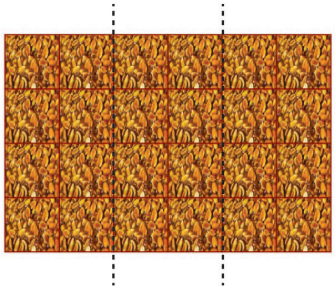
अन्य तरीके से 6 बराबर टुकड़ों में काटी गई एक संपूर्ण चिक्की

एक संपूर्ण चिक्की को विभिन्न तरीकों से 6 बराबर भागों में बाँटने पर, हमें अलग-अलग आकारों के $\frac{1}{6}$ चिक्की के टुकड़े मिलते हैं। क्या वे समान आकार के हैं?

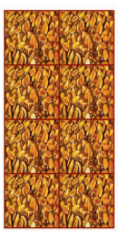
गणित चर्चा

Chapter 7.indd 154 20/09/2024 16:59:23

नीचे दर्शाई गई चिक्की की भिन्नात्मक इकाई क्या है?



एक संपूर्ण चिक्की



हमें चिक्की को 3 बराबर भागों में बाँटने पर यह टुकड़ा मिलता है। अत: यह $\frac{1}{3}$ चिक्की है।

$\frac{1}{3}$

आइए, पता लगाएँ

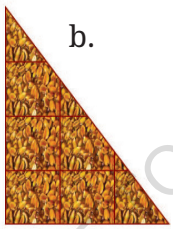
नीचे दिए गए चित्र एक संपूर्ण चिक्की की विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ दर्शाते हैं। प्रत्येक टुकड़ा पूरी चिक्की का कितना भाग है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

a.



b.



c.



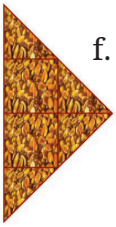
d.



e.



f.



g.



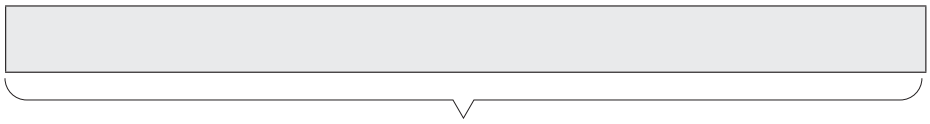
h.



Chapter 7.indd 155 20/09/2024 16:59:23

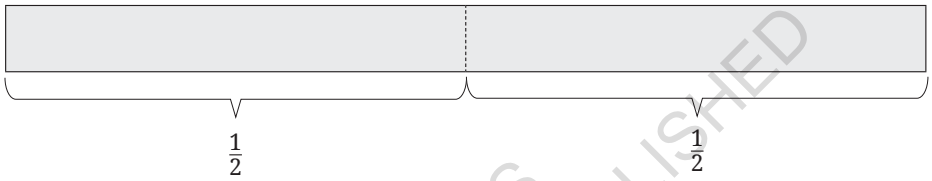
7.3 भिन्नात्मक इकाइयों द्वारा मापना

एक कागज की पट्टी लीजिए। हम इस कागज की पट्टी को एक इकाई लंबा मानेंगे।

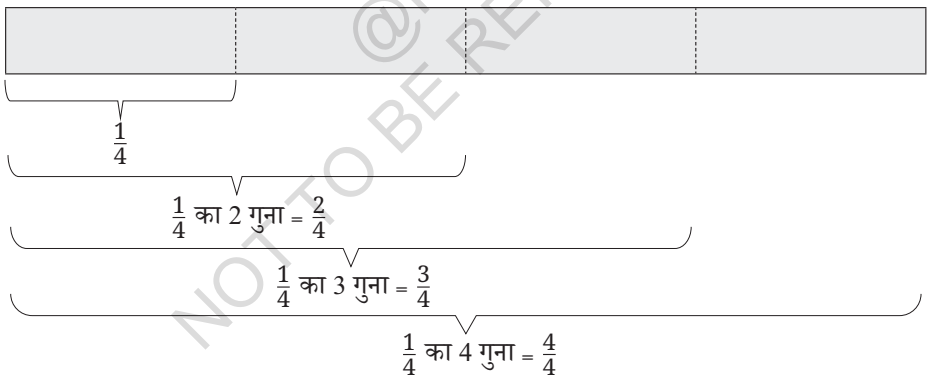


एक कागज की पट्टी

पट्टी को दो समान भागों में मोड़िए और फिर पट्टी को पुन: खोलें। पट्टी की लंबाई को एक इकाई मानते हुए, मोड़ के निशान (क्रीज) द्वारा बनाई गई पट्टी के दो नए भागों की लंबाइयाँ क्या हैं?



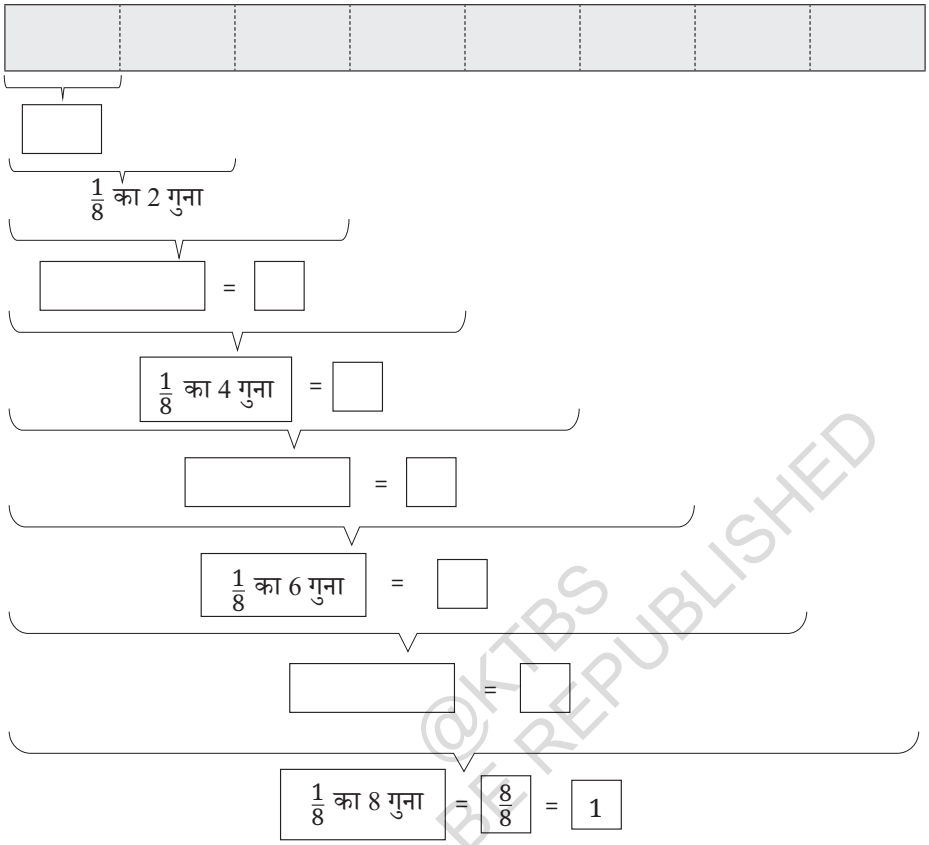
पूर्व में मोड़ी गई पट्टी को यदि पुन: दो समान भागों में मोड़ें तो आपको क्या प्राप्त होगा? अब आपको चार समान भाग मिलेंगे।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इसे पुन: दोहराएँ। रिक्त बॉक्स को भरिए।

Chapter 7.indd 156 20/09/2024 16:59:23



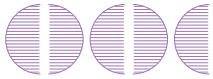
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भिन्नात्मक मात्राओं को भिन्नात्मक इकाइयों का उपयोग करके मापा जा सकता है।

एक अन्य उदाहरण लेते हैं—



एक संपूर्ण रोटी प्रदर्शित करता है।

				
$\frac{1}{2}$ = 1 गुना आधा	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 2 गुना आधा	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 3 गुना आधा	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 4 गुना आधा	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 5 गुना आधा

हम भिन्नात्मक इकाइयों को एक साथ एकत्र कर बता सकते हैं कि कुल कितनी मात्रा है।

Chapter 7.indd 157 20/09/2024 16:59:24

आइए, पता लगाएँ

1. $\frac{1}{2}$ की इस तालिका को 2 और चरणों तक जारी रखें।
2. क्या आप $\frac{1}{4}$ के लिए समान तालिका बना सकते हैं?
3. कागज की पट्टी की सहायता से $\frac{1}{3}$ बनाएँ। क्या आप $\frac{1}{6}$ बनाने में इसका उपयोग कर सकते हैं।
4. एक चित्र बनाएँ और उपरोक्त के अनुसार योग कथन लिखिए—

   a. $\frac{1}{4}$ रोटी का 5 गुना b. $\frac{1}{4}$ रोटी का 9 गुना
5. प्रत्येक भिन्नात्मक इकाई का सही चित्र के साथ जोड़ा बनाइए—

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भिन्नों को पढ़ना

हम भिन्न $\frac{3}{4}$ को आमतौर पर 'तीन-चौथाई' या तीन बटा चार पढ़ते हैं, लेकिन इसे '3 गुना $\frac{1}{4}$' के रूप में पढ़ने से हमें भिन्न के आकार को समझने में सहायता मिलती है, क्योंकि यह स्पष्ट दिखाता है कि भिन्नात्मक इकाई $\left(\frac{1}{4}\right)$ है और यहाँ ऐसी कितनी भिन्नात्मक इकाइयाँ (3) हैं।

स्मरण कीजिए की हम भिन्न की ऊपरी संख्या और निचली संख्या को क्या कहते हैं। भिन्न $\frac{5}{6}$ में, 5 **अंश** है और 6 **हर** है।

अध्यापक टिप्पणी

बच्चों को विभिन्न आकृतियों, जैसे— वृत्त, वर्ग, आयत, त्रिभुज आदि का उपयोग करके भिन्नात्मक इकाइयों को समझने के लिए अनेक अवसर दीजिए।

Chapter 7.indd 158 20/09/2024 16:59:24

7.4 संख्या रेखा पर भिन्नों की माप अंकित करना

हमने संख्या रेखा पर 1, 2, 3, ... इकाइयों के बराबर माप अंकित किए है। आइए, अब संख्या रेखा पर भिन्नों की मापें अंकित करने का प्रयास करें।

नीली रेखा की लंबाई कितनी है? बॉक्स में वह भिन्न लिखें जो नीली रेखा की लंबाई बताता है।



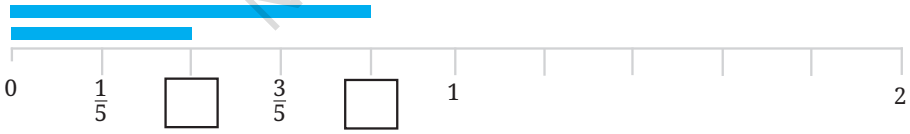
0 और 1 की बीच की दूरी एक इकाई लंबी है। यह दो बराबर भागों में विभाजित है। अत: प्रत्येक भाग की लंबाई $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है। अत: नीली रेखा $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है।

अब, क्या आप नीचे दर्शाई गई विभिन्न नीली रेखाओं की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं? इसे बॉक्स में भी लिखिए।

1. यहाँ भिन्नात्मक इकाई, 1 इकाई की लंबाई को तीन बराबर भागों में विभाजित कर रही है। नीली रेखा की लंबाई बताने वाले भिन्न को संबंधित बॉक्स में अथवा अपनी कॉपी में लिखिए।



2. यहाँ एक इकाई को 5 बराबर भागों में बाँटा गया है। नीली रेखाओं की लंबाई बताने वाली भिन्न को संबंधित बॉक्स में अथवा अपनी नोटबुक (कॉपी) में लिखिए।



3. अब एक इकाई को 8 बराबर भागों में बाँटा गया है। उचित भिन्नों को अपनी नोटबुक (कॉपी) में लिखिए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 159 20/09/2024 16:59:24

आइए, पता लगाएँ

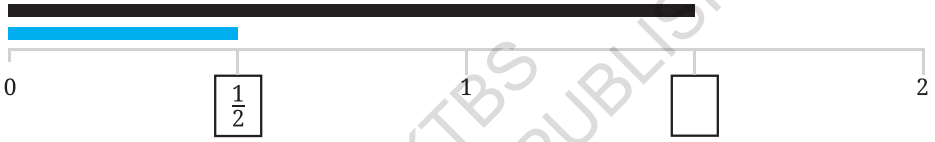
गणित चर्चा

1. संख्या रेखा पर $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ और $\frac{4}{5}$ लंबाई की रेखाओं को दर्शाइए।

2. अपनी पसंद की पाँच और भिन्नों को लिखिए और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।

3. 0 और 1 के मध्य कितनी भिन्न होती हैं? सोचिए, अपने सहपाठियों से चर्चा कीजिए और अपना उत्तर लिखिए।

4. नीचे दर्शाई गई नीली रेखा और काली रेखा की लंबाई क्या है? 0 और 1 के मध्य की दूरी 1 इकाई लंबी है और यह दो बराबर भागों में विभाजित की गई है। अतः प्रत्येक भाग की लंबाई $\frac{1}{2}$ है। इसलिए नीली रेखा $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है। काली रेखा की लंबाई बताने वाली भिन्न को बॉक्स में लिखिए।



5. काली रेखाओं की लंबाई बताने वाली भिन्नों को संबंधित बॉक्स में लिखिए।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अध्यापक टिप्पणी

इन रेखाओं को श्यामपट्ट पर अंकित कीजिए और विद्यार्थियों से उनकी नोटबुक (कॉपी) में उत्तर लिखने के लिए कहिए।

Chapter 7.indd 160 20/09/2024 16:59:24

7.5 मिश्रित भिन्न

एक से बड़ी भिन्ने

आपने, अभी संख्या रेखा पर कुछ भिन्नों को अंकित किया था। क्या आपने देखा कि सभी नीली रेखाओं की लंबाई 1 से कम थी और सभी काली रेखाओं की लंबाई 1 से अधिक थी?

उन सभी भिन्नों को लिखिए जिन्हें आपने पहले संख्या रेखा पर अंकित किया था।

आइए, अब इन भिन्नों को दो समूहों में वर्गीकृत करें—

1 इकाई से छोटी लंबाई	1 इकाई से बड़ी लंबाई

@KVSRS NOT TO BE REPUBLISHED

क्या आपने ध्यान दिया कि 1 इकाई से बड़ी भिन्नों में कुछ बातें समान हैं?

1 इकाई से छोटी सभी भिन्नों में अंश, हर से छोटा है, जबकि 1 इकाई से बड़ी भिन्नों में अंश, हर से बड़ा है।

हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ और $\frac{7}{2}$ सभी 1 इकाई से बड़ी हैं। किंतु क्या हम देख सकते हैं कि उनमें कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

मैं जानती हूँ कि $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. यदि मैं एक और $\frac{1}{3}$ जोड़ती हूँ, तो मुझे 1 इकाई से अधिक प्राप्त होगा। अत: $\frac{4}{3} > 1$.



Chapter 7.indd 161 20/09/2024 16:59:24

आइए, पता लगाएँ

1. $\frac{7}{2}$ में कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?
2. $\frac{4}{3}$ और $\frac{7}{3}$ में कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?



एक से बड़ी भिन्नों को मिश्रित संख्याओं के रूप में लिखना

हमने देखा है कि— $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

इसी प्रकार हम अन्य भिन्नों को भी लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक में पूर्ण इकाइयों की संख्या ज्ञात कीजिए—

   a. $\frac{8}{3}$ b. $\frac{11}{5}$ c. $\frac{9}{4}$

   हमने देखा

   $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

   भिन्न — मिश्रित संख्या

   इस प्रकार इस संख्या को "दो और दो-तिहाई" भी कहा जाता है। हम इसे $2\frac{2}{3}$ के रूप में लिखते हैं।

2. क्या 1 से बड़े सभी भिन्नों को इस प्रकार से मिश्रित संख्या के रूप में लिख सकते हैं?

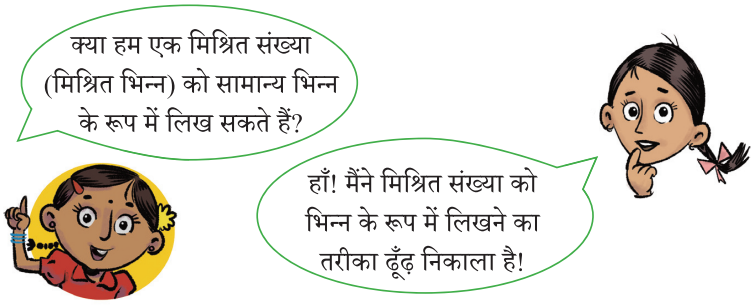
एक **मिश्रित संख्या/मिश्रित भिन्न** में एक पूर्ण संख्या होती है (जो पूर्ण भाग कहलाता है) और एक वह भिन्न जो कि 1 से कम होता है (जो भिन्नात्मक भाग कहलाता है)।

3. निम्नलिखित भिन्नों को मिश्रित भिन्न के रूप में लिखिए (उदाहरणार्थ, $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$)

   a. $\frac{9}{2}$ b. $\frac{9}{5}$ c. $\frac{21}{19}$ d. $\frac{47}{9}$ e. $\frac{12}{11}$ f. $\frac{19}{6}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 162 20/09/2024 16:59:24



जया— मैं जानती हूँ, जब मेरे पास $3 + \frac{3}{4}$ हैं, इसका अर्थ है $1 + 1 + 1 + \frac{3}{4}$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

तो मुझे प्राप्त होता है,

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$$

अत: $(4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (3 \times \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$

आइए, पता लगाएँ

निम्नलिखित मिश्रित संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखिए—

(a) $3\frac{1}{4}$ (b) $7\frac{2}{3}$ (c) $9\frac{4}{9}$

(d) $3\frac{1}{6}$ (e) $2\frac{3}{11}$ (f) $3\frac{9}{10}$

गणित चर्चा

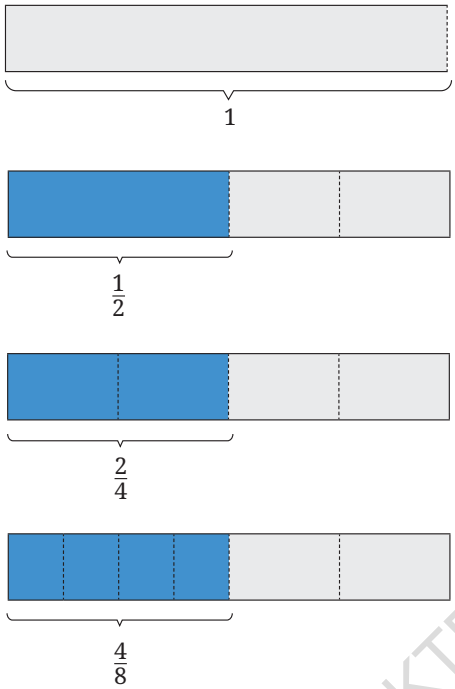
7.6 तुल्य भिन्न

समान भिन्नात्मक लंबाई ज्ञात करने के लिए भिन्न दीवार (पट्टियों) का प्रयोग करना!

पिछले खंड में आपने विभिन्न भिन्नों को दर्शाने के लिए भिन्नात्मक इकाइयों वाले पेपर फोल्डिंग (पट्टी) का प्रयोग किया था। आइए, उसी पेपर स्ट्रिप (पट्टी) के साथ कुछ और गतिविधि करें।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 163 20/09/2024 16:59:25



आप क्या देखते हैं?

- क्या $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{4}$ की लंबाई बराबर हैं?
- क्या $\frac{2}{4}$ और $\frac{4}{8}$ की लंबाई बराबर हैं?

हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ये 'समतुल्य भिन्न' हैं जोकि समान लंबाई को दर्शाती हैं, लेकिन यह विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों के पदों में व्यक्त हैं।

अब कागज की पट्टियों का उपयोग कर जाँचिए कि क्या $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{6}$ समतुल्य भिन्न हैं अथवा नहीं?

नीचे दिए गए चित्रानुसार दी गई पट्टियों का प्रयोग कर स्वयं की भिन्नात्मक पट्टी की दीवार बनाइए।

भिन्न पट्टी की दीवार को देखकर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. क्या $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{6}$ की लंबाई बराबर हैं?
2. क्या $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ तुल्य भिन्न हैं? क्यों?
3. $\frac{1}{6}$ लंबाई के कितने टुकड़ों से $\frac{1}{2}$ लंबाई प्राप्त होगी?
4. $\frac{1}{6}$ लंबाई के कितने टुकड़ों से $\frac{1}{3}$ लंबाई प्राप्त होगी?

1 इकाई					
$\frac{1}{2}$					$\frac{2}{2}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{3}{3}$
$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

Chapter 7.indd 164 20/09/2024 16:59:25

हम इस विचार का विस्तार करके, भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{10}$ वाली भिन्न पट्टी की दीवार बना सकते हैं। (भिन्नों की यह दीवार पुस्तक के अंत में दी गई है।)

1 इकाई									
					$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{2}$
			$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$			$\frac{3}{3}$
		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$			$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{4}$
	$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{5}$
	$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$
$\frac{1}{7}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{3}{7}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{9}$		$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. क्या $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ तुल्य भिन्न हैं? क्यों?

2. $\frac{2}{6}$ के लिए दो तुल्य भिन्न लिखिए।

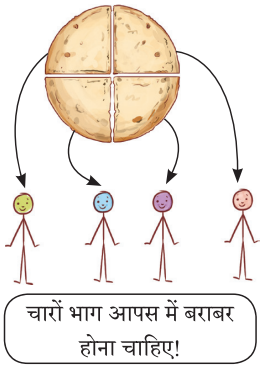
3. $\frac{4}{6} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} =$ ..... (जितनी संभव हों उतनी लिखिए।)

समान भागों का प्रयोग कर तुल्य भिन्न समझना

एक रोटी को चार बच्चों में बराबर बाँटा गया। प्रत्येक बच्चे को रोटी का कितना भाग मिला?

संलग्न चित्र में चार बच्चों के बीच एक रोटी का बँटवारा दिखाया गया है।

प्रत्येक बच्चे को प्राप्त रोटी का भिन्न $\frac{1}{4}$ है।



Chapter 7.indd 165 20/09/2024 16:59:25

आप इस घटना को भाग विधि, जोड़ विधि और गुणन विधि के माध्यम से भी व्यक्त कर सकते हैं।

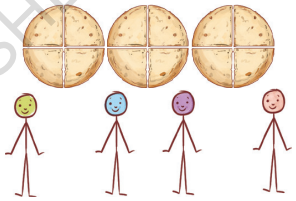
भाग विधि से $1 \div 4 = \frac{1}{4}$

योग विधि से $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

गुणन विधि से $1 = 4 \times \frac{1}{4}$

आइए, पता लगाएँ

1. तीन रोटियों को चार बच्चों में बराबर बाँटा गया है। चित्र में विभाजन दिखाएँ और प्रत्येक बच्चे को कितना भाग मिला है, भिन्न में लिखिए। संगत विभाजन क्रिया, योग क्रिया और गुणन क्रिया भी लिखिए।



प्रत्येक बच्चे को रोटी का मिला भाग—

विभाजन क्रिया—

योग क्रिया—

गुणन क्रिया—

अपने चित्र और उत्तरों की तुलना अपने सहपाठियों से कीजिए।

2. एक चित्र बनाकर दर्शाइए कि जब 2 रोटियाँ 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटी जाती हैं तो प्रत्येक बच्चे को कितना भाग मिलता है इसके संगत भाग क्रिया, योग क्रिया और गुणन क्रिया भी लिखिए।

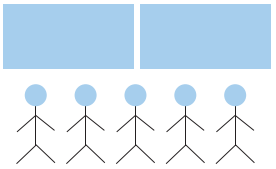
3. अनिल एक समूह में था, जहाँ 2 केक को 5 बच्चों में बराबर बाँटा गया। अनिल को कितना केक मिला होगा?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

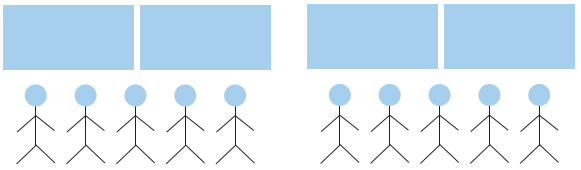


Chapter 7.indd 166 20/09/2024 16:59:26

समूह 1



समूह 2



इस प्रकार दोनों स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का भाग समान है!



इसलिए $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$!

आइए, हम निम्नलिखित स्थितियों में प्रत्येक बच्चे के हिस्से की जाँच करते हैं।

- 1 रोटी 2 बच्चों में बराबर बाँटी जाती है।
- 2 रोटियाँ 4 बच्चों में बराबर बाँटी जाती हैं।
- 3 रोटियाँ 6 बच्चों में बराबर बाँटी जाती हैं।

आइए, चित्र बनाएँ और इसे साझा करें!

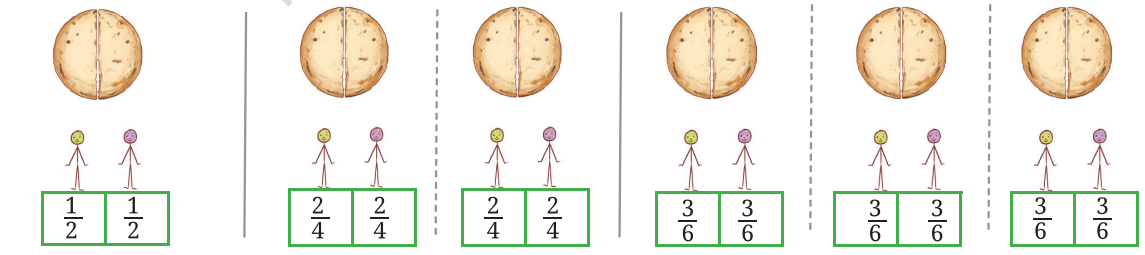
क्या आपने ध्यान दिया कि सभी स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का भाग बराबर है?

अतः हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

एक रोटी 2 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।

2 रोटियाँ 4 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।

3 रोटियाँ 6 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।



जिन भिन्नों के भाग समान होते हैं उन्हें 'तुल्य भिन्न' कहा जाता है

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

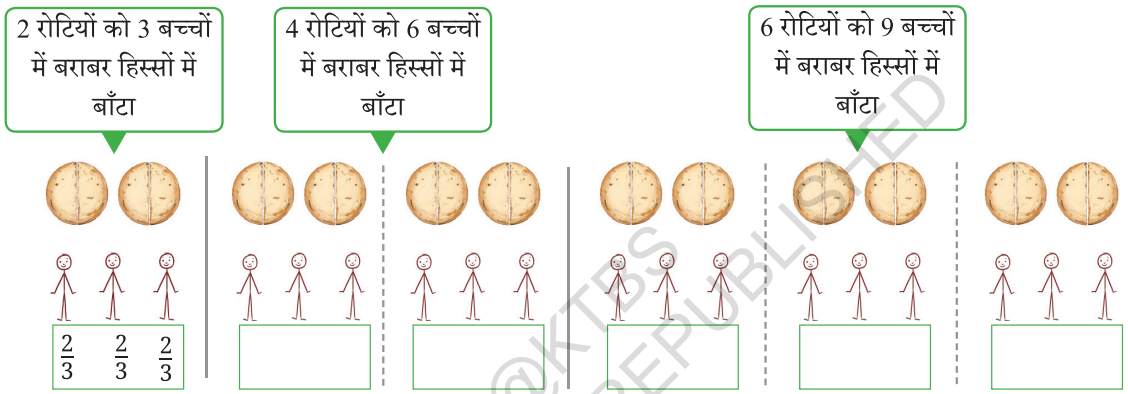
Chapter 7.indd 167 20/09/2024 16:59:28

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ और $\frac{3}{6}$ सभी **तुल्य भिन्न** हैं।

$\frac{1}{2}$ के तुल्य कुछ और भिन्नों को ज्ञात कीजिए। इन्हें यहाँ बॉक्स में लिखिए।

☐ ☐ ☐ ☐

निम्नलिखित स्थितियों में रोटी को बराबर-बराबर बाँटिए और प्रत्येक बच्चे के हिस्से को लिखिए। क्या इन सभी स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का हिस्सा समान है? क्यों?



$\frac{2}{3}$ भिन्न $\frac{4}{6}$ का सरलतम रूप भी कहलाता है। यह $\frac{6}{9}$ का भी सरलतम रूप है।



आइए, पता लगाएँ

लुप्त संख्याएँ ज्ञात कीजिए—

गणित चर्चा

a. 4 मित्रों के बीच बराबर-बराबर बाँटा गया 5 गिलास जूस, 8 दोस्तों के बीच बराबर-बराबर बाँटे गए ____ गिलास जूस के समान है।

अतः $\frac{5}{4} = \frac{\square}{8}$

b. 4 किग्रा आलू को बराबर-बराबर 3 थैलों में भरा गया। ऐसे ही 12 किग्रा आलू को समान रूप से भरने के लिए ___ थैलों की आवश्यकता होगी?

अतः $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 168 20/09/2024 16:59:29

c. 5 बच्चों के बीच बराबर बाँटी गई 7 रोटियाँ और ____ बच्चों के बीच बराबर बाँटी गई _____ रोटियाँ समान होंगी।

अत: $\frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$

किस समूह में प्रत्येक बच्चे को अधिक चिक्की प्राप्त होती है?

1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाए या 5 चिक्कियों को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाए।

मुक्ता— इसके लिए हमें $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच तुलना करनी चाहिए कि कौन अधिक है?

शबनम— ठीक है, हमने देखा कि $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ है, और स्पष्टत:— $\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$

इसलिए जिन बच्चों के लिए 5 चिक्की को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, उन्हें उन बच्चों से अधिक मिलेगा, जिनके लिए 1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है। दूसरे समूह के प्रत्येक बच्चे को अधिक चिक्की मिलेगी।

निम्नलिखित समूह के विषय में क्या कहेंगे? किस समूह में प्रत्येक बच्चे को अधिक हिस्सा मिलेगा?

1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाए या 4 चिक्कियों को 7 बच्चों में बराबर बाँटा जाए।

शबनम— इस बार किस समूह के बच्चों को अधिक चिक्की मिलेगी?

मुक्ता हमें— $\frac{1}{7}$ और $\frac{4}{7}$ की तुलना करनी चाहिए।

अब

$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$ अत:, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

शबनम— लेकिन आपने अंश और हर को पुन: 4 से गुणा क्यों किया?

मुक्ता— तुम देखोगी!

जब 4 चिक्कियों को 7 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, तो प्रत्येक को $\frac{4}{7}$ चिक्की मिलेगी। जब 4 चिक्कियों को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, तो प्रत्येक को $\frac{4}{8}$ चिक्की मिलेगी। अत: $\frac{4}{7} > \frac{4}{8}$



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 169 20/09/2024 16:59:29



मान लीजिए कि बच्चों की संख्या समान रखी गई है, किंतु बाँटी जाने वाली इकाइयों की संख्या बढ़ गई। अब आप प्रत्येक बच्चे को मिलने वाले हिस्से के विषय मे क्या कहेंगे? क्यों? चर्चा कीजिए कि कैसे आपका तर्क यह स्पष्ट करता है कि $\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$, $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$, और $\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

अब, निर्णय कीजिए कि दोनों समूहों में किस समूह के बच्चों को अधिक हिस्सा मिलेगा?

1. **समूह 1**— 3 गिलास गन्ने के रस को 4 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

   समूह 2— 7 गिलास गन्ने के रस को 10 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

2. **समूह 1**— 4 गिलास गन्ने के रस को 7 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

   समूह 2— 5 गिलास गन्ने के रस को 7 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

गणित चर्चा

कौन से समूहों की तुलना करना आसान है? क्यों?

शबनम— पहले दो समूहों की तुलना करने के लिए हमें भिन्नों $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ के तुल्य भिन्न ज्ञात करना है।

मुक्ता— क्या ऐसे $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ और $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$?



© RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 170 20/09/2024 16:59:30

शबनम— यहाँ एक शर्त है। दो भिन्नों के लिए प्रयोग की गई भिन्नात्मक इकाइयाँ समान होनी चाहिए! जैसे— $\frac{2}{6}$ और $\frac{3}{6}$ दोनों में भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{6}$ है (अर्थात्, हर समान हैं)। किंतु $\frac{6}{8}$ और $\frac{21}{30}$ में भिन्नात्मक इकाइयाँ समान नहीं है (दोनों में हर असमान हैं)।

मुक्ता— ठीक है, तो आओ हम तुल्य भिन्न बनाना शुरू करते हैं—

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$ … लेकिन मुझे कब रुकना है?

शबनम— समझी! कैसा रहेगा यदि हम $4 \times 10 = 40$ तक लिखें।

मुक्ता— आपका अर्थ दो हरों का गुणनफल?

ठीक है!

