कर्नाटक सरकार

गणित

MATHEMATICS

9

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

इयत्ता नववी

मराठी माध्यम

भाग – 1

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

© KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಮರಾಠಿ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀ ಎಂ. ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಮರಾಠಿ ಭಾಷಾಂತರ ಸಮಿತಿ

ಶ್ರೀ **ಪರಶುರಾಮ್ ಸಿ.ಹಲಗೇಕರ್,** ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ರಂಗೂಬಾಯಿ ಬೋಸಲೆ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಶ್ರೀ **ರವೀಂದ್ರ ಗೋಪಾಲ ಕುಲಕರ್ಣಿ,** ನಿವೃತ್ತ ಶಿಕ್ಷಕರು ಗೋಡೆಗಲ್ಲಿ ಖಾನಾಪುರ, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಶ್ರೀ **ವಿಶ್ವನಾಥ್ ಎನ್. ಪಾಟೀಲ್,** ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಮಹಿಳಾ ವಿಧ್ಯಾಲಯ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಬೆಳಗಾವಿ.

ಶ್ರೀ **ಬಿ.ಎನ್. ತೋರಾಳ್‌ಕರ್,** ನಿವೃತ್ತ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಗಜಾನನ ಮಹಾರಾಜ ನಗರ ತಿಲಕವಾಡಿ, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಶ್ರೀ **ಪ್ರಶಾಂತ್ ಪ್ರಕಾಶ್ ಕಾಶಿದ,** ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಮರಾಠಾ ಮಂಡಳ ಹಿರಿಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆ ಖಾನಾಪುರ ತಾಲ್ಲುಕು ಬೆಳಗಾವಿ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಸಲಹೆ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ

ಶ್ರೀ ಎಂ. ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ – ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀಮತಿ ಎಂ. ಡಿ. ಉಷಾ – ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜಕರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಭಾಗ್ಯಲಕ್ಷ್ಮಿ – ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು

अनुक्रमणिका

भाग – 1

अ.न.	प्रकरण	पृष्ठक्रमांक
1.	**संख्या पद्धती** 1.1. प्रस्तावना 1.2 अपरिमेय संस्था 1.3 वास्तव संख्या आणि त्यांचा दशांश विस्तार 1.4 वास्तव संख्यावरील क्रिया 1.5 वास्तव संख्यांच्या घातांकाचे नियम 1.6. सारांश	1-24
2.	**बहुपदी** 2.1 प्रस्तावना 2.2 एका चलपदाच्या बहूपदी 2.3 बहूपदीदी शून्ये 2.4 बहुपदींचे अवयवीकरण 2.5 बैजीक नित्य समीकरणे 2.6 सारांश	25-45
3.	**सहनिर्देशक भूमिती** 3.1 प्रस्तावना 3.2 कार्तेशियन पध्दत 3.3 सारांश	46-47
4.	**दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे.** 4.1 प्रस्तावना 4.2 रेषीय समीकरणे 4.3 रेषीय समीकरणांची उकले 4.4 सारांश	58-62

J8I4V8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.	**यूक्लिडच्या भूमितीचा परिचय** 5.1 परिचय (प्रस्तावना) 5.2 युक्लिडच्या व्याख्या, मूलतत्वे आणि गृहिततत्वे 5.3 सारांश	63-73
6.	**रेषा आणि कोन** 6.1 प्रस्तावना 6.2 मूलभूत पदे आणि व्याख्या 6.3 छेदणाऱ्या रेषा आणि न घेणाऱ्या रेषा. 6.4 कोनांच्या जोड्या 6.5 एकाच (सारख्याच) रेषेशी समांतर रेषा 6.6 सारांश	74-86
परिशिष्ट-1	**गणितामधील सिद्धांत** A1.1 प्रस्तावना A1.2 गणितातील स्विकृत विधाने A1.3 अनुमानिक विचार A1.4 प्रमेय, मूलतत्वे आणि गृहिततत्वे A1.5 गणिती सिद्धांत म्हणजे काय ? A1.6 सारांश	87-108
	उत्तर सूची	109-120

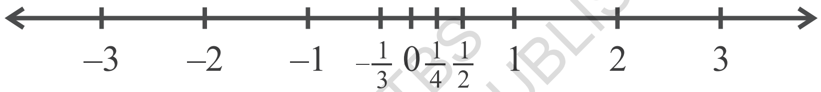
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रकरण 1

संख्या पध्दती (Number systems)

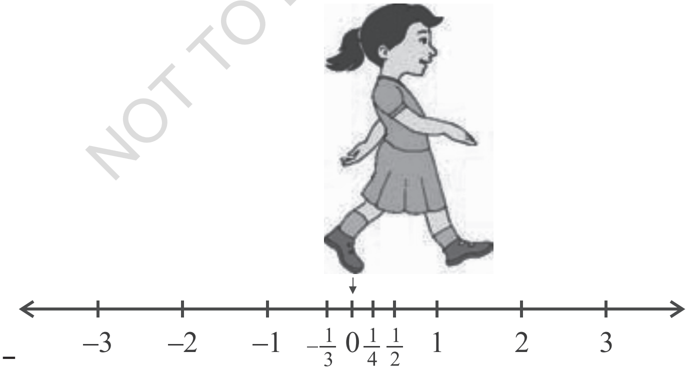
1.1 प्रस्तावना

तुम्ही मागील वर्गात संख्यारेषा आणि संख्यारेषेवर वेगवेगळ्या प्रकारच्या संख्या कशा दाखवितात यांचा अभ्यास केला आहात (आकृती 1.1 पहा.)



आकृती 1.1 संख्यारेषा

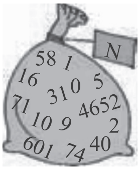
कल्पना करा की तुम्ही 0 (शून्य) पासून सुरुवात करून संख्यारेषेवर धन दिशेने चालत जात आहात. तुमच्या डोळ्यांना फक्त संख्या, संख्या आणि संख्याच दिसतात



आकृती 1.2

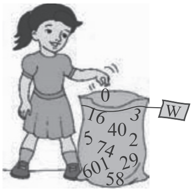
आता समजा तुम्ही संख्यारेषेवर चालत जात आहात व कांही संख्या जमा करत आहात. संख्या जमा करण्यासाठी एक पिशवी तयार ठेवा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



तुम्ही नैसर्गिक संख्या उदा :1,2,3 .. इ. अनेक संख्या उचलायला सुरुवात केली तर तुम्हाला माहीत आहे की या संख्या वाढतच जाणार (हे सत्य आहे का?) म्हणून तुमच्या पिशवीत अमर्यादित अनेक नैसर्गिक संख्या असतील. आठवण करा की या सर्व संख्याच्या समुहाला N चिन्हाने दर्शवितात.

N = (Natural numbers) = नैसर्गिक संख्या

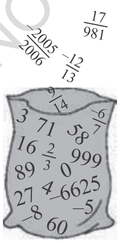


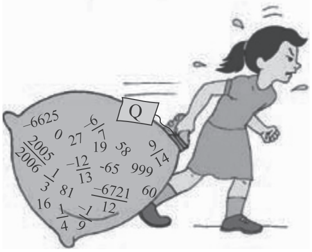
आता पाठीमागे फिरा व चालत जा. शून्य उचला आणि पिशवीत ठेवा. तुमच्याकडे आता पूर्ण संख्यांचा समूह आहे. त्यांना ' W ' या अक्षराने दर्शवितात.

W = (Whole numbers) = पूर्णसंख्या

आता तुम्ही समोरच्या ऋण संख्या घेऊन त्या पिशवीत भरा. तुमचा नवीन संग्रह काय आहे? आठवा, हे पुर्णाकांचे एकत्रीकरण आहे आणि हे ' Z' या चिन्हाने दर्शवितात. ?