हमारे पास $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ हैं। दोनों हरों (4 और 10) का गुणनफल 40 है।

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \ldots = \frac{27}{36} = \frac{30}{40}$

$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}$

तब तक लिखेंगे जब तक हर 40 न हो जाए।

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED



शबनम— अतः $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ की समान भिन्नात्मक इकाई (समान हर) के साथ तुल्य भिन्न $\frac{30}{40}$ और $\frac{28}{40}$ या $\frac{15}{20}$ और $\frac{14}{20}$ हैं।

स्पष्टतया $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$, अत: हम कह सकते हैं कि $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

Chapter 7.indd 171 20/09/2024 16:59:30

दिए गए भिन्न युग्मों के लिए तुल्य भिन्नों को ज्ञात कीजिए, जिसमें भिन्नात्मक इकाइयाँ समान हों।

a. $\frac{7}{2}$ और $\frac{3}{5}$ b. $\frac{8}{3}$ और $\frac{5}{6}$ c. $\frac{3}{4}$ और $\frac{3}{5}$ d. $\frac{6}{7}$ और $\frac{8}{5}$

e. $\frac{9}{4}$ और $\frac{5}{2}$ f. $\frac{1}{10}$ और $\frac{2}{9}$ g. $\frac{8}{3}$ और $\frac{11}{4}$ h. $\frac{13}{6}$ और $\frac{1}{9}$

एक भिन्न को सरलतम रूप में व्यक्त करना

किसी भिन्न के अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, तो भिन्न अपने **न्यूनतम** या **सरलतम रूप** में कही जाती है। दूसरे शब्दों में, एक भिन्न को न्यूनतम रूप में कहा जाता है यदि उसका अंश और हर जितना संभव हो उतना छोटे हों।

किसी भी भिन्न को न्यूनतम पदों में व्यक्त करने के लिए एक तुल्य भिन्न ज्ञात की जा सकती है, जिसका अंश और हर जितना संभव हो उतना छोटा हो।

आइए, देखें कैसे भिन्न को न्यूनतम पदों में व्यक्त करते हैं।

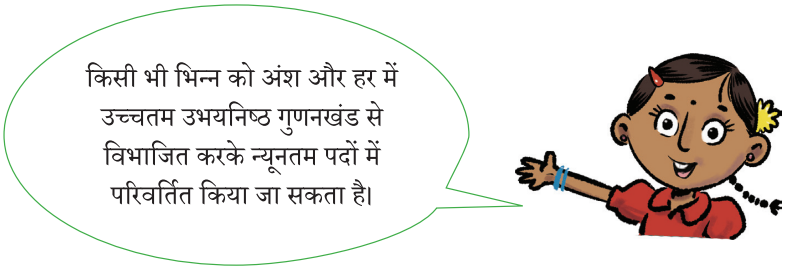
उदाहरण— क्या भिन्न $\frac{16}{20}$ न्यूनतम पदों में है? नहीं, संख्या 16 और 20 का उभयनिष्ठ गुणनखंड 4 है।

आइए, अब $\frac{16}{20}$ को न्यूनतम पदों में व्यक्त करते हैं।

हम जानते हैं कि 16 (अंश) और 20 (हर) दोनों 4 से विभाज्य हैं।

अतः $\frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$

अब, 4 और 5 का कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। इसलिए $\frac{16}{20}$ का न्यूनतम व्यक्त पद $\frac{4}{5}$ है। अतः $\frac{4}{5}$ को $\frac{16}{20}$ का सरलतम रूप कहा जा सकता है, क्योंकि 4 और 5 का 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 172 20/09/2024 16:59:30

एक भिन्न को न्यूनतम पदों में विभिन्न चरणों में भी व्यक्त किया जा सकता है।

मान लीजिए, हमें $\frac{36}{60}$ को न्यूनतम पदों व्यक्त करना है। सर्वप्रथम हम देखते हैं कि अंश और हर दोनों सम हैं। अतः हम दोनों को 2 से विभाजित करके देखते हैं और पाते हैं कि $\frac{36}{60} = \frac{18}{30}$

पुनः अंश और हर दोनों सम हैं, अतः हम पुनः उन्हें 2 से विभाजित कर सकते हैं; हमें $\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$ प्राप्त होता है।

अब हम देखते हैं कि 9 और 15 दोनों 3 के गुणज हैं, अतः दोनों को 3 से विभाजित करने पर $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ प्राप्त होता है।

अब 3 और 5 का 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, अतः $\frac{36}{60}$ न्यूनतम रूप में $\frac{3}{5}$ है।

वैकल्पिक रूप में, हम देख सकते थे कि $\frac{36}{60}$ में अंश और हर दोनों 12 के गुणज हैं— हम देखते हैं कि $36 = 3\times12$ और $60 = 5\times12$, इसलिए हम सीधे यह निष्कर्ष निकाल सकते थे कि $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ है।

आप किसी भी विधि से कीजिए, एक ही उत्तर मिलेगा! किंतु कभी-कभी चरणों में हल करना सरल होता है।

आइए, पता लगाएँ

निम्नलिखित भिन्नों को न्यूनतम पदों में व्यक्त कीजिए—

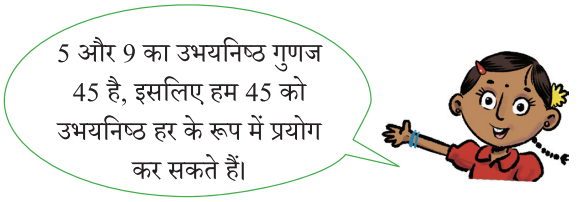
a. $\frac{17}{51}$ b. $\frac{64}{144}$ c. $\frac{126}{147}$ d. $\frac{525}{112}$

7.7 भिन्नों की तुलना

कौन-सा भिन्न बड़ा है, $\frac{4}{5}$ या $\frac{7}{9}$? इस प्रकार के दो भिन्नों की सीधे तुलना करना कठिन हो सकता है। यद्यपि हम जानते हैं कि समान हर वाली दो भिन्नों के तुल्य भिन्न कैसे प्राप्त करते हैं।
आइए, देखें कि हम इसका उपयोग कैसे कर सकते हैं—

$\frac{4}{5} = \frac{4\times9}{5\times9} = \frac{36}{45}$

$\frac{7}{9} = \frac{7\times5}{8\times5} = \frac{35}{45}$



© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 173 20/09/2024 16:59:30

स्पष्टत: $\frac{36}{45} > \frac{35}{45}$

अत: $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$!

आइए, इसे किसी अन्य युग्म $\frac{7}{9}$ और $\frac{17}{21}$ के लिए प्रयास करें।

9 और 21 का उभयनिष्ठ गुणज 63 है, तो हम लिख सकते हैं—

$\frac{7}{9} = \frac{7\times7}{9\times7} = \frac{49}{63}$, $\frac{17}{21} = \frac{17\times3}{21\times3} = \frac{51}{63}$

स्पष्टत: $\frac{49}{63} < \frac{51}{63}$

अत: $\frac{7}{9} < \frac{17}{21}$!

संक्षेप में!

दो या दो से अधिक भिन्नों की मापों की तुलना के चरण—

चरण 1— दिए गए भिन्नों को तुल्य भिन्नों में बदलें ताकि उन सभी को समान हर/समान भिन्नात्मक इकाई में परिवर्तित किया जा सके।

चरण 2— अब केवल अंशों की तुलना कर, तुल्य भिन्नों की तुलना कीजिए अर्थात् प्रत्येक में कितनी भिन्नात्मक इकाइयाँ हैं।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित भिन्नों की तुलना कीजिए और अपने उत्तर का कारण बताइए—

   a. $\frac{8}{3}$, $\frac{5}{2}$ b. $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{7}$ c. $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{14}$

   d. $\frac{12}{5}$, $\frac{8}{5}$ e. $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$

2. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए।

   a. $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{2}{5}$ b. $\frac{19}{24}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को अवरोही क्रम में लिखिए।

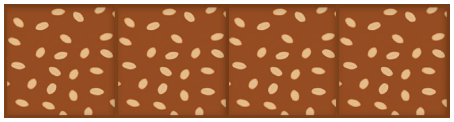
   a. $\frac{25}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{17}{32}$ b. $\frac{3}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{4}$

Chapter 7.indd 174 20/09/2024 16:59:31

7.8 भिन्नों को जोड़ना और घटाना

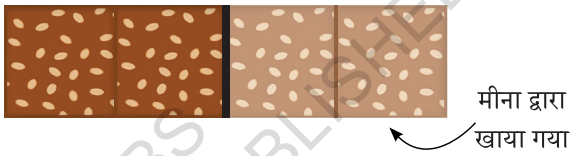
मीना के पिता ने कुछ चिक्की बनाई। मीना ने इसका $\frac{1}{2}$ भाग खाया और उसके छोटे भाई ने इसका $\frac{1}{4}$ भाग खाया। मीना और उसके भाई ने मिलकर चिक्की का कितना भाग खाया?





हम दृश्यीकरण के माध्यम से उत्तर तक पहुँच सकते हैं। चिक्की का एक टुकड़ा लीजिए और इसे पहले इस तरह दो हिस्सों में बाँटिए।

चित्रानुसार मीना ने इसका आधा भाग खाया।

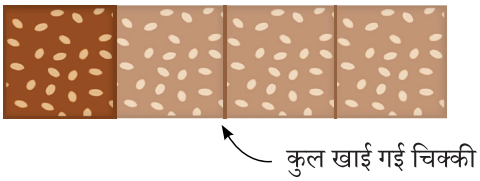


अब शेष बचे हिस्से को पुनः दो भागो में बाँटे जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इनमें से प्रत्येक टुकड़ा संपूर्ण चिक्की का $\frac{1}{4}$ है।

जैसा कि चित्र में दिखाया गया है कि मीना के भाई ने संपूर्ण चिक्की का $\frac{1}{4}$ भाग खाया।



कुल खाई गई चिक्की है, $\frac{1}{2}$ (मीना के द्वारा) और $\frac{1}{4}$ (उसके भाई द्वारा)



कुल खाई गई चिक्की $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

संपूर्ण चिक्की का कितना भाग शेष बचा?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 175 20/09/2024 16:59:31

समान हर या समान भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों का योग (जोड़)

उदाहरण— $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ का योग ज्ञात कीजिए।

आइए, दोनों को आयताकार पट्टी (स्ट्रिप) द्वारा दर्शाते हैं। यहाँ दोनों भिन्नों में भिन्नात्मक इकाई समान है, जो $\frac{1}{5}$ है, इसलिए प्रत्येक पट्टी को 5 बराबर भागों में बाँटा जायेगा।

अतः $\frac{2}{5}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—



और $\frac{1}{5}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—



दोनों भिन्नों का योग छायांकित भागों की कुल संख्या ज्ञात करने के समान है, जो प्रत्येक समान भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{5}$ को दर्शाता है।

इस स्थिति में कुल छायांकित भाग 3 हैं। चूँकि प्रत्येक छायांकित भाग भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{5}$ को दर्शाता है, हम देखते हैं कि 3 छायांकित भाग मिलकर भिन्न $\frac{3}{5}$ को व्यक्त करता है।

अत: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$?



उदाहरण— $\frac{4}{7}$ और $\frac{6}{7}$ का योग ज्ञात कीजिए।

आइए, पुनः दोनों को आयताकार पट्टी द्वारा दर्शाते हैं। यहाँ दोनों भिन्नों में भिन्नात्मक इकाई समान है, अर्थात् $\frac{1}{7}$, अत: प्रत्येक पट्टी को 7 बराबर भागों में बाँटेंगे।

तब $\frac{4}{7}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

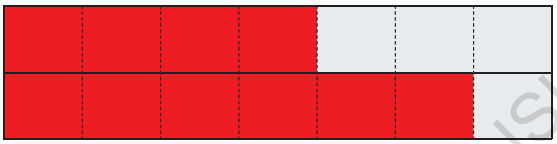
Chapter 7.indd 176 20/09/2024 16:59:31

और $\frac{6}{7}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—



इस स्थिति में छायांकित भागों की कुल संख्या 10 है, और इसका प्रत्येक छायांकित भाग भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{7}$ को दर्शाता है। इसलिए 10 छायांकित भाग मिलकर भिन्न $\frac{10}{7}$ को दर्शाते हैं, जैसा कि नीचे दी गई पट्टी में देखा जा सकता है।

समान भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों को जोड़ते समय, प्रत्येक भिन्न से भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या जोड़ेंगे।



अत: $\frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}$

$= 1 + \frac{3}{7}$

$= 1\ \frac{3}{7}$



संख्या रेखा का प्रयोग कर $\frac{4}{7} + \frac{6}{7}$ को जोड़िए। क्या आपको समान उत्तर मिला?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विभिन्न हर या भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों का योग

उदाहरण— $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{3}$ का योग ज्ञात कीजिए।

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों वाले भिन्नों को जोड़ने के लिए, पहले भिन्न को समान हर या समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलेंगे। यहाँ समान हर $3 \times 4 = 12$ बनाए जा सकते हैं अर्थात् हम भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{12}$ वाली तुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं।

Chapter 7.indd 177 20/09/2024 16:59:31

आइए, प्रत्येक दी गई भिन्न के लिए तुल्य भिन्न लिखिए।

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$

अब $\frac{3}{12}$ और $\frac{4}{12}$ की भिन्नात्मक इकाई समान है, जो कि $\frac{1}{12}$ है।

अत: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

योग की यह विधि जो कितनी भी भिन्नों को जोड़ने के लिए काम करती है, सामान्यतः पहली बार ब्रह्मगुप्त द्वारा वर्ष 628 ईस्वी में बताई गई थी। हम भिन्नों के विकास के इतिहास का वर्णन अध्याय में आगे विस्तार से करेंगे। अभी केवल भिन्नों के योग के लिए ब्रह्मगुप्त की विधि के चरणों को समझते हैं।

भिन्नों के योग के लिए ब्रह्मगुप्त विधि

1. तुल्य भिन्नों को ज्ञात कीजिए ताकि सभी भिन्नों की भिन्नात्मक इकाई समान हों। यह हरों का एक उभयनिष्ठ गुणज ज्ञात करके किया जा सकता है (उदाहरणार्थ, हरों का गुणनफल या हरों का लघुतम सार्वगुणज)
2. समान भिन्नात्मक इकाई वाली इन तुल्य भिन्नों को जोड़िए। यह अंशों को जोड़कर और हर को समान रखकर किया जा सकता है।
3. यदि आवश्यकता हो तो प्राप्त परिणाम को न्यूनतम पदों में लिखिए।

आइए, ब्रह्मगुप्त विधि का एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण— $\frac{2}{3}$ और $\frac{1}{5}$ का योग ज्ञात कीजिए।

दिए गए भिन्नों के हर 3 और 5 हैं। 3 और 5 का लघुतम सामान्य गुणज 15 है। अब हम देखते हैं,

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$, $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$

इसलिए, $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 178 20/09/2024 16:59:31

उदाहरण— $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ का योग ज्ञात कीजिए।

6 और 3 का लघुतम सामान्य गुणज 6 है।

$\frac{1}{6}$ केवल $\frac{1}{6}$ ही रहेगा।

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$

इसलिए, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

अब यदि आवश्यक हो तो भिन्न $\frac{3}{6}$ को पुनः न्यूनतम पदों में व्यक्त कर सकते हैं, यह अंश और हर दोनों को 3 (3 और 6 का सबसे बड़ा सामान्य गुणनखंड) से विभाजित करके किया जा सकता है।

$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$

अतः $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

आइए, पता लगाएँ

1. ब्रह्मगुप्त विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित भिन्नों का योग कीजिए।

   a. $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$ b. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ d. $\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ e. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

   f. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ g. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ h. $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ i. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4}$ j. $\frac{8}{3} + \frac{2}{7}$

   k. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ l. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}$ m. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

2. रहीम ने हरा पेंट बनाने के लिए $\frac{2}{3}$ लीटर पीले पेंट को $\frac{3}{4}$ लीटर नीले पेंट के साथ मिलाया। उसने कुल कितने लीटर हरा पेंट बनाया?

3. एक मीटर परिधि के मेजपोश का संपूर्ण बॉर्डर (किनारा) बनाने के लिए गीता ने $\frac{2}{5}$ मीटर लेस खरीदी और शमीम ने $\frac{3}{4}$ मीटर लेस खरीदी। उन दोनों के द्वारा खरीदी गई लेस की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए। क्या खरीदी गई लेस संपूर्ण बॉर्डर (किनारा) को ढकने के लिए पर्याप्त है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

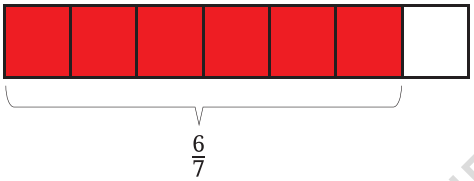
Chapter 7.indd 179 20/09/2024 16:59:32

समान भिन्नात्मक इकाई या हर वाले भिन्नों को घटाना

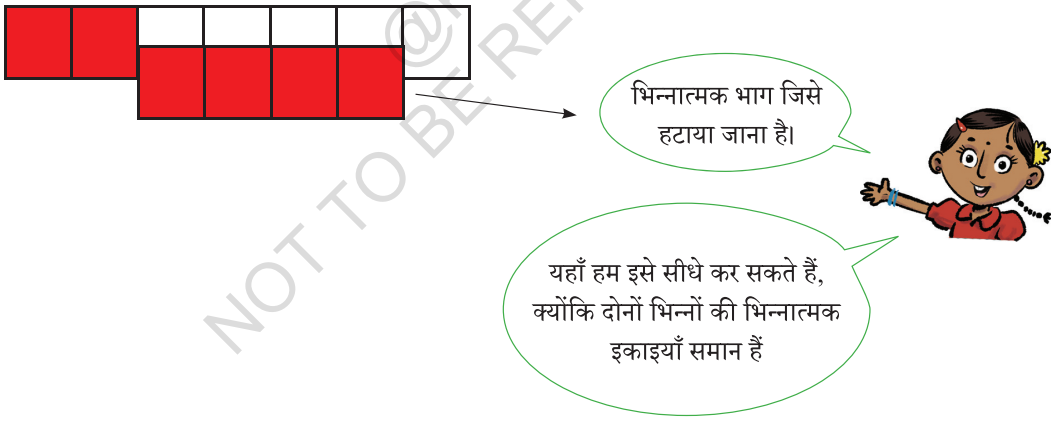
भिन्नों को घटाते समय भी ब्रह्मगुप्त विधि समान रूप से लागू होती है।

आइए, $\frac{6}{7}$ से $\frac{4}{7}$ को घटाने की समस्या से शुरू करें, अर्थात् $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$ क्या है?

इस समस्या को हल करने के लिए हम आयताकार पट्टी का पुनः प्रयोग कर सकते हैं। यहाँ, दोनों भिन्न पहले बड़े भिन्न को आयताकार पट्टी से प्रदर्शित करते हैं, जैसा कि दर्शाया गया है—



प्रत्येक छायांकित भाग $\frac{1}{7}$ को प्रदर्शित करता है। अब हमें $\frac{4}{7}$ घटाना है। ऐसा करने के लिए 4 छायांकित भागों को हटा देते हैं।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अतः हमारे पास 2 छायांकित भाग बचे हैं अर्थात् $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

यही अभ्यास संख्या रेखा के साथ करने का प्रयास कीजिए।

Chapter 7.indd 180 20/09/2024 16:59:32

आइए, पता लगाएँ

1. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ 2. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$ 3. $\frac{10}{27} - \frac{1}{27}$

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों या हरों वाले भिन्नों को घटाना

उदाहरण— $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ का मान क्या है?

जैसा कि हम पहले ही समान भिन्नात्मक इकाई वाली भिन्नों का घटाना जानते हैं। आइए, दिए गए भिन्नों को समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलते हैं।

$\frac{3}{4} = \frac{(3\times3)}{(4\times3)} = \frac{9}{12}$

हाँ! यह करके हम दो भिन्नों को आसानी से घटा सकते हैं।

सोचिए! हमने अंश और हर दोनों को 3 से गुणा करने के लिए क्यों चुना?

और इसी प्रकार

$\frac{2}{3} = \frac{(2\times4)}{(3\times4)} = \frac{8}{12}$

पुनः हमने अंश और हर दोनों को 4 से गुणा करने के लिए क्यों चुना?

अतः $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

ब्रह्मगुप्त विधि से दो भिन्नों को घटाना—

1. दिए गए भिन्नों को समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलिए अर्थात्, समान हर में।
2. समान भिन्नात्मक इकाई वाली भिन्नों को घटाइए। यह हर को समान रखकर और अंशों को घटाकर किया जा सकता है।
3. प्राप्त परिणाम को आवश्यकतानुसार न्यूनतम पदों में सरल बनाइए।

Chapter 7.indd 181 20/09/2024 16:59:32

आइए, पता लगाएँ

1. ब्रह्मगुप्त विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित को घटाइए—

   a. $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$ b. $\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$ c. $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ d. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

2. संकेतानुसार घटाइए—

   a. $\frac{13}{4}$ से $\frac{10}{3}$ b. $\frac{18}{5}$ से $\frac{23}{3}$ c. $\frac{29}{7}$ से $\frac{45}{7}$

3. निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए—

   a. जया का विद्यालय उसके घर से $\frac{7}{10}$ किमी दूर है। वह प्रतिदिन विद्यालय पहुँचने के लिए $\frac{1}{2}$ किमी ऑटो से जाती है और शेष दूरी पैदल चलकर तय करती है। वह स्कूल पहुँचने के लिए प्रतिदिन कितना पैदल चलती है?

   b. जीविका पार्क का एक पूरा चक्कर लगाने में $\frac{10}{3}$ मिनट लेती है और उसकी मित्र नमिता उसी कार्य को करने में $\frac{13}{4}$ मिनट का समय लेती है। दोनों में से कौन कम समय में पूरा चक्कर लगाती है और कितना कम समय लेती है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7.9 एक चुटकी इतिहास

क्या आप जानते हैं कि प्राचीन भारत में भिन्न को क्या कहा जाता था? संस्कृत में भी इसे *भिन्न* कहा जाता है, जिसका अर्थ है टूटा हुआ। इसे *भाग* या *अंश* अर्थात् भाग या खंड (टुकड़ा) भी कहा जाता था।

आज हम जिस प्रकार से भिन्न लिखते हैं, उसकी उत्पत्ति भारत में हुई थी। प्राचीन भारतीय गणितीय ग्रंथ जैसे कि बख्शाली पांडुलिपि (लगभग 300 ईस्वी) में जब वे $\frac{1}{2}$ लिखना चाहते थे, तो वे इसे $\frac{1}{2}$ के रूप में लिखते थे जो कि वास्तव में आज हम जिस तरह लिखते हैं, उससे बहुत मिलता-जुलता है। भिन्नों के साथ लिखने और काम करने की यह विधि भारत में अगली कई शताब्दियों तक प्रयोग होती रही, जिनमें आर्यभट्ट (499 ईस्वी), ब्रह्मगुप्त (628 ईस्वी), श्रीधराचार्य (लगभग 750 ईस्वी)

Chapter 7.indd 182 20/09/2024 16:59:32

और महावीराचार्य (लगभग 850 ईस्वी) के साथ अन्य लोग भी सम्मिलित हैं। '$\frac{1}{2}$' और अन्य भिन्नों में अंश और हर के बीच के रेखाखंड को बाद में मोरक्को के गणितज्ञ अल-हसर (12 वीं शताब्दी में) ने लिखा। अगली कुछ शताब्दियों में यह संकेत पद्धति यूरोप और पूरे विश्व में फैल गई।

भिन्न का उपयोग प्राचीन मिस्र और बेबीलोनिया सभ्यता जैसी अन्य संस्कृतियों में भी किया गया, किंतु वे मुख्य रूप में भिन्नात्मक इकाइयों का ही उपयोग करते थे, अर्थात् अंश 1 वाली भिन्नें। सामान्यतः भिन्नों को भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में व्यक्त किया जाता था, जिन्हें अब 'मिस्र भिन्न' कहा जाता है। संख्याओं को भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में लिखना, उदाहरणार्थ, $\frac{19}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ एक कला हो सकती है और यह सुंदर पहेलियों की ओर ले जाती है। हम आगे ऐसी ही एक पहेली पर विचार करेंगे।

सामान्य भिन्न (जहाँ आवश्यक नहीं कि अंश 1 हो) को सर्वप्रथम भारत में अंकगणितीय संक्रियाओं, जैसे— योग, घटाना, गुणा और यहाँ तक कि भिन्नों के विभाजन के नियमों के साथ परिचित किया गया था। *शुल्व-सूत्र* नामक प्राचीन भारतीय ग्रंथ से पता चलता है कि वैदिक काल में ही भारतीयों ने भिन्नों के साथ संक्रियाओं के नियमों की खोज कर ली थी। भिन्नों के साथ काम करने की और उनकी गणना करने के सामान्य नियमों और कार्यप्रणाली को पहली बार औपचारिक और आधुनिक रूप में ब्रह्मगुप्त द्वारा संहिताबद्ध किया गया था।

ब्रह्मगुप्त की विधि ही है जिसका प्रयोग आज हम भिन्नों को हल करने एवं उनकी गणना करने में करते हैं। उदाहरणार्थ, ब्रह्मगुप्त ने निम्नलिखित तरीके से भिन्नों को जोड़ने और घटाने का तरीका बताया—

"प्रत्येक भिन्न के अंश और हर को अन्य हरों से गुणा करने पर भिन्न एक उभयनिष्ठ हर में बदल जाता है। फिर योग के संबंध में, अंश (उक्त सरलीकरण से प्राप्त) को जोड़ा जाता है। घटाने के संबंध में, उनके अंतर को लिया जाता है।" (ब्रह्मगुप्त: ब्रह्मस्फुट सिद्धांत, श्लोक 12.2, 628 ईस्वी)

भिन्नों से संबंधित भारतीय अवधारणाएँ और विधियाँ अगली कुछ शताब्दियों में अरबों के माध्यम से यूरोप में पहुँची और 17वीं शताब्दी तक यूरोप में उसका सामान्य उपयोग होने लगा और फिर दुनिया भर में फैल गईं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 183 20/09/2024 16:59:32

पहेली!

यदि कोई समान भिन्नात्मक इकाइयों का उपयोग करता है, तो योगफल 1 प्राप्त करने के लिए भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़ना आसान है। उदाहरणार्थ—

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, आदि।

क्या आप सभी विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़कर 1 प्राप्त करने का कोई तरीका सोच सकते हैं?

दो विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़कर 1 प्राप्त करना संभव नहीं है। इसका कारण यह है कि $\frac{1}{2}$ सबसे बड़ी भिन्नात्मक इकाई है, एवं $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम एक $\frac{1}{2}$ को किसी छोटी भिन्नात्मक इकाई से बदलना होगा, किंतु तब योगफल 1 से कम होगा! अत: दो विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों का योग 1 प्राप्त करना संभव नहीं है।

फिर भी हम 1 को तीन विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में लिखने का तरीका ढूँढ़ने का प्रयत्न कर सकते हैं।

1. क्या आप तीन विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ ढूँढ़ सकते हैं, जिनका योगफल 1 हो?

   प्रयास करें

   इस समस्या का केवल एक हल है (3 भिन्नात्मक संख्याओं के क्रम बदलने तक)! क्या आप इसे ढूँढ़ सकते हैं? आगे बढ़ने से पहले इसे ढूँढ़ने का प्रयत्न करें।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

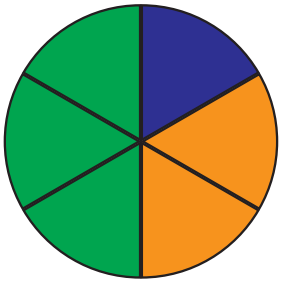
यहाँ हल को प्राप्त करने का क्रमबद्ध तरीका दिया गया है। हम जानते हैं कि $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ होगा। विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम एक $\frac{1}{3}$ को बढ़ाना होगा, एवं अन्य $\frac{1}{3}$ को उस बढ़त के संतुलन के लिए घटाना होगा। $\frac{1}{3}$ को अन्य भिन्नात्मक इकाई तक बढ़ाने का एकमात्र तरीका है, इसे $\frac{1}{2}$ से बदलना। अत: $\frac{1}{2}$ एक भिन्नात्मक इकाई अवश्य होना चाहिए।

अब $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, अब अलग भिन्नात्मक इकाई प्राप्त करने के लिए हमें एक $\frac{1}{4}$ को बढ़ाना होगा एवं अन्य $\frac{1}{4}$ को उस बढ़त के संतुलन के लिए घटाना होगा। अब $\frac{1}{4}$ को $\frac{1}{2}$ से अलग अन्य

Chapter 7.indd 184 20/09/2024 16:59:32

भिन्नात्मक इकाई तक बढ़ाने का एकमात्र तरीका है, इसे $\frac{1}{3}$ से बदलना है। अत: दो भिन्नात्मक इकाइयाँ अवश्य $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ होंगी! फिर तीसरी भिन्नात्मक संख्या क्या होनी चाहिए, जिससे कि तीनों भिन्नात्मक इकाइयों का योगफल 1 हो?

इससे स्पष्ट होता है कि क्यों उपरोक्त समस्या का केवल एक ही हल है।



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

क्या होगा यदि हम चार विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ खोजें, जिनका योगफल 1 हो?

2. क्या आप चार विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ ढूँढ़ सकते हैं, जिनका योगफल 1 हो?

परिणामत: इस समस्या के छ: हल हैं! क्या आप उनमें से कम से कम एक ढूँढ़ सकते हैं?

प्रयास करें

क्या आप सभी हल ढूँढ़ सकते हैं? आप दो एवं तीन भिन्नात्मक इकाइयों की स्थिति के समान तर्क का प्रयोग कर प्रयास कर सकते हैं या अपनी स्वयं की विधि भी ढूँढ़ सकते हैं। जैसे ही आप एक हल ढूँढ़ लेते हैं, इसके दृश्यात्मक चित्रण के लिए तब एक वृत्त को हिस्सों में बाँटने का प्रयत्न करें, जैसा कि ऊपर चित्र में किया गया है।

© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- **समान भाग (हिस्से) के रूप में भिन्न**— जब एक पूर्ण संख्या वाली इकाई को समान भागों में बाँटा एवं साझा किया जाता है, तो एक **भिन्न** प्राप्त होती है।
- **भिन्नात्मक इकाइयाँ**— जब एक संपूर्ण मूल इकाई को समान भागों में बाँटा जाता है, तो प्रत्येक **भाग भिन्नात्मक** इकाई कहलाता है।

Chapter 7.indd 185 20/09/2024 16:59:33

- **भिन्नों को पढ़ना**— किसी भिन्न जैसे $\frac{5}{6}$ में, 5 को **अंश** एवं 6 को **हर** कहा जाता है। इसे 5 बटा 6 पढ़ा जाता है।
- **मिश्रित भिन्न** में एक पूर्ण संख्यात्मक भाग एवं एक भिन्नात्मक भाग होता है।
- **संख्या रेखा**— भिन्नों को संख्या-रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या-रेखा पर इससे संबंधित एक बिंदु होता है।
- **तुल्य भिन्न**— जब दो या अधिक भिन्न समान भाग (हिस्सा) प्रदर्शित करती हैं, तो उन्हें **तुल्य भिन्न** कहा जाता है।
- **न्यूनतम पद**— भिन्न, जिसके अंश एवं हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, वह भिन्न **न्यूनतम पद** में या **सरलतम रूप** में कहलाती है।
- **भिन्नों के योग (जोड़ने) की ब्रह्मगुप्त विधि**— भिन्नों को जोड़ते समय उन्हें समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलें (अर्थात् समान हर वाली), और तब योग प्राप्त करने के लिए प्रत्येक भिन्न में भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या को जोड़ें। यह हर को समान रखते हुए अंशों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है।
- **भिन्नों को घटाने की ब्रह्मगुप्त विधि**— भिन्नों को घटाते समय उन्हें समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलें (अर्थात् समान हर वाली), और तब घटाने के लिए प्रत्येक भिन्न में भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या को घटाएँ। यह हर को समान रखते हुए अंशों को घटाकर प्राप्त किया जाता है।

©CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 7.indd 186 20/09/2024 16:59:33

8

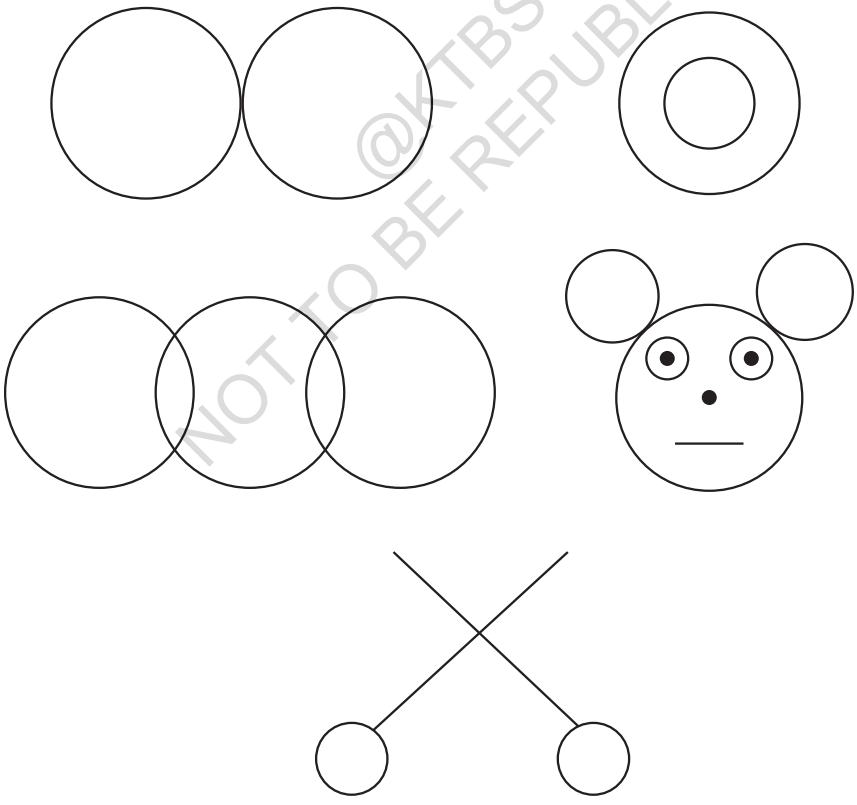
रचनाओं के साथ खेलना

0675CH08

8.1 कलाकृति

निम्नलिखित रचनाओं का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिए और मुक्त-हस्त (फ्री हैंड) द्वारा इन्हें बनाने का प्रयास कीजिए।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

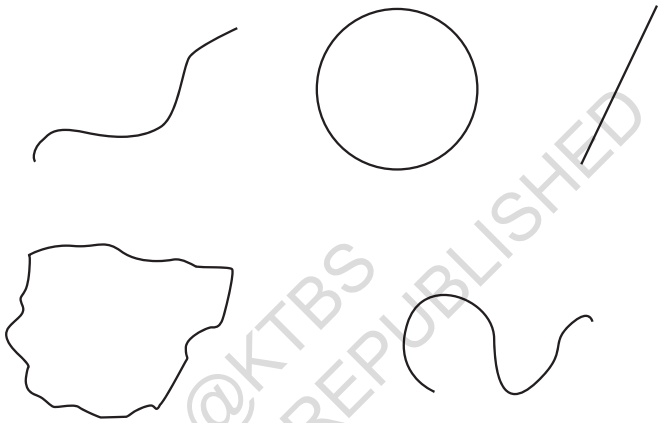


आकृति 8.1

अब अपने हाथों में एक परकार (कंपास) और रूलर (स्केल) लीजिए। आइए, देखें कि क्या हम इन उपकरणों की सहायता से इन आकृतियों को बना सकते हैं।

आइए, उससे पहले हम परकार से परिचित होते हैं। परकार किस प्रकार बना है, अवलोकन कीजिए। परकार की सहायता से हम क्या-क्या बना सकते हैं? पता लगाइए।

क्या आप वक्रों के विषय में जानते हैं? ये सभी पेंसिल द्वारा कागज पर बनाई गई आकृतियाँ हो सकती हैं, इनमें सरल रेखाएँ, वृत्त तथा अन्य आकृतियाँ सम्मिलित हैं, जैसा नीचे चित्र में दर्शाया गया है—



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

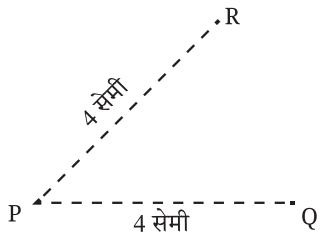
कागज पर एक बिंदु 'P' अंकित कीजिए। फिर बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर विभिन्न दिशाओं में जितने संभव हो उतने बिंदुओं को अंकित कीजिए।

सोचिए— बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर अंकित सभी बिंदुओं की कल्पना कीजिए। वे कैसे दिखाई देते हैं?

इसे बनाने का प्रयास कीजिए और वक्र रेखा के कुछ बिंदु लेकर जाँचिए कि वक्र रेखा पर अंकित बिंदु सही हैं? क्या वे P से ठीक 4 सेमी की दूरी पर हैं?

पता लगाइए, यदि अभी तक आपने ऐसा नहीं किया है, तो देखिए कि क्या परकार इस कार्य के लिए उपयोग किया जा सकता है।

इसके लिए परकार की सहायता से बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए। यह किस प्रकार किया जा सकता है?



Chapter 8.indd 188 20/09/2024 15:55:47

आप एक परकार को रूलर (स्केल) के साथ इस प्रकार खोलिए कि परकार एवं पेंसिल की नोक रूलर पर 4 सेमी की दूरी पर हों। (आकृति 8.2 देखिए)

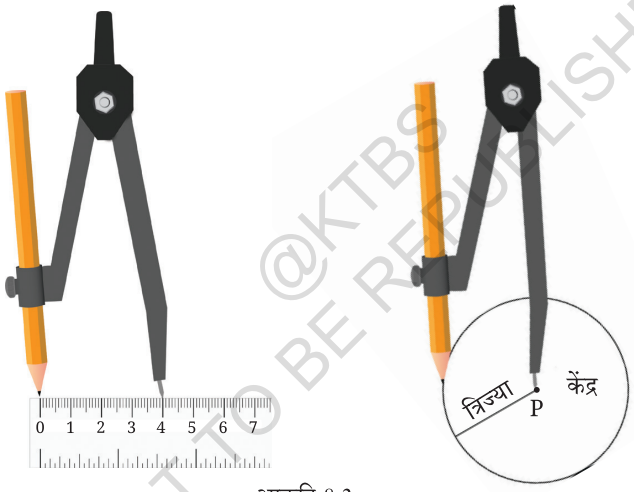
अब, परकार से पूरा वक्र बनाने का प्रयास कीजिए।

(संकेत— परकार की नोंक को स्थिर रखिए तथा केवल पेंसिल को घुमाइए)

इस वक्र का आकार कैसा है? यह एक वृत्त है!