काही संख्या अजून संख्यारेषेवर आहेत का? नक्कीच $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ किंवा $-\frac{2005}{2006}$ यासारख्या संख्या रांहतात. जर यासारख्या संख्या तुम्ही पिशवीत ठेवल्या तर तो संग्रह परिमेय संख्यांचा होईल.





परिमेय संख्यांच्या एकत्रीकरणाला Q या अक्षराने दर्शवितात. परिमेय (Rational) हा शब्द 'Ratio' या शब्दापासून आणि Q हा शब्द Quotient या शब्दापासून बनला आहे.

तुम्ही परिमेय संख्येची व्याख्या आठवा.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

'r' या संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात.

जी संख्या $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहिता येते जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$ असेल तर त्या संख्येला परिमेय संख्या (Rational numbers) असे म्हणतात. ($q \neq 0$ वर जास्त भर दिला आहे. माहीत आहे का?)

लक्षात ठेवा पिशवीमध्ये असलेल्या संख्या $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहू शकतो जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$.

उदाहरणार्थ : -25 हे $-\frac{25}{1}$ असे लिहीतात, येथे $p = -25$ आणि $q = 1$. म्हणूनच

नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या व पूर्णांक हे सुध्दा परिमेय संख्येत येतात.

तुम्हांला माहीत आहेत की, परिमेय संख्यांचे स्वरूप $\frac{p}{q}$ हे काही एकमेव नाही. येथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$.

उदा : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ इत्यादी.

त्या सममूल्य परिमेय संख्या किंवा (अपूर्णांक) आहेत. तरीसुद्धा जेव्हा आम्ही $\frac{p}{q}$ ही परिमेय संख्या म्हणतो, किंवा जेव्हा आम्ही संख्या रेषेवर $\frac{p}{q}$ घेतो, तेव्हा आम्ही समजतो की $q \neq 0$ आणि p व q मध्ये कोणताही 1 शिवाय समाईक अवयव (p आणि q मुळसंख्या) नसतो. म्हणून संख्यरेषेवर $\frac{1}{2}$ अपूर्णांका सारखे अनेक अपूर्णांक असतात. सर्वासाठी आपण $\frac{1}{2}$ घेऊ शकतो. आता, मागील वर्गात अभ्यास केलेल्या काही वेगवेगळ्या संख्यांची उदाहरणे सोडवू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 1: खालील विधाने चुक की बरोबर आहेत ते सांगा. तुमच्या उत्तरासाठी कारण द्या.

(i) प्रत्येक पूर्ण संख्या ही नैसर्गिक संख्या आहे.

(ii) प्रत्येक पूर्णांक हा परिमेय संख्या आहे.

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या ही पूर्णांक आहे.

उकल :

(i) चुक, आहे कारण शून्य (0) ही पूर्ण संख्या आहे परंतु ती नैसर्गिक संख्या नाही.

(ii) बरोबर, आहे कारण प्रत्येक पूर्णांक m हा $\frac{m}{1}$ या स्वरूपात मांडता येतो म्हणून ही परिमेय संख्या आहे.

(iii) चुक आहे, कारण $\frac{3}{5}$ हा पूर्णांक नाही.

उदाहरण 2: 1 आणि 2 मधील पांच परिमेय संख्या शोधा.

आम्ही हे उदाहरण दोन पध्दतीने सोडवू शकतो.

उकल 1: आठवा, r आणि s मधील पाच परिमेय संख्या. तुम्ही r व s ची बेरीज करून 2 ने भागा $\frac{r+s}{2}$. r व s च्या मध्ये येते. म्हणून $\frac{3}{2}$ ही संख्या 1 आणि 2 च्या मध्ये येते.

तुम्ही या प्रमाणे पुढ़े गेला तर अनेक 1 व 2 मधील परिमेय संख्या मिळतात त्या संख्या आहेत $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ आणि $\frac{7}{4}$.

उकल 2: दुसऱ्या पध्दतीत एकाच पायरीत आपण 5 परिमेय संख्या शोधू शकतो. आम्हाला 5 परिमेय संख्या पाहीजेत. 1 व 2 या परिमेय संख्या घेऊन छेद 5 + 1 घेऊ.

त्या म्हणजे $1 = \frac{6}{6}$ आणि $2 = \frac{12}{6}$ याप्रमाणे $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ आणि $\frac{11}{6}$ या 1 व 2 मधील 5 परिमेय संख्या आहेत. त्या पांच संख्या $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ आणि $\frac{11}{6}$ आहेत.

टीप : उदाहरण 2 चे निरीक्षण केल्यास, तुम्हाला 1 व 2 मधील 5 परिमेय संख्या शोधायच्या होत्या पण 1 व 2 मध्ये अनेक परिमेय संख्या आहेत. सर्वसामान्यपणे दिलेल्या कोणत्याही दोन परिमेय संख्येमध्ये अनेक परिमेय संख्या असतात.

आता पुन्हा संख्यारेषा पहा. त्यावरील सर्व संख्या घेतल्या आहेत का? नाही. सत्य हे आहे की संख्यरेषेवर अजुन अनेक संख्या शिल्लक आहेत. तेथे तुम्ही घेतलेल्या संख्यांच्या रिकाम्या जागा आहेत त्या अनेक आहेत. आश्चर्याची गोष्ट ही आहे की रिकाम्या असलेल्या 2 संख्याच्या मध्ये सुध्दा अनेक संख्या आहेत.

म्हणून खालील प्रश्न आपल्याला पडतात.

1. संख्यारेषेवर शिल्लक राहिलेल्या संख्याना काय म्हणतात?

2. त्यांना तुम्ही कसे ओळखाल? त्यांना परिमेय संख्यापासून कसे वेगळे कराल? या प्रश्नांची उत्तरे पुढील भागात मिळतील.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 1.1

1. शून्य (0) परिमेय संख्या आहे का? तुम्ही 1 ला $\frac{p}{q}$ यावरूपात लिहू शकता का ? जेथे p आणि q पूर्णांक आणि $q \neq 0$.
2. 3 आणि 4 मधील 6 परिमेय संख्या शोधा.
3. $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{4}{5}$ मधील 5 परिमेय संख्या शोधा.
4. खालील वाक्ये चूक की बरोबर आहेत ते सांगा, तुमच्या उत्तराचे कारण सांगा.

(i) प्रत्येक नैसर्गिक संख्या ही पूर्ण संख्या आहे.

(ii) प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही पूर्ण संख्या आहे.

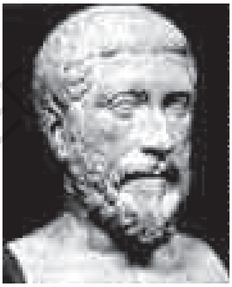
(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या ही पूर्ण संख्या आहे.

1.2 अपरिमेय संख्या (Irrational Numbers)

मागील भागात आपण पाहीले की, संख्यारेषावरील सर्व संख्या या परिमेय संख्या नाहीत.

या भागात आपण त्या संख्या शोधायच्या आहेत. म्हणूनच $\frac{p}{q}$ स्वरूपातील संख्या जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$ या संख्या आलेल्या आहेत आणि तुम्ही विचाराल $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात नसलेल्या संख्या तेथे आहेत का? अशा संख्या खरोखरच तिथे आहेत.

400 BC मध्ये ग्रीकचा प्रसिध्द गणितज्ञ आणि तत्वज्ञ पायथागोरस व त्याचे सहकारी यांनी या संख्याचा शोध लावला जी संख्या परिमेय नाही त्या संख्यांना अपरिमेय संख्या म्हणतात. कारण त्या पुर्णाकांच्या गुणोत्तरात लिहिता येत नाहीत. पायथागोरसचा एक सहकारी क्रोटोन हिपॉक्सस् द्वारा शोधलेल्या अपरिमेय संख्यासंबंधात अनेक दंतकथा आहेत. हिपॉक्ससचा शेवट अत्यंत दुदैवी झाला. याचे कारण या गोष्टीचा शोध असेल की $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे किंवा या शोधा संबंधीतील माहिति बाह्य-जगात प्रकट केली असेल.



पायथागोरस
(569 BC- 479 BC)
आकृती 1.3

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता या सख्यांची व्याख्या औपचारीकपणे पाहूया.

संख्या 's' ला अपरिमेय म्हणतात, जर ती $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहिता येत नाही, जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$ असते.

तुम्हाला अगोदर माहीत आहेत की परिमेय संख्या असंख्य आहेत त्याच प्रमाणे अनेक अपरिमेय संख्या आहेत. यावरून हेच समजते की तेथे अमर्यादित अनेक अपरिमेय संख्या सुध्दा आहेत. काही उदाहरणे,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110.......$$

टिप : आठवा, जेव्हा आम्ही '$\sqrt{\ }$' हे चिन्ह वापरतो, तेव्हा आपण मानतो की हे संख्येचे धनभारीत वर्गमूळ आहे म्हणून, $\sqrt{4} = 2$ तथापि +2 आणि –2 ही 4 ची वर्गमूळे आहे.

काही वरील अपरिमेय संख्या तुमच्या परिचयाच्या आहेत. उदाहरण वरील प्रमाणे दिलेली अनेक वर्गमुळे व संख्या π, याविषयी यापूर्वी तुम्ही पाहिल्या आहेत.

पायथागोरस यांनी सिध्द केले आहे की $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या अंदाजे. नंतर सुमारे 425 B. C. मध्ये **थिओडरस आणि सत्यरेन** यांनी $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ आणि

$\sqrt{17}$ या सुध्दा अपरिमेय संख्या आहेत हे दाखविले. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$........ इत्यादी अपरिमेय संख्यांची सिध्दता आपण इयत्ता दहावी मध्ये शिकू. π ही संख्याहजारो वर्षापासून विविध संस्कृतीशी परीचित आहे. 700 च्या शतकाच्या उत्तरार्धात **लॉम्बर्ट आणि लीजेर्डे** यांनी π ही एक अपरिमेय संख्या आहे असा शोध लावला होता. पुढील परिच्छेदात आपण या गोष्टीवर चर्चा करू की 0.10110111011110 आणि π अपरिमेय का आहेत ? मागील भागाच्या शेवटी ही जो प्रश्न होता त्या कडे जाऊया, लक्षात ठेवा पिशवीत परिमेय संख्या आहेत. जर आम्ही सर्व परिमेय संख्या, त्या पिशवीत भरल्या तर मग संख्यारेषेवर कोणती संख्या शिल्लक राहील?

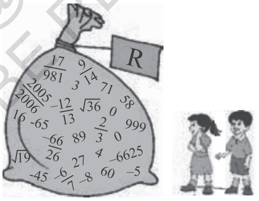
उत्तर आहे, नाही. यावरून हे समजते की, परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांच्या संचाला आपण वास्तव संख्या म्हणतो. त्या **R** . या अक्षराने दर्शवितात. वास्तव संख्या एक तर परिमेय असते नाहीतर अपरिमेय असते. आम्ही असेही म्हणू शकतो **प्रत्येक वास्तव संख्या ही संख्यारेषेवरील एकमेव बिंदू आहे. संख्यरेषेवरील प्रत्येक बिंदू हा एकमेव वास्तव संख्या आहे. म्हणून संख्यारेषेला आपण वास्तव संख्या रेषा असे ही म्हणू शकतो.**

जी कैन्टर

(1845-1918)

आकृती 1.4

1870 मध्ये दोन जर्मन गणितज्ञ कैन्टर आणि आर. डेडेकिंड यांनी हे दाखवून दिले कि प्रत्येक वास्तव संख्येकरिता संख्या रेषेवर एक बिंदू निगडीत असतो आणि प्रत्येक बिंदूशी एक वास्तव संख्या निगडीत असते.



आर.डेडेकिंड

(1831-1916)

आकृती 1.5

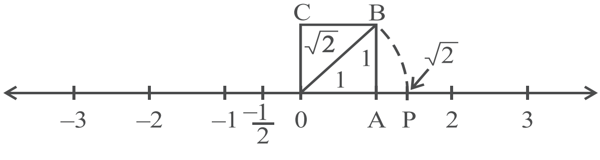
@NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण संख्यारेषेवर काही अपरिमेय संख्या कशा दाखवितात ते पाहू.

उदाहरण 3: संख्यारेषेवर $\sqrt{2}$ दर्शवा.

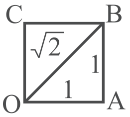
उकल : ग्रीकांनी $\sqrt{2}$ चा शोध कसा लावला हे पाहण्यास सोपे आहे. 1 एकक लांबी असलेला चौरस OABC घ्या. (आकृती 1.6 पहा). नंतर तुम्ही पायथागोरस प्रमेयाने वरून पाहू शकता की,

OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. आम्ही संख्यारेषेवर $\sqrt{2}$ कशी दाखवू शकेन? हे सोपे आहे. आकृती 1.6 ही संख्यारेषेवर अशी स्थलांतर करा की आकृतीचा O शिरोबिंदू शून्याशी जुळेल (आकृती 1.7 पहा)



आकृति 1.7

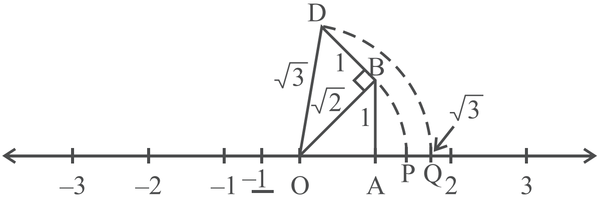
आता आपण पाहिले आहे की, OB = $\sqrt{2}$ आहे. आता कंपासच्या सहाय्याने O या बिंदूला केंद्र घेऊन OB या त्रिज्येने कंस काढा. तो संख्यारेषेला P बिंदूत छेदतो. तेव्हा संख्यारेषेवरील P बिंदू म्हणजेच $\sqrt{2}$ संख्या होय.



आकृति 1.6

उदाहरण 4: संख्यारेषेवर $\sqrt{3}$ दर्शवा.

उकल : आपण आकृती 1.7 ला पुन्हा घेऊ या.



आकृति 1.8

. OB ला लंब BD ही एकक लांबीची काढा (आकृती 1.8 पहा) नंतर तुम्ही पायथागोरस प्रमेयानुसार

$$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ आहे.}$$

आता कंपासच्या साहाय्याने O ला केंद्रबिंदू आणि OD ही त्रिज्या घेवून Q मध्ये एक कंस काढा. तो संख्यारेषेला Q बिंदूत छेदतो. तेव्हा संख्यारेषेवरील Q बिंदू म्हणजेच $\sqrt{3}$ होय.

याचप्रमाणे धन पुर्णांक n साठी $\sqrt{n}$ चे स्थान दर्शवा. नंतर $\sqrt{n-1}$ चे स्थान दर्शवा.

स्वाध्याय 1.2

1. खालील विधाने चूक की बरोबर ते सांगा. उत्तर पडताळून पहा.

   (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या ही एक वास्तव संख्या आहे.

   (ii) संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदू हा $\sqrt{m}$ स्वरूपात आहे. जेथे m ही नैसर्गिक संख्या आहे.