इस वृत्त पर एक बिंदु लीजिए। P से इस बिंदु की दूरी क्या होगी— 4 सेमी के बराबर, या 4 सेमी से कम या 4 सेमी से अधिक? इसी प्रकार P तथा वृत्त पर एक अन्य बिंदु के बीच की दूरी क्या होगी?

जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, बिंदु P वृत्त का केंद्र कहलाता है, केंद्र और वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के बीच की दूरी, इसकी (वृत्त की) त्रिज्या कहलाती है।



आकृति 8.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

परकार के प्रयोग का पता लगाने के बाद आगे बढ़ें और चित्र 8.1 में दिए गए चित्रों को पुन: बनाएँ।

क्या आप इन आकृतियों को वहाँ दिखाई गई आकृतियों के समान बना सकते हैं? यदि आप चाहते हैं, तो पुन: प्रयास कीजिए।

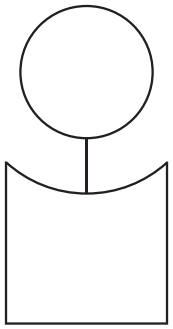
क्या उपकरणों का प्रयोग रचना को और आसान बनाता है? अब अग्रलिखित आकृतियों को बनाने का प्रयास कीजिए।

Chapter 8.indd 189 20/09/2024 15:55:48

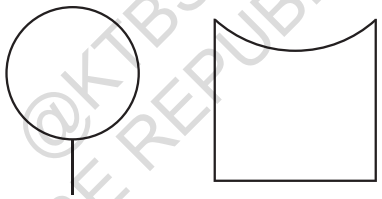
रचना कीजिए

1. एक व्यक्ति

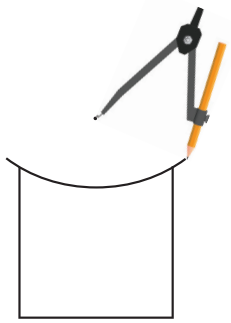
आप इसे कैसे बनाएँगे?



इस आकृति के दो घटक हैं।



पहले भाग को बनाने के लिए आपने तरीका खोज लिया होगा। दूसरा भाग बनाने के लिए इसे देखिए।



यहाँ चुनौती यह है कि परकार के सिरे को कहाँ रखा जाए और इस वक्र को बनाने के लिए कितनी त्रिज्या लेनी होगी। परकार में एक त्रिज्या निश्चित करके, परकार के सिरे को

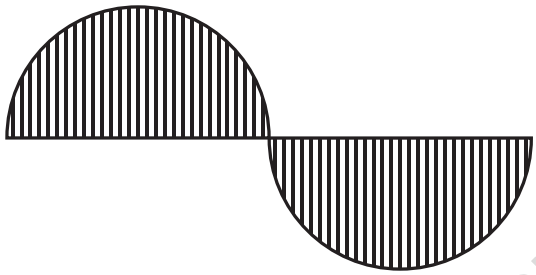
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 190 20/09/2024 15:55:48

अलग-अलग स्थान पर रखकर देखिए कि किन बिंदुओं से हमें वक्र प्राप्त होगा। परकार की नोंक को कहाँ रखना है, इसका अनुमान लगाएँ।

2. तरंगित तरंग (लहर)

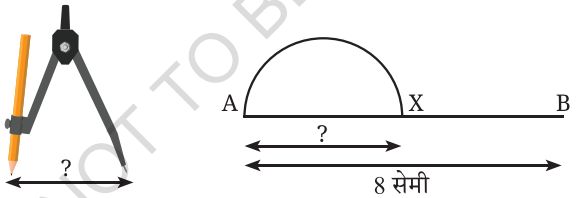
यह बनाइए



चूँकि केंद्रीय रेखाखंड की लंबाई निर्दिष्ट नहीं है, इसलिए हम इसे किसी भी लंबाई का ले सकते हैं।

हम AB को एक केंद्रीय रेखाखंड के रूप में लेते हैं, जहाँ AB = 8 सेमी है।

यहाँ, पहली लहर को अर्धवृत्त के रूप में खींचा गया है।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

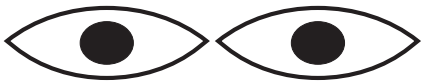
1. यह अर्धवृत बनाने के लिए परकार में कितनी लंबाई की त्रिज्या रखनी होगी? AX की लंबाई क्या होनी चाहिए?
2. भिन्न लंबाई की एक केंद्रीय रेखा (खंड) लीजिए तथा इस पर लहर बनाने का प्रयास कीजिए।
3. उन आकृतियों को पुन: बनाएँ जहाँ लहरें अर्धवृत से छोटी हैं (जैसा कि पिछले पृष्ठ पर दी 'एक व्यक्ति' के गले की आकृति में दिखाई देता है।) यहाँ चुनौती यह है कि दोनों लहरें समान हों। यह कठिन हो सकता है।

प्रयास करें

Chapter 8.indd 191 20/09/2024 15:55:48

3. आँखें

आप परकार की सहायता से ये आँखें कैसे बनाएँगे?

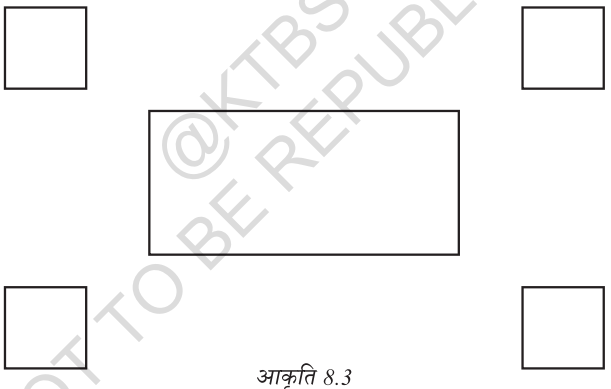


संकेत के लिए, इस अध्याय के अंत में दिए गए हैं।

रूलर (स्केल) और परकार की सहायता से अपनी पसंद की कोई अन्य कलाकृति बनाइए।

8.2 वर्ग और आयत

आइए, कुछ मूल आकृतियाँ देखें जिनकी सीमा सरल रेखाओं से बनी हैं।



आकृति 8.3

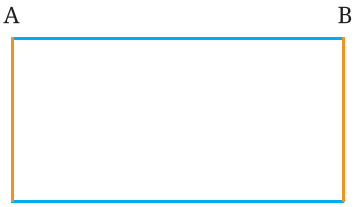
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ये आकृतियाँ कैसी हैं? हाँ, ये हमारे परिचित वर्ग और आयत हैं। परंतु इन्हें वर्ग या आयत क्या बनाता है?

माना, यह आयत ABCD है।

बिंदु A, B, C और D आयत के शीर्ष बिंदु हैं। रेखाएँ (रेखाखंड) AB, BC, CD और DA इसकी भुजाएँ हैं। ∠A, ∠B, ∠C और ∠D इसके कोण हैं।

नीली भुजाएँ AB और CD इसकी सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं, क्योंकि वे एक-दूसरे के सम्मुख स्थित हैं।



आकृति 8.4

Chapter 8.indd 192 20/09/2024 15:55:48

इसी प्रकार, AD और BC सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म है।

याद कीजिए, एक आयत में—

R1) सम्मुख भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं, और

R2) सभी कोण 90° के होते हैं।

जैसा कि आयतों के संदर्भ में किया है, वर्ग के लिए भी कोनों और भुजाओं को उसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

एक वर्ग निम्नलिखित दो गुणों को संतुष्ट करता है—

S1) सभी भुजाएँ समान होती हैं, और

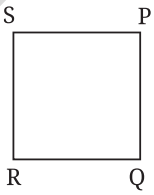
S2) सभी कोण 90° के होते हैं।

आकृति 8.4 में आयत को देखिए, इसका नाम ABCD दिया गया है। इस आयत को नामित करने के और भी तरीके, जैसे— BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD और BADC हैं। तो, क्या एक आयत का नाम उसके कोनों के लेबलों के किसी भी संयोजन का उपयोग करके रखा जा सकता है? नहीं! उदाहरण के लिए, इसे ABDC या ACBD से नामित (नामकरण) नहीं किया जा सकता। क्या आप देख सकते हैं कि कौन से नाम मान्य हैं और कौन से मान्य नहीं हैं?

एक वैध नाम में आयत के कोनों का क्रम किसी भी कोने से शुरू होकर आयत के चारों ओर एक ही दिशा में बना रहता है।

इनमें से कौन-सा नाम चित्र में दिखाए गए वर्ग के लिए मान्य नहीं है?

1. PQSR
2. SPQR
3. RSPQ
4. QRSP



घुमाए गए वर्ग और आयत

यहाँ चित्र में एक वर्गाकार कागज का टुकड़ा दिया गया है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं और सभी कोण 90° के बराबर हैं। इसे चित्र में दिखाएँ अनुसार घुमाया जाता है। क्या यह अब भी एक वर्ग है?

आइए, जाँचें कि क्या यह अभी भी वर्ग के गुणों को संतुष्ट करता है।

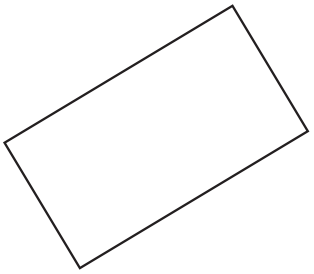
- क्या अब भी इसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं? हाँ
- क्या अब भी सभी कोणों की माप 90° है? हाँ

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 193 20/09/2024 15:56:02

वर्ग को घुमाने पर इसकी भुजाओं की लंबाई तथा कोणों के माप नहीं बदलते। इसलिए, यह घुमाई हुई आकृति वर्ग के दोनों गुणों को संतुष्ट करती है, अत: यह अब भी एक वर्ग है।

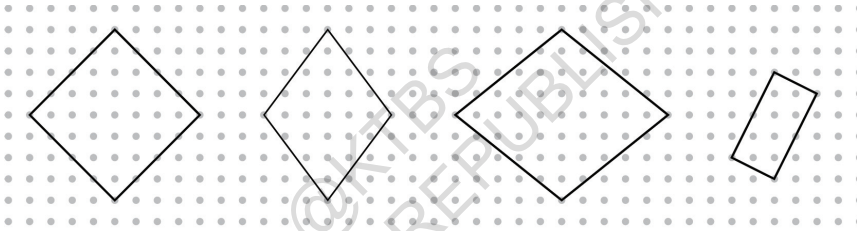
इसी तर्क के आधार पर एक घुमाया गया आयत भी आयत ही रहता है।



आइए, पता लगाएँ

1. डॉट पेपर पर एक आयत और चार वर्गों का प्रारूप खींचिए (जैसा आकृति 8.3 में दिखाया गया है) आकृति को पुन: इस प्रकार बनाने के लिए कि चारों वर्ग सममित रूप से आयत के चारों ओर रखे जाएँ, आप क्या करेंगे? अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए।

2. पहचानिए कि क्या इस संग्रह में कोई वर्ग है। यदि आवश्यकता हो तो मापन का प्रयोग कीजिए।



सोचिए— उपरोक्त आकृति में बिना मापन उपकरणों को प्रयोग किए, क्या यह बताना संभव है कि भुजाएँ बराबर हैं या नहीं, कोण समकोण हैं या नहीं? क्या हम यह केवल डॉट पेपर में शीर्षों की स्थिति देखकर ज्ञात कर सकते हैं?

3. डॉट पेपर पर एक कम से कम 3 घुमाएँ गए वर्ग और 3 घुमाएँ गए आयत खींचिए। उन्हें इस प्रकार खींचिए कि उनके कोने डॉट पेपर के डॉट्स (बिंदु) पर हों। जाँच कीजिए कि आपने जो वर्ग और आयत बनाए हैं, वे उनके संगत गुणों को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

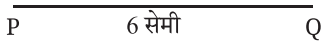
Chapter 8.indd 194 20/09/2024 15:56:03

8.3 वर्ग और आयत की रचना

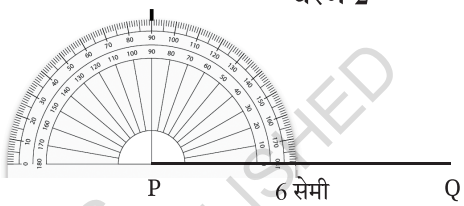
अब, हम वर्ग और आयत की रचना करना शुरू करेंगे। आप 6 सेमी भुजा वाले एक वर्ग की रचना कैसे करेंगे?

सहायता के लिए आप निम्नलिखित आकृतियाँ देख सकते हैं। 6 सेमी भुजा का एक वर्ग PQRS बनाया गया है।

चरण 1



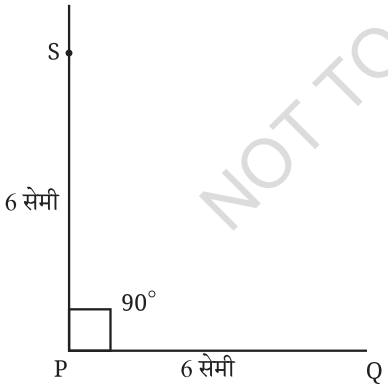
चरण 2



P से होकर PQ पर लंब खींचने के लिए एक बिंदु चिह्नित कीजिए।

चरण 3

विधि 1



रूलर का उपयोग करके लंब पर S इस प्रकार अंकित करें कि PS = 6 सेमी हो।

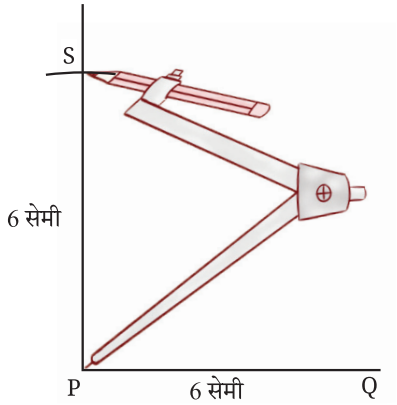
विधि 2

यह परकार की सहायता से भी किया जा सकता है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 195 20/09/2024 15:56:03

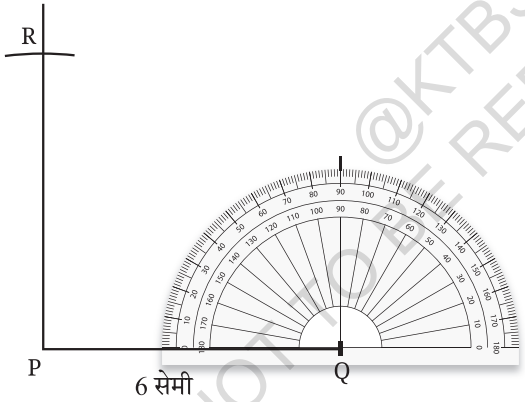




क्या आप समझ सकते हैं कि PS की लंबाई 6 सेमी क्यों होनी चाहिए?

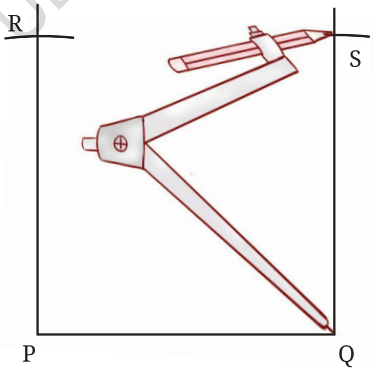
चरण 4

रेखाखंड PQ पर Q से होकर जाने वाला लंब खींचे

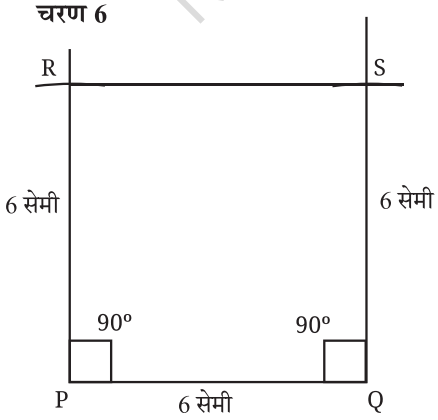


चरण 5

यदि हमने परकार का प्रयोग किया होता, तो अगला बिंदु आसानी से चिह्नित किया जा सकता था!



चरण 6



भुजा RS की लंबाई कितनी है तथा ∠R एवं ∠S की माप क्या है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 196 20/09/2024 15:56:03

रचना कीजिए

1. 6 सेमी और 4 सेमी लंबी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए? रचना के बाद जाँच कीजिए कि क्या ये आयत के दोनों गुणों को संतुष्ट करता है?
2. 2 सेमी और 10 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए? रचना के बाद जाँच कीजिए कि क्या ये आयत के दोनों गुणों को संतुष्ट करता है?
3. क्या 4 भुजाओं वाली ऐसी आकृति की रचना करना संभव है, जिसमें—
   - सभी कोण 90° के बराबर हों, परंतु
   - सम्मुख भुजाएँ बराबर नहीं हों?

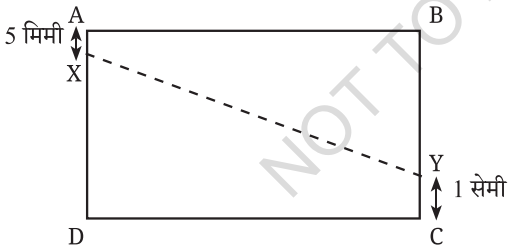


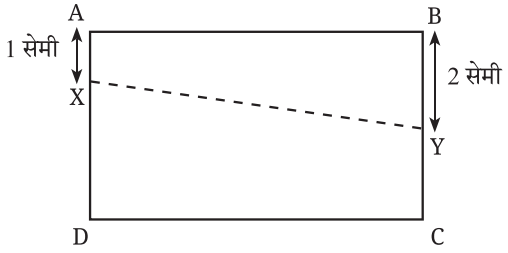
8.4 आयतों में एक खोज

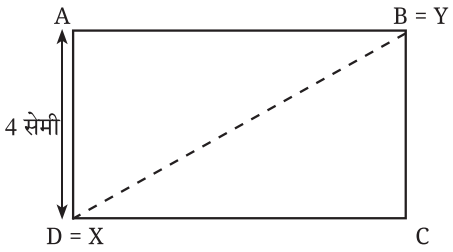
एक आयत ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 7 सेमी और BC = 4 सेमी हो।

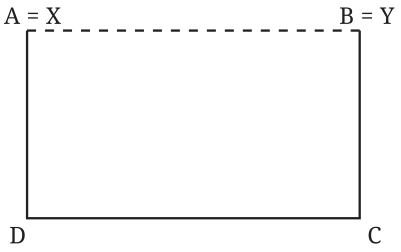
एक ऐसे बिंदु X की कल्पना कीजिए, जिसे भुजा AD पर कहीं भी चिह्नित किया जा सकता है। इसी प्रकार, एक ऐसे बिंदु Y की कल्पना कीजिए, जिसे भुजा BC पर कहीं भी ले जाया जा सकता है। ध्यान दीजिए की X को अंत्य-बिंदु A और D पर भी रखा जा सकता है। इसी प्रकार, Y को अंत्य-बिंदु B और C पर भी रखा जा सकता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED









Chapter 8.indd 197 20/09/2024 15:56:03

किन स्थानों पर बिंदु X और Y परस्पर निकटतम होंगे? आपके अनुसार वे कब परस्पर अधिकतम दूरी पर होंगे? आपका सहज-ज्ञान क्या कहता है? अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा

अब, अपने अनुमानों के बिंदु X और Y को भुजाओं पर वास्तविक रूप में रख कर अपने अनुमानों का सत्यापन करें। मापिए वे कितने निकट या दूर हैं?

X और Y के बीच की दूरी को रेखाखंड XY की लंबाई माप कर ज्ञात किया जा सकता है।

बिंदु X और Y के बीच की न्यूनतम दूरी की तुलना AB की लंबाई से किस प्रकार की जा सकती है?

X और Y की स्थिति बदलें और जाँचें कि क्या कोई अन्य स्थिति है जहाँ वे अपने निकटतम या अधिकतम दूर हैं। आप X और Y के विभिन्न स्थानों को लेकर इस आयत की अनेक प्रतिलिपियों की रचना कर सकते हैं।

X और Y की विभिन्न स्थितियों के लिए XY की लंबाइयों का हिसाब आप कैसे रखेंगे?

ऐसा करने की एक विधि यह है। मान लीजिए कि यहाँ X और Y की कुछ स्थितियाँ हैं, जिन पर आप विचार कर चुके हैं—

- जब A से X की दूरी 5 मिमी है तथा B से Y की दूरी 3 सेमी है, तब XY = ___ सेमी ____ मिमी है।
- जब A से X की दूरी 1 सेमी है तथा B से Y की दूरी 1 सेमी है, तब XY = ____ सेमी ____ मिमी है।
- जब A से X की दूरी 2 सेमी है तथा B से Y की दूरी 4 सेमी है, तब XY = ____ सेमी ____ मिमी है। तथा आगे भी।

क्या इसे लिखने की कोई संक्षिप्त विधि है? हम देखते हैं कि इन सभी वाक्यों में केवल X और Y की स्थितियाँ तथा XY की लंबाइयों में परिवर्तन हो रहे हैं। अतः हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं—

A से X की दूरी	B से Y की दूरी	XY की लंबाई

© @YTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 198 20/09/2024 15:56:03

- क्या आपने यह जाँचा, कि जब X और Y को क्रमश: A और B से समान दूरी पर रखते हैं, तब XY की लंबाई क्या होती है? उदाहरण के लिए, जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में होता है—

A से X की दूरी	B से Y की दूरी	XY की लंबाई
5 मिमी	5 मिमी	
1 सेमी	1 सेमी	
1 सेमी 5 मिमी	1 सेमी 5 मिमी	

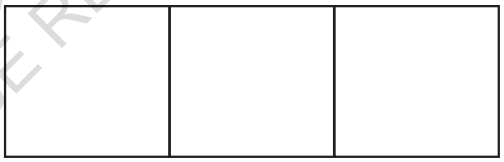
और आगे इसी प्रकार।

- **इनमें से प्रत्येक स्थिति का अवलोकन कीजिए?**
  1. AB की लंबाई की तुलना में XY की लंबाई कैसे है? तथा
  2. चार चतुर्भुजीय आकृति ABYX का आकार।
- X और Y के बीच अधिकतम दूरी को AC या BD की लंबाई से कैसे तुलना करेंगे?

रचना कीजिए

आयतों को तोड़ना

एक ऐसे आयत की रचना कीजिए जिसे 3 समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सके।



हल

यदि यह कठिन प्रतीत होता है, तो आइए इस समस्या को सरल करने का प्रयास कीजिए।

- *खोजिए*

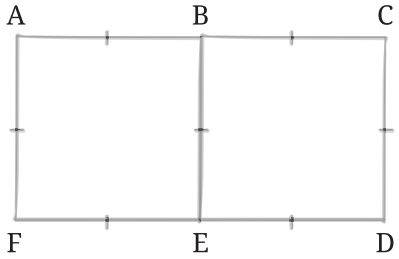
क्या आप ऐसे आयत की रचना कर सकते हैं, जिसे दो समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सकता है? क्या आप यह प्रयास कर सकते हैं?

यह बुद्धिमानी होगी कि पहले योजना बनाई जाएँ और फिर रचना की जाएँ। परंतु हम योजना कैसे बनाएँ? क्या इसके विषय में आप कोई तरीका सोच सकते हैं?

एक तरीका यह है कि अंतिम आकृति का एक कच्चा चित्र बनाकर उसकी कल्पना की जाएँ।

© @KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 199 20/09/2024 15:56:03



इस आकृति से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

क्या आप समान भुजाओं की पहचान कर सकते हैं?

चूंकि दोनों वर्ग समरूप हैं, इसलिए

AB = BC और FE = ED है।

चूँकि ABEF और BCDE वर्ग हैं, इसलिए इन वर्गों में से प्रत्येक की सभी भुजाएँ समान हैं। इसे निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है—

AF = AB = BE = FE

BE = BC = CD = ED

अतः सभी छोटे रेखाखंड समान हैं।

समान भुजाओं को दर्शाने के लिए एक परिपाटी का अनुसरण किया जाता है। ऐसा इन भुजाओं पर एक चिह्न '।' अंकित करके किया जाता है। ऊपर दी कच्ची (रफ) आकृति को देखिए। उपरोक्त विश्लेषण द्वारा क्या आप इसकी रचना करने का प्रयास कर सकते हैं? याद रखिए, आपको ऐसे आयत की रचना करने के लिए कहा गया है, जिसे तीन समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सके तथा इसके लिए कोई मापन नहीं दिए गए हैं।

आयत ACDF बनाने में AF को कोई भी लंबाई निर्दिष्ट कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, हम यदि AF = 4 सेमी निर्दिष्ट करते हैं, तो AC की लंबाई क्या होनी चाहिए?

खोजिए

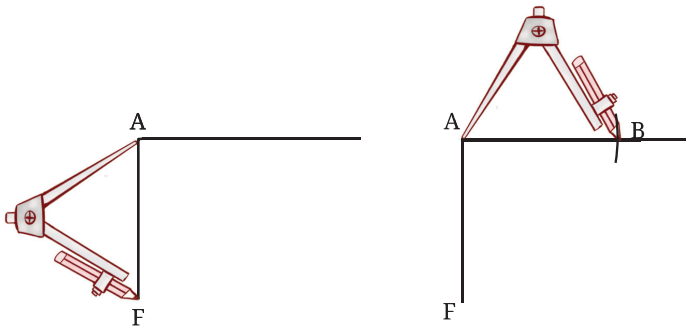
क्या अब आयत को पूरा किया जा सकता है?

वस्तुतः, हम रूलर से AF की लंबाई को मापे बिना ही, AF खींच कर रचना प्रारंभ कर सकते हैं। इसके बाद, हम AF पर एक लंब इस प्रकार खींच सकते हैं जो दूसरी भुजा को समाहित करने के लिए पर्याप्त, लंबी हो। क्योंकि AB = AF है, इसलिए हमें उपरोक्त लंब पर AF के बराबर की लंबाई काटनी है, जिससे हमें बिंदु B प्राप्त होगा। बिना रूलर के हम यह कार्य कैसे करते हैं? क्या यह कार्य परकार का उपयोग करते हुए किया जा सकता है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 200 20/09/2024 15:56:04

अवलोकन करें, कि परकार का प्रयोग कर किस प्रकार AF की लंबाई मापी जाती है।



इसका उपयोग B और C बिंदुओं को अंकित करने के लिए कीजिए तथा आयत को पूरा कीजिए।

इस विचार के साथ एक आयत बनाने का प्रयास कीजिए जिसे तीन समान वर्गों में विभाजित किया जा सकें।

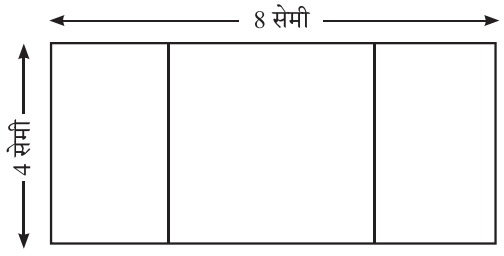
उस आयत की भुजाओं की लंबाई बताइए, जिसे निम्नलिखित में विभाजित नहीं किया जा सकता है—

- दो समरूप वर्ग
- तीन समरूप वर्ग

रचना कीजिए

1. एक आयत के अंदर वर्ग

8 सेमी और 4 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए। इस आयत के अंदर आप नीचे आकृति में दर्शाए अनुसार एक वर्ग की रचना किस प्रकार करेंगे, जिससे कि यह वर्ग आयत के ठीक बीचों-बीच रहे?

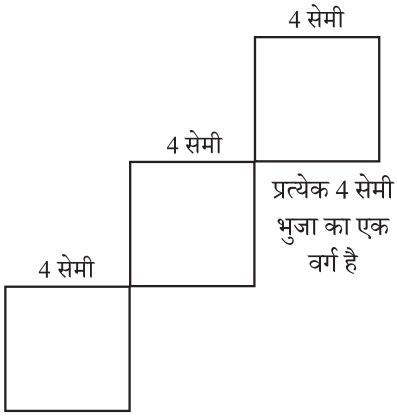


@KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 201 20/09/2024 15:56:04

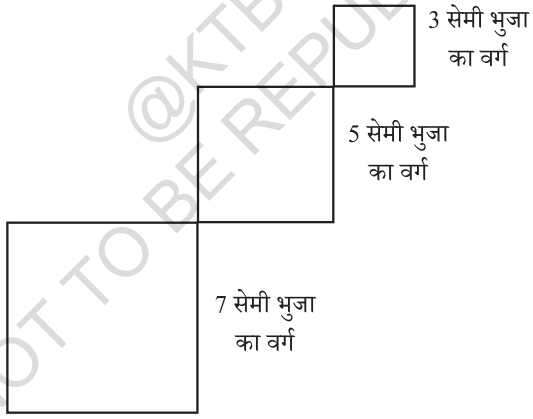
संकेत— एक कच्ची (रफ) आकृति खींचिए। इस वर्ग की भुजा क्या होगी? बाहरी आयत और वर्ग के कोनों के बीच में कितनी दूरी होगी?

2. गिरते हुए वर्ग



सुनिश्चित करें कि वर्ग उसी तरह सरेखित हों जिस तरह वे दिखाए गए हैं।

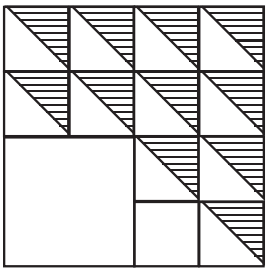
अब, यह प्रयास कीजिए



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

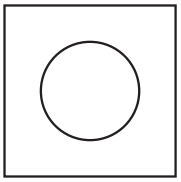
3. छायांकन

दी गई आकृति को बनाइए। अपनी इच्छा से मापन चुनिए। ध्यान दीजिए कि बड़ी चतुर्भुजीय आकृति एक वर्ग है तथा इसी प्रकार छोटी आकृतियाँ भी वर्ग हैं।



Chapter 8.indd 202 20/09/2024 15:56:04

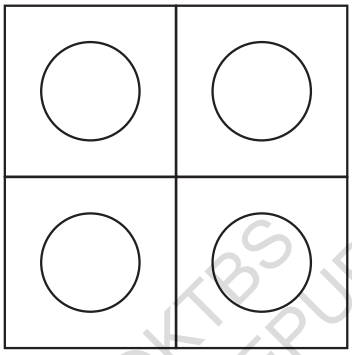
4. वर्ग जिसके अंदर छेद है



ध्यान दें कि वृत्ताकार छेद, वर्ग के ठीक बीचों बीच है।

संकेत— सोचिए कि वृत्त का केंद्र कहाँ होना चाहिए।

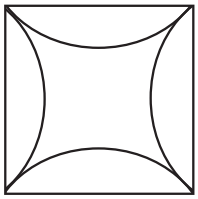
5. अधिक छेदों वाले वर्ग



6. वक्रों वाला वर्ग

यह 8 सेमी की भुजा का एक वर्ग है।

संकेत— सोचिए कि परकार के नुकीले सिरे को कहाँ रखा जाए ताकि चारों चाप (arc) प्रत्येक भुजा से समान रूप से उभरें। प्रयत्न कीजिए!

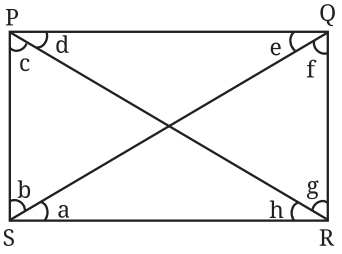


प्रयास करें

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.5 आयतों और वर्गों के विकर्णों की खोज करना

एक आयत PQRS पर विचार कीजिए। PR और QS को मिलाइए। ये दोनों रेखाखंड इस आयत के **विकर्ण (diagonals)** कहलाते हैं।



विकर्णों की लंबाइयों की तुलना कीजिए। पहले पूर्वानुमान लगाइए, फिर आकृति में दिखाए अनुसार बिंदुओं को अंकित करते हुए आयत बनाकर विकर्णों को मापिए।

Chapter 8.indd 203 20/09/2024 15:56:04

आयत PQRS में P और R पर बने समकोणों को सम्मुख कोण (opposite angles) कहा जाता है। सम्मुख कोणों के अन्य युग्म Q और S पर बनें हैं।

ध्यान दीजिए कि एक विकर्ण, सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म के कोणों को दो छोटे कोणों में विभाजित करता है। दी गई आकृति में विकर्ण PR, $\angle R$ को दो छोटे कोणों में विभाजित करता है, जिन्हें g और h कहा गया है। यही विकर्ण कोण P को कोणों c और d में भी विभाजित करता है। क्या g और h बराबर हैं? क्या c और d बराबर हैं?

पहले पूर्वानुमान लगाइए, फिर कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं? उन कोण-युग्मों की पहचान कीजिए जो बराबर हैं।

खोजिए

एक आयत की रचना किस प्रकार करें कि विकर्ण सम्मुख कोणों को बराबर भागों में विभाजित करे?

आप अपने प्रेक्षणों को किस प्रकार अंकित करेंगे? पहले, उन मापदंडों (parameters) की पहचान कीजिए, जिन पर ध्यान देने की आवश्यकता है। वे आयत की भुजाएँ हैं तथा दो विकर्णों द्वारा बनाए गए 8 कोण हैं। क्या कोई अन्य मापन भी हैं, जिन पर आप अपनी दृष्टि रखना चाहेंगे?

भुजाएँ	A	B	C	D	E	F	G	H

अपने प्रयोग में क्या आपने उस स्थिति पर विचार किया था, जिसमें आयत की चारों भुजाएँ बराबर हैं? अर्थात् क्या आपने एक वर्ग की स्थिति पर विचार किया था? देखिए की इस विशिष्ट स्थिति में क्या होता है।

कोणों और भुजाओं के संदर्भ में आपने कौन-कौन से व्यापक नियम प्रेक्षित किए? उन्हें बनाने का प्रयास कीजिए तथा अपने सहपाठियों से उनकी चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा

कोई यह किस प्रकार सुनिश्चित कर सकता है कि जो भी नियम आपने देखे हैं, वे सदैव सत्य होंगे?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

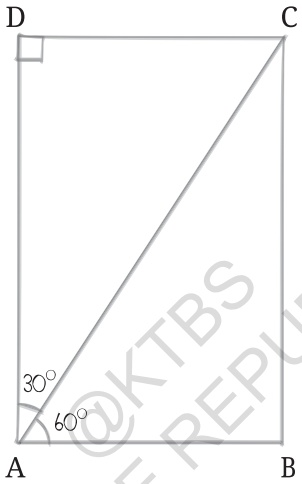
Chapter 8.indd 204 20/09/2024 15:56:04

रचना कीजिए

1. एक आयत की रचना कीजिए, जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को $60°$ और $30°$ के कोणों में विभाजित करता हो।

हल

एक कच्ची (रफ) आकृति से प्रारंभ करते हैं।

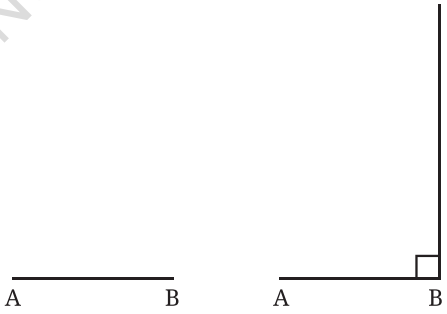


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इसके भागों को किस क्रम में बनाया जा सकता है?