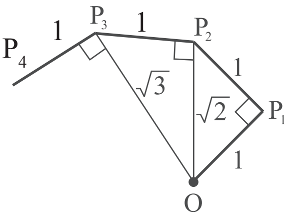
   (iii) प्रत्येक वास्तव संख्या ही अपरिमेय संख्या असते.

2. सर्व धन पूर्णांक संख्यांचे वर्गमूळ अपरिमेय संख्या असते का? जर नाही, तर संख्यांचे वर्गमूळ हे परिमेय संख्या आहे याचे एक उदाहरण द्या.

3. संख्यारेषेवर $\sqrt{5}$ चे स्थान दर्शवा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. **वर्गातील कृती (चक्राकार स्वरूपात वर्गमूळ रचना) :**



आकृति 1.9

एक मोठा कार्डशीट पेपर घेऊन खालील प्रमाणे चक्राकार वर्गमुळाची रचना करा (square root spiral). O बिंदूपासून सुरुवात करून 1 एकक घेऊन रेषाखंड OP_1 काढा. p_1p_2 रेषाखंड काढून OP_1 ला लंब p_1p_2 हे 1 एकक घ्या (आकृती 1.9 पहा). आता p_2p_3 रेषाखंड काढून OP_2 ला लंब p_2p_3 काढा. नंतर OP_3 वर लंब रेषाखंड p_3p_4 काढा.

याप्रकारे आपण बिंदू OP_{n-1}.वर एकक लांबीचा रेखाखंड काढून रेषाखंड $p_{n-1}p_n$ मिळवू शकतो. O, P_1, P_2, P_3, ... P_n......... काढू शकतो. त्यांना जोडून $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ ..... दर्शविणारी एक सुंदर चक्राकार वर्गमूळ रचनेची आकृती मिळेल.

1.3 वास्तव संख्या आणि त्यांचा दशांश विस्तार :

या भागात आपण परिमेय व अपरिमेय संख्याचा वेगळ्या दृष्टीकोनातून अभ्यास करुया. यासाठी आपण वास्तव संख्येच्या दशांश विस्ताराचा विचार परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांच्यातील फरक करण्यासाठी करता येतो का? ते पाहू. त्यांच्या दशांश विस्ताराचा उपयोग करून आम्ही संख्यारेषेवर वास्तव संख्यांचे विस्तारीत रूप दाखविता येते ते पाहूया. परिमेय संख्या आमच्या परिचयाच्या आहेत त्यापासून सुरुवात करू. $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ ही तीन उदाहरणे घेऊ.

बाकीकडे विशेष लक्ष द्या आणि येथे काही विशिष्ठ मांडणी आढळते का ते पहा.

उदाहरण 5: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ आणि $\frac{1}{7}$ यांचे दशांश विस्तार रूप काढा..

उकल:

3) 10 (3.333...	8) 7.0 (0.875	7) 1.0 (0.142857...
9	6.4	7
10	60	30
9	56	28
10	40	20
9	40	14
10	0	60
9		56
1		40
		35
		50
		49
		1

बाकी- 1, 1, 1, 1, 1 बाकी : 6, 4, 0 बाकी- 3, 2, 6, 4, 5, 1

भाजक : 3 भाजक : 8 भाजक : 7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्ही येथे तुम्ही कोणती नोंद घेतली? तुम्ही कमीतकमी तीन बाबींची नोंद घेतलीअसेल.

(i) काही पायऱ्यानंतर बाकी शून्य येते किंवा भागाकार पुन्हा त्याचक्रमाने पुन्हा सुरू होतो.

(ii) बाकी पुन्हा-पुन्हा आलेल्या संख्येच्या ठिकाणी बाकी ही भाजकपेक्षा लहान असते. ($\frac{1}{3}$ यासंख्येत 1 हा अंक पुन्हा पुन्हा येतो आणि भाजक आहे 3, $\frac{1}{7}$ या संख्येत 3, 2, 6, 4, 5, 1 हे अंक पुन्हा येतात आणि भाजक आहे 7)

(iii) जर बाकी ची पुनरावर्तीत होत असेल तर आपल्याला भागाकाराच्या अंकामध्ये पुनरावृत्तीचा एक खंड मिळतो ($\frac{1}{3}$ मध्ये भागाकारात 3 ची पुनरावृत्ती होते आणि $\frac{1}{7}$ मध्ये भागाकारामध्ये पुनरावृत्ती खंड 142857 मध्ये मिळतो).

तरी तुम्ही समजला असणारच की, वरील उदाहरणात लागू केलेला नमुना हा सर्व परिमेय संख्यांना लागू पडतो ज्या $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ स्वरूपात असतात. p ला q ने भागले असता मुख्य दोन गोष्टीदिसून येतात - बाकी शून्य येते किंवा बाकी कधीच शून्य येत नाही. अशावेळेस आपल्याला बाकीची एक साखळी मिळते. आता आपण प्रत्येक प्रकार वेगवेगळा पाहु-

घटना (i): बाकी शून्य असते तेव्हा

$\frac{7}{8}$ या उदाहरणात आपण पाहिले आहे की, काही पायऱ्यानंतर बाकी शून्य येते आणि $\frac{7}{8}$ चा दशांश विस्तार 0.875 आहे. दुसरी काही उदाहरणे : $\frac{1}{2} = 0.5; \frac{639}{250} = 2.556$ आहे. या सर्व उदाहरणात मर्यादीत पायऱ्यानंतर दशांश विस्ताराचा शेवट होतो. अशा संख्येच्या विस्ताराला **सांत दशांश विस्तार (terminating)** म्हणतात.

घटना (ii): बाकी केव्हाही शून्य नसते तेव्हा

$\frac{1}{3}$ आणि $\frac{1}{7}$ या उदाहरणात आपण पाहीले आहे की काही पायाऱ्यानंतर बाकीची पुनरावृत्ती होते व भागाकाराची क्रिया पुढे चालू राहते. दुसऱ्या शब्दात भागाकाराच्या अंकात पुनरावृत्ती अखंडपणे चालू राहते. त्याला अखंड **आवर्ती दशांश विस्तार (Non-termination recurring)** म्हणतात.

उदा. $\frac{1}{3} = 0.3333.......$ आणि $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857......$ आहे.

इथे $\frac{1}{3}$ च्या भागाकारात 3 ची पुनरावृत्ती होते आणि याला $0.\overline{3}$ रूपात लिहीतो. याचप्रकारे $\frac{1}{7}$ च्या अपूर्णांकांच्या दशांश रूपात 142857 या अंकांचा गट त्याच क्रमाने भागाकारात सतत येत

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राहतो. परिमेय संख्या आणि अखंड आवर्ती दशांश विस्तार ऐकमेकास संलग्न आहेत. थोड़क्यात दशांश मांडणीत जर एक अंक अथवा क्रमवार अंक गट कधीही न संपणाऱ्या आवर्ती पध्दतीने येत असतील तर अशा मांडणीस अखंड आवर्ती दशांश मांडणी म्हणतात. प्रत्येक परिमेय संख्या दशांश पध्दतीत अखंड आवर्ती पध्दतीने मांडता येते. अखंड आवर्ती दशांश विस्तारात आवर्ती अंक किंवा अंक गट पुन्हा लिहिण्या ऐवजी त्या अंकावर किंवा अंक गटावर आडवी रेषा काढण्याची किंवा त्यातील प्रथम आणि अंत्य अंकावर टिंब देण्याची पध्दत आहे. उदा. $\frac{1}{7}$ हे $0.\overline{142857}$ असे लिहितात. या अंकाचा गट त्याच क्रमाने सतत येत राहतो. तसेच 3.57272 हे $3.5\overline{72}$ या प्रकारे लिहितात. ही सर्व उदाहरणे अखंड आवर्ती दशांश विस्तार दर्शवितात. याचप्रमाणे, परिमेय संख्यांचा दशांश विस्तार दोन प्रकारे करता येतो. सात दशांश विस्तार किंवा अखंड आवर्ती दशांश विस्तार.