हम संक्षिप्त रूप में, रेखाचित्र के संभव क्रम को बनाते हैं।

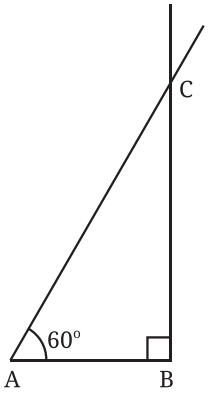
चरण 1



किसी AB रेखा को कल्पना के अनुसार खींचा गया है। अगला बिंदु क्या होगा जिसे अंकित करना है।

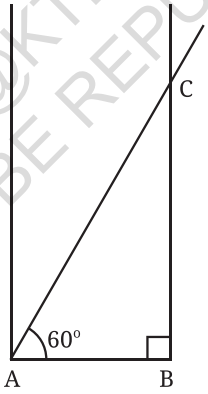
Chapter 8.indd 205 20/09/2024 15:56:05

चरण 2



चरण 3

हम वह रेखा जानते हैं जिस पर बिंदु D स्थित है। AB पर बिंदु A से गुजरने वाली एक लंब रेखा बनाइए।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अब $\angle A$ दो कोणों में विभाजित किया गया है। एक कोण 60° का है। जाँचिए कि दूसरा कोण क्या है।

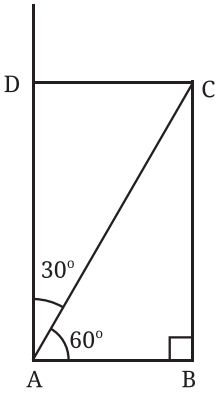
बिंदु D को ज्ञात करने की कम से कम दो विधियाँ हैं—

- पहला, हम इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि आयत में सभी कोण समकोण होते हैं।
- दूसरा, आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

Chapter 8.indd 206 20/09/2024 15:56:05

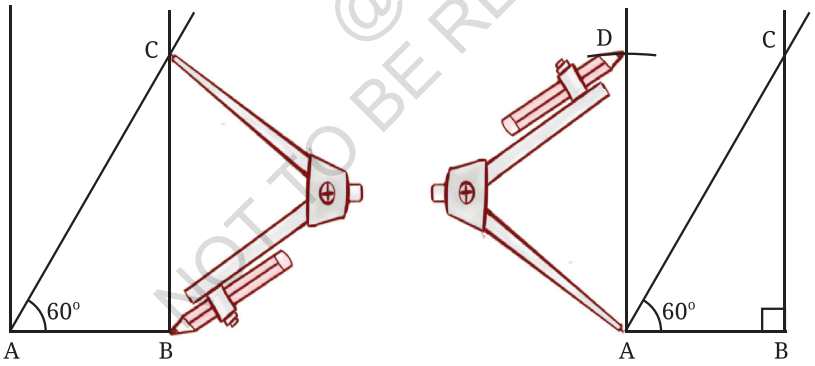
चरण 4

विधि 1



BC पर बिंदु C से लंब रेखा खींचिए जिससे बिंदु D प्राप्त हो।

विधि 2



परकार की सहायता से बिंदु D को इस प्रकार अंकित कीजिए कि AD = BC हो। CD को मिलाइए ताकि वांछित आयत प्राप्त हो।

हमने देखा कि जब आयत की भुजाएँ दी होती हैं तो उसकी रचना कैसे की जाती है, लेकिन उस स्थिति में हम क्या करेंगे जब एक भुजा और एक विकर्ण दिया गया हो?

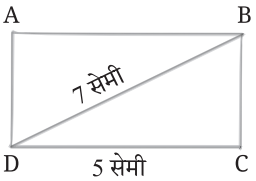
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 207 20/09/2024 15:56:05

2. एक आयत की रचना कीजिए, जिसकी एक भुजा 5 सेमी है तथा विकर्ण की लंबाई 7 सेमी है।

हल

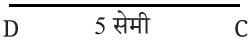
आइए, एक कच्ची (रफ) आरेख खींचते हैं।



आइए, रचना के चरणों पर निर्णय लें। किस रेखा को सबसे पहले खीचा जा सकता है?

चरण 1

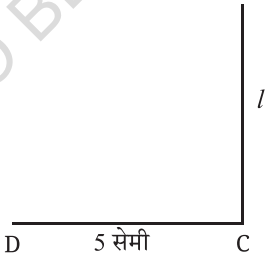
5 सेमी की लंबाई वाले आधार CD की सरलता से रचना की जा सकती है।



अब आगे?

चरण 2

CD के बिंदु C पर लंबवत रेखा बनाइए। इसे हम रेखा '*l*' कहेंगे।



यह आसान है क्योंकि हम जानते हैं कि यह रेखा '*l*' आधार पर लंब होगी। बिंदु B इसी रेखा *l* पर कहीं स्थित होना चाहिए।

हम इसका पता किस प्रकार लगाएँगे? B की स्थिति के बारे में हम और क्या जानते हैं?

हम जानते हैं कि यह D से 7 सेमी की दूरी पर है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 208 20/09/2024 15:56:05

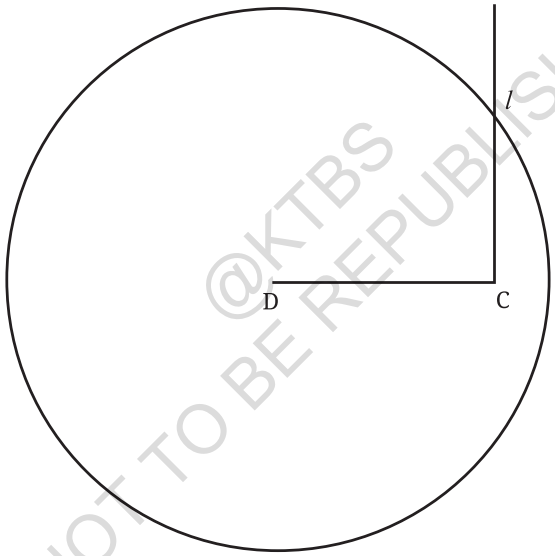
एक विधि यह है कि एक रूलर लिया जाए तथा उसे इस प्रकार घुमाया जाए कि रेखा *l* पर बिंदु D से 7 सेमी दूरी पर बिंदु B प्राप्त हो जाए। परंतु इसके लिए प्रयास और त्रुटि विधि की आवश्यकता है। ऐसा करने की एक अन्य प्रभावशाली विधि है, जिसमें प्रयास और त्रुटि विधि की आवश्यकता नहीं होती।

इसके लिए, D से 7 सेमी की दूरी पर वांछित बिंदु प्राप्त करने के स्थान पर, आइए उन सभी बिंदुओं को प्राप्त करने की एक तरीका खोजें जो D से 7 सेमी की दूरी पर है।

हम जानते हैं कि यह आकार क्या है।

चरण 3

विधि 1



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

केंद्र D लेकर, त्रिज्या 7 सेमी का एक वृत्त खींचिए।

क्या आप यहाँ बिंदु B को निर्धारित कर सकते हैं? स्मरण कीजिए की यह बिंदु D से 7 सेमी की दूरी पर है तथा रेखा *l* पर स्थित है।

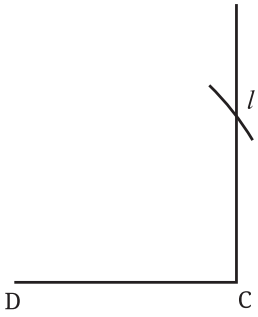
उस बिंदु पर विचार कीजिए, जहाँ यह वृत्त तथा रेखा प्रतिच्छेद करते हैं। इसकी बिंदु D से दूरी क्या है? यदि आवश्यकता हो, तो अपनी आकृति की जाँच कीजिए। आप क्या देखते हैं?

वह बिंदु जहाँ वृत्त रेखा *l* को प्रतिच्छेद करता है, वही वांछित बिंदु B है।

Chapter 8.indd 209 20/09/2024 15:56:06

विधि 2

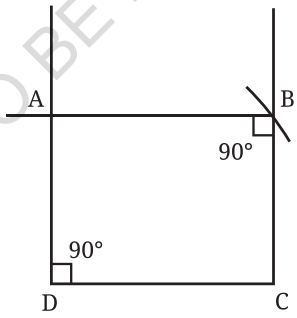
बिंदु B को निर्धारित करने के लिए क्या संपूर्ण वृत्त का खींचना आवश्यक था? हम देख सकते हैं कि रेखा *l* के समीप, केवल एक चाप खींचने की ही आवश्यकता है। अतः तीसरा चरण चित्र में दिखाए अनुसार किया जा सकता है।



आयत के तीनों बिंदुओं को चिह्नित करने के बाद हमें अब केवल इस आयत को पूरा करना है। स्मरण कीजिए कि हम पिछले प्रश्न में भी ऐसी ही स्थिति में थे। हमने यहाँ से आयत को पूरा करने की दो विधियाँ देखीं। हम इनमें से किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

@KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

चरण 4



DC और BC पर लंब खींचिए जो क्रमशः बिंदुओं D और B से होकर जाएँ। जिस बिंदु पर ये रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं, वह चौथा बिंदु A है।

जाँच कीजिए कि क्या ABCD वास्तव में एक आयत है जो गुणों R1 तथा R2 को संतुष्ट करता है।

Chapter 8.indd 210 20/09/2024 15:56:06

रचना कीजिए

1. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को 50° और 40° में विभाजित करता हो।
2. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को 45° और 45° में विभाजित करता हो। आप इसकी भुजाओं के बारे में क्या देखते है?
3. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 4 सेमी है और विकर्ण की लंबाई 8 सेमी है।
4. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 3 सेमी है और विकर्ण की लंबाई 7 सेमी है।

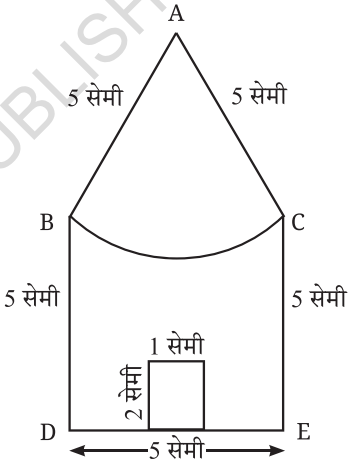
8.6 दो दिए हुए बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु

रचना कीजिए

घर

इस आकृति को पुनः बनाइए।

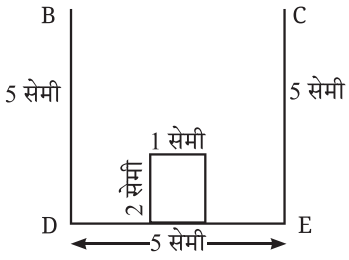
ध्यान दीजिए कि उपरोक्त घर की सीमा (border) को बनाने वाले सभी रेखाखंडों की लंबाई 5 सेमी है।



हल

पहला कार्य इसकी पहचान करना है कि रेखाओं और वक्रों को किस अनुक्रम में खींचा जाना है।

चरण 1



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

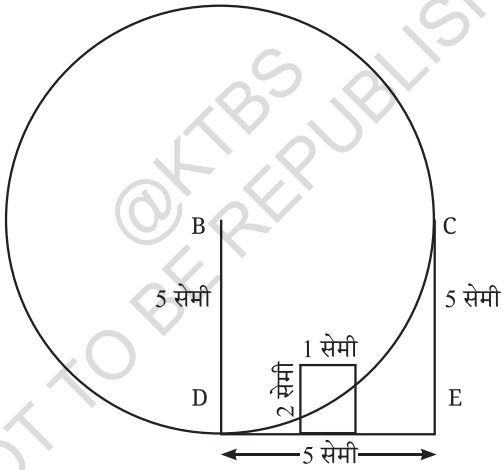
Chapter 8.indd 211 20/09/2024 15:56:06

क्या आप इस आकृति को पूरा कर सकते हैं? प्रयास कीजिए!

हमें बिंदु A को निर्धारित करने की आवश्यकता है, जो बिंदु B और बिंदु C से 5 सेमी की दूरी पर है। आपने अनुभव कर लिया होगा कि यह केवल रूलर के उपयोग से किया जा सकता है। हालाँकि, इसमें बहुत सारे प्रयास और त्रुटियाँ हो सकती हैं। इस रचना को सरल कैसे किया जा सकता है। यदि आपने यह अनुमान लगा लिया है कि ऐसा परकार के उपयोग से किया जा सकता है, तो आप सही हैं। आगे बढ़िए तथा खोजिए कि किस प्रकार बिना 'प्रयास और त्रुटि' के बिंदु A को निर्धारित किया जा सकता है।

इस समस्या में बिंदु A को निर्धारित करने और पिछले भाग के दूसरे उदाहरण के हल के तीसरे चरण में बिंदु B को निर्धारित करने में एक समानता है। (पृष्ठ संख्या 209 देखिए)

चरण 2



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक वक्र को खींचिए जिसके सभी बिंदु B से 5 सेमी की दूरी पर हैं। B केंद्र वाले वृत की त्रिज्या 5 सेमी होनी चाहिए।

क्या इससे बिंदु A को निर्धारित करने में सहायता मिलती है? रचना कीजिए तथा इस आकृति में खोज कीजिए।

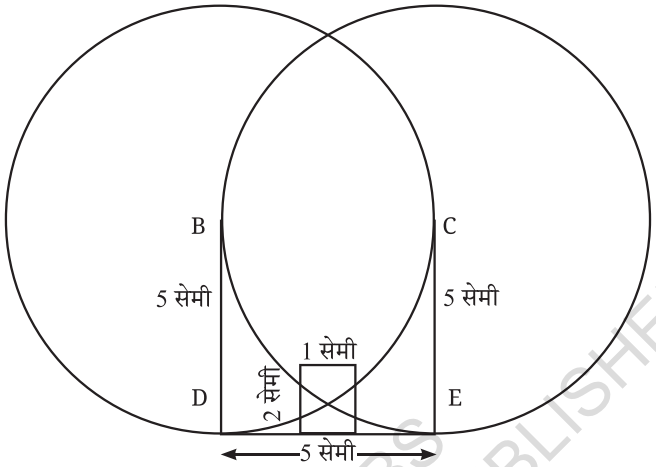
वृत पर स्थित वह बिंदु जिसकी C से दूरी 5 सेमी है, से बिंदु A निर्धारित किया जा सकता है। पुन: यह एक रूलर के उपयोग से किया जा सकता है। परंतु, क्या हम इसके लिए एक परकार का भी प्रयोग कर सकते हैं?

Chapter 8.indd 212 20/09/2024 15:56:06

चरण 3

विधि 1

केंद्र C और त्रिज्या 5 सेमी लेकर, परकार की सहायता से एक वृत्त खींचिए।



क्या आप बिंदु A को निर्धारित कर पाए? अपनी कॉपी पर इस आकृति को जाँचिए। आप क्या देखते हैं?

उस बिंदु को देखिए, जहाँ दोनों वृत्त प्रतिच्छेद करते हैं। यह बिंदु B से कितनी दूरी पर है?

यह बिंदु C से कितनी दूरी पर है।

अत: बिंदु A यहाँ स्थित है।

सोचिए

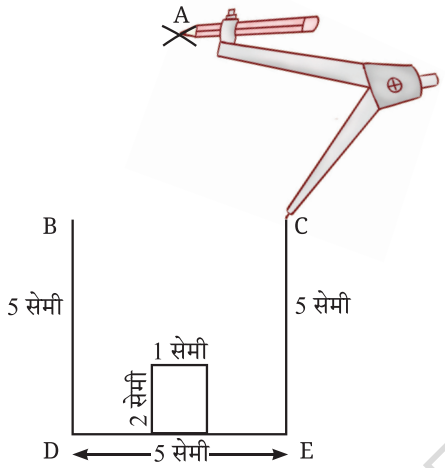
क्या बिंदु A को प्राप्त करने के लिए दोनों वृत्तों को पूरा खींचना आवश्यक था? हमें केवल इन वृत्तों के भागों की ही आवश्यकता थी।

विधि 2

अत: बिंदु A को बिंदु B और बिंदु C से 5 सेमी त्रिज्या की चापों को खींचकर भी प्राप्त किया जा सकता था, जिनकी त्रिज्या बिंदु B और C से 5 सेमी थी।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 213 20/09/2024 15:56:06



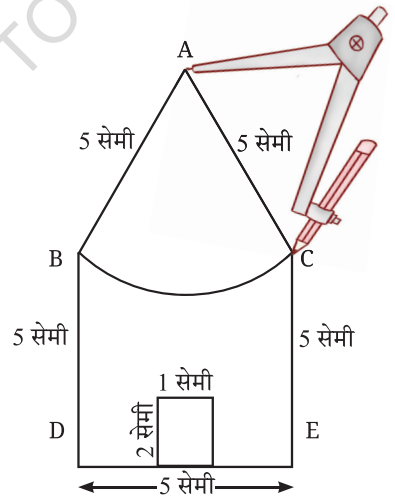
A को B और C से सरल रेखाओं द्वारा जोड़िए।

बिंदु A को प्राप्त करने के बाद, बचे हुए चापों की रचना ही शेष है। हम इसे कैसे करेंगे?

क्या हम इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि A, B और C दोनों से 5 सेमी की दूरी पर है?

चरण 4

परकार में 5 सेमी त्रिज्या लीजिए और A से B और C को स्पर्श करते हुए चाप खींचे; जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दर्शाया गया है।



अब घर तैयार है!

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 8.indd 214 20/09/2024 15:56:06

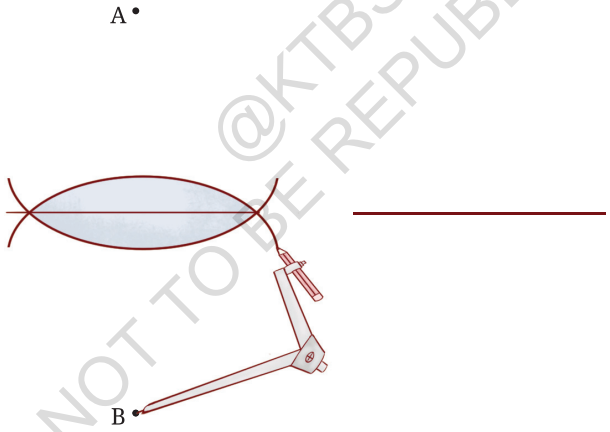
रचना कीजिए

1. इससे बड़े एक घर का निर्माण कीजिए जिसकी सभी भुजाएँ 7 सेमी लंबी हों।
2. घर की रचना में सम्मिलित संकल्पनाओं का प्रयोग करते हुए, सेक्शन कलाकृति से 'एक व्यक्ति', 'तरंगित लहर' और 'आँखें' का पुन: सृजन करने का प्रयास करें।
3. क्या चार समान भुजाओं वाली एक आकृति बनाई जा सकती है, जो वर्ग न हो? यदि ऐसी आकृति का अस्तित्व है, तो क्या आप इसकी रचना कर सकते हैं?

संकेत

A) आँखें [8.1 'कलाकृति' एवं उपरोक्त 'रचना कीजिए'— 2 से (पृष्ठ संख्या 215)]

आकृति में रचना का एक भाग दिखाया गया है। इसे ध्यान से देखिए। इसमें आप बहुत हल्के रंग के दो क्षैतिज रेखाखंड देखेंगे। ज्यामितीय रचनाओं में हमें कुछ सहायक वक्र या आकृतियाँ बनानी होती हैं, जो आकृति का अंश नहीं होते किंतु रचना में सहायक होते हैं।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

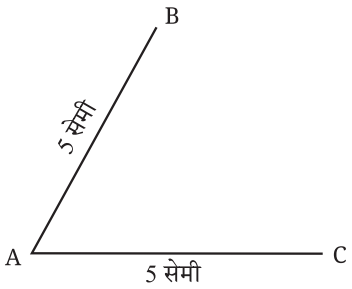
आँख के ऊपर और नीचे के वक्रों को बनाने की प्रक्रिया वही है जिसे आकृति 'एक व्यक्ति' में प्रयोग किया गया था। बिंदु A और B वे स्थान हैं जहाँ परकार के सिरे को आँख के वक्रों को खींचते समय रखा जाता है। ध्यान रहे कि ऊपरी और निचले वक्र मिलकर एक सममित आकृति बनाएँ। ऐसा करने के लिए, इन बिंदुओं A और B को कहाँ रखा जाए या निर्धारित किया जाए? एक अनुमान लगाइए।

Chapter 8.indd 215 20/09/2024 15:56:06

आँखों को जितना संभव हो सममित और समरूप बनाने का प्रयास कीजिए। संभव है इसमें बहुत प्रयासों की आवश्यकता हो।

B) [उपरोक्त 'रचना कीजिए'— 3 से (पृष्ठ संख्या 215)]

रचना के उद्देश्य से, आइए हम भुजा की लंबाई 5 सेमी मान लेते हैं। दी गई आकृति पर विचार करें।



हमें इस चार भुजा वाली आकृति को बनाने के लिए केवल एक और बिंदु की आवश्यकता है। माना कि वह बिंदु D है, जो बिंदु B और C से 5 सेमी दूरी पर होना चाहिए। इस तरह का बिंदु कैसे ज्ञात किया जा सकता है?

क्या 'घर' समस्या में प्रयुक्त किसी भी विधि का प्रयोग यहाँ किया जा सकता है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

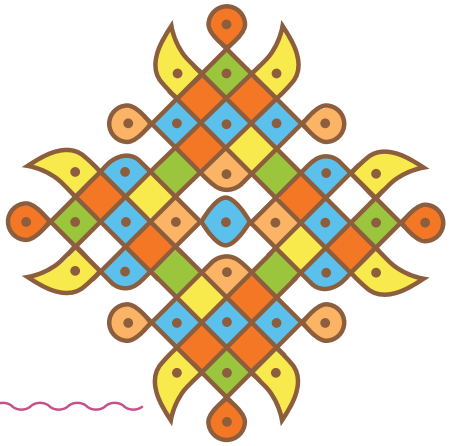
सारांश

- वृत्त के सभी बिंदु, केंद्र से समान दूरी पर होते हैं, यह दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।
- वृत्त और उसके भागों की रचना के लिए परकार का प्रयोग किया जा सकता है।
- एक दी हुई आकृति की रचना की योजना बनाने के लिए पहले रफ आकृति बनाना सहायक हो सकता है।
- एक आयत की रचना की जा सकती है, यदि उसकी भुजाओं अथवा एक भुजा और विकर्ण की लंबाई दी हो।

Chapter 8.indd 216 20/09/2024 15:56:08

9 सममिति

0675CH09



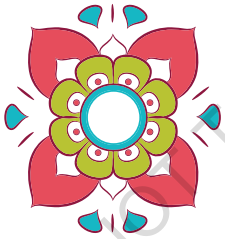
आप अपने चारों ओर देखिए, आपको ऐसी कई वस्तुएँ मिल सकती हैं, जो आपका ध्यान आकर्षित करती हैं। उनमें से कुछ नीचे दी गई हैं।



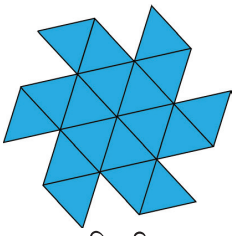
फूल



तितली



रंगोली



फिरकी

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ऊपर दिए गए चित्रों में सुंदरता प्रतीत होती है।

फूल को हम किसी भी तरफ से देखें वह हर तरफ से सुंदर, आकर्षक एवं जैसा है वैसा ही दिखाई देता है। तितली के विषय में आपका क्या विचार है? तितली के रंग बहुत आर्कषक हैं। क्या आपको तितली के विषय में कुछ और आकर्षक लगता है?

ऊपर की सभी आकृतियों को देखने से ऐसा प्रतीत होता है कि आकृति के कुछ भाग दोहराए गए हैं और ये दोहराव एक निश्चित पैटर्न में घटित होते दिख रहे हैं। क्या आप देख सकते हैं कि रंगोली की आकृति में क्या दोहराया गया है? फूल को केंद्र के चारों ओर 90 अंश तक घुमाया जाता है तो

उसकी लाल पंखुडियाँ अपने आप वापस आ जाती हैं। इसके साथ ही रंगोली के अन्य भागों के साथ भी ऐसा ही होता है।

फिरकी के विषय में आप क्या सोचते है? क्या आप देख सकते हैं कि फिरकी के संदर्भ में कौन-सा पैटर्न दोहराया जा रहा है?

(संकेत— पहले षटभुज को देखें)



बादल

क्या आप बता सकते हैं कि षटभुज की प्रत्येक भुजा पर कौन-सी आकृति दोहराई जाती है? प्रत्येक भुजा पर चिपकाई गई आकृति का आकार क्या है? क्या आप इसे पहचानते हैं? जब आप षटभुज की सीमा रेखाओं के साथ आगे की ओर बढ़ते हैं तब आकृतियाँ कैसे बनती हैं? अन्य चित्रों के विषय में आप क्या कह सकते हैं? विशेष रूप से उन संरचनाओं के विषय में क्या कह सकते हैं जो आपको आकर्षित करती हैं इसके साथ ही आप बताइए कि इन संरचनाओं में कौन-से पैटर्न दोहराए जा रहे हैं?

दूसरी ओर बादलों की इस आकृति को देखिए। यहाँ पर कोई दोहराव वाला पैटर्न नहीं है।

हम यह भी कह सकते हैं कि पहली चार आकृतियाँ सममित (symmetrical) हैं और अंतिम एक सममित नहीं है। सममिति (symmetry) का अर्थ है जो किसी आकृति के भाग या भागों में किसी निश्चित पैटर्न में दोहराई जाए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



ताजमहल



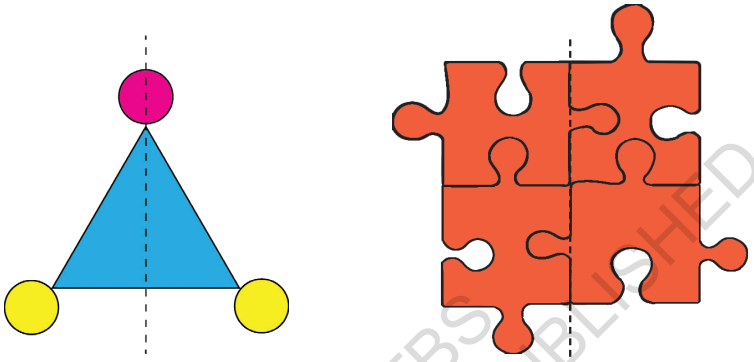
गोपुरम्

आप इन सुंदर संरचनाओं में कौन-सी सममितियाँ देखते हैं?

Chapter 9.indd 218 20/09/2024 15:57:22

9.1 सममिति की रेखा

नीचे दी गई आकृति (a) में नीले रंग का त्रिभुज है जिसमें एक बिंदुकित रेखा बनी हुई है। यदि आप त्रिभुज को बिंदुकित रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो क्या होगा? रेखा के अनुदिश मोड़ने पर त्रिभुज का एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया आच्छादित लेता है। इन्हें **दर्पण के आधे** भाग कहा जाता है!



(a) (b)

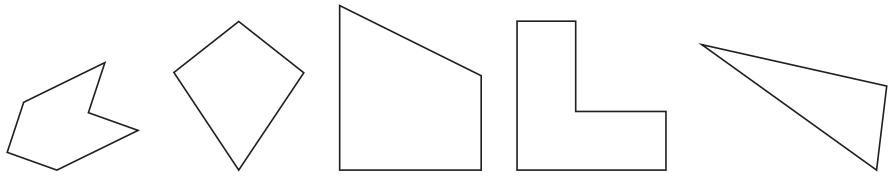
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृति (b) में पहेली के 4 टुकड़ों और उनके बीच से होकर जाती हुई एक बिंदुकित रेखा के विषय में आपका क्या विचार है? क्या ये दर्पण के आधे भाग हैं? नहीं, जब हम रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो आधा बायाँ भाग, आधे दाएँ भाग पर पूर्णतया आच्छादित नहीं है।

जब एक रेखा, आकृति को दो भागों में बाँटती है, जो कि मोड़ने पर एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं, वह आकृति की **सममिति की रेखा** कहलाती है।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप इस अध्याय के प्रारंभ में दी गई आकृतियों में सममिति की रेखा देख पाए हैं? बादलों की आकृति के विषय में आपका क्या विचार है?
2. निम्न आकृतियों में यदि सममिति की रेखाएँ हैं, तो उन्हें पहचानिए।

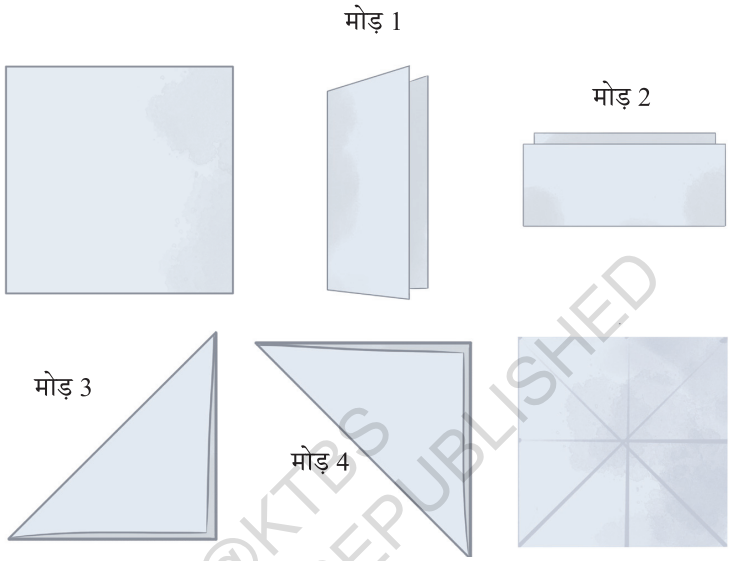


Chapter 9.indd 219 20/09/2024 15:57:23

एक से अधिक सममिति की रेखाओं की आकृतियाँ

क्या एक वर्ग में सममिति की केवल एक ही रेखा होती है?

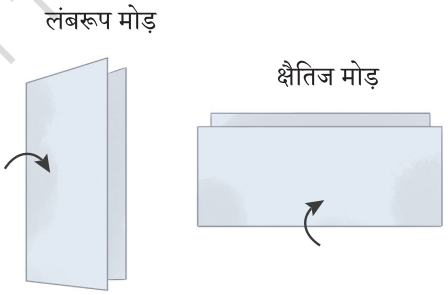
एक कागज का चौकोर टुकड़ा लीजिए। इसे मोड़कर, इसकी सभी सममिति की रेखाएँ ज्ञात कीजिए?



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

यहाँ कागज को विभिन्न तरीकों से मोड़ा गया है जो कई सममिति की रेखाएँ बनाती हैं।

- कागज को आधा उर्ध्वाधर मोड़िए।
- कागज को फिर आधा क्षैतिज मोड़िए (अर्थात् आपने इसे दो बार मोड़ा) अब, मोड़ों को खोलिए।



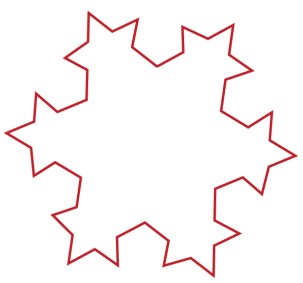
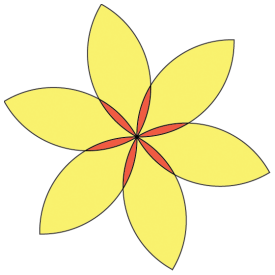
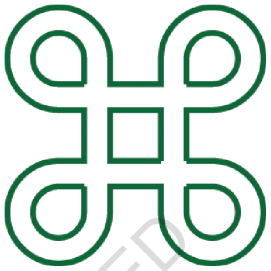
पुन: वर्ग को विकर्ण के अनुदिश आधा मोड़िए (यह तीसरा मोड़ है), जैसा चित्र में दर्शाया गया है। पुन: मोड़ को खोलिए।

अब इसे दूसरे विकर्ण के अनुदिश आधा मोड़िए (यह चौथा मोड़ है), जैसा चित्र में दर्शाया गया है। पुन: मोड़ को खोलिए।

Chapter 9.indd 220 20/09/2024 15:57:24

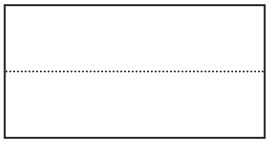
क्या वर्ग को मोड़ने का कोई अन्य तरीका है जिससे कि दोनों आधे हिस्से एक दूसरे को आच्छादित करें? वर्ग जैसी आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

अत: हम यह कह सकते हैं कि चित्रों में अनेक सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं। नीचे दिए गए चित्रों में अनेक सममिति की रेखाएँ हैं। क्या आप इन सभी को ढूँढ़ सकते हैं?

हमने देखा कि एक वर्ग का विकर्ण भी सममिति की रेखा है। आइए, उदाहरण के रूप में एक आयत को लेते हैं जोकि एक वर्ग नहीं है। क्या इसका विकर्ण सममिति की रेखा है?

सर्वप्रथम, आयत को देखिए और इन प्रश्नों का उत्तर दीजिए। अब कागज का एक आयताकार टुकड़ा लेते हैं और इसे विकर्ण के अनुदिश मोड़कर देखते हैं कि दोनों हिस्से पूर्णतया आच्छादित हैं या नहीं। आप क्या देखते हैं?



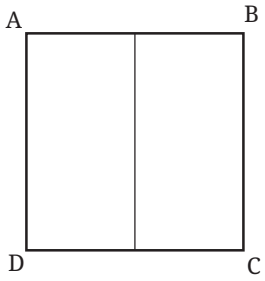
प्रतिबिंब

अभी तक हम यही कहते आए हैं कि जब हम किसी आकृति को सममिति की रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो दोनों भाग पूर्णतया एक दूसरे को ढक लेते हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि आकृति की सममिति की रेखा के एक ओर का भाग रेखा द्वारा दूसरी ओर परावर्तित होता है। इसी प्रकार, आकृति का सममिति रेखा के दूसरी ओर का भाग पहली ओर परावर्तित होता है। आइए, आकृति पर कुछ बिंदुओं को अंकित करके इसे समझते हैं।

आगे दी गई आकृति एक वर्ग दर्शाती है जिसके कोनों को A, B, C और D से अंकित किया गया है। आइए, इसकी उर्ध्वाधर सममित रेखा को लें। जब हम इस वर्ग को इस रेखा के अनुदिश परावर्तित करते हैं, तब दाईं ओर के बिंदु B और C बाईं ओर परावर्तित होकर क्रमश: बिंदुओं A और D का स्थान ले लेते हैं। बिंदु A और बिंदु D का क्या होता है? बिंदु A, बिंदु B का स्थान ग्रहण कर लेता है तथा बिंदु D, बिंदु C का स्थान ग्रहण कर लेता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 221 20/09/2024 15:57:25



यदि हम इस आकृति को A और C से होकर जाने वाले विकर्ण के अनुदिश परावर्तित करें, तो क्या होगा? बिंदु A, B, C और D किन स्थानों पर जाएँगे? यदि हम इसे क्षैतिज सममित रेखा के अनुदिश परावर्तित करें, तो क्या होगा?

इस प्रकार एक आकृति जिसमें सममिति की एक रेखा या रेखाएँ होती हैं, उसे **परावर्तीय सममिति** भी कहा जाता है।

सममिति की रेखाओं वाले आकार बनाना

अभी तक हमने सममिति की आकृतियों तथा असममिति की आकृतियों को देखा है। ऐसी सममिति की आकृतियों को किस प्रकार बनाया जाता है? आइए, इसकी खोज करें।

इंक-ब्लॉट डेविल्स

आपने इसे कक्षा 5 में पहले भी ऐसा किया है। कागज का एक टुकड़ा लीजिए। उसे आधा मोड़िए। एक आधे भाग पर स्याही (या पेंट) की कुछ बूँदें छिड़किए।

अब इन दोनों आधे भागों को एक दूसरे पर दबाइए तथा पुन: कागज को खोलिए।

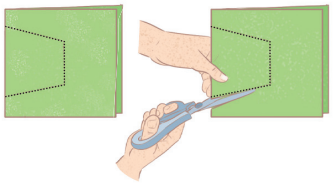
- आप क्या देखते हैं?
- क्या परिणामी आकृति सममित है?
- यदि हाँ, तो सममिति की रेखा कहाँ है?
- क्या कोई अन्य सममिति की रेखा भी है, जिसके अनुदिश मोड़ने पर एक जैसे (identical) दो भाग प्राप्त होंगे?
- ऐसे और अधिक पैटर्नों को प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 222 20/09/2024 15:57:25

कागज को मोड़ना और काटना

यह सममित आकार बनाने की एक अन्य विधि है।

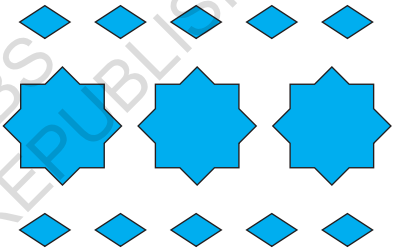


इन दोनों चित्रों में कागज को मोड़ने के पश्चात् चित्र में दर्शाई गई बिंदु रेखा के अनुदिश काटते हैं। एक कच्चा चित्र बनाइए जिसमें कागज को खोलने पर दिखने वाले चित्र का पूर्वानुमान हो।

क्या आप इस आकृति में सममिति की रेखा देखते हैं? ये कहाँ है?

मोड़कर और काटकर विभिन्न सममित आकार बनाइए।

सममित आकार प्राप्त करने के लिए कागज के टुकड़ों को मोड़ने और काटने के और भी तरीके हैं।



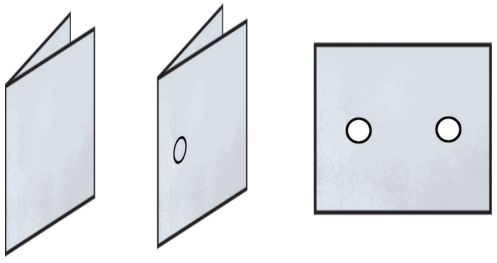
पतले रंगीन आयताकार कागज का उपयोग कीजिए। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है इसे कई बार मोड़कर और कागज को काटकर कुछ जटिल पैटर्न बनाइए। दोहराए जाने वाली आकृतियों में सममित रेखाओं की पहचान कीजिए। उत्सव के अवसरों पर ऐसे कागजों को काटकर सजावटी आकार बनाइए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

पंचिंग खेल

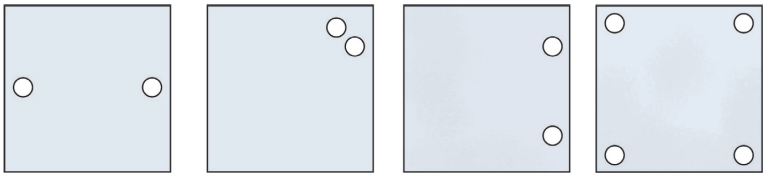
मोड़ सममिति की एक रेखा है। पंचिग मशीन की सहायता से कागज की एक मुड़ी चौकोर शीट के विभिन स्थानों पर छेद कीजिए और विभिन्न सममिति पैटर्न बनाइए।



Chapter 9.indd 223 20/09/2024 15:57:25

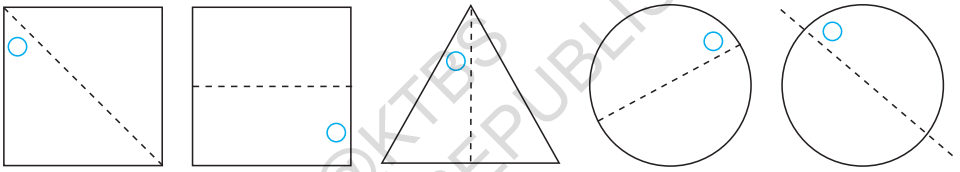
1. दी गई प्रत्येक आकृति में कागज की मुड़ी हुई चौकोर शीट में एक छेद किया गया है और फिर कागज को खोल दिया गया है। उस रेखा की पहचान कीजिए जिसके साथ कागज को मोड़ा गया था।

   चित्र (d) एक छेद करके बनाया गया है। ज्ञात कीजिए कागज को कैसे मोड़ा गया था।



a. b. c. d.

2. सममिति रेखाएँ दी गई हैं, अन्य छेदों को ज्ञात कीजिए—

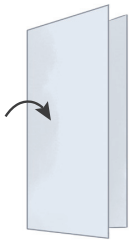


a. b. c. d. e.

3. नीचे कागज काटने से संबंधित कुछ प्रश्न दिए गए हैं।

   एक ऊर्ध्वाधर मोड़ पर विचार कीजिए। उसे हम निम्न प्रकार से दर्शाते हैं—

ऊर्ध्वाधर मोड़



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 224 20/09/2024 15:57:26

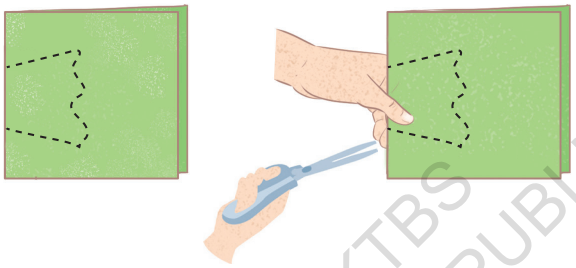
इसी प्रकार, क्षैतिज मोड़ को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं—

क्षैतिज मोड़

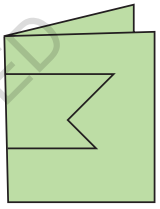


4. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति में काटने के पश्चात् जब कागज को खोला जाए तब छेद के आकार का अनुमान लगाकर उसे सत्यापित कीजिए।

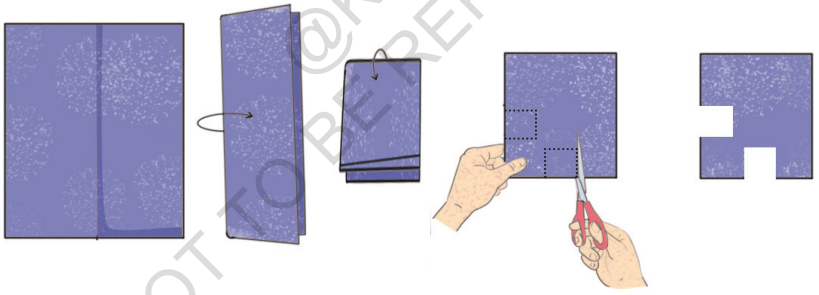
a.



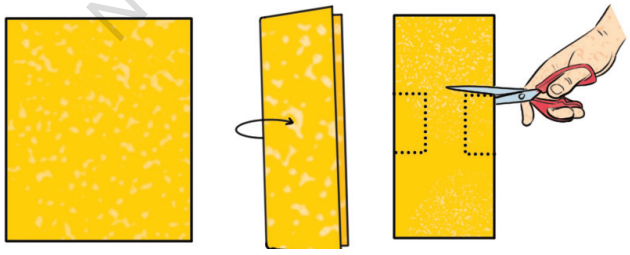
b.



c.



d.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 225 20/09/2024 15:57:27

5. मान लीजिए कि आपको इनमें से प्रत्येक आकार को कुछ मोड़ों और एक सीधे कट के साथ प्राप्त करना है। आप ऐसा किस प्रकार करेंगे?

a. केंद्र में स्थित छेद एक वर्ग है।



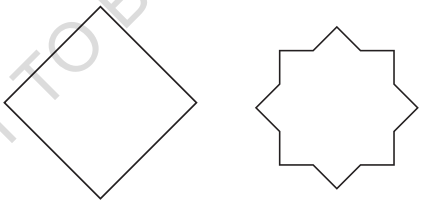
b. केंद्र में स्थित छेद एक वर्ग है।



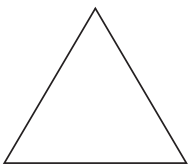
नोट— उपरोक्त दोनों प्रश्नों के लिए, इसकी जाँच कीजिए कि क्या केंद्र में चार-भुजीय आकृति एक वर्ग के दोनों गुणों की विशेषताओं को इंगित करती है।

6. इन आकृतियों में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

a.



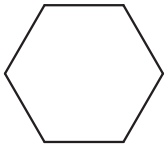
b. समान भुजाओं और समान कोणों वाला एक त्रिभुज



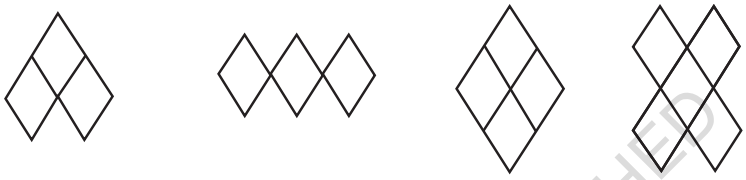
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

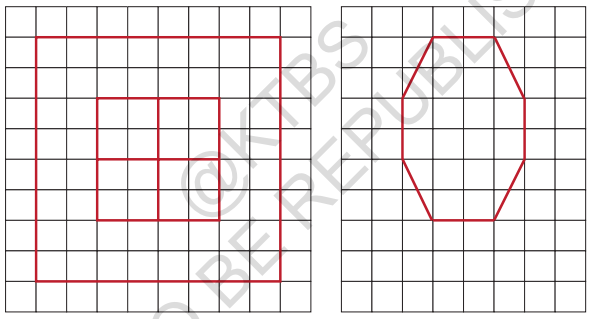
Chapter 9.indd 226 20/09/2024 15:57:27

c. समान भुजाओं और समान कोणों वाला एक षट्भुज



7. प्रत्येक आकृति का अक्स बनाइए तथा सममिति की रेखाएँ खींचिए, यदि कोई है तो—

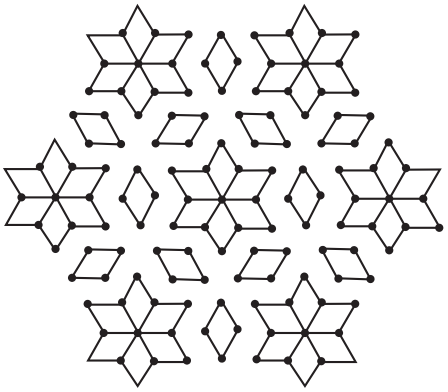




NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Chapter 9.indd 227 20/09/2024 15:57:27

8. नीचे दिए गए *कोलम* में सममिति की रेखाएँ ज्ञात कीजिए—



9. निम्नलिखित का चित्र बनाइए—

   a. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की केवल एक रेखा हो।

   b. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की केवल तीन रेखाएँ हों।

   c. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की कोई रेखा ना हो।

   क्या ठीक दो सममित रेखाओं का त्रिभुज बनाना संभव है?

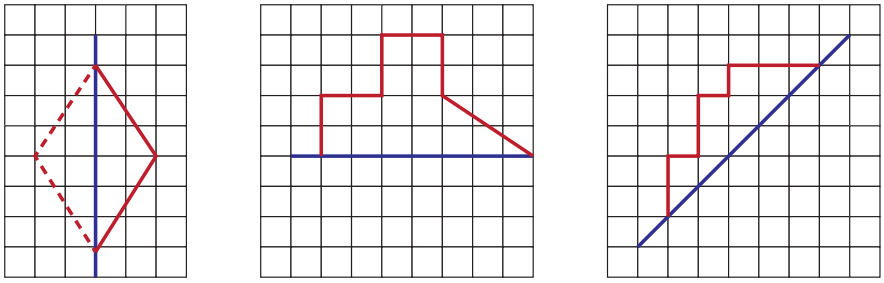
10. निम्नलिखित का चित्र बनाइए। प्रत्येक स्थिति में, आकृति में कम से कम एक घुमावदार सीमा अवश्य हो।

    a. ठीक एक सममिति की रेखा वाला चित्र

    b. ठीक दो सममिति की रेखाओं वाला चित्र

    c. ठीक चार सममिति की रेखाओं वाला चित्र

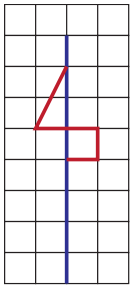
11. निम्नलिखित आकृतियों को एक वर्गाकार कागज पर बनाइए। उन्हें इस प्रकार पूरा कीजिए कि नीले रंग की रेखा सममिति की रेखा हो। समस्या (a) को आपके लिए पूरा किया गया है।



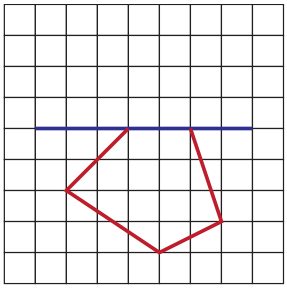
(a) (b) (c)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

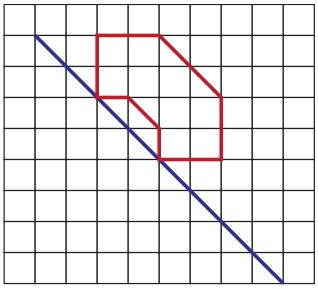
Chapter 9.indd 228 20/09/2024 15:57:27



(d)



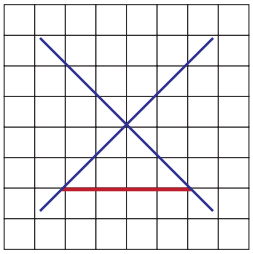
(e)



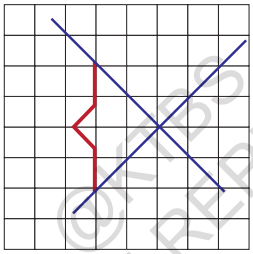
(f)

संकेत — (c) और (f) के लिए देखिए कि क्या पुस्तक को घुमाने से कुछ सहायता प्राप्त होती है!

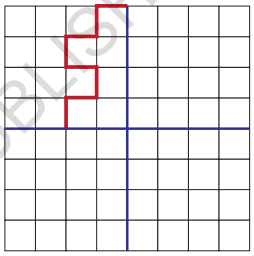
12. निम्नलिखित आकृतियों को एक वर्गाकार कागज पर बनाइए। उनमें से प्रत्येक को इस प्रकार पूरा कीजिए कि परिणामी आकृति में सममिति की रेखाओं के रूप में दो नीली रेखाएँ हो।



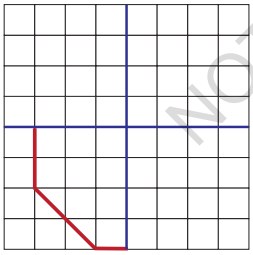
(a)



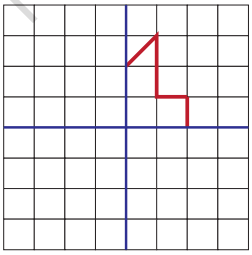
(b)



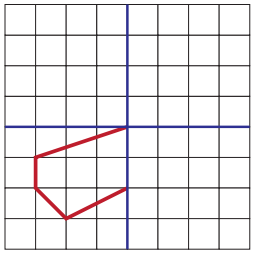
(c)



(d)



(e)

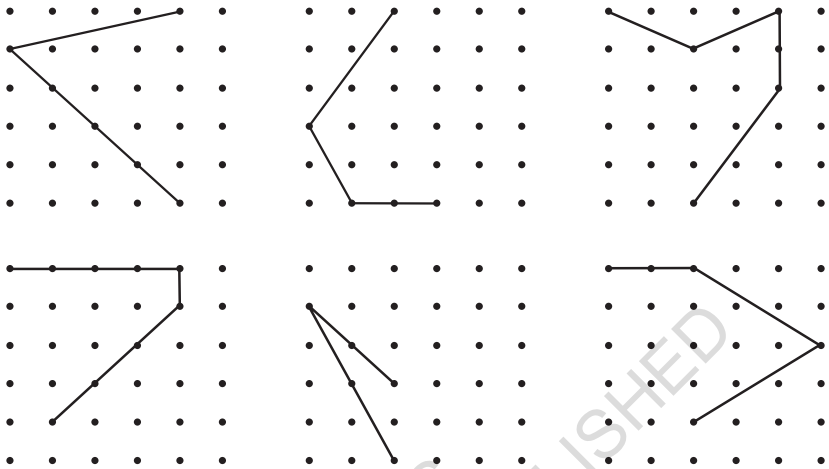


(f)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 229 20/09/2024 15:57:28

13. निम्नलिखित रेखा आकृतियों को डॉट ग्रिड पर बनाइए। प्रत्येक आकृति के लिए दो और रेखाएँ खींचिए ताकि ऐसी एक आकृति बन सके, जिसमें सममिति की एक रेखा हो।



9.2 घूर्णन सममिति



चित्र में दर्शाई गई कागज की पवन-चक्की (windmill) सममित जैसी दिखाई देती प्रतीत होती है, परंतु यहाँ कोई सममिति की रेखा नहीं है। यदि आप इसे मोड़ेंगे, तो दोनों आधे भाग एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढकेंगे। दूसरी ओर, यदि आप इसे केंद्र पर लाल बिंदु के परित 90° पर घुमाएँगे, तो यह पवन-चक्की ठीक पहले जैसी दिखाई देगी।

हम कहते हैं कि इस पवन चक्की में **घूर्णन सममिति** (rotational symmetry) है।

जब भी घूर्णन सममिति की बात की जाती है, तब वहाँ एक निश्चित बिंदु होता है, जिसके परित वस्तु को घुमाया जाता है (का घूर्णन किया जाता है)। यह निश्चित बिंदु घूर्णन का केंद्र (centre of rotation) कहलाता है।

क्या उपरोक्त पवन-चक्की ठीक पहले जैसी ही दिखाई देगी, जब उसे 90° से छोटे किसी कोण पर घुमाया जाता है?

नहीं!

वह कोण, जिस पर किसी आकृति को ठीक पहले जैसा ही दिखने के लिए घुमाया जा सकता है, **घूर्णन सममिति का कोण** या केवल **सममिति का कोण** (संक्षेप में) कहलाता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

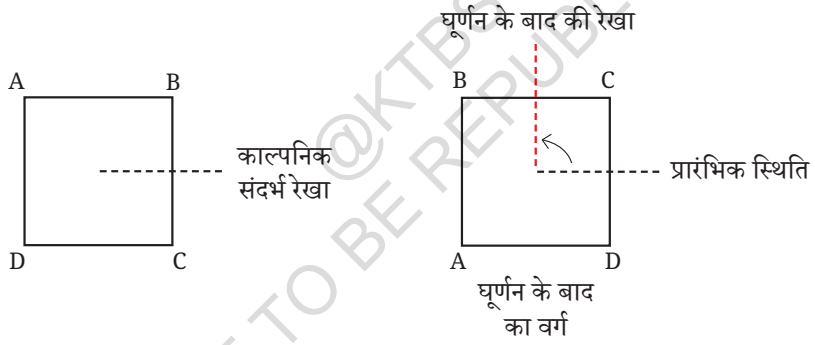
Chapter 9.indd 230 20/09/2024 15:57:28

पवन-चक्की के लिए सममिति के कोण 90° (चौथाई चक्कर), 180° (आधा चक्कर), 270° (तीन चौथाई चक्कर) और 360° (पूरा चक्कर) है। ध्यान दीजिए कि जब किसी भी आकृति को 360° घुमाया जाता है, तब वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाती है। अत: 360° सदैव सममिति का एक कोण होता है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि पवन-चक्की के सममिति के 4 कोण हैं। क्या आप किसी एक अन्य आकृति के विषय में जानते हैं, जिसके सममिति के ठीक 4 कोण होते हैं?

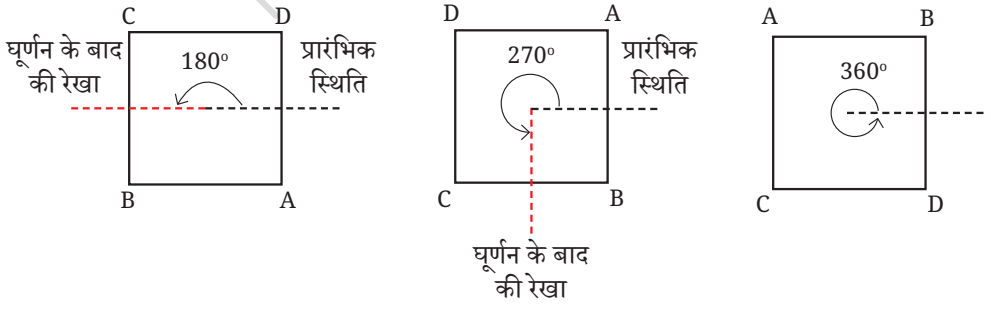
एक वर्ग के कितने सममिति कोण हैं? प्रारंभिक वर्ग प्राप्त करने के लिए, उसे कितने घूर्णन की आवश्यकता है?

90° के घूर्णन के बाद, हमें एक अतिव्यापी (overlapping) वर्ग प्राप्त होता है। यह घूर्णन बिंदु A को बिंदु B की स्थिति पर, बिंदु B को बिंदु C की स्थिति पर, बिंदु C को बिंदु D की स्थिति पर तथा बिंदु D को फिर से बिंदु A की स्थिति पर पहुँचा देता है। क्या आप जानते हैं कि घूर्णन के केंद्र को कहाँ चिह्नित करना है



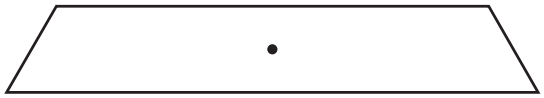
@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

इसकी सममिति के अन्य कोण क्या हैं?

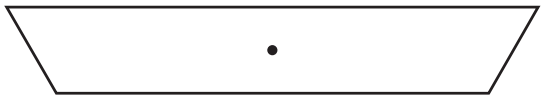


Chapter 9.indd 231 20/09/2024 15:57:28

उदाहरण— नीचे दी गई पट्टी के लिए, सममिति के कोण ज्ञात कीजिए—



हल— आइए, इस पट्टी को इसके केंद्र के परित घड़ी की दिशा में (Clockwise) घुमाए।



क्या हमें 180^o का एक अन्य घूर्णन करने से प्रारंभिक स्थिति प्राप्त हो जाती है।

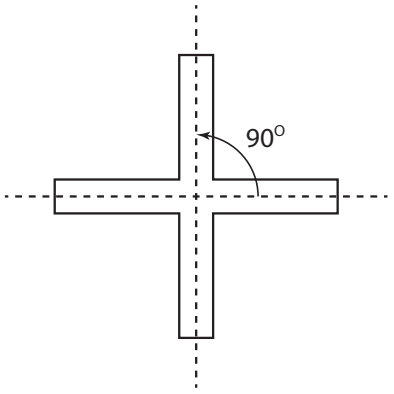
नहीं। क्यों?

प्राप्त स्थिति को एक और बार 180^o का घूर्णन करने से प्रारंभिक स्थिति प्राप्त होती है।

यह आकृति केवल **एक** संपूर्ण घूर्णन के पश्चात्, अर्थात् 360^o के घूर्णन के बाद, अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाती है। अत: हम कहते हैं कि इस आकृति में **घूर्णन सममिति नहीं है**।

किरण-संबंधी भुजाओं (radial arm) वाली आकृतियों में घूर्णन सममिति

दी गई आकृति को देखिए, इसमें 4 किरण-संबंधी भुजाएँ हैं। इसकी सममिति के कितने कोण हैं? वे कौन-से हैं?



ध्यान दीजिए कि प्रत्येक दो आसन्न केंद्रीय बिंदुकित रेखाओं के बीच का कोण 90^o है।

क्या आप इन किरण-संबंधी भुजाओं के बीच के कोणों को बदल सकते हैं, ताकि प्राप्त आकृति के अभी भी सममिति के 4 कोण हों? इसे खींचने का प्रयास कीजिए।

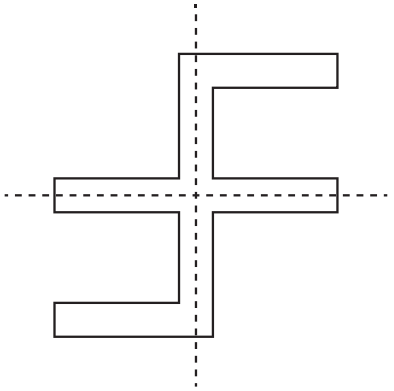
यह जाँच करने के लिए कि खींची गई आकृति के वास्तव में सममिति के 4 कोण हैं, आप दो अलग-अलग कागजों पर आकृति को खींच सकते हैं। इनमें से एक कागज में किरण-संबंधी भुजाओं को काट लीजिए। दूसरे कागज पर आकृति को स्थिर रखते हुए, घूर्णन सममिति की जाँच के लिए कट-आउट आकृति को उस पर घुमाइए।

आप इस आकृति को किस प्रकार संशोधित करेंगे कि इसके केवल सममिति के 2 कोण हों?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 232 20/09/2024 15:57:28

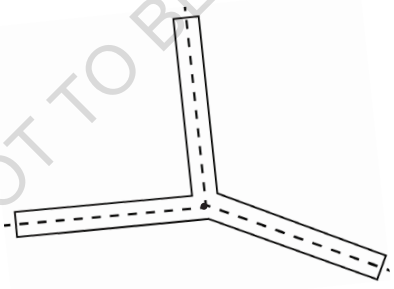
एक विधि यह है—



हम 4 और 2 सममिति के कोणों वाली आकृतियों को देख चुके हैं। क्या हम एक ऐसी आकृति प्राप्त कर सकते हैं, जिसके ठीक 3 सममिति के कोण हों? क्या आप इसके लिए किरण-संबंधी भुजाओं का उपयोग कर सकते हैं?

आइए, नीचे दी आकृति के अनुसार 3 किरण-संबंधी भुजाओं को लेकर प्रयास करें। इसके कितने सममिति के कोण हैं तथा ये कौन-से हैं?

नीचे तीन किरण-संबंधी भुजाओं वाली एक आकृति दी गई है



@KTLS NOT TO BE REPUBLISHED

इस आकृति की एक प्रति बनाइए और काट लीजिए। इस आकृति पर कट-आउट को घुमाकर इसके घूर्णन कोण निर्धारित कीजिए।

हम देखते हैं कि केवल एक संपूर्ण चक्कर, अर्थात 360° के घूर्णन से यह आकृति अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाएगी। इसलिए, इस आकृति में कोई घूर्णन सममिति नहीं है, क्योंकि इसका सममिति का कोण केवल 360° ही है।

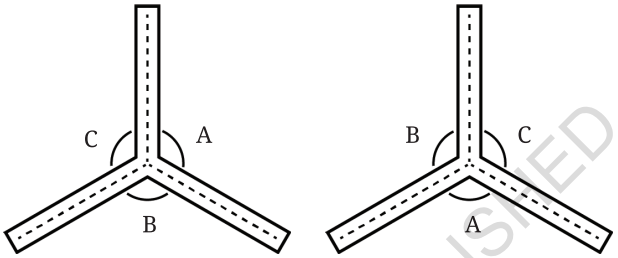
Chapter 9.indd 233 20/09/2024 15:57:29

यद्यपि, क्या इस आकृति में कोई ऐसा परिवर्तन किया जा सकता है जिससे इसके 3 सममिति के कोण हो जाएँ?

क्या बिंदुकित रेखाओं के बीच के कोणों में परिवर्तन करके ऐसा किया जा सकता है?

यदि किसी तीन किरण संबंधी भुजाओं वाली आकृति में घूर्णन सममिति हो, तब घूर्णित संस्करण मूल के साथ अतिव्यापी होना चाहिए। यहाँ इन दोनों स्थितियों के कच्चे रफ आरेख दिए गए हैं—

यदि इन दोनों आकृतियों को अतिव्यापी होना है, तो आप इनके कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

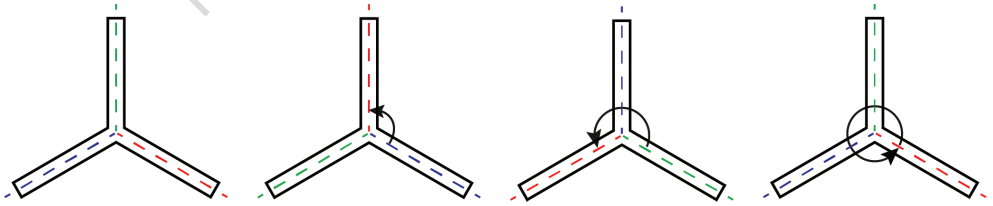
ध्यान दीजिए कि $\angle A$ को $\angle B$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए, $\angle B$ को $\angle C$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए तथा $\angle C$, $\angle A$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए।

इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C$ है। यह कोण क्या होना चाहिए?

हम जानते हैं कि एक पूरे चक्कर का कोण 360° होता है। यह तीनों कोणों के बीच समान रूप से वितरित हैं। अत: इनमें से प्रत्येक कोण $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ का होना चाहिए।

इस प्रकार, किरण-संबंधी भुजाओं वाली 3 भुजाओं की आकृति घूर्णन सममिति तब दर्शाती है, जब आसन्न बिंदुकित रेखाओं के बीच का कोण 120° होता है। इस प्रेक्षण का सत्यापन करने के लिए कागज के कट-आऊटों का उपयोग कीजिए।

अब इस आकृति के कितने घूर्णन के कोण हैं तथा ये कौन-से हैं?



प्रारंभिक अवस्था

120° घूर्णन के पश्चात्

240° (120° + 120°) घूर्णन के पश्चात्

360° (120° + 120°+ 120°) घूर्णन के पश्चात्

नोट— घूर्णनों को दर्शाने के लिए रंग जोड़े गए हैं।

Chapter 9.indd 234 20/09/2024 15:57:29

आइए, हम और आकृतियाँ ढूँढ़े

क्या आप किरण-संबंधी भुजाओं को लेकर ऐसी आकृति बना सकते हैं जिसमें—

a. ठीक 5 सममिति के कोण हों?

b. 6 सममिति के कोण हों? प्रत्येक आकृति का सममिति का कोण भी ज्ञात करें।

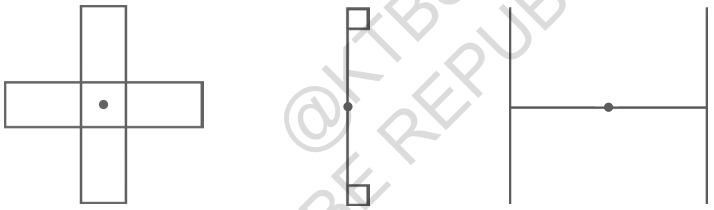
संकेत— पहली स्थिति के लिए 5 किरण-संबंधी भुजाएँ लिखिए? दो आसन्न किरण-संबंधी भुजाओं के बीच क्या कोण होना चाहिए?

एक ऐसी किरण-संबंधी भुजाओं से बनी आकृति लीजिए जिसमें ठीक 7 सममिति के कोण हों? इसका न्यूनतम सममिति कोण कितना होगा? क्या इस स्थिति में कोण की माप एक पूर्ण संख्या होगी? यदि नहीं, तो उसे मिश्रित भिन्न में व्यक्त कीजिए।

आइए, कुछ अन्य प्रकार की आकृतियों में सममिति के कोणों को ज्ञात करें।

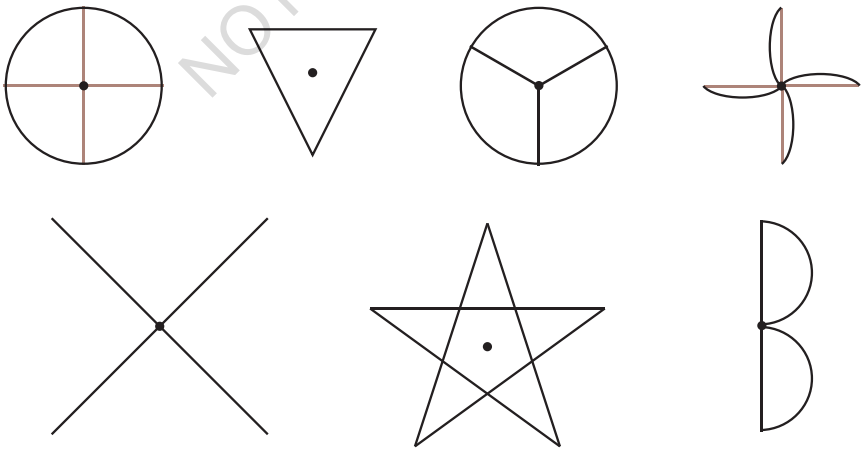
आइए, पता लगाएँ

1. दी गई आकृतियों में दिए गए चिह्न • के परित सममिति के कोण ज्ञात कीजिए।



(a) (b) (c)

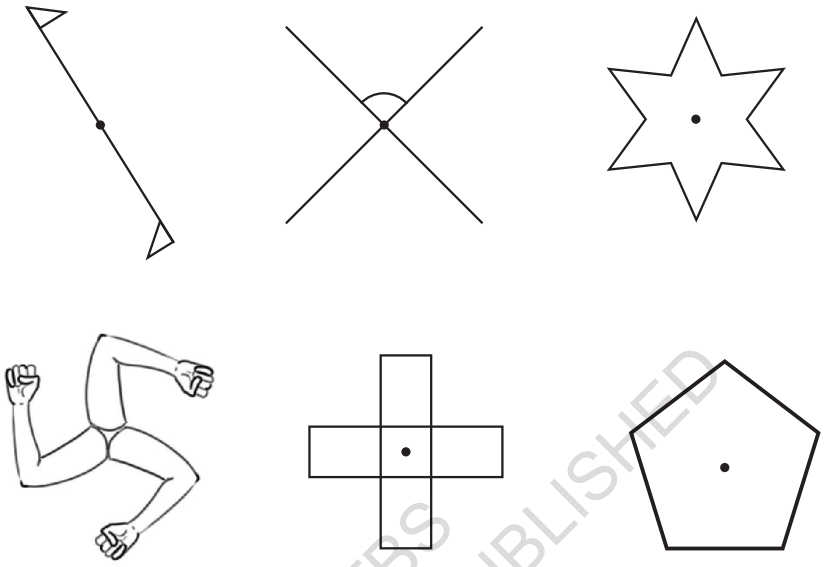
2. निम्नलिखित में से किस आकृति में एक से अधिक सममिति के कोण हैं?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 235 20/09/2024 15:57:29

3. प्रत्येक आकृति के लिए घूर्णन सममिति का क्रम बताइए—



आइए, उपरोक्त सभी स्थितियों के लिए सममिति के कोणों की सूची बनाइए।

- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 2 सममिति के कोण हों— 180^o, 360^o
- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 3 सममिति के कोण हों— 120^o, 240^o, 360^o
- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 4 सममिति के कोण हों— 90^o, 180^o, 270^o, 360^o

क्या आप इन सभी स्थितियों में सममिति के कोणों के विषय में, क्या आप कोई उभयनिष्ठ (common) तथ्य देखते हैं? सबसे पहली पंक्ति की संख्याएँ 180 का गुणज हैं। दूसरी पंक्ति की संख्याएँ 120 का गुणज हैं तथा तीसरी पंक्ति की संख्याएँ 90 का गुणज हैं।

प्रत्येक स्थिति में कोण, न्यूनतम कोण के गुणज हैं। आप उत्साहपूर्वक पूछ सकते हैं कि क्या ऐसा सदैव होता है? आप क्या सोचते हैं?