समजा संख्यारेषेवर चालल्यावर आपणाला 3.142678 सारंख्या संख्या मिळतात. ज्यांचा दशांश विस्तार सांत दशांश विस्तार आहे किंवा. 1.272727.. अर्थात् $1.\overline{27}$ सारख्या संख्या ज्या अखंड आवर्ती दशांश विस्तारात मांडतात यावरून तुम्ही या परिमेय संख्या आहेत असा अनुमान काढाल? उत्तर होय आहे. परंतु त्याची सिध्दता आपण अभ्यासणार नाही. पण काही उदाहरणे घेऊन ते आपण दाखवू शकतो. सांत दशांश मांडणी अगदी सोपी आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6: 3.142678 ही परिमेय संख्या आहे हे दाखवा. दुसऱ्या शब्दात 3.14268 ही $\frac{p}{q}$ स्वरूपात लिहा. जेथे p आणि q हे पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$

उकल : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ आणि म्हणूनच ही परिमेय संख्या आहे. आता आपण जेव्हा दशांशविस्तार हा अखंड आवर्ती विस्तार या पद्धतीचा विचार करू

उदाहरण 7: $0.3333 = 0.\bar{3}$ हे $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात दाखवा जेथे p आणि q पूर्णांक, $q \neq 0$.

उकल : $0.\bar{3}$ काय आहेत आपल्याला माहीत नाही. म्हणून याला x मानू.

$x = 0.3333.........$

आता येथे पहा की,

$10x = 10 \times (0.3333.......) = 3.333.........$

आता $3.333 = 3 + x$

आणि $x = 0.3333........$

म्हणून $10x = 3 + x$

x ची किंमती ही आम्हाला मिळेल की

$$9x = 3$$

म्हणून . $x = \frac{1}{3}$

उदाहरण 8: 1.272727...... = $1.\overline{27}$ हे $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात दाखवा जेथे p आणि q हे पूर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$.

उकल : x = 1.272727...... येथे दोन अंक पुन्हा–पुन्हा आलेले आहेत आम्ही x ला 100 ने गुणू.

$100x = 127.2727......$

आणि $100x = 126 + 1.272727........= 126 + x$

म्हणून $100x - x = 126$

$99x = 126$

म्हणजे $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

तुम्ही उलट तपासू शकता की $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

उदाहरण 9 : 0.2353535 = $0.2\overline{35}$ हे $\frac{p}{q}$ स्वरूपात दाखवा जेथे p आणि q हे पूर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$

उकल $x = 0.2\overline{35}$ लक्षात ठेवा येथे 2 अंक पुन्हा पुन्हा आला नाही, पण 35 हा संच पुन्हा पुन्हा आला आहे. म्हणजेच 2 अंक पुन्हा आले आहेत. आम्ही x ला 100 ने गुणू.

$100x = 23.53535.....$

$100x = 23.3 + 0.2353535.........= 23.3 + x$

म्हणून $99x = 23.3$

$\therefore \quad 99x = 233/10 \rightarrow x = \frac{233}{990}$

तुम्ही हे उलटपणे तपासून पाहू शकता $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

म्हणून, प्रत्येक संख्येचा अखंड आवर्ती दशांश विस्तार हा नेहमी $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) या स्वरूपात लिहिता येतो जेथे p & q हे पूर्णांक आहेत. आमच्या उत्तराचा सारांश अशा स्वरूपात आम्ही मांडू शकतो.

परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार हा सांत किंवा अखंड आवर्ती दशांश असेल तर ती परिमेय संख्या असते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून आता परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार काय असतो तुम्हाला माहीत आहे. अपरिमेय संख्येचा दशांश विस्तार काय आहे? वरील पुराव्यावरून आम्ही अनुमान काढले आहे की त्यांचा दशांश विस्तार अनंत अनावर्ती असतो.

म्हणून अपरिमेय संख्यांचे गुणधर्म हे परिमेय संख्यांचा गुणधर्माप्रमाणे लागू पडतात.

ज्या परिमेय संख्यांचा दशांश विस्तार हा अनंत अनावर्ती असतो त्या संख्या अपरिमेय संख्या असतात.

मागील भागात आपण एक अपरिमेय संख्या 0.10110111011110 ची चर्चा केली होती. s = 0.10110111011110 ... ही संख्या अनंत अनावर्ती आहे. त्यामुळे वरील गुणधर्मानुसार ती अपरिमेय संख्या आहे. सोबत हे सुध्दा लक्षात घ्या की, आपण s या अक्षराने अनेक अपरिमेय संख्या दाखवू शकतो.

$\sqrt{2}$ व π या अपरिमेय संख्येबाबत आपण काय जाणतो? या अपरिमेय संख्यांचा अनंत अनावर्ती दशांश विस्तार काही पायऱ्यापर्यंत दिला आहे.

$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420960.........

π = 3.14159265358979323846264338327950.............

(लक्षात ठेवा π ची जवळची किंमत $\frac{22}{7}$ घेतो परंतु $\pi \neq \frac{22}{7}$)

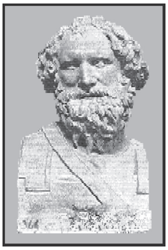
कितीतरी वर्षापासून गणितज्ञानी अपरिमेय संख्यांचा दशांश विस्तार अधिकाधिक अंक मिळविण्याचे तंत्रज्ञान विकसित केले आहे. उदाहरणार्थ भागाकार पध्दतीने (division method) $\sqrt{2}$ किंमत काढतांना दशांश रूपात अंकांना माहित करण्याची पध्दत तुम्ही अभ्यासली आहे. ही एक मनोरंजक बाब आहे की, सुलभा सुत्रामध्ये जो एक वैदिक काळातील (800BC - 500BC) गणितावरील ग्रंथ आहे. त्यानुसार $\sqrt{2}$ ची अदांजे किंमत खालीलप्रमाणे प्राप्त झाली आहे.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

लक्षात घ्या की, हे तेच दशांश रूप आहे जे वर पांच अंकापर्यंत दशांश विस्तारात दिलेले आहे. π च्या दशांश विस्तारात अधिकाधिक अंक मिळविण्याचा इतिहास अधिक मनोरंजक आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ग्रीकचा प्रसिध्द तत्ववेता आर्किमिडीज ही पहिली व्यक्ती होती ज्यांनी π च दशांश विस्तार मांडला. त्यांनी दाखविले कि $3.140845 < \pi < 3.142857$ आहे. आर्यभट्ट (इ. सन476 – 550) जे एक महान भारतीय गणितज्ञ आणि खगोलशास्त्रज्ञ होते. त्यांनी 4 दशांश स्थानापर्यंत π ची किंमत (3.1416) अचुक काढली होती. आता सुपर कॉम्प्युटर आणि आधुनिक अल्गोरिथम वापरून 1.24 ट्रिलियन पेक्षा जास्त दशांश स्थानापर्यंत π चे मुल्य माहीत केले दिले आहे.



आर्किमिडिज़
(287BCE - 212 BCE)
आकृती1.10

आता आपण पाहू की कशाप्रकारे अपरिमेय संख्या मिळवितात..

उदाहरण 10: $\frac{1}{7}$ आणि $\frac{2}{7}$ मधील अपरिमेय संख्या शोधा.

उकल आम्ही पाहिले आहे $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ आणि $\frac{2}{7} = \overline{0.285714}$ सहज काढू शकाल.