सत्य या असत्य

- प्रत्येक आकृति का $360°$ एक सममिति का कोण होगा।
- यदि एक आकृति की सममिति का न्यूनतम कोण एक प्राकृत संख्या है, तो वह $360°$ का एक गुणनखंड होगी।

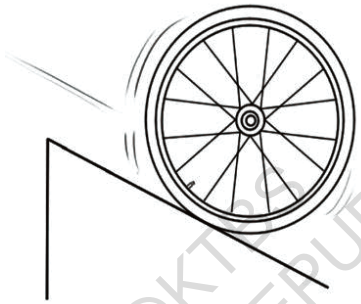
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 236 20/09/2024 15:57:30

क्या सभी आकृतियों के लिए सममिति का एक न्यूनतम कोण होता है? ऐसा ज्ञात हुआ है कि सबसे अधिक सममित आकार, जैसे वृत्त को छोड़कर सभी आकृतियों में यह स्थिति या न्यूनतम कोण होता है। आइए अब वृत्त की चर्चा करते हैं।

एक वृत्त की सममितियाँ

वृत्त एक मनमोहक आकृति है। तब क्या होता है, जब आप एक वृत्त को उसके केंद्र के परित घड़ी की दिशा में घुमाते हैं? वह स्वयं के साथ संपाती हो जाता है। इससे कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है कि आप उसे किस कोण पर घुमा रहे हैं। अत: एक वृत्त के लिए प्रत्येक कोण सममिति का कोण होता है।



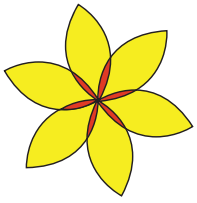
© KTRC NOT TO BE REPUBLISHED

अब, एक वृत्त की परिसीमा पर एक बिंदु लीजिए और इसे केंद्र से मिलाइए। इसे बढ़ा कर वृत्त का एक व्यास बनाइए। क्या यह व्यास इस वृत्त की परावर्तन सममिति की एक रेखा है? हाँ। प्रत्येक व्यास वृत्त की एक सममित रेखा है।

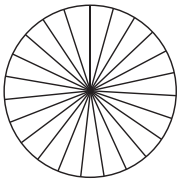
पहियों की ही तरह हम अपने परिवेश में ऐसी अनेक वस्तुएँ प्राप्त कर सकते हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है। उन्हें ज्ञात कीजिए। इनमें से कुछ नीचे दर्शाई गई हैं—



पंखा



फूल

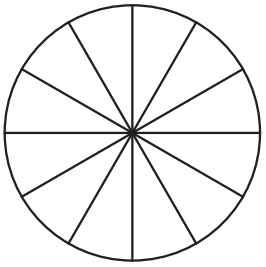


चक्र

Chapter 9.indd 237 20/09/2024 15:57:32

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दिए गए वृत्त के त्रिज्याखंडों में इस प्रकार रंग भरिए कि आकृति में (i) 3 सममिति के कोण हों। (ii) 4 सममिति के कोण हों। (iii) सममिति के संभव कोणों की संख्या क्या होगी? यदि इन त्रिज्याखंडों को अलग-अलग रंगों से अलग-अलग विधियों द्वारा भरा जाए तो,



2. वृत्त और वर्ग को छोड़कर, ऐसी अन्य दो आकृतियाँ बनाइए, जिनमें परावर्तीय सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हों।
3. जहाँ भी संभव हो, निम्नलिखित का एक कच्चा स्कैच खींचिए—
   a. एक त्रिभुज, जिसमें न्यूनतम दो सममिति की रेखाएँ हों तथा न्यूनतम दो सममिति के कोण हों।
   b. एक त्रिभुज, जिसमें केवल एक सममिति की रेखा हो लेकिन कोई घूर्णन सममिति न हो।
   c. घूर्णन सममिति वाला ऐसा चतुर्भुज, जिसमें कोई परावर्तीय सममिति न हो।
   d. एक परावर्तीय सममिति वाला चतुर्भुज, जिसमें कोई घूर्णन सममिति न हो।

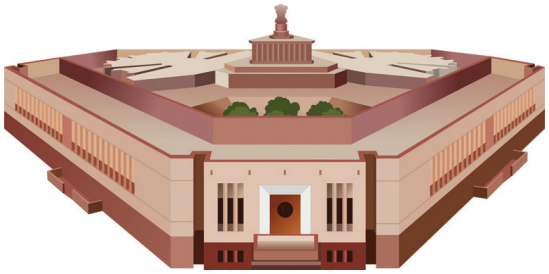


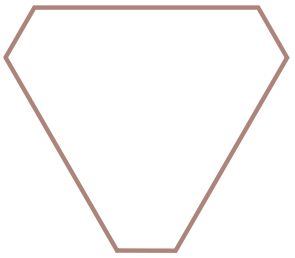
4. एक आकृति में सममिति का न्यूनतम कोण 60° है। इस आकृति के अन्य सममिति के कोण क्या हैं?
5. एक आकृति में एक सममिति का कोण 60° है। इस आकृति के दो सममिति के कोण 60° से कम हैं। सममिति का न्यूनतम कोण क्या होगा?
6. क्या हम घूर्णन सममिति के साथ एक ऐसी आकृति प्राप्त कर सकते हैं, जिसमें सममिति का न्यूनतम कोण
   (a) 45° है?
   (b) 17° है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 9.indd 238 20/09/2024 15:57:32

7. यह दिल्ली में स्थित नए संसद भवन का चित्र है—





a. क्या इस चित्र की बाहरी परिसीमा (boundary) में परावर्तन सममिति है? यदि ऐसा है, तो सममिति की रेखाएँ खींचिए। वे कितनी हैं?

b. क्या इसकी अपने केंद्र के परित घूर्णन सममिति है? यदि ऐसा है, तो घूर्णन सममिति के कोण ज्ञात कीजिए।

8. अध्याय 1, सारणी 3 में पहले आकृति अनुक्रम नियमित बहुभुज आकार अनुक्रम आकृतियों में सममिति की कितनी रेखाएँ हैं? आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम मिलता है।

9. अध्याय 1 की सारणी 3 में पहले आकृति अनुक्रम नियमित बहुभुज के आकार अनुक्रम की आकृतियों में सममिति के कितने कोण हैं? आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है?

10. अध्याय 1 की सारणी 3 में अंतिम आकृति अनुक्रम कोच स्नोफ्लेक के आकार अनुक्रम में आकृतियों में सममिति की कितनी रेखाएँ है? सममिति के कितने कोण हैं?

11. अशोक चक्र में कितनी सममिति की रेखाएँ और सममिति के कोण होते हैं?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

टाइल्स के साथ खेलिए

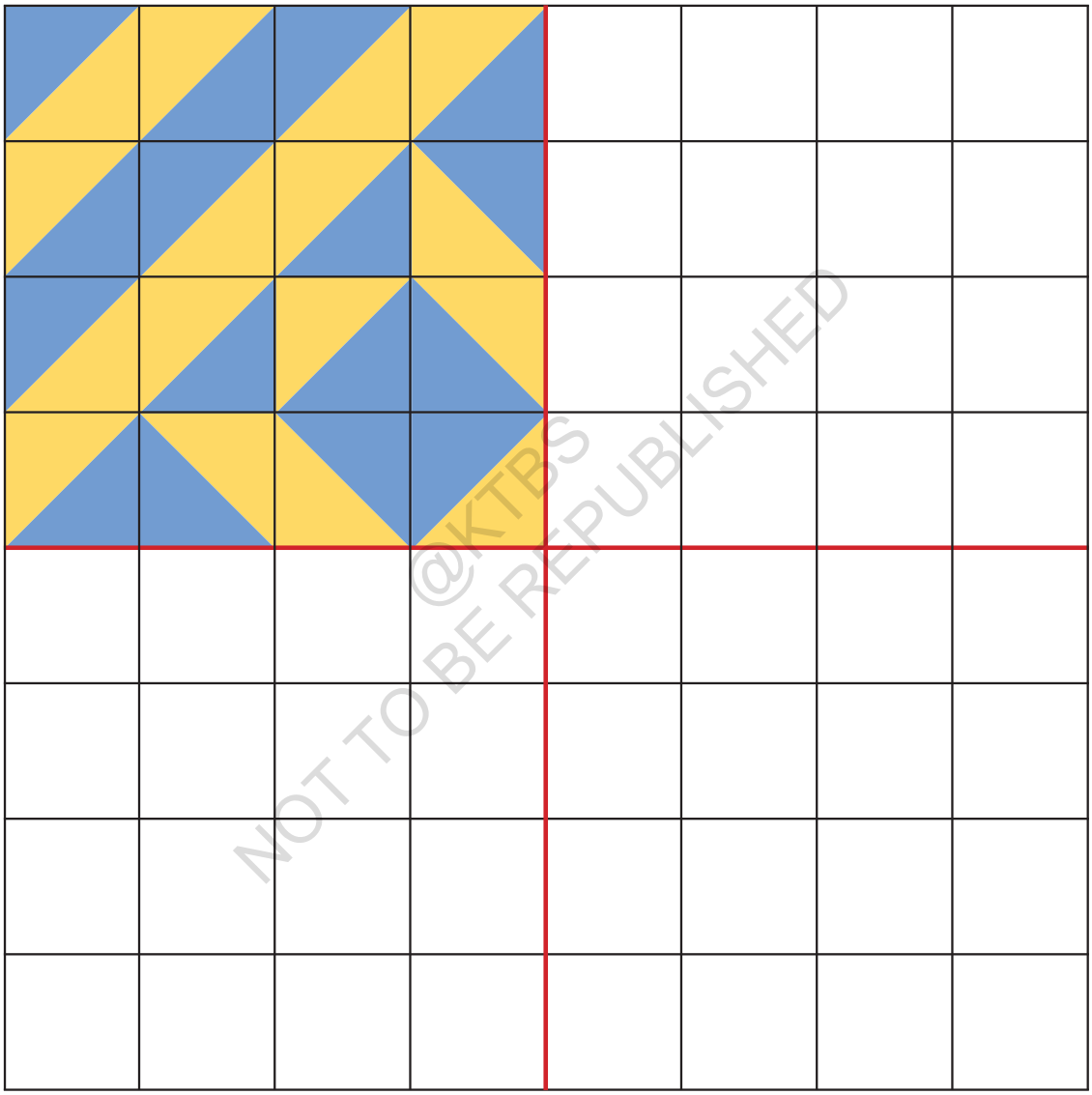
a. पुस्तक के अंत में दी गई रंगीन टाइल्स का उपयोग करके इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे इसकी केवल दो सममिति की रेखाएँ हों।

b. 16 ऐसी ही टाइल्स का प्रयोग करके ऐसी आकृति बनाइए जिसमें ठीक

1. एक सममिति की रेखा हो।
2. दो सममिति की रेखाएँ हो।

c. इन टाइल्स का प्रयोग करके रचनात्मक सममित डिजाइन बनाइए।

Chapter 9.indd 239 03/10/2024 15:12:06

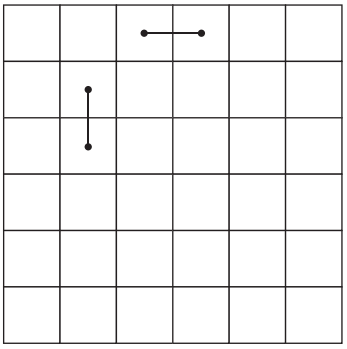


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

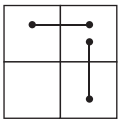
Chapter 9.indd 240 20/09/2024 15:57:32

खेल

एक 6×6 का ग्रिड (grid) खींचिए। दो खिलाड़ी दो आसन्न वर्गों को भरते हुए, बारी-बारी से एक रेखा खींचते हैं। यह रेखा क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर किसी भी रूप में खींची जा सकती है। ये रेखाएँ अतिआच्छदित नहीं हो सकती हैं। यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि कोई खिलाड़ी कोई और रेखा नहीं खींच पाता है। वह खिलाड़ी जो आगे रेखा नहीं खींच पाता, खेल में हार जाता है।



इसकी अनुमति नहीं है।



इस खेल को जीतने की क्या रणनीति होनी चाहिए?

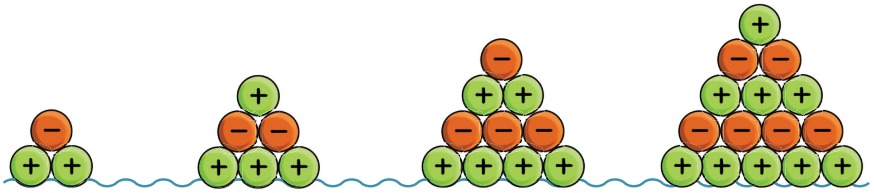
© TBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- जब कोई आकृति ऐसे भागों से बनी प्रतीत होती है, जिसमें एक निश्चित पैटर्न को दोहराया जाता है, तब हम कहते हैं कि उस आकृति में **सममिति** है। ऐसी आकृतियों को हम **सममित आकृतियाँ** कहते हैं।
- एक रेखा जो किसी समतल आकृति को दो भागों में इस प्रकार काटती है कि उस रेखा के अनुदिश मोड़ने पर दोनों भाग परस्पर अतिव्यापी हो जाएँ, आकृति की **सममिति की रेखा** या **सममिति की अक्ष** कहलाती है।
- एक आकृति की एक से अधिक (multiple) सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं।
- कुछ आकृतियों को जब एक निश्चित बिंदु के परित किसी कोण पर घुमाया जाता है, तब वे मूल रूप से एक समान लगती हैं। ऐसा कोण उस आकृति की **सममिति का कोण** कहलाता है। ऐसी आकृति जिसमें घूर्णन कोण हमेशा 0^o से 360^o के बीच होता है, तो कहा जा सकता है कि इनमें **घूर्णन सममिति** है। आकृति का वह निश्चित बिंदु, जिसके परित आकृति को घुमाया जाता है, **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है।
- एक आकृति के कई सममिति के कोण हो सकते हैं।
- कुछ आकृतियों की सममिति रेखा हो सकती है, परंतु ऐसा भी हो सकता है उनमें कोई सममिति का कोण न हों। जबकि यह भी संभव है कि कोण की सममिति हो लेकिन सममिति की रेखाएँ न हो। कुछ आकृतियों में सममिति कोण व सममिति रेखा दोनों हो सकते हैं।

Chapter 9.indd 241 20/09/2024 15:57:34

10



शून्य के दूसरी ओर

0675CH10

पूर्णांक

अधिक और अधिक संख्याएँ!

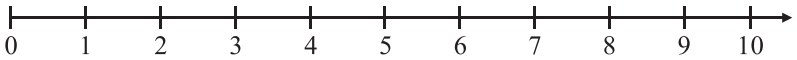
याद कीजिए कि गणित के अध्ययन में हमने सबसे पहले जो संख्याएँ सीखी वे गणन संख्याएँ 1, 2, 3, 4,... थीं।

उसके बाद हमने सीखा कि संख्याएँ और भी अधिक हैं। उदाहरण के लिए , संख्या 0, जो 'कुछ भी नहीं' को प्रदर्शित करती है और संख्या 1 से पहले आती है। भारत में और अब संपूर्ण विश्व में भी शून्य का इतिहास बहुत महत्वपूर्ण रहा है। उदाहरण के लिए, भारतीय संख्या पद्धति में 0 से 9 तक के 10 अंकों का प्रयोग करके संख्याएँ लिखते हैं, यह संख्या पद्धति बड़ी से बड़ी तथा छोटी से छोटी संख्याएँ लिखना संभव बना देती है।

इसके पश्चात् हमने और अधिक संख्याओं के विषय में भी सीखा जो संख्याओं 0, 1, 2, 3, 4,... के बीच में स्थित हैं जैसे $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ और $\frac{13}{6}$ ये *भिन्न* कहलाती हैं।

क्या इसके अतिरिक्त और भी अधिक संख्याएँ हैं? 0 एक अतिरिक्त संख्या है जिसके विषय में हम पहले नहीं जानते थे। यह 1 से छोटी संख्या है और इससे पहले भी आती है। क्या संभवतः और भी संख्याएँ हैं जो शून्य से पहले आती हैं और शून्य से छोटी हैं?

दूसरे शब्दों में, हमने संख्या रेखा देखी है—



यद्यपि, यह एक संख्या 'किरण' है, जिसे हम ज्यामिति में सीख चुके हैं। यह किरण शून्य से आरंभ होती है तथा दाईं तरफ असीमित रूप से बढ़ती जाती है। क्या 0 के बाईं ओर भी संख्याओं का अस्तित्व है, जिससे कि संख्या किरण पूर्ण होकर एक सही संख्या रेखा बना सके?

इस अध्याय में हम इसी के विषय में जानेंगे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्या कोई ऐसी संख्या है जो शून्य से छोटी हो? क्या आप ऐसी किसी वस्तु के 0 से कम होने का कोई तरीका सोच सकते हो ?

10.1 बेला की मजेदार इमारत



बच्चे बेला के आइसक्रीम कारखाने को देखने और उसकी स्वादिष्ट आइसक्रीम को चखने जाते हैं। बच्चों के लिए कारखाने को और भी रोचक बनाने के लिए बेला ने एक बहुमंजिला इमारत खरीदी और इसे आकर्षणों से भर दिया। उसने इसका नाम 'बेला की मजेदार इमारत' रखा।

लेकिन यह सामान्य इमारत नहीं थी!

अवलोकन कीजिए कि 'मजेदार इमारत' के कुछ तल भूतल से नीचे हैं। इन तलों पर आपको कौन-सी दुकानें देखने को मिलती हैं? वहाँ भूतल पर क्या है?



तलों में ऊपर और नीचे जाने के लिए एक लिफ्ट का उपयोग किया जाता है। इसमें दो बटन हैं— ऊपर जाने के लिए '+' तथा नीचे जाने के लिए '–' बटन। क्या आपने लिफ्ट देखी है?

स्वागत कक्ष (वेलकम कक्ष) से कला केंद्र (आर्ट सेंटर) तक जाने के लिए आपको '+' बटन को दो बार दबाना होगा।

यह बटन दबाना + + या +2 है।

दो तल नीचे जाने के लिए, आपको '–' बटन दो बार दबाना होगा। जिसे हम – – या – 2 लिखते हैं।

अतः जब आप + 1 दबाते हैं (यदि आप + बटन को एक बार दबाएंगे), तब आप 1 तल ऊपर जाएँगे और जब –1 दबाते हैं (यदि आप – बटन को एक बार दबाएंगे), तब आप 1 तल नीचे आते हैं।

> लिफ्ट में बटन दबाना और संख्याएँ
> + + + को + 3 लिखते हैं।
> – – – – को – 4 लिखते हैं।

चार तल ऊपर जाने के लिए आप क्या दबाते हैं? तीन तल नीचे जाने के लिए आप क्या दबाते हैं?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 243 20/09/2024 16:57:28

'मजेदार इमारत' के तलों को क्रमांकित करना

'मजेदार इमारत' में प्रवेश करते ही भूतल पर 'स्वागत कक्ष' है। भूतल से आरंभ करते हुए आप + 1 दबाकर भोजन कक्ष (फूड कोर्ट) पर और + 2 दबाकर आप कला केंद्र पर पहुँच सकते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि भोजन कक्ष तल + 1 पर तथा कला केंद्र तल + 2 पर है।



भूतल से शुरुआत करते हुए, खिलौना स्टोर (टॉयज़ सेंटर) पर पहुँचने के लिए आपको – 1 दबाना होगा। अतः खिलौना स्टोर, – 1 तल पर है। इसी प्रकार, भूतल से आरंभ करते हुए वीडियो गेम की दुकान पर पहुँचने के लिए आपको – 2 दबाना होगा। अतः वीडियो गेम की दुकान, – 2 तल पर है।

भूतल को 0 तल कहा जाता है। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

'मजेदार इमारत' के सभी तलों के क्रमांक लिखिए।

क्या आपने देखा कि +3 पुस्तक केंद्र (बुक्स सेंटर) का तल क्रमांक है, लेकिन यह उन तलों की संख्या भी है, जब आप +3 दबाते हैं। इसी प्रकार – 3 तल क्रमांक है, लेकिन यह उन तलों की संख्या भी है, जब आप – 3 अर्थात् – – – दबाकर नीचे जाते हैं।

एक संख्या जिसके आगे '+' चिह्न लगा है, **धनात्मक संख्या** कहलाती है। एक संख्या जिसके आगे '–' चिह्न लगा है, **ऋणात्मक संख्या** कहलाती है।

'मजेदार इमारत' में, तल 0 को संदर्भ या प्रारंभिक बिंदु मानकर ऊपर और नीचे के तलों को क्रमांकित किया गया है। भूतल से ऊपर के तलों को धनात्मक संख्याओं से क्रमांकित किया गया है। भूतल से ऊपर जाने के लिए, आपको कुछ बार '+' बटन दबाना होगा।

भूतल से नीचे के तलों को ऋणात्मक संख्याओं द्वारा क्रमांकित किया गया है। भूतल से नीचे के तलों तक जाने के लिए आपको '–' बटन दबाना होगा।

शून्य न तो धनात्मक संख्या है और न ही ऋणात्मक संख्या। हम 0 के आगे '+' या '–' चिह्न नहीं लगाते हैं।

गति दर्शाने के लिए

भोजन कक्ष से प्रारंभ कीजिए और लिफ्ट में +2 दबाइए। आप कहाँ पहुँचेंगे ?

इसे हम एक पद के रूप में दर्शा सकते हैं—

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 244 20/09/2024 16:57:29

प्रारंभिक तल + गति = लक्षित तल

प्रारंभिक तल +1 (भोजन कक्ष) है और दबाए गए बटनों की संख्या + 2 है। अतः आप लक्षित तल **(+ 1) + (+ 2) = + 3** (पुस्तक भंडार) पर पहुँचते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1) + 2 तल से प्रारंभ कीजिए और लिफ्ट में –3 दबाइए। आप कहाँ पहुँचेंगे? इसे पद के रूप में दर्शाइए।

2) दिए गए पदों को पूर्ण कीजिए। (आप प्रारंभ तल + मजेदार इमारत में गति के संदर्भ को ध्यान रखते हुए इन्हें पूर्ण कीजिए।)

a. (+ 1) + (+ 4) = _____ b. (+ 4) + (+ 1) = _____

c. (+ 4) + (– 3) = _____ d. (– 1) + (+ 2) = _____

e. (– 1) + (+ 1) = _____ f. (0) + (+ 2) = _____

g. (0) + (– 2) = _____

3) विभिन्न तलों से शुरुआत करते हुए, तल (– 5) पर पहुँचने के लिए आवश्यक गतियों को ज्ञात कीजिए। उदाहरण के लिए, यदि मैं तल + 2 से प्रारंभ करता हूँ, मुझे – 5 पर पहुँचने के लिए – 7 ही दबाना होगा। अतः अभिव्यक्ति (+ 2) + (– 7) = – 5 है।

इसी प्रकार – 5 पर पहुँचने के लिए अन्य प्रारंभिक स्थितियाँ और आवश्यक गतियों को ज्ञात कीजिए और पदों को लिखिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बटन दबाने का संयोजन भी है

गुरमीत खिलौनों की दुकान में था और वह दो तल नीचे जाना चाहता था। लेकिन गलती से उसने '+' बटन को दो बार दबा दिया। इसे निरस्त करने के लिए उसने '–' बटन को तीन बार दबा दिया। गुरमीत खिलौने की दुकान से कितनी तल नीचे या ऊपर पहुँचेगा?

गुरमीत एक तल नीचे जाएगा। हम संयोजित बटन दबाने से गति के परिणाम को इस प्रकार पद के रूप में कर सकते हैं— (+ 2) + (– 3) = – 1

आइए, पता लगाएँ

संयोजित बटन दबाने से गति के परिणामों को ध्यान में रखते हुए दिए गए पदों का मूल्यांकन कीजिए।

Chapter 10.indd 245 20/09/2024 16:57:29

a. $(+1) + (+4) = ----$ b. $(+4) + (+1) = ---$

c. $(+4) + (-3) + (-2) = ---$ d. $(-1) + (+2) + (-3) = ---$

शून्य पर वापसी!



बसंत भूतल पर है और वह बहुत जल्दी में है गलती से वह $+3$ दबाता है, इसे निरस्त करने के लिए वह क्या कर सकता है, कि वह भूतल पर ही रहे। वह इसे -3 दबाकर निरस्त कर सकता है। अर्थात् $(+3) + (-3) = 0$

हम -3 को $+3$ का योज्य प्रतिलोम कहते हैं। इसी प्रकार $+3$, -3 का योज्य प्रतिलोम है।

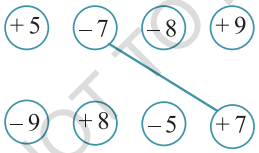
योज्य प्रतिलोम के विषय में सोचने का अन्य तरीका यह भी है। यदि बसंत लिफ्ट में $+4$ दबाता है और फिर -4 दबाता है तो वह कहाँ पहुँचेगा? यदि आप तल $+4$ पर हैं और आप इसका प्रतिलोम -4 दबाते हैं, तब आप वापस 0 पर आते हैं, जो कि भूतल है।

यदि आप तल -2 पर हैं, और आप इसका प्रतिलोम $+2$ दबाते हैं, तब आप $(-2) + (+2) = 0$ पर जाते हैं। इसका अर्थ हुआ कि आप पुन: भूतल पर पहुँच जाएँगे।

दी गई संख्याओं के योज्य प्रतिलोम बताइए।

$+4, -4, -3, 0, +2, -1$

रेखा खींचकर योज्य प्रतिलोम से जोड़िए।



तलों का उपयोग करके संख्याओं की तुलना करना

सबसे नीचे के तल पर कौन है?

1. जय कला केंद्र में है,अतः वह + 2 तल पर है।
2. आसिन खेल केंद्र में है, अतः वह _____ तल पर है।
3. बिन्नु सिनेमा केंद्र में है, अतः वह _____ तल पर है।
4. अमन खिलौनों की दुकान में है, अतः वह _____ तल पर है।

NOT TO BE REPUBLISHED @KIBS

Chapter 10.indd 246 20/09/2024 16:57:30

तल + 3, तल + 4 से नीचे है, अतः हम लिख सकते हैं + 3 <+ 4। हम इसे ऐसे भी लिख सकते हैं + 4 > + 3।

क्या हम – 3 < – 4 या – 4 < – 3 लिख सकते हैं?

चूँकि तल – 4, तल – 3 से नीचे है, इसका अर्थ हुआ – 4 < – 3 अत: इसे 3 > – 4 भी लिख सकते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. मजेदार इमारत का प्रयोग करते हुए दी गई संख्याओं की तुलना कीजिए और बॉक्स में < या > चिह्न भरिए।

   a. – 2 ☐ + 5 b. – 5 ☐ + 4 c. – 5 ☐ – 3

   d. + 6 ☐ – 6 e. 0 ☐ – 4 f. 0 ☐ + 4

> ध्यान दीजिए कि सभी ऋणात्मक क्रमांक वाले तल, 0 तल (भूतल) से नीचे हैं। अतः सभी ऋणात्मक संख्याएँ 0 से छोटी हैं। सभी धनात्मक क्रमांक वाले तल, 0 तल (भूतल) से ऊपर हैं। अतः सभी धनात्मक, संख्याएँ 0 से बड़ी हैं।

2. मजेदार इमारत में अधिक तलों की कल्पना कीजिए तथा संख्याओं की तुलना कीजिए। बॉक्स में < या > भरिए—

   a. – 10 ☐ – 12 b. + 17 ☐ – 10

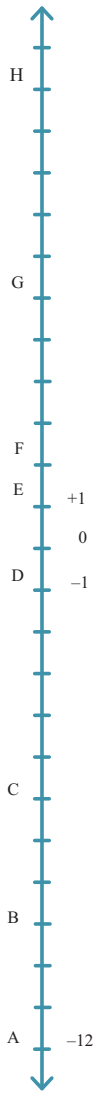
   c. 0 ☐ – 20 d. + 9 ☐ – 9

   e. – 25 ☐ – 7 f. + 15 ☐ – 17

3. यहाँ दाईं ओर एक रेखा के रूप में दिखाई गई इमारत में यदि तल A = – 12, तल D= –1 और तल E = +1 है, तो तल B, C, F, Gऔर H के क्रमांक बताइए।

4. यहाँ दाईं ओर दिखाई गई इमारत में निम्नलिखित तलों को अंकित कीजिए।

   a. – 7 b. – 4 c. + 3 d. – 10



कौन-सा बटन दबाना है, पता लगाने के लिए घटा

पिछली कक्षाओं में हम घटाने को 'निकाल लेना' के रूप में समझ चुके हैं। उदाहरण के लिए, किसी दराज में 10 पुस्तकें हैं। मैंने उनमें से 4 पुस्तकें ले लीं। अब दराज में कितनी पुस्तकें बची हैं?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 247 20/09/2024 16:57:30

हम घटा द्वारा उत्तर प्राप्त कर सकते हैं— $10 - 4 = 6$ या दस में से चार निकाल लेने के बाद छह शेष रह जाता है।

आप घटाने के अन्य तरीकों से भी परिचित हो सकते हैं, जो कि अंतर एवं समानता के वर्णन से संबंधित हैं। उदाहरण के लिए, इस स्थिति को लीजिए— 'मेरे पास 10 रुपये हैं और मेरी बहन के पास 6 रुपये है।'

अब, मैं प्रश्न पूछ सकता हूँ 'मेरी बहन को मेरे बराबर रुपयों के लिए और कितने रुपये मिलने चाहिए।'

हम इसे दो तरह से लिख सकते हैं— $6+? = 10$ या $10-6 =?$

यहाँ हम 'जोड़ने के लिए लुप्त संख्या ज्ञात करना' और 'घटाने' के मध्य संबंध देखते हैं।

हम घटाने के इस अर्थ का उपयोग धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के घटाने के लिए 'बराबर बनाना' या 'लुप्त संख्या ज्ञात करना' के रूप में करेंगे।

इस संदर्भ में $15 - 5$, $100 - 10$, $74 - 34$ ज्ञात कीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

सामान्यत: जब दो असमान मात्राएँ होती है, तब घटाव मात्राओं को बराबर करने के लिए आवश्यक परिवर्तन को इंगित करता है। घटाने की प्रक्रिया यह दर्शाती है कि लक्षित मात्रा तक पहुँचने के लिए प्रारंभिक मात्रा में कितना परिवर्तन होना चाहिए? विभिन्न तलों के संदर्भ में, प्रारंभिक स्तर से लक्षित स्तर तक पहुँचने में क्या परिवर्तन आवश्यक है? ध्यान दीजिए कि आवश्यक परिवर्तन धनात्मक (वृद्धि के लिए) एवं ऋणात्मक (कमी के लिए) हो सकते हैं।

© ERTS NOT TO BE REPUBLISHED

आपका प्रारंभिक तल 'आर्ट सेंटर' और लक्षित तल 'स्पोर्ट्स सेंटर' है। आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए?

आपको तीन तल ऊपर जाना है, अतः आपको $+3$ दबाना चाहिए। इसमें हम घटा का उपयोग करते हुए एक पद के रूप में लिख सकते हैं—

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति

उपरोक्त उदाहरण में, प्रारंभिक तल $+2$ (आर्ट सेंटर) है और लक्षित तल $+5$ है। $+2$ से $+5$ तक पहुँचने के लिए बटन $+3$ दबाना है। इसलिए,

$$(+5) - (+2) = (+3)$$

स्पष्टीकरण

जोड़ और घटाव के मध्य संबंध को याद कीजिए। $3 + ? = 5$ में लुप्त संख्या ज्ञात करने के लिए हम घटाव को उपयोग कर सकते हैं जैसे— $5 - 3 = 2$ तो घटाव, जोड़े जानी वाली लुप्त संख्या ज्ञात करने के समान है।

Chapter 10.indd 248 20/09/2024 16:57:30

हम जानते हैं कि—

प्रारंभिक तल + आवश्यक गति = लक्षित तल

यदि आवश्यक गति प्राप्त करनी हो तो,

प्रारंभिक तल + ? = लक्षित तल

अतः हम लिख सकते हैं–

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = ? = आवश्यक गति

कुछ अन्य उदाहरण—

(a) यदि लक्षित तल – 1 है और प्रारंभिक तल – 2 है, तो आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए?
आपको एक तल ऊपर जाने की आवश्यकता है, अतः आपको +1 दबाना चाहिए?

पद— **(– 1) – (– 2) = (+ 1)**

(b) यदि लक्षित तल – 1 है और प्रारंभिक तल + 3 है, तो आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए?
आपको चार तल नीचे जाने की आवश्यकता है, अतः आपको – 4 दबाना चाहिए।

पद— **(– 1) – (+ 3) = (– 4)**

(c) यदि लक्षित तल + 2 है और प्रारंभिक तल – 2 है, तो आपकी कौन-सा बटन दबाना चाहिए।
आपको चार तल ऊपर जाने की आवश्यकता है, अतः आपको + 4 दबाना चाहिए।

पद— **(+ 2) – (– 2) = (+ 4)**

आइए, पता लगाएँ

दिए गए पदों को पूरा कीजिए। आप इन्हें प्रारंभिक तल से लक्षित तल तक पहुँचने के लिए आवश्यक गति प्राप्त करने के रूप में सोच सकते हैं।

a. $(+1)-(+4)=$ _____ b. $(0)-(+2)=$ _____

c. $(+4)-(+1)=$ _____ d. $(0)-(-2)=$ _____

e. $(+4)-(-3)=$ _____ f. $(-4)-(-3)=$ _____

g. $(-1)-(+2)=$ _____ h. $(-2)-(-2)=$ _____

i. $(-1)-(+1)=$ _____ j. $(+3)-(-3)=$ _____

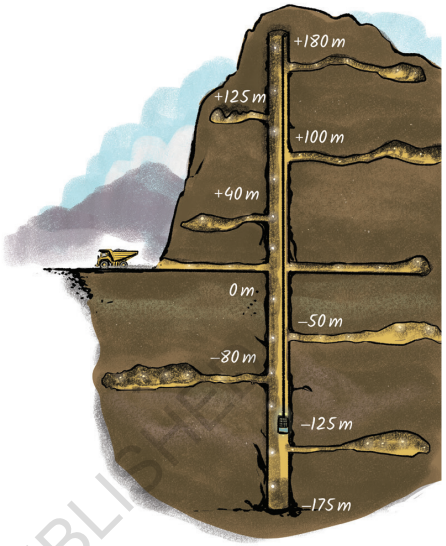
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 249 20/09/2024 16:57:30



बड़ी संख्याओं को जोड़ना और घटाना

दिया गया चित्र एक खदान को दर्शाता है। यह वह स्थान होता है जहाँ से चट्टानों को खोदकर खनिजों को निकाला जाता है। एक ट्रक भूतल पर है, लेकिन खनिज भूतल से ऊपर तथा नीचे दोनों तरफ हैं। यहाँ एक तेज गति से चलने वाली लिफ्ट है जो लोगों और कच्ची धातु को लेकर ऊपर-नीचे जाती है।



चित्र में कुछ स्तरों को अंकित किया गया है। भूतल को 0 से अंकित किया गया है। भूतल से ऊपर के स्तरों को धनात्मक संख्याओं और भूतल से नीचे के स्तरों को ऋणात्मक संख्याओं से अंकित किया गया है। यह संख्या दर्शाती है कि यह भूतल से कितने मीटर ऊपर या नीचे है।

मजेदार इमारत की तरह, खदान में—

प्रारंभिक तल + गति = लक्षित तल

उदाहरण के लिए,

$(+40) + (+60) = +100$ $(-90) + (-55) = -145$

लक्षित स्तर – प्रारंभिक स्तर = आवश्यक गति

उदाहरण के लिए,

$(+40) - (-50) = +90$ $(-90) - (+40) = -130$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वहाँ कितनी ऋणात्मक संख्याएँ हैं?

बेला की मजेदार इमारत में सिर्फ छः तल ऊपर तथा पाँच तल नीचे थे अर्थात् संख्या -5 से $+6$ भी ऊपर दिए गए खदान के उदाहरण में हमारे पास -200 से $+180$ तक संख्याएँ हैं। लेकिन हम बड़ी से बड़ी इमारतों और खदानों के विषय में कल्पना कर सकते हैं। जैसा कि धनात्मक संख्याएँ $+1,+2,+3,...$ बिना अंत के ऊपर की तरफ बढ़ती हैं, इसी प्रकार ऋणात्मक संख्याएँ $-1,-2,-3,...$बिना अंत के नीचे की तरफ बढ़ती रहती हैं। शून्य सहित धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को **पूर्णांक** कहा जाता है। वे शून्य के दोनों तरफ बढ़ती हैं ... $-3,-2,-1, 0,+1,+2,+3$.....