$\frac{1}{7}$ आणि $\frac{2}{7}$ मधील अपरिमेय संख्या काढण्यासाठी आम्ही अशी संख्या शोधू कि त्या दोन्हीमधील

अनंत अनावर्ती दशांश असेल. या प्रकारच्या अनेक संख्याची आपण माहीती करून घेवू शकतो.या प्रकारच्या एका संख्येचे उदाहरण, 0.150150015000150000......... आहे.

स्वाध्याय 1.3

1. खालील अपुर्णांकांना दशांश रूपात लिहा आणि कोणत्या प्रकारचे दशांश रूप आहे ते लिहा.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. तुम्हाला माहीत आहे की $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. दीर्घ भागाकार न करता $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ यांचा दशांश विस्तार ओळखाल का? जर होय, तर कसे?

   (टिप $\frac{1}{7}$ ची किंमत काढताना बाकीचा काळजीपूर्वक अभ्यास करा.)

3. खालील आवर्ती दशांशांना $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात मांडा. जेथे p आणि q हे पूर्णांक आणि $q \neq 0$.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 0.99499 हे $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात मांडा. तुम्ही काढलेल्या उत्तराने आश्चर्यचकित झाला का? आपल्या शिक्षकांबरोबर आणि वर्गमित्राबरोबर उत्तराच्या सत्यतेबद्दल चर्चा करा.
5. $\frac{1}{17}$ च्या दशांश विस्तारात अंकांच्या पुनरावर्तीत गटात अंकांची जास्तीत जास्त संख्या किती असेल? आपले उत्तर तपासून पाहण्यासाठी भागाकार क्रिया करा.
6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ च्या स्वरूपातील परिमेय संख्येची अनेक उदाहरणे घ्या. येथे p आणि q पुर्णांक आहेत. यांचा 1 सोडून इतर कोणताही सामाईक अवयव नाही आणि ज्यांचे सांत दशांश रूप आहे. q ला कोणते बंधन पाळणे आवश्यक आहे?
7. अशा तीन संख्या लिहा ज्यांचा दशांश विस्तार अनंत अनावर्ती आहे.
8. परिमेय संख्या $\frac{5}{7}$ आणि $\frac{9}{11}$ यांच्या दरम्यानच्या तीन वेगवेगळ्या अपरिमेय संख्या ओळखा.
9. खालील संख्यांचे परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्यामध्ये वर्गीकरण करा.

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.4 वास्तव संख्यावरील क्रिया (Operations on Real Number)

मागील इयत्तेत आपण शिकला आहात की परिमेय संख्या क्रमनिरपेक्षता, साहचर्य आणि वितरण गुणधर्म बाबतीत संवृत्त असतात आणि आपण हे सुध्दा शिकलो की आपण जर दोन परिमेय संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार (शून्य सोडून), भागाकार केला तर आम्हाला परिमेय संख्याच मिळते. आपण हे सुध्दा पाहतो की अपरिमेय संख्या सुध्दा क्रमनिरपेक्षता, साहचर्य आणि वितरण नियम ांचे समाधान करतात तथापि अपरिमेय संख्यांची बेरीज़, भागाकार आणि गुणाकार हा नेहमी अपरिमेय संख्या असते. उदा. $(\sqrt{6})+(-\sqrt{6}),(\sqrt{2})-(\sqrt{2}),(\sqrt{3})\times(\sqrt{3})$ आणि $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ या परिमेय संख्या आहेत.

आता आपण पाहू की जर एका परिमेय संख्येत अपरिमेय संख्या मिळविली आणि एका परिमेय संख्येला दुसऱ्या एका अपरिमेय संख्येने गुणले तर काय होते? उदा: $\sqrt{3}$ ही अपरिमेय आहे. $2+\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$ बाबतीत काय? $\sqrt{3}$ ही एक अपरिमेय संख्या आहे (अनंत अनावर्ती दशांश) म्हणूनच $2+\sqrt{3}$ आणि $2\sqrt{3}$ या करीता सुध्दा शक्य आहे. $2+\sqrt{3}$ आणि $2\sqrt{3}$ या सुध्दा अपरिमेय संख्या आहेत.

उदाहरण 11: $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ या अपरिमेय संख्या आहेत की नाहीत हे तपासा.

उकल $\sqrt{5} = 2.236....$

$\sqrt{2} = 1.4142....$

$\pi = 3.1415....$

नंतर

$$7\sqrt{5} = 15.652............$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304..........$$

$$\sqrt{2}+21 = 22.4142...........$$

$$\pi - 2 = 1.1415........$$

हे सर्व अनंत अनावर्ती दशांश अपूर्णांक आहेत. म्हणून या सर्व अपरिमेय संख्या आहेत.

उदाहरण 12: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$ आणि $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ यांची बेरीज करा.

उकल $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$

$= \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

उदाहरण 13: $6\sqrt{5}$ ला $2\sqrt{5}$ ने गुणा.

उकल $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times \sqrt{5}.\sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

उदाहरण 14: $8\sqrt{15}$ ला $2\sqrt{3}$ ने भागा.

उकल $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$

$= \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$= 4\sqrt{5}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या उदाहरणावरून आपण खालील बाबी सत्य आहेत. अशी आशा करतो.

1. एक अपरिमेय व परिमेय संख्येची बेरीज किंवा वजाबाकी अपरिमेय संख्या असते.
2. एक अपरिमेय संख्ये सोबत एक शून्येत्तर (non-zero) परिमेय संख्यांचा गुणाकार किंवा भागाकार अपरिमेय संख्या असते.
3. जर आपण दोन परिमेय संख्यांची बेरीज़, वजाबाकी गुणाकार किंवा भागाकार करतो तेव्हा उत्तर परिमेय किंवा अपरिमेय संख्या असू शकते.

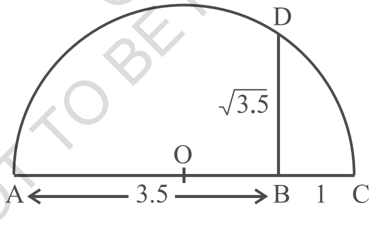
आता आम्ही वास्तव संख्येच्या वर्गमूळ क्रियेकड़े जाऊया.

जर a ही नैसर्गिक संख्या असेल तर $\sqrt{a} = b$ म्हणजेच $b^2 = a,$ म्हणजेच $b > 0$ आणि हीच व्याख्या धन वास्तव संख्येंना सुध्दा लागू केली जाऊ शकते.

जर, $a > 0$ तर वास्तव संख्या असेल तर $\sqrt{a} = b$ म्हणनेच $b^2 = a$ आणि $b > 0$.

1.2 भागात आम्ही पाहीले आहे की संख्यारेषेवर $\sqrt{n}$ ला n धन पुर्णांक आहे हे कसे दाखविले जाते ते पाहीले आहे.

आता आपण हे दाखवू की कशाप्रकारे $\sqrt{x}$ ला. x ही दिलेली धनात्मक वास्तव संख्या आहे हे भौमितीक रूपाने माहीत केले जाते उदाहरण म्हणून $x = 3.5$ करिता मिळवू. अर्थात् आम्ही $\sqrt{3.5}$ भौमितीक रूपाने (geometrically) मिळवू.



आकृती 1.11

दिलेल्या रेषेवर एक स्थिर बिंदू A पासून 3.5 एकक अंतरावर B बिंदू मिळतो. AB = 3.5 एकक आहे. (आकृति 1.11) B बिंदूपासून 1 एकक अंतरावर एक नवीन बिंदू घ्या. त्याला C माना. AC चा मध्यबिंदू ओळखून त्याला O नाव द्या. OC त्रिज्येने अर्धवर्तुळ काढा. B मधून जाणारी AC ला लंब रेषा काढा आणि ती अर्धवर्तुळाला D मध्ये छेदते तेव्हा BD = $\sqrt{3.5}$ आहे.

अधिक व्यापक स्वरूपात $\sqrt{x}$ ची किंमत काढण्यासाठी, x ही धनवास्तव संख्या आहे. B बिंदू असा घेऊ की AB = x एकक आहे (हे आकृती 1.12 दाखविले आहे). C बिंदू असा घ्या कि BC = 1 एकक असेल. नंतर $x = 3.5$ क्रियेप्रमाणे BD = $\sqrt{x}$ मिळेल.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

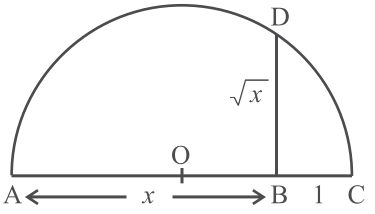
आम्ही हे उत्तर पायथागोरसच्या प्रमेयाने सिध्द करू शकतो.

लक्षात ठेवा, आकृती 1.12 मध्ये ΔOBD हा काटकोन त्रिकोण असून वर्तुळाची त्रिज्या $\frac{x+1}{2}$ एकक आहे.

म्हणून $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ एकक

$OB = x-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}$

म्हणून पायथागोरस प्रमेयानुसार आपल्याला मिळेल.

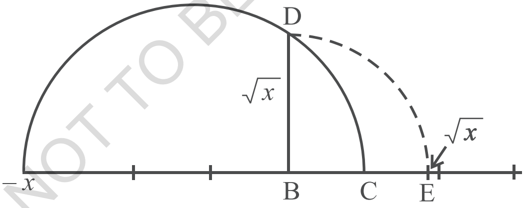


आकृती 1.12

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

यावरून सिध्द होते $BD = \sqrt{x}$

या रचनेवरून हे दाखविण्याचे दृश्यीय व भौमितीक प्रकार प्राप्त झाल्याने सर्व वास्तविक संख्या $x > 0$ करिता $\sqrt{x}$ ला अस्तित्वात आहेत. जर तुम्ही संख्यारेषेवर $\sqrt{x}$ चे स्थान माहित करू शकाल. जर आपण रेषा BC ला संख्यारेषा मानून B ला शून्य व C ला 1 एकक मानले इत्यादी. B केंद्र मानून. BD त्रिज्येने एक चाप काढा. जो संख्यारेषेला E मध्ये छेदतो (आकृती 1.13 पहा) तेव्हा B हे $\sqrt{x}$ दर्शविते.



आकृती 1.13

आता आपण वर्गमुळाच्या संकल्पनेला घनमूळ, चतुर्थमूळ आणि सामान्यपणे n वे मूळ. पर्यंत वाढवू शकतो n हा येथे धनपूर्णांक आहे. तुम्ही आठवण करा की मागील इयत्तेत तुम्ही वर्गमूळ आणि घनमूळाचा अभ्यास केला आहे.

$\sqrt[3]{8}$ हे काय आहे? आपणास माहीत आहे की ही एक धन संख्या असून तिचा घन 8 आहे. आणि तुम्ही अनुमान केले असेल कि $\sqrt[3]{8}$ = 2 आहे. आता $\sqrt[5]{243}$ ची किंमत काढण्याचा प्रयत्न करू. तुम्हांला माहीत आहे 'b' एक संख्या आहे. b ची किमत काढा. b^5 = 243 चे उत्तर आहे 3. म्हणून $\sqrt[5]{243} = 3$ आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या उदाहरणावरून तुम्ही $\sqrt[n]{a}$ ची व्याख्या करू शकता जेथे $a > 0$, एक वास्तव संख्या आहे आणि 'n' हा धन पूर्णांक आहे.

समजा $a > 0$ एक वास्तव संख्या आहे आणि 'n' हा धनपुर्णांक आहे तर $\sqrt[n]{a} = b$ जर $b^2 = a$ आणि $b > 0$. लक्षात ठेवा $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ मध्ये उपयोग केलेले चिन्ह '$\sqrt{\ }$' ला करणी चिन्ह (radical sign) म्हणतात.

आम्ही आता वर्गमुळाशी संबंधीत काही नित्य समीकरणाची यादी दिली आहे. जी विविध क्रियेमध्ये उपयोगी आहे. मागील वर्गात यातील काही सुत्राशी आपण परिचित आहोत. राहिलेली सुत्रे वास्तव संख्याच्या बेरजेवर व गुणाकाराच्या वितरण नियमाने आणि नित्य समीकरण $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ने जेथे x आणि y या वास्तव संख्या आहेत समजा कि a आणि b घन वास्तव संख्या आहेत तेव्हा.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

या नित्यसमीकरणांची काही उदाहरणे पाहू.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 15: खालील राशींना सरळ रूप द्या.

(i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)$

उकल : (i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right) = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}.\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 11 - 7 = 4$

टिप : वरील उदाहरणात सरळ रूप द्या याचा अर्थ म्हणजे परिमेय अथवा अपरिमेय संख्येची बेरीज़ अशी लिहितात.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ संख्यारेषेवर कोठे दर्शवितात या समस्येवर विचार करून या भागाला येथे संपवू. तुम्हाला

माहीत आहे की ही एक अपरिमेय संख्या आहे. जर छेद एक परिमेय संख्या असेल तर याला सहज सोडविता येते. आपण पाहू की याच्या छेदाचे परिमेयीकरण (परिमेय करणे) करता येते का? म्हणजेच छेदाला परिमेय संख्येत रूपांतरीत करता येते का. या करीता आपल्याला वर्गमूळ संबंधीत सुत्रांची आवश्यकता आहे. आता आपण पाहू की हे कसे करतात.

उदाहरण 16: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ या छेदाचे परिमेयकरण करा.

उकल : आपण $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ला सममूल्य राशीत लिहा की जेथे एक परिमेय संख्या असेल. आपल्याला माहीत आहे की $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे. आपणांला हे सुध्दा माहीत आहे.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ला $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ने गुणल्यानंतर आपल्याला एक सममूल्य राशी प्राप्त होते कारण $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ आहे या दोन राशींना एकत्र घेतल्यानंतर आपणास मिळते.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

यास्वरूपात $\frac{1}{\sqrt{2}}$ चे संख्यारेषेवर स्थान निश्चित करणे सोपे होते. ही संख्या 0 आणि $\sqrt{2}$ यांच्यामध्ये स्थित आहे.

उदाहरण 17: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ च्या छेदाचे परिमेयकरण करा.

उत्तर : वर दिलेले नित्यसमीकरण (iv) वापरून $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ला $2-\sqrt{3}$ ने गुणून व भागाकार करून आम्हाला मिळते.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 18: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ च्या छेदाचे परिमेयकरण करा.

उकल : वर दिलेले नित्यसमीकरण (iii) वापरू.

$$\text{आता, } \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}$$

$$=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 19: $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ च्या छेदाचे परिमेयकरण करा..

उकल: :

$$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}$$

$$= \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

यावरून जेव्हा एखाद्या राशीच्या छेदात वर्गमूळ असलेले पद असते तेव्हा तिला एक अशा सममुल्य राशीत ज्याचा छेद एक परिमेय संख्या असेल असे रूपांतरित करण्याच्या क्रियेला छेदाचे परिमेयकरण (rationalising the denominator) म्हणतात.

स्वाध्याय 1.4

1. खालील संख्यांचे परिमेय व अपरिमेय संख्येत वर्गीकरण करा.

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$

   (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. खालील प्रत्येक राशींना सरळ रूप द्या.