Chapter 10.indd 250 20/09/2024 16:57:31



आइए, पता लगाएँ

दिए गए पदों को पूरा कीजिए—

a. $(+40) + \_\_\_\_\_ = +200$ b. $(+40) + \_\_\_\_\_ = -200$

c. $(-50) + \_\_\_\_\_ = +200$ d. $(-50) + \_\_\_\_\_ = -200$

e. $(-200) - (-40) = \_\_\_\_\_$ f. $(+200) - (+40) = \_\_\_\_\_$

g. $(-200) - (+40) = \_\_\_\_\_$

खदान कूपक (Shaft) में गति के विषय में सोचकर अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

किन्हीं भी संख्याओं का योग, घटाना और तुलना करना

बड़े पूर्णांकों को जोड़ने और घटाने के लिए हम बड़ी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं। वास्तव में, हम ऐसी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं जो शून्य (0) स्तर से आरंभ हो तथा ऊपर और नीचे की ओर हमेशा के लिए बढ़ाई जा सके। भले ही वहाँ कोई भवन या खदान न हो सिर्फ एक 'अनंत लिफ्ट' हो!

हम इस कल्पना का प्रयोग पूर्णांकों को जोड़ने या घटाने के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, हमें $+2000 - (-200)$ को हल करना है। हम एक ऐसी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं जो भूतल से 2000 स्तर ऊपर हो तथा 200 तल भूतल से नीचे हो। याद कीजिए कि—

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति

प्रारंभिक तल -200 से लक्षित तल $+2000$ की ओर चलने के लिए हमें $+2200$ ($+200$ शून्य प्राप्त करने के लिए, और उसके पश्चात् $+2000$ और अधिक ताकि हम $+2200$ प्राप्त कर सकें) दबाना होगा। इसलिए, $(+2000) - (-200) = +2200$

ध्यान दीजिए, $(+2000) + (+200)$ भी $+2200$ होता है।

इसी प्रकार की लिफ्ट बनाकर या कल्पना करके निम्नलिखित पदों को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए—

a. $-125 + (-30)$ b. $+105 - (-55)$

c. $+105 + (+55)$ d. $+80 - (-150)$

e. $+80 + (+150)$ f. $-99 - (-200)$

g. $-99 + (+200)$ h. $+1500 - (-1500)$

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 251 20/09/2024 16:57:31

दिए गए उदाहरण में, हम देखते हैं कि $+2000 - (-200) = +2000 + (+200) = +2200$
अन्य शब्दों में, एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, संगत धनात्मक संख्या को जोड़ने के समान है अर्थात् हम ऋणात्मक संख्या के घटा को, धनात्मक संख्या के योग से बदल सकते हैं।

पिछले अभ्यासों में आपने जो उपरोक्त कार्य किया है, क्या आपने ध्यान दिया कि एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, उसी संगत धनात्मक संख्या के जोड़ने के समान है?

गणित चर्चा

संदर्भ के रूप में ली गई 'अनंत लिफ्ट' पर ध्यान दीजिए। क्या यह आपको संख्या रेखा की याद दिलाती है? किस प्रकार से?

संख्या रेखा पर वापसी

हमने इस अध्याय में पीछे जो 'अनंत लिफ्ट' देखी है, वह एक संख्या रेखा की तरह दिखाई देती है, है ना? वास्तव में यदि हम इसे 90° पर घुमा दें तो यह एक संख्या रेखा बन जाती है। यह हमें बताती है कि एक किरण रेखा को एक संख्या रेखा में कैसे पूरा करें। इसके साथ ही उस प्रश्न का उत्तर भी देती हैं, जो हमने इस अध्याय के आरंभ में पूछा था। शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ $-1, -2, -3, \ldots$ लिखते हैं।

सामान्यत: हम धनात्मक संख्याओं पर लगा '+' चिह्न हटा देते हैं और उन्हें केवल 1, 2, 3,... के रूप में लिखते हैं।

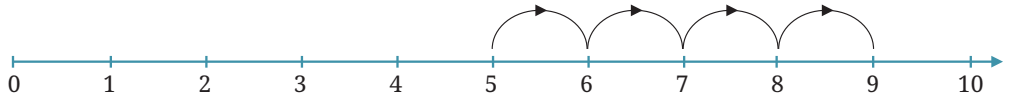
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



एक लिफ्ट द्वारा संख्या रेखा पर यात्रा करने के बजाए, हम इस पर चलने की कल्पना कर सकते हैं। संख्या रेखा पर दाईं ओर धनात्मक (आगे) तथा बाईं ओर ऋणात्मक (पीछे) दिशा है।

छोटी संख्याएँ, बड़ी संख्याओं के बाईं ओर लिखी जाती हैं तथा बड़ी संख्याएँ छोटी संख्याओं के दाईं ओर लिखी जाती हैं इसलिए, $2 < 5$; $-3 < -2$ और $-5 < -3$

यदि आप संख्या रेखा पर चिह्नित 5 पर खड़े हैं और वहाँ से आप 9 पर पहुँचना चाहते है, इसके लिए आपको संख्या रेखा पर कितने कदम चलना है?



Chapter 10.indd 252 20/09/2024 16:57:31

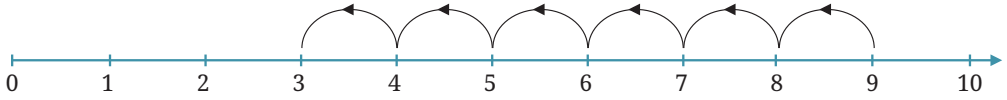
आपको 4 कदम चलना पड़ेगा। यही कारण है $5 + 4 = 9$

(याद रखिए— **प्रारंभिक संख्या + गति = लक्षित संख्या**)

इसके संगत घटाने का कथन है $9 - 5 = 4$।

(याद रखिए— **लक्षित संख्या – प्रारंभिक संख्या = आवश्यक गति**)

अब, यदि आप 9 से 3 पर जाना चाहते हैं, तो आपको संख्या रेखा पर कितने कदम चलना है?



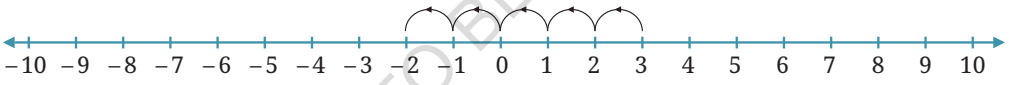
आपको 6 कदम पीछे चलना है, अर्थात् आपको –6 कदम चलना है। अत: हम लिखते हैं $9 + (-6) = 3$

(पुनः याद रखिए— **प्रारंभिक संख्या + गति = लक्षित संख्या**)

घटाने का संगत कथन है— $3 - 9 = -6$

(पुनः याद रखिए— **लक्षित संख्या – प्रारंभिक संख्या = आवश्यक गति**)

अब आप 3 से यदि –2 पर जाना चाहते हैं तो आपको कितने कदम चलना है?



आपको –5 कदम चलना है अर्थात् 5 कदम पीछे अत: $3 + (-5) = -2$

इसके संगत घटाने का कथन है— $2 - 3 = -5$

आइए, पता लगाएँ



1. उपरोक्त संख्या रेखा पर 3 धनात्मक तथा 3 ऋणात्मक संख्याओं को चिह्नित कीजिए।
2. उपरोक्त 3 ऋणात्मक चिह्नित संख्याओं को दिए गए बॉक्स में लिखिए— ☐ ☐ ☐
3. क्या $2 > -3$? क्यों? $-2 < 3$? क्यों?

@ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 253 20/09/2024 16:57:31

4. हल कीजिए a. $-5+0$ b. $7+(-7)$ c. $-10+20$
d. $10-20$ e. $7-(-7)$ f. $-8-(-10)$?

जोड़ और घटा के लिए बिना अंकित की गई संख्या रेखा का प्रयोग

आप उपरोक्त संख्या रेखा का प्रयोग केवल छोटी संख्याओं के योग, घटा एवं तुलना के लिए कर सकते हैं। आप एक काल्पनिक 'अनंत संख्या रेखा' या 'अचिह्नित संख्या रेखा' के प्रयोग से भी उपरोक्त संक्रियाएँ हल कर सकते हैं, जैसे—



यह रेखा सिर्फ शून्य की स्थिति को दर्शाती है। इसमें अन्य संख्याओं को अंकित नहीं किया गया है। पूर्णांकों के जोड़ और घटा के लिए इस अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग करना सुविधाजनक है।आप संख्या रेखा पर संख्याएँ अंकित करने के लिए अपनी कल्पना के अनुसार कोई पैमाना ले सकते हैं और इससे संख्याओं की स्थितियाँ अंकित कर सकते हैं।

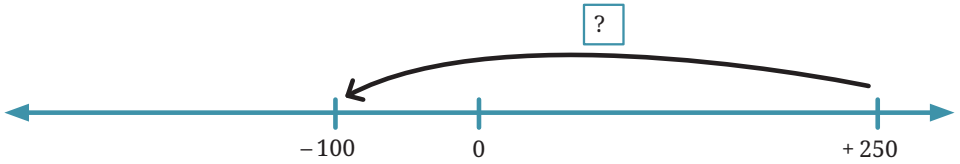
उदाहरण के लिए, यह अचिह्नित संख्या रेखा (Unmarked Number line (UNL)) योग के प्रश्न को दर्शाती है— $(+85)+(-60)=?$



तब हम कल्पना कर सकते हैं कि $85+(-60)=25$

निम्नलिखित अचिह्नित संख्या रेखा (UNL) एक घटाने की समस्या को दर्शाती है, इसे लुप्त परिशिष्ट संख्या से संबंधित समस्या के रूप में भी लिखा जा सकता है—

$(-100)-(+250)=?$ या $250+?=-100$



हम इस समस्या में देख सकते हैं कि $?=-350$

इस तरह आप धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के साथ जोड़ और घटा के प्रश्नों को कागज पर या अपने मस्तिष्क में एक अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग करके हल कर सकते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 254 20/09/2024 16:57:31

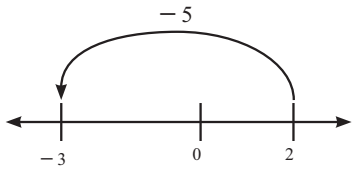
अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग कर निम्नलिखित पदों को पूर्ण कीजिए—

a. $-125+(-30)$

b. $+105-(-55)$

c. $+80-(-150)$

d. $-99-(-200)$



घटा को जोड़ तथा जोड़ को घटा में बदलना

याद कीजिए— **लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति**

या

लक्षित तल = प्रारंभिक तल + आवश्यक गति

यदि हम 2 से प्रारंभ करते हैं और – 3 पर पहुँचना चाहते हैं, तो हमें कितनी गति की आवश्यकता है?

पहला तरीका— संख्या रेखा को देखने पर हमें पता चलता है कि हमें –5 (यानी, पीछे की दिशा में 5) बढ़ना है। इसलिए, **– 3 –2 = –5** है। अतः आवश्यक गति– 5 है।

दूसरा तरीका— 2 से – 3 की यात्रा को दो भागों में बाँटते हैं।

a. 2 से 0, गति है $0-2=-2$

b. 0 से – 3, गति है $-3-0=-3$

कुल गति दोनों गतियों का योग है **$-3+(-2)=-5$**

उपर्युक्त दोनों रंगीन पदों को देखिए। दूसरे पद में कोई घटा नहीं है!

इस प्रकार, हम हमेशा घटा को जोड़ में बदल सकते हैं। **वह संख्या जो कि घटायी जा रही है, उसे उसके योज्य प्रतिलोम से बदला जा सकता है और फिर जोड़ा जा सकता है।**

इसी तरह, किसी संख्या को जोड़ा जा रहा है तो उसके योज्य प्रतिलोम से बदला जा सकता है और फिर घटाया जा सकता है। इस प्रकार हम हमेशा जोड़ को घटाव में भी बदल सकते हैं।

उदाहरण—

a. $(+7)-(+5)=(+7)+(-5)$

b. $(-3)-(+8)=(-3)+(-8)$

c. $(+8)-(-2)=(+8)+(+2)$

d. $(+6)-(-9)=(+6)+(+9)$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 255 20/09/2024 16:57:31

10.2 टोकन मॉडल

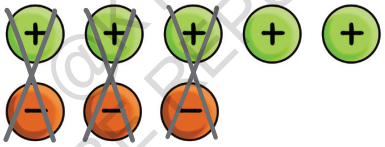
जोड़ने के लिए टोकन का उपयोग

बेला की मजेदार इमारत का लिफ्ट चालक ऊब गया है। स्वयं के मनोरंजन के लिए, वह एक बॉक्स रखता है जो कि कई धनात्मक "हरा" और ऋणात्मक "लाल" टोकन से भरा है। हर बार जब वह '+' बटन दबाता है, वह एक धनात्मक "हरा" टोकन बॉक्स से उठाकर उसे अपनी जेब में रखता है। इसी तरह प्रत्येक बार जब वह '–' बटन दबाता है, वह एक ऋणात्मक "लाल" टोकन उठाकर अपनी जेब में रखता है।

वह अपनी खाली जेब के साथ भूतल से प्रारंभ करता है। एक घंटे बाद उसने अपनी जेब की जाँच की तो उसे 5 धनात्मक और 3 ऋणात्मक टोकन प्राप्त हुए। बताइए अब वह किस तल पर है?

उसने '+' को 5 बार तथा '–' को 3 बार दबाया होगा। और $(+5)+(-3) = +2$ अतः अब वह + 2 तल पर है।

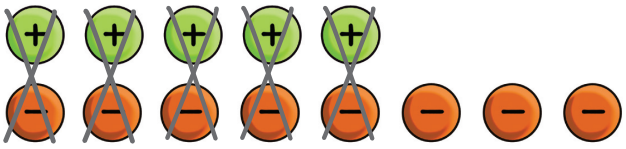
यहाँ गणना करने का अन्य तरीका भी दिया गया है जैसे—



एक धनात्मक टोकन और एक ऋणात्मक टोकन एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं और इस जोड़े का मान शून्य हो जाता है। (उसकी जेब में इन दो टोकन का अर्थ था कि उसने क्रमशः एक बार '+' दबाया और एक बार '–' दबाया जो कि एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं।) हम कह सकते हैं कि एक धनात्मक और एक ऋणात्मक टोकन एक 'शून्य जोड़ा' बनाते हैं। जब आप सभी शून्य जोड़ों को हटा देते हैं, तब आपके पास दो धनात्मक टोकन बचते हैं, अतः $(+5) + -(3) = +2$

हम टोकन के उपयोग से इस प्रकार के अन्य जोड़ भी कर सकते हैं।

उदाहरण— +5 और – 8 को जोड़िए।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 256 20/09/2024 16:57:37

चित्र में हम देखते हैं कि पाँच शून्य जोड़े हटा सकते हैं और हमारे पास – 3 बचता है। इसलिए
(+5) + (– 8)= – 3

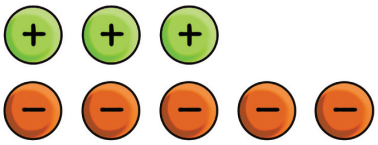
आइए, पता लगाएँ

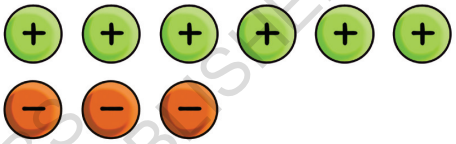
1. टोकन का उपयोग करते हुए जोड़ को पूरा कीजिए।

   a. (+ 6) + (+ 4) b. (– 3) + (– 2)

   c. (+ 5) + (– 7) d. (– 2) + (+ 6)

2. नीचे दिए गए टोकन युग्म में से शून्य युग्म को निरस्त (रद्द) कीजिए। प्रत्येक स्थिति में लिफ्ट चालक कौन-से तल पर है? प्रत्येक स्थिति में संगत धनात्मक कथन क्या होगा?

a. 

b. 

टोकन के उपयोग द्वारा घटाना

हम देख चुके हैं कि धनात्मक टोकन और ऋणात्मक टोकन के साथ पूर्णांकों का जोड़ कैसे करते हैं? हम टोकन का उपयोग करके घटा भी कर सकते हैं?

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(+ 5) – (+ 4)



(+ 5) – (+ 4) = + 1

यह करना सरल है। परिणाम के लिए 5 धनात्मक में से 4 धनात्मक निकाल लेते हैं।

अत: (+ 5) – (+ 4) = + 1

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(– 7) – (– 5)



(–7) – (–5) = –2

क्या (– 7) – (– 5) और (– 7) + (+ 5) समान हैं?

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(+ 5) – (+ 6)



5 धनात्मक रखिए

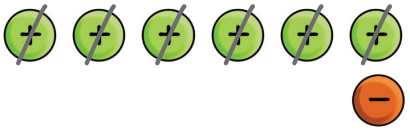
लेकिन यहाँ 6 धनात्मक लेने के लिए पर्याप्त टोकन नहीं है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 257 20/09/2024 16:57:47

इस समस्या से निपटने के लिए हम एक अतिरिक्त शून्य जोड़ा (एक धनात्मक व एक ऋणात्मक) हमें यह भी ज्ञात है, कि जो टोकन का सेट दिया हुआ है, इससे उसके मान में कोई अंतर नहीं आता है।

अब आप 6 धनात्मक ले सकते हैं। देखिए क्या शेष रहा है?



अत: $(+5)-(+6)=-1$

आइए, पता लगाएँ

1. टोकन का उपयोग करके निम्नलिखित अंतरों का मूल्यांकन कीजिए। यह भी जाँचिए कि आपको वही परिणाम मिलता है जो अब आप अन्य तरीकों से जानते हैं। घटाव को पूरा कीजिए—

   a. $(+10)-(+7)$ b. $(-8)-(-4)$ c. $(-9)-(-4)$

   d. $(+9)-(+12)$ e. $(-5)-(-7)$ f. $(-2)-(6)$

2. घटाव को पूरा कीजिए—

   a. $(-5)-(-7)$ b. $(+10)-(+13)$ c. $(-7)-(-9)$

   d. $(+3)-(+8)$ e. $(-2)-(-7)$ f. $(+3)-(+15)$

उदाहरण— $(+4)-(-6)$

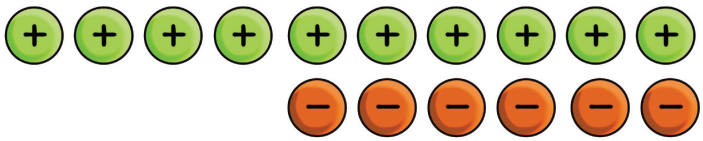
4 धनात्मक के साथ आरंभ करते हैं



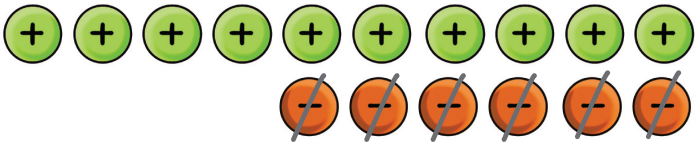
हमें इनमें से 6 ऋणात्मक लेने हैं, लेकिन यहाँ पर्याप्त ऋणात्मक नहीं हैं।

ऐसा करने में कोई समस्या नहीं है। इसमें कि हम कुछ शून्य जोड़े रखते हैं, क्योंकि इससे दिए गए टोकनों के सेट के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

लेकिन कितने शून्य जोड़े? हमें 6 ऋणात्मक लेने हैं, अतः हम 6 शून्य जोड़ों को रखते हैं—



अब 6 ऋणात्मक ले लेते हैं—



अतः, $(+4)-(-6)=+10$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 258 20/09/2024 16:58:00

आइए, पता लगाएँ

1. घटाने का प्रयास कीजिए— $-3-(+5)$
   आपको कितने शून्य के जोड़े रखने होंगे? इसका परिणाम क्या होगा?
2. टोकन का उपयोग करते हुए निम्न का मूल्यांकन कीजिए।
   a. $(-3)-(+10)$ b. $(+8)-(-7)$ c. $(-5)-(+9)$
   d. $(-9)-(+10)$ e. $(+6)-(-4)$ f. $(-2)-(+7)$

10.3 अन्य स्थानों पर पूर्णांक

लेन-देन (जमा-निकासी)

माना आप अपनी पिछले महीने के ₹100 की बचत से स्थानीय बैंक में एक खाता खोलते हैं। अब बैंक में आपकी जमा राशि ₹100 हैं।

अगले दिन आप ₹60 कमा लेते हैं और बैंक में जमा करा देते हैं (यह राशि आपकी पासबुक में 'जमा' (credit) के रूप में दर्शाई गई है)।

आपकी बैंक में नई शेष जमा राशि _____ है।
अगले दिन आप अपने बैंक खाते से ₹30 का बिजली बिल का भुगतान करते हैं। यह राशि आपकी बैंक पासबुक में 'निकासी' (debit) के रूप में दर्शाई गई है।

अब आपकी बैंक में शेष जमा राशि _____ है।
अगले दिन आपको व्यवसाय के लिए ₹150 की एक बड़ी खरीददारी करनी पड़ी। पुनः खाते में यह राशि निकासी में दर्शाई गई है।

अब आपकी बैंक में शेष जमा राशि क्या है? _____

क्या यह संभव है?

हाँ, कुछ बैंक अस्थायी रूप से आपकी जमा राशि को ऋणात्मक होने की अनुमति देते हैं। यदि आपकी जमा राशि ऋणात्मक होती है, तो बैंक ब्याज या शुल्क के रूप में कुछ अतिरिक्त शुल्क लेते हैं।

पिछले दिन की आपकी बड़ी खरीददारी की रणनीति से आपके व्यवसाय में अगले दिन की आय ₹200 थी।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 259 20/09/2024 16:58:01

अब आपकी शेष जमा राशि क्या है?____

आप जमा राशि को धनात्मक तथा निकासी को ऋणात्मक संख्याओं के रूप में सोच सकते हैं। आपकी कुल जमा (धनात्मक संख्या) और निकासी (ऋणात्मक संख्या) का योग आपके बैंक खाते में कुल शेष जमा राशि है। यह धनात्मक या ऋणात्मक में से कोई भी हो सकती है।

सामान्यत:, आपको बैंक खाते में धनात्मक योग राशि रखने का प्रयास करना चाहिए।

आइए, पता लगाएँ

1. माना आप ₹0 के साथ अपना बैंक खाता खोलते हैं, इसके पश्चात् आप उसमें ₹30, ₹40, और ₹50 जमा करवाते हैं और ₹40, ₹50 और ₹60 की निकासी करते हैं। अब आपके बैंक खाते में कितनी जमा राशि शेष है?
2. माना आप ₹0 के साथ अपना बैंक खाता खोलते हैं और अपने उसी खाते में से ₹1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 और 128 निकाल लेते हैं, इसके पश्चात् आप एक बार में ₹256 रूपये जमा कर देते हैं। अब आपके बैंक खाते में कितनी जमा राशि शेष है?
3. आपके बैंक खाते में प्राय: धनात्मक जमा राशि अधिक अच्छी क्यों मानी जाती है? ऐसी कौन-सी परिस्थितियाँ हो सकती हैं, जिनके तहत अस्थायी रूप से ऋणात्मक (निकासी) शेष जमा राशि सार्थक हो सकती है?

जैसा कि आप देख सकते हैं, शून्य के साथ-साथ धनात्मक और ऋणात्मक संख्याएँ बैंकिंग और लेखांकन के क्षेत्र में अत्यंत उपयोगी हैं।

भूगोलीय प्रतिच्छेद

हम भूगोलीय विशेषताओं, जैसे— पर्वत, पठार और रेगिस्तान आदि की ऊँचाई 'समुद्र तल' से आरंभ करके नापते हैं। समुद्र तल पर ऊँचाई 0 मी. होती है। समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई धनात्मक तथा उससे नीचे की गहराई को ऋणात्मक संख्याओं से प्रदर्शित करते हैं।

आइए, पता लगाएँ

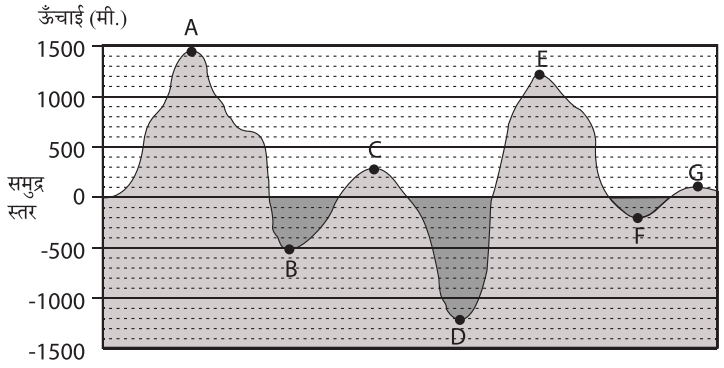
1. भौगोलिक प्रतिच्छेद को देखते हुए उनकी संबंधित ऊँचाइयाँ लिखिए—

a. ☐ b. ☐ c. ☐ d. ☐

e. ☐ f. ☐ g. ☐

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 260 20/09/2024 16:58:01



अध्यापक टिप्पणी

आप बच्चों से इस पृष्ठ पर चित्र दिखाकर पूछिए कि भौगोलिक प्रतिच्छेद क्या है? क्या यह पृथ्वी पर किसी स्थान पर निकाले गए एक ऊर्ध्वाधर टुकड़े की कल्पना करने जैसा है। एक तरफ से देखने पर यह ऐसा ही दिखेगा। भूगोल में ऊँचाई और गहराई मापने के लिए 'समुद्र तल' की अवधारणा पर चर्चा कीजिए।

2. इस भौगोलिक प्रतिच्छेद में सबसे उच्चतम बिंदु एवं सबसे निम्नतम बिंदु कौन-सा है?
3. क्या आप बिंदुओं A, B, ..., G को ऊँचाइयों के अवरोही (घटते) क्रम में लिख सकते हैं? क्या आप बिंदुओं को ऊँचाइयों के आरोही (बढ़ते) क्रम में लिख सकते हैं?
4. पृथ्वी पर समुद्र तल से सबसे ऊँचा स्थान कौन-सा है? इसकी ऊँचाई कितनी है?
5. भूमि या महासागर तल पर समुद्र तल के सापेक्ष सबसे निम्नतम बिंदु क्या है? इसकी ऊँचाई कितनी है? (यह ऊँचाई ऋणात्मक होनी चाहिए।)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तापमान

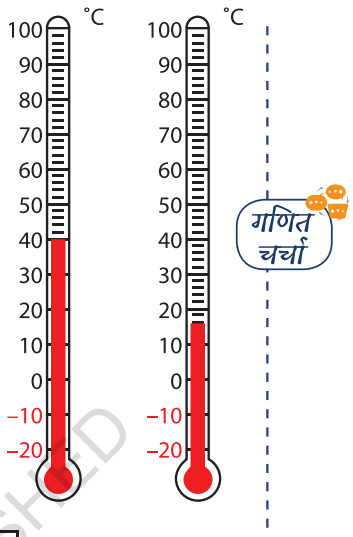
गर्मी के दिनों में आपने समाचारों में गर्म लहर (heatwave) के बारे में सुना होगा। जिसके फलस्वरूप आपको बहुत अधिक गर्मी लगती है, क्या आप बता सकते हैं कि उस समय तापमान क्या होता होगा? सर्दी के दिनों में तापमान ज्यादा ठंडा रहता है।

विगत वर्ष आपके क्षेत्र में गर्मियों का अधिकतम तापमान तथा सर्दियों का न्यूनतम तापमान क्या अंकित किया गया था? पता लगाइए।

जब हम तापमान मापते हैं; तो मापन की इकाई को सेल्सियस (°C) में लेते हैं। आगे दी गई तापमापी (थर्मामीटर) 40°C और 15°C तापमान दर्शा रहे हैं।

Chapter 10.indd 261 20/09/2024 16:58:01

आइए, पता लगाएँ



1. क्या आप जानते हैं कि भारत में कुछ ऐसे स्थान भी हैं जहाँ कभी-कभी तापमान 0°C से नीचे चला जाता है? भारत में ऐसे स्थानों का पता लगाइए जहाँ तापमान सामान्यत: बार 0°C से भी नीचे पहुँच जाता है। इन स्थानों में क्या समानता है? अन्य स्थानों की तुलना में यहाँ अधिक ठंड क्यों होती है?

2. लद्दाख के लेह क्षेत्र में सर्दी के समय अत्यधिक ठंड हो जाती है। नीचे दी गई सारणी को देखिए, यह लेह के नवंबर माह के, एक दिन के विभिन्न समयों के तापमान को दर्शाती है। साथ दिन और रात के सही समय के साथ संबंधित तापमान का मिलान कीजिए।

तापमान
14°C
8°C
–2°C
–4°C

समय
02:00 a.m.
11:00 p.m.
02:00 p.m.
11:00 a.m.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अध्यापक टिप्पणी

आप, विद्यार्थियों के साथ तापमापी एवं उससे तापमान कैसे मापते हैं; इस पर चर्चा कीजिए। कक्षा-कक्ष में तापमापी लेकर आइए तथा गर्म एवं ठंडे पानी का तापमान मापकर विद्यार्थियों को दिखाइए। बच्चों को बताइए की तापमापी पर 0°C से नीचे भी संख्याएँ अंकित हैं। विद्यार्थियों से चर्चा कीजिए कि 0°C पर क्या दर्शाता है जैसे— 0°C पानी का जमाव बिंदु क्या होगा।

10.4 पूर्णांकों के साथ अन्वेषण

एक रिक्त पूर्णांक ग्रिड

4	–1	–3
–3		1
–1	–1	2

5	–3	–5
0		–5
–8	–2	7

Chapter 10.indd 262 20/09/2024 16:58:01

इन दोनों ग्रिडों में संख्याओं के विषय में कुछ विशेष है। आइए, जानते हैं कि वह क्या है?.

ऊपर की पंक्ति	—	$4 + (-1) + (-3) = 0$	$5 + (-3) + (-5) =$ ____
अंतिम पंक्ति	—	$(-1) + (-1) + 2 = 0$	$(-8) + (-2) + (7) =$ ____
बायाँ स्तंभ	—	$4 + (-3) + (-1) = 0$	$5 + 0 + (-8) =$ ____
दायाँ स्तंभ	—	$(-3) + 1 + 2 = 0$	$(-5) + (-5) + (7) =$ ____

प्रत्येक ग्रिड में, दो पंक्तियों (ऊपर की पंक्ति व अंतिम पंक्ति) में से प्रत्येक की संख्याएँ और दो स्तंभों (बायाँ स्तंभ व दायाँ स्तंभ) में से प्रत्येक की संख्याओं को जोड़ने पर एक ही संख्या प्राप्त होती है। इस योग को हम 'सीमा योग' कह सकते हैं। प्रथम ग्रिड का 'सीमा योग' '0' है।

आइए, पता लगाएँ

1. उपरोक्त दूसरे ग्रिड के लिए गणना कीजिए और सीमा योग ज्ञात कीजिए।
2. आवश्यक सीमा योग बनाने के लिए ग्रिड को पूर्ण कीजिए—

–10		
		–5
9		

सीमा योग 4 है।

6	8	
		–5
	–2	

सीमा योग –2 है

7		
		–5

सीमा योग –4 है।

3. उपरोक्त अंतिम ग्रिड में –4 सीमा योग प्राप्त करने के लिए एक से अधिक तरीके बताइए।
4. कौन-सी अन्य ग्रिड विभिन्न विधियों से भरी जा सकती है ? इसके क्या कारण हो सकते हैं?
5. एक सीमा पूर्णांक वर्ग पहेली बनाइए और इसे पूर्ण करने के लिए सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

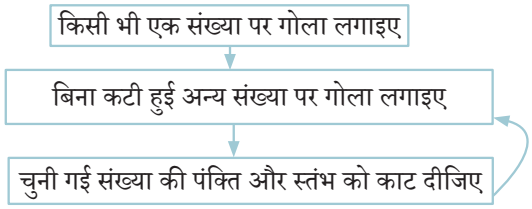
संख्याओं का अद्‌भुत ग्रिड!

अध्याय में आगे एक ग्रिड दिया है जिसमें कुछ संख्याएँ दर्शाई हैं। दिए गए चरणों का तब तक अनुसरण कीजिए जब तक कोई संख्या शेष ना रह जाए।

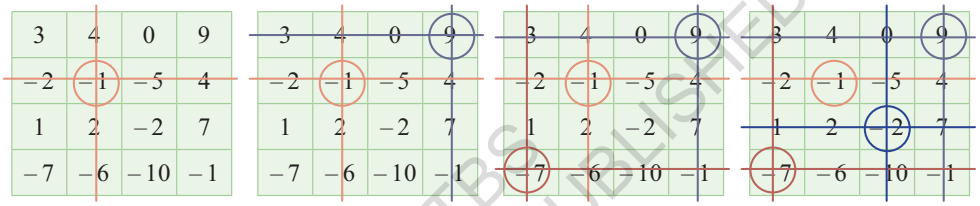
@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 263 20/09/2024 16:58:01

3	4	0	9
–2	–1	–5	4
1	2	–2	7
–7	–6	–10	–1



जब कोई बिना कटी संख्या न रह जाए, तब रुकिए। गोला लगी संख्याओं को जोड़िए।
नीचे दिए गए उदाहरण में, गोला लगी संख्याएँ –1, 9, –7, –2 हैं। यदि आप इन्हें जोड़ेंगे तो आपको –1 प्राप्त होगा।



आइए, पता लगाएँ

1. पुनः प्रयास कीजिए, इस बार अलग संख्याएँ चुनिए। आपको इन संख्याओं का क्या योग प्राप्त हुआ? क्या यह पहले से भिन्न है? कुछ और बार प्रयास कीजिए।
2. नीचे दी गई ग्रिड के साथ भी इसी तरह का खेल खेलिए। आप क्या उत्तर प्राप्त करते हैं?

7	10	13	16
–2	1	4	7
–11	–8	–5	–2
–20	–7	–14	–11

–11	–10	–9	–8
–7	–6	–5	–4
–3	–2	–1	0
1	2	3	4

3. इन ग्रिडों में क्या विशेष हो सकता है? क्या संख्याओं में जादू है या इन्हें व्यवस्थित करने के तरीके में जादू है या दोनों में हैं? क्या आप ऐसे और ग्रिड बना सकते हैं?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 264 20/09/2024 16:58:01

आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

1. दिए गए युग्मों के बीच सभी पूर्णांकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।
   a. 0 और –7 b. – 4 और 4
   c. – 8 और –15 d. – 30 और – 23
2. ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनका योग –8 है।
3. यहाँ दो पासे हैं जिनके फलकों पर संख्याएँ दर्शाई गई हैं— –1, 2, – 3, 4, – 5, 6 इन पासों को उछालने पर सबसे छोटा संभावित योग –10 = (– 5) + (– 5) है और सबसे बड़ा संभावित योग 12 = (6) + (6) है। इन दो पासों पर संख्याओं को जोड़ने से (– 10) और (+ 12) के बीच की कुछ संख्याएँ प्राप्त करना संभव नहीं है। ऐसी संख्याओं का पता लगाइए।
4. इन्हें हल कीजिए—

8 – 13	(– 8) – (13)	(– 13) – (– 8)	(– 13) + (– 8)
8 + (– 13)	(– 8) – (– 13)	(13) – 8	13 – (– 8)

5. निम्नलिखित के वर्ष ज्ञात कीजिए ?
   a. वर्तमान वर्ष से 150 वर्ष पूर्व कौन-सा वर्ष था? _____
   b. वर्तमान वर्ष से 2200 वर्ष पूर्व कौन-सा वर्ष था? _____
   संकेत— याद रखिए कि कोई 0 वर्ष नहीं था।
   c. 680 ईसा पूर्व से 320 वर्ष बाद कौन-सा वर्ष होगा? _____
6. निम्नलिखित अनुक्रम को पूरा कीजिए—
   a. (– 40), (– 34), (– 28), (– 22), ____, ____, ____
   b. 3, 4, 2, 5, 1, 6, 0, 7, ____, ____, ____
   c. ____, ____, 12, 6, 1, (– 3), (– 6), ____, ____, ____, ____
7. यहाँ छह पूर्णांक कार्ड हैं (+ 1), (+ 7), (+ 18), (– 5), (– 2), (– 9) आप इनमें से किसी भी कार्ड का चयन कर सकते हैं तथा जोड़ और घटा के उपयोग द्वारा एक पद बनाइए।
   यहाँ एक पद है— (+18) + (+1) – (+7) – (–2) जिसका मान (+14) है। दिए गए कार्ड्स से एक से अधिक कार्ड का चयन कीजिए और एक पद बनाइए जिसका मान (–30) के आस-पास हो।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 265 20/09/2024 16:58:02

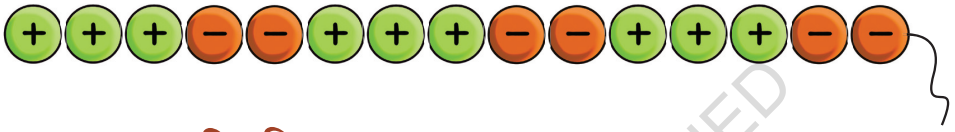
8. दो धनात्मक पूर्णांकों का योग सदैव धनात्मक होता है लेकिन एक (धनात्मक पूर्णांक) –(धनात्मक पूर्णांक) धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। आप निम्न के विषय में क्या कह सकते हैं—

   a. (धनात्मक) – (ऋणात्मक) b. (धनात्मक) + (ऋणात्मक)

   c. (ऋणात्मक) + (ऋणात्मक) d. (ऋणात्मक) – (ऋणात्मक)

   e. (ऋणात्मक) – (धनात्मक) f. (ऋणात्मक) + (धनात्मक)

9. इस लड़ी में 100 टोकन हैं, जो एक विशेष पैटर्न में व्यवस्थित किए गए हैं, इस लड़ी का मान क्या है?



10.5 एक चुटकी इतिहास

सामान्य भिन्नों की तरह, सामान्य पूर्णांकों (शून्य और ऋणात्मक संख्याओं सहित) की कल्पना और प्रयोग एशिया में पहली बार हजारों वर्ष पूर्व किया गया था। इसके पश्चात् आधुनिक समय में यह अंतत: संपूर्ण विश्व में फैल गए।

ऋणात्मक संख्याओं के उपयोग का पहला ज्ञात उदाहरण लेखांकन के संदर्भ में है। चीन के सर्वाधिक गणितीय कार्यों में से *चैप्टर्स ऑन मैथमैटिकल* का अध्याय 9 (jinzhang suanshu), है। जो प्रथम या द्वितीय शताब्दी ईस्वी तक पूरा हो गया था। इस अध्याय में धनात्मक और ऋणात्मक संख्याएँ लाल एवं काली छड़ी द्वारा दर्शाई गई थीं, ठीक उसी तरह जैसे हमने उन्हें लाल और हरे टोकन का उपयोग करके दर्शाया था।

प्राचीन काल में भारत में भी लेखांकन की संस्कृति अत्यंत व्यापक थी। कौटिल्य ने अपने *अर्थशास्त्र* में (लगभग 300 ईसा पूर्व) जमा (क्रेडिट) और निकासी (डेबिट) की अवधारणा के बारे में विस्तार से लिखा था। इसमें यह मान्यता भी सम्मिलित थी कि खाता शेष ऋणात्मक हो सकता है। लेखांकन के संदर्भ में ऋणात्मक संख्याओं का स्पष्ट उपयोग कई प्राचीन भारतीय कार्यों में देखा जाता है, जिसमें वर्ष 300 ईस्वी के आस-पास की *बक्शाली* पांडुलिपि भी सम्मिलित है। इस पांडुलिपि में ऋणात्मक संख्या को एक विशेष प्रतीक का उपयोग करके संख्या के पश्चात् रखा जाता था (न कि संख्या से पहले जैसा कि हम वर्तमान समय में करते हैं)।

ब्रह्मगुप्त ने 628 ईस्वी में अपनी पुस्तक *ब्रहमस्फुटसिद्धांत* में पहली बार धनात्मक संख्याओं, ऋणात्मक संख्याओं और शून्य का प्रयोग एक समान रूप में जमा, घटा, गुणन और विभाजन के लिए

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 266 03/10/2024 15:15:00

भी किया। ब्रह्मगुप्त ने स्पष्ट रूप से धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य के लिए कई आवश्यक नियम दिए। इन नियमों ने आधुनिक गणित हेतु मार्ग प्रशस्त किया जिसे हम वर्तमान समय में प्रयोग में ला रहे हैं।

ब्रह्मगुप्त के धनात्मक संख्याओं, ऋणात्मक संख्याओं तथा शून्य के जोड़ने एवं घटाने के कुछ मुख्य नियमों का वर्णन निम्नलिखित है—

ब्रह्मगुप्त के योग के लिए नियम (*ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* 18.30, 628 ईस्वी):

1. दो धनात्मकों का योग धनात्मक होता है (जैसे— $2+3=5$)
2. दो ऋणात्मकों का योग ऋणात्मक होता है। दो ऋणात्मक को जोड़ने के लिए, दोनों संख्याओं को (बिना चिह्न के) जोड़ते हैं और तब प्राप्त परिणाम के सामने ऋणात्मक चिह्न लगा देते हैं। (जैसे— $(-2)+(-3)=-5$)
3. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक संख्या को जोड़ने के लिए, (बिना चिह्न के) बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाएँ और प्राप्त परिणाम पर बड़ी संख्या का चिह्न लगाइए। (जैसे— $-5+3=-2$, $2+(-3)=-1$, और $-3+5=2$)
4. एक संख्या तथा उसके प्रतिलोम का योग शून्य होता है। (जैसे— $2+(-2)=0$)
5. किसी संख्या और शून्य का योग, वही संख्या होती है। (जैसे— $-2+0=-2$ और $0+0=0$)

घटाने के लिए ब्रह्मगुप्त के नियम (*ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* 18.31-18.32)

1. एक बड़े धनात्मक में से एक छोटा धनात्मक घटाया जाए तो परिणाम धनात्मक रहता है। (जैसे— $3-2=1$)
2. एक छोटे धनात्मक में से एक बड़ा धनात्मक घटाया जाए तो परिणाम ऋणात्मक होता है। (जैसे— $2-3=-1$)
3. एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, इसके संगत धनात्मक संख्या को जोड़ने के समान है। (जैसे—$2-(-3)=2+3$)
4. एक संख्या को स्वयं में से घटाना शून्य प्रदान करता है। (जैसे— $2-2=0$ और $-2-(-2)=0$)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 267 20/09/2024 16:58:06

5. एक संख्या में से शून्य को घटाने पर वही संख्या प्राप्त होती है (जैसे— $(-2)-0=(-2)$ और $0-0=0$)। शून्य में से किसी संख्या को घटाने पर हमें इसका प्रतिलोम प्राप्त होता है। (जैसे— $0-(-2)=2$)

जब आप एक बार ब्रह्मगुप्त के नियमों को समझ लेते हैं तो आप किसी भी धनात्मक संख्या, ऋणात्मक संख्या और शून्य का जोड़ना और घटाना कर सकते हो।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप ब्रह्मगुप्त के नियमों को बेला की मजेदार इमारत या संख्या रेखा के अनुसार स्पष्ट कर सकते हो?
2. प्रत्येक नियम के लिए स्वयं के उदाहरण दीजिए।

ब्रह्मगुप्त पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने शून्य को धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं के समान महत्व दिया। इन्होंने सवर्प्रथम ऐसी सभी संख्याओं धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य पर अंकगणित की संक्रियाओं के लिए स्पष्ट नियम दिए जिसे अब *रिंग* के नाम से जाना जाता है। इससे संपूर्ण विश्व में गणित करने का तरीका बदल जाएगा।

हालाँकि शून्य एवं ऋणात्मक संख्याओं को संख्याओं के रूप मे स्वीकारने हेतु शेष विश्व को कई शताब्दियाँ लगीं। ये संख्याएँ 9वीं शताब्दी में अरब देशों में पहुँची, उनके द्वारा स्वीकार की गईं एवं गहन अध्ययन के पश्चात् 13वीं शताब्दी में यूरोपीय देशों में विस्तृत हुई।

आश्चर्य की बात यह है कि 18वीं शताब्दी में भी कई यूरोपीय देशों में गणितज्ञों द्वारा ऋणात्मक संख्याओं को स्वीकार नहीं किया गया था। 18वीं शताब्दी में एक फ्रांसीसी गणितज्ञ लाझारे कार्नोट ने ऋणात्मक सख्याओं को 'बेतुका' कहा था। परंतु कुछ समय बाद शून्य के साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी वैश्विक गणित और विज्ञान में अपरिहार्य सिद्ध हुईं। वर्तमान समय में ऋणात्मक, धनात्मक संख्याओं के साथ अत्यंत महत्वपूर्ण मानी जाती हैं, जैसा कि वर्ष 628 ईस्वी में ब्रह्मगुप्त ने बहुत स्पष्ट रूप से इन्हें अनुशंसित किया था। सभी संख्याओं पर अंकगणितीय नियमों के अमूर्त रूपों ने बीजगणित के आधुनिक विकास का मार्ग प्रशस्त किया, जिसके विषय में हम भविष्य की कक्षाओं में पढेंगे।

© IITBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 268 20/09/2024 16:58:06

सारांश

- ऐसी भी संख्याएँ हैं जो शून्य से कम हैं। उन्हें उनके सामने '–' चिह्न के साथ लिखा जाता है (उदाहरण के लिए, –2), और उन्हें **ऋणात्मक संख्याएँ** कहा जाता है। वे संख्याएँ रेखा पर शून्य के बाईं ओर स्थित हैं।
- संख्याएँ ..., – 4, – 3, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ... **पूर्णांक** कहलाती हैं। संख्याएँ 1, 2, 3, 4, ... **धनात्मक पूर्णांक** कहलाती हैं और संख्याएँ ..., – 4, – 3, – 2, –1 **ऋणात्मक पूर्णांक** कहलाती हैं। शून्य (0) न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।
- प्रत्येक दी गई संख्या के साथ एक और संख्या जुड़ी होती है जिसे दी गई संख्या में जोड़ने पर शून्य प्राप्त होता है। इसे संख्या को **योज्य प्रतिलोम** कहते हैं। उदाहरण के लिए, 7 का योज्य प्रतिलोम –7 है और –543 का योज्य प्रतिलोम 543 है।
- जोड़ को **प्रारंभिक स्थिति + गति = लक्ष्य स्थिति** के रूप में समझा जा सकता है।
- जोड़ को गति के संयोजन की वृद्धि या कमी के रूप में भी समझा जा सकता है— **गति 1 + गति 2 = परिणामी गति।**
- घटाने को **लक्ष्य स्थिति — प्रारंभिक स्थिति = गति** के रूप में समझा जा सकता है।
- सामान्यत: हम ब्रह्मगुप्त के योग के नियमों का पालन करके दो संख्याओं को जोड़ सकते हैं—
  a. यदि दोनों संख्याएँ धनात्मक हैं, तो इन संख्याओं को जोडने पर एक धनात्मक संख्या प्राप्त होगी (जैसे— 2 + 3 = 5)।
  b. यदि दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हैं, तो संख्याओं को जोड़िए (चिह्नों के बिना), इसके पश्चात् परिणाम प्राप्त करने के लिए ऋण चिह्न लगाइए (– 2 + (– 3) = – 5)।
  c. यदि एक संख्या धनात्मक है और दूसरी ऋणात्मक है, तो छोटी संख्या (चिह्न के बिना) को बड़ी संख्या (चिह्न के बिना) से घटाइए, और प्राप्त परिणाम में बड़ी संख्या का चिह्न लगाइए (उदाहरण के लिए, (जैसे— – 5 + 3 = (– 2)।
  d. एक संख्या और उसका योज्य प्रतिलोम शून्य होता है (जैसे— 2 + (– 2) = 0)।
  e. एक संख्या और शून्य को जोड़ने पर वही संख्या मिलती है (जैसे— – 2 + 0 = –2)।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 269 20/09/2024 16:58:07

- हम दो पूर्णांकों के घटाव की समस्या को, योग समस्या में बदलकर, फिर योग के नियमों का पालन करके, दो पूर्णांक हल कर सकते हैं। किसी पूर्णांक का घटाव उसके योज्य प्रतिलोम के जोड़ने के समान ही होता है।
- पूर्णांकों की तुलना की जा सकती है— … $-3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 <$ ... छोटी संख्याएँ, संख्या रेखा पर बड़ी संख्याओं के बाईं ओर होती हैं।
- हम धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को जमा (credit) और निकासी (debit) के रूप में भी व्याख्यायित कर सकते हैं। हम धनात्मक संख्याओं को संदर्भ बिंदु से ऊपर की दूरी के रूप में भी व्याख्या कर सकते हैं। इसी तरह ऋणात्मक संख्याओं की संदर्भ बिंदु से नीचे की दूरी के रूप में व्याख्या की जा सकती है। ध्यात्वय है कि तापमान मापन को भी धनात्मक और ऋणात्मक रूप में अंकित किया जाता है। जब हम तापमान को डिग्री सेल्सियस में मापते हैं तो, जल के हिमांक से ऊपर का तापमान धनात्मक तापमान एवं पानी के हिमांक से नीचे का तापमान ऋणात्मक कहलाता है।

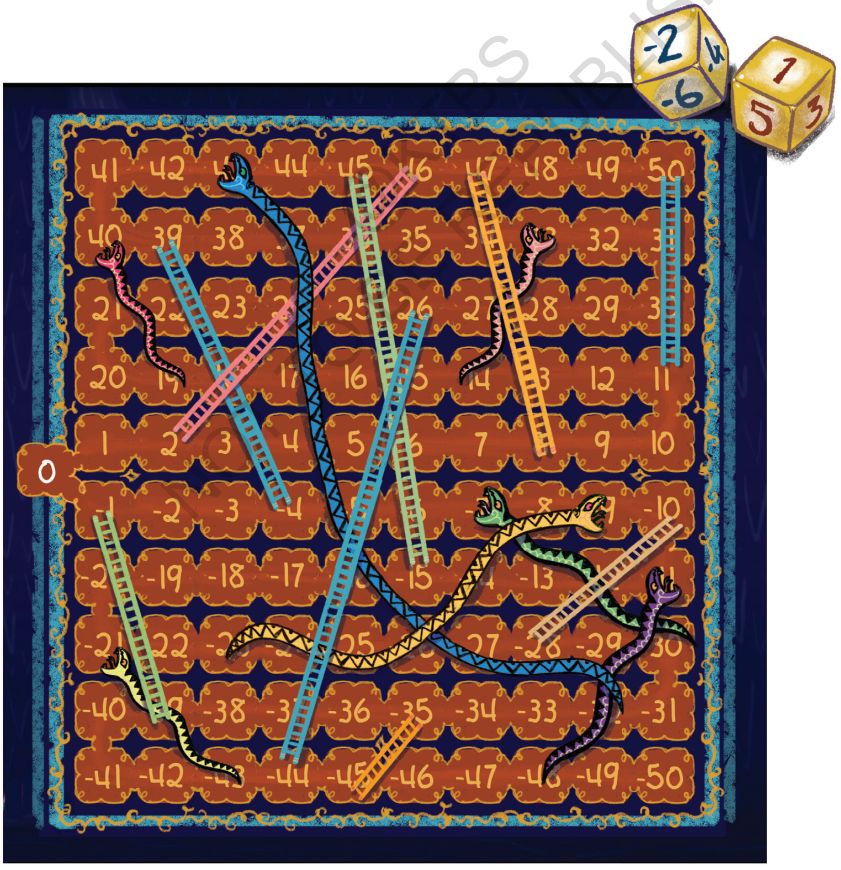
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 270 20/09/2024 16:58:07

पूर्णांक— साँप सीढ़ी

नियम

- यह दो खिलाड़ियों का खेल है। प्रत्येक खिलाड़ी के पास 1 मोहरा होता है। दोनों खिलाड़ी 0 से खेलना आरंभ करते हैं। खिलाड़ी जीतने के लिए – 50 या + 50 तक पहुँच सकते हैं, लेकिन खेल से पूर्व या खेलते समय निश्चित करने की आवश्यकता नहीं होती है।
- प्रत्येक खिलाड़ी एक ही समय में दो पासे फेंकता है। एक पासे पर + 1 से + 6 तक की संख्याएँ होती हैं और दूसरे पासे पर – 1 से – 6 तक की संख्याएँ होती हैं।
- दो पासों के प्रत्येक उछाल के पश्चात् खिलाड़ी उन्हें किसी भी क्रम में जोड़ या घटा सकता है और फिर परिणाम को इंगित करने वाले चरणों को आगे बढ़ा सकता है। धनात्मक परिणाम का अर्थ है + 50 की ओर बढ़ना और ऋणात्मक परिणाम का अर्थ होगा— 50 की ओर बढ़ना।



Chapter 10.indd 271 20/09/2024 16:58:09

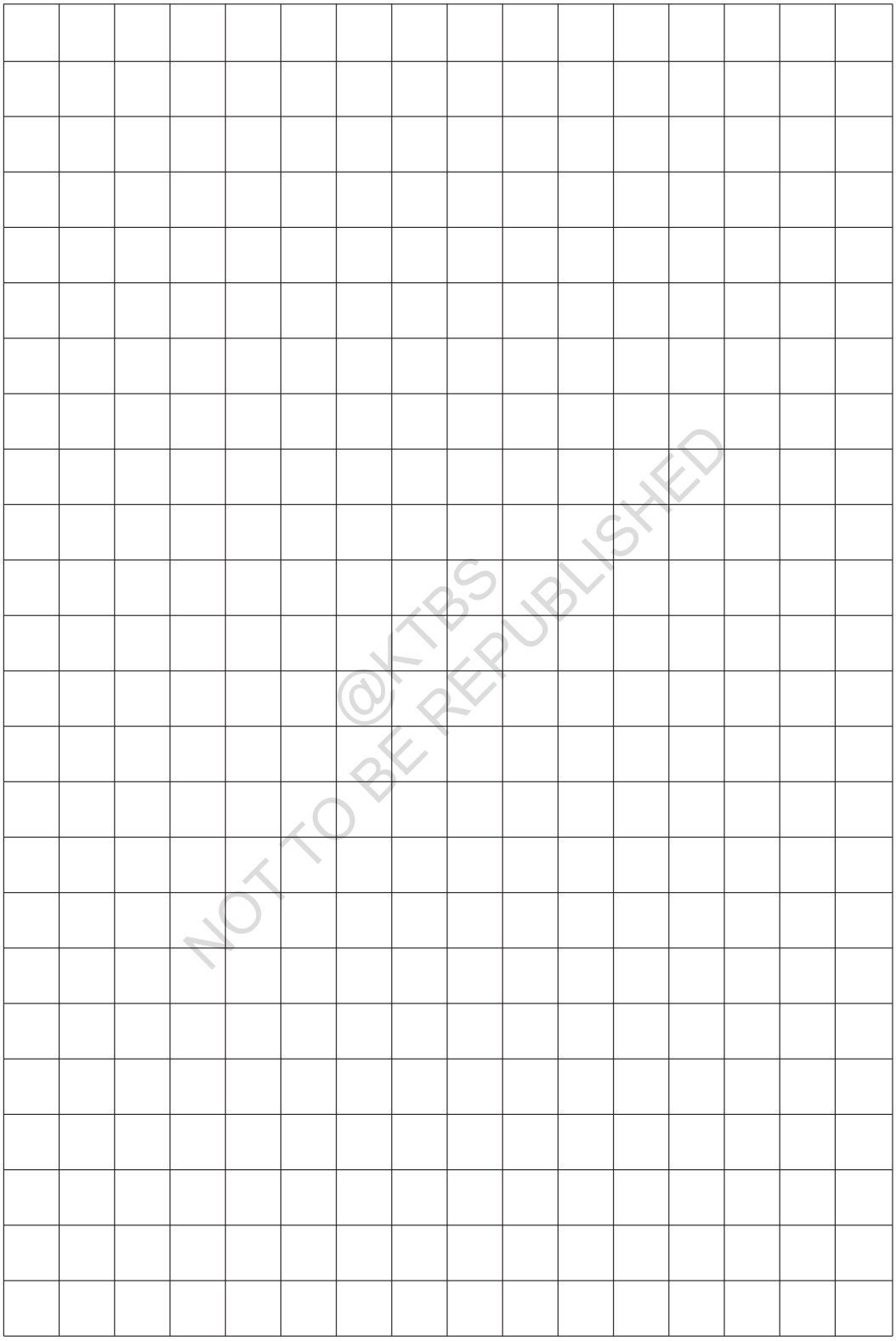
अधिगम सामग्री पत्रक (शीट)

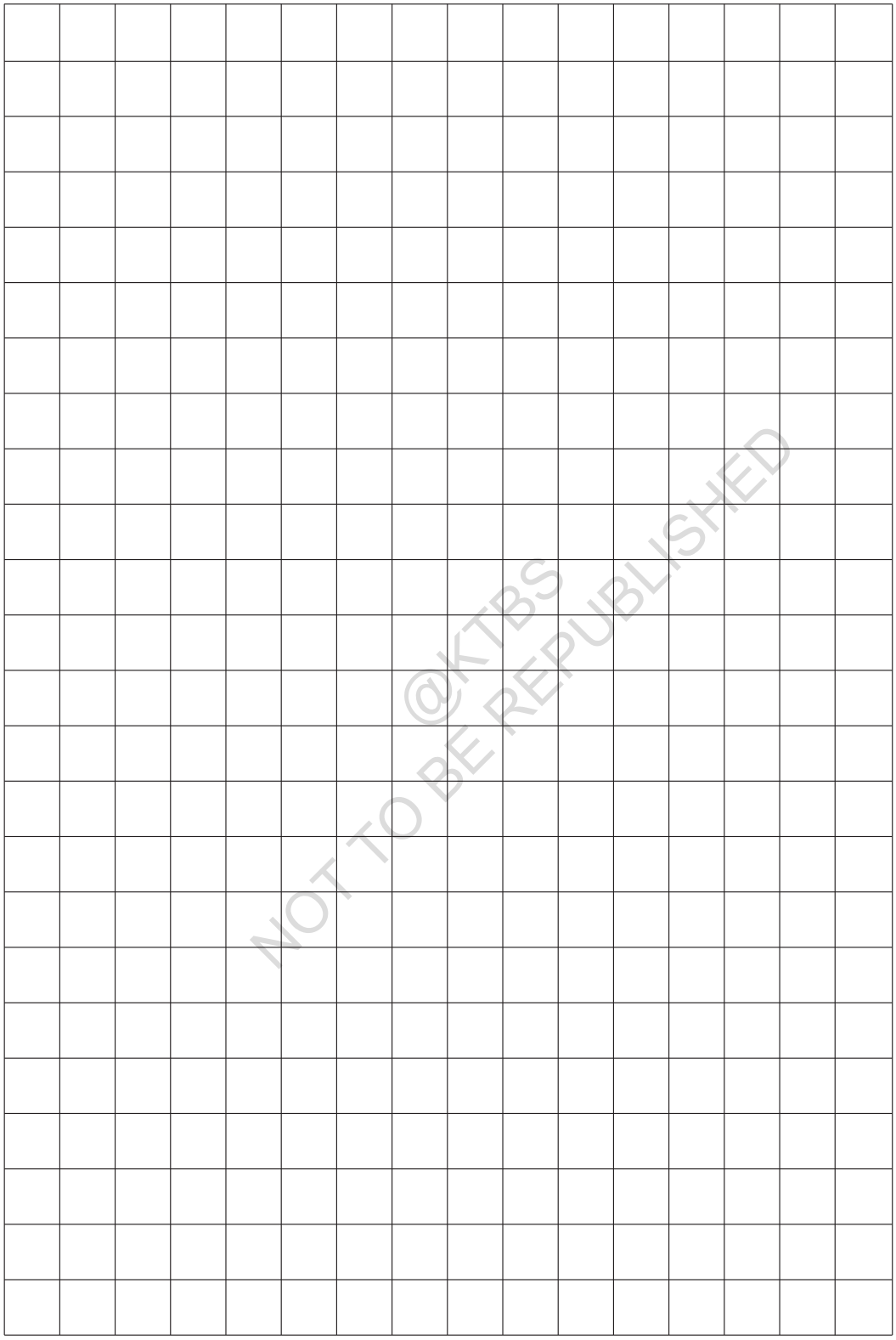
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 10.indd 272 20/09/2024 16:58:09

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

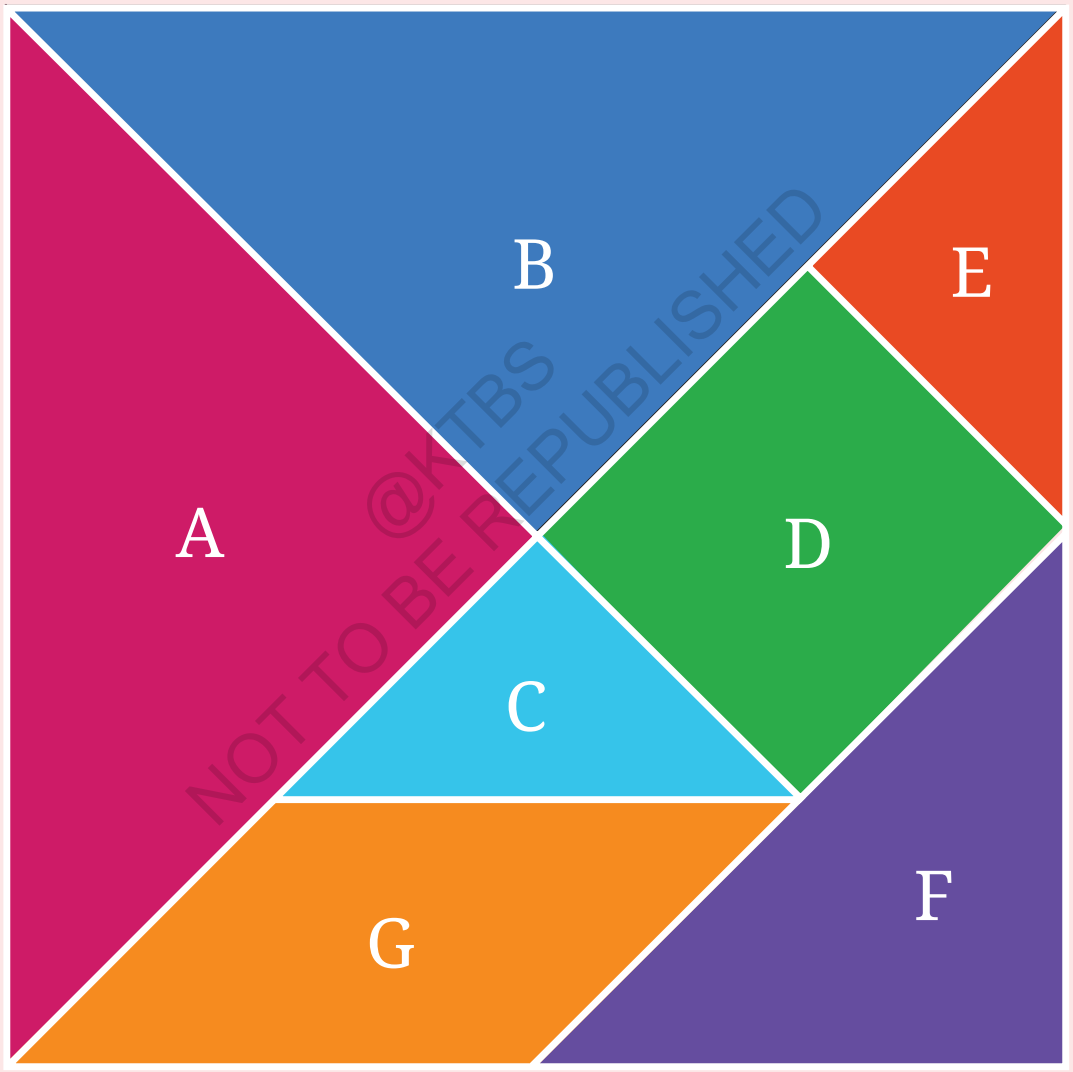
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED


@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED


@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

टैनग्राम

नोट— सफेद बॉर्डर के साथ प्रत्येक आकार को काटिए।

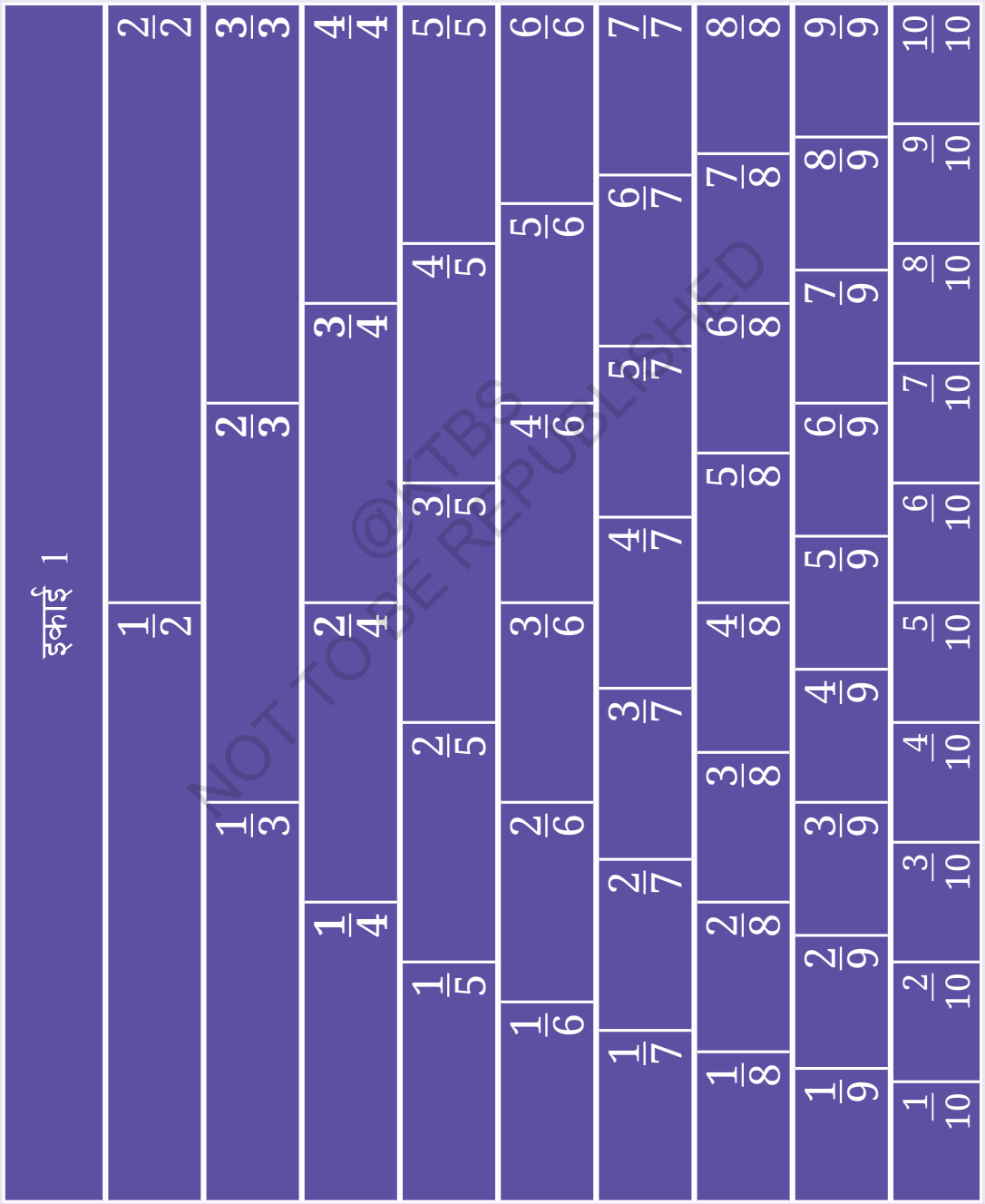


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

भिन्न पट्टियाँ

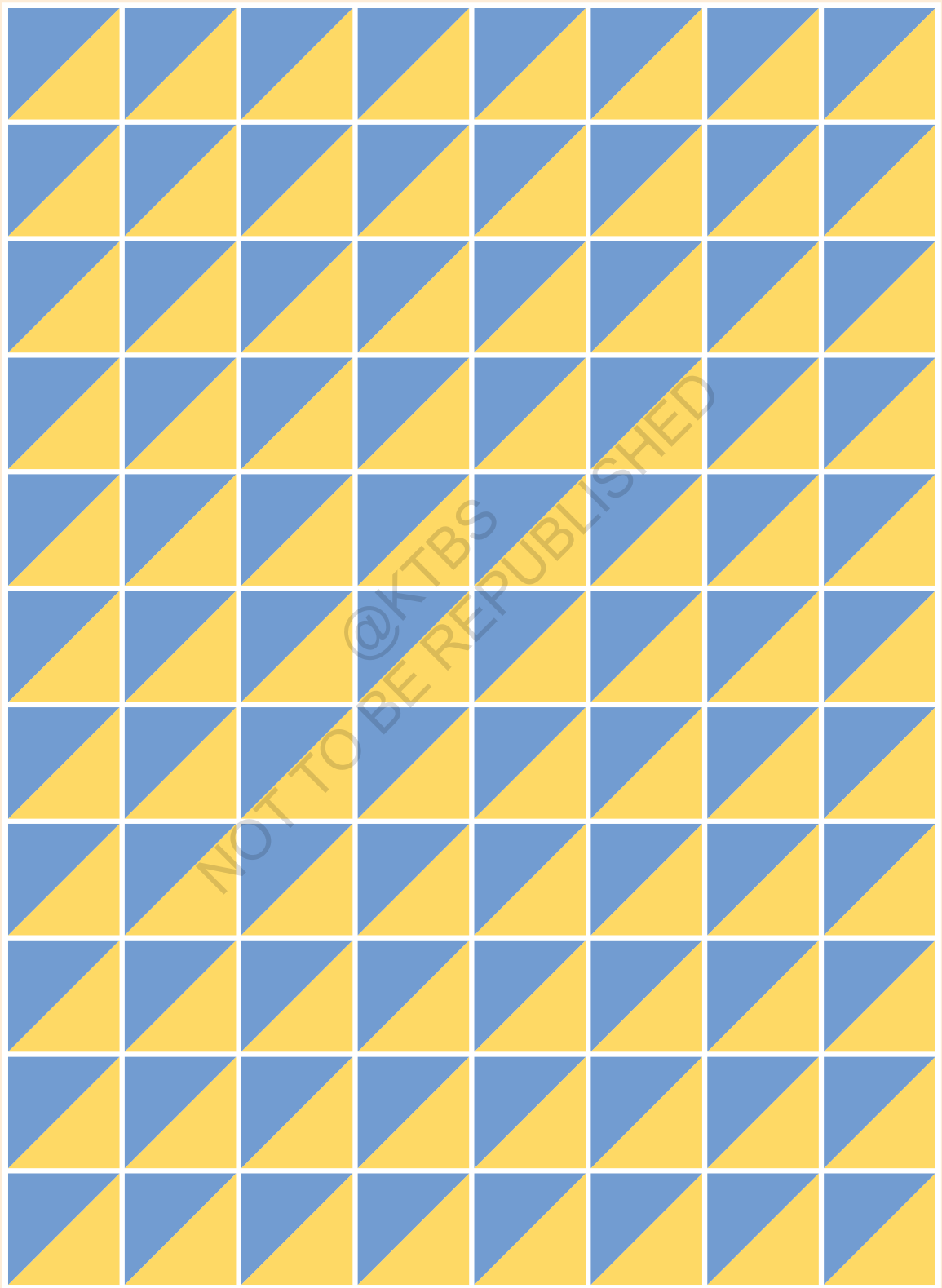
नोट— सफेद बॉर्डर के साथ प्रत्येक आकृति को काटिए।



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

नोट— सफेद बॉर्डर के साथ टाइल्स को काटिए।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Learning Material Sheets.indd 283 17/09/2024 17:00:26

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Learning Material Sheets.indd 284 17/09/2024 17:00:26