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. π ची व्याख्या वर्तुळाचा परिघ (C) आणि त्याचा व्यास (d) यांच्या गुणोत्तरात व्यक्त केले जाते. अर्थात $\pi=\frac{c}{d}$, येथे विरोधाभास दिसून येतो कारण π ही अपरिमेय संख्या आहे. हा विरोधाभास कसा सोडवाल?

4. संख्यारेषेवर $\sqrt{9.3}$ दाखवा.

5. खालील राशींच्या छेदाचे परिमेयकरण करा.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

   (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 वास्तव संख्याकरिता घातांकाचे नियम

तुम्हांला आठवते का यांना सरळ रूप कसे देतात?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

आपल्याला यांची उत्तरे मिळतात का? ती खालीलप्रमाणे आहेत.?

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

वरील उत्तरे मिळविण्यासाठी तुम्ही खालील घातांकांच्या नियमांचा उपयोग केला असेल. जे तुम्ही मागील वर्गात शिकला आहात. (a, n आणि m या नैसर्गिक संख्या आहेत. . a हा आधारांक, आणि m व n हे घातांक आहेत).

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \, (m > n)$ (iv) $a^m b^n = (ab)^m$

$(a)^0$ म्हणजे काय? याची किंमत 1 आहे म्हणून नियम (iii) वापरून $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ हे मिळवू शकतो. आम्ही आता ऋण घातांक सुध्दा घेऊ शकतो.

उदाहरणे :

(i) $17^2 . 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} . (9)^{-3} = (63)^{-3}$

आम्हांला खालील किंमती मिळवायच्या आहेत.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ही उदाहरणे आम्ही कशी सोडवू शकतो ? या अगोदर घातांकाच्या नियमाचा अभ्यास केला आहे. ते येथे लागू होतात. तरीसुद्धा जेव्हा आधारांक हा धन वास्तव संख्या आहे आणि घातांक परिमेय संख्या असेल (नंतर तुम्ही घातांक वास्तव संख्या आहेत याचा अभ्यास कराल). परंतू हे नियम सांगण्यापूर्वी आणि या नियमांना लागू करण्यापूर्वी हे समजून घेणे आवश्यक आहे की उदाहरण $4^{\frac{3}{2}}$ चा अर्थ काय आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भाग 1.4 मध्ये आम्ही $\sqrt[n]{a}$ ची व्याख्या केली आहे जेथे वास्तव संख्या $a > 0$ खालीलप्रमाणे आहे.

समजा $a > 0$ ही धन वास्तव संख्या आहे आणि 'n' हा धन पुर्णांक आहे तेव्हा $\sqrt[n]{a} = b$ असतो जर $b^n = a$ आणि $b > 0$ असेल घातीकांच्या भाषेत आम्ही $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ व्याख्या करतो. म्हणून निश्चिपणे $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$ आता आपण $4^{3/2}$ कडे दोन पध्दतीनी पाहू शकतो.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

यावरून आम्ही खालील व्याख्या करु शकतो.

समजा $a > 0$ हे घन वास्तव संख्या आहे. m आणि n हे पूर्णांक असून m व n चे 1 सोडून इतर दुसरे सामाईक अवयव नसतील आणि $n > 0$ तर.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

आम्हाला खालील घातांकाचे नियम विस्तृत रूपात मिळतात.

समजा $a > 0$ ही वास्तव संख्या असून p आणि q या परिमेय संख्या आहेत तेव्हा आम्हांला –

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = (a^{pq})$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

तुम्ही आता या अगोदर विचारलेल्या प्रश्नांचे उत्तर शोधण्यासाठी या नियमांचा उपयोग करू शकता.

उदाहरण 20: सरळ रूप द्या.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

उकल :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$= 2^{\frac{3}{3}}$

$= 2^1$

$= 2$

(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 \quad = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} \quad = 7^{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}$

$= 7^{\frac{3-5}{15}}$

$= 7^{\frac{-2}{15}}$

(iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 1.5

1. शोधा

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. शोधा

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. सरळ रूप द्या:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 सारांश (Summary)

या प्रकरणात तुम्ही खालील बाबींचा अभ्यास केला आहे.

1. संख्या r ला परिमेय संख्या म्हणतात जर ती $\dfrac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहीता येत असेल. येथे p आणि q पूर्णांक असून $q \neq 0$

2. संख्या s ला अपरिमेय संख्या म्हणतात जर ती $\frac{p}{q}$ या स्वरूपात लिहिता येत नसेल. येथे p आणि q पूर्णांक असून $q \neq 0$.

3. एका परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार एकतर सांत (खंडीत) किंवा अनंत आवर्ती असते. तथापि ज्या संख्येचा दशांश विस्तार सांत किंवा अनंत आवर्ती असतो ती परिमेय संख्या असते.

4. एका अपरिमेय संख्येचा दशांश विस्तार अनंत अनावर्ती असतो परंतू, ज्या संख्येचा दशांश विस्तार अनंत अनावर्ती असतो ती अपरिमेय संख्या असते.

5. सर्व परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांच्या एकत्रीकरणाला वास्तव संख्या म्हणतात.

6. संख्या रेषेवर प्रत्येक बिंदूशी निगडीत एकमेव वास्तव संख्या असते. संख्यारेषेवर वास्तव संख्येशी निगडीत एकमेव बिंदू असतो.

7. जर r ही परिमेय आणि s ही अपरिमेय संख्या आहेत तर $r+s$ आणि $r-s$ अपरिमेय संख्या असतात आणि s आणि r/s या सुध्दा अपरिमेय संख्या असतात येथे $r \neq 0$.

8. धन वास्तव संख्या a आणि b साठी खालील नित्यसमीकरणे लागू होतात.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ च्या छेदाचे परिमेयकरण करण्यासाठी आपण $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ने गुणतो येथे, a आणि b पूर्णांक आहेत.

10. समजा $a > 0$ एक वास्तव संख्या असेल आणि p आणि q परिमेय संख्या असतील तर.

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रकरण – 2

E3P4B2

बहुपदी (Polynomials)

2.1 प्रस्तावना

तुम्ही मागील वर्गात बैजिक राशीची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार शिकला आहात. बैजिक राशींचे अवयव कसे पाडतात हे सुध्दा तुम्ही शिकला आहात. तुम्ही बैजिक नित्यसमीकरणे आठवून अवयवीकरणाचे उपयोग सुध्दा आठवा.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

आणि $$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

या प्रकरणामध्ये आम्ही महत्वाच्या बैजिक राशींच्या प्रकाराने सुरुवात करणार आहे त्यांना बहुपदी म्हणतात आणि त्यांची परिभाषा (शब्दावली) बहुपदीशी संबंधीत आहे. आम्ही शेष सिध्दांत आणि अवयव सिध्दांत तसेच त्यांचे बहुपदीच्या अवयवातील उपयोग सुध्दा शिकणार आहोत. याशिवाय आम्ही अनेक बैजीक समीकरणे व त्यांचे अवयवीकरणातील उपयोग यांचा अभ्यास करणार आहोत आणि काही दिलेल्या राशीच्या किंमती काढणार आहोत..

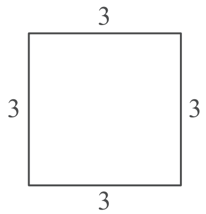
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.2 एक चलपद बहुपदी (Polynomials in one variable)

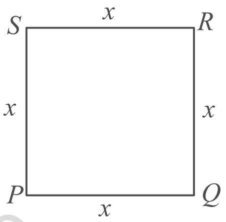
आठवण करा की चलपद हे चिन्हाने दर्शवितात. ती म्हणजे कोणतीही वास्तव किंमत. आम्ही $x, y, z,$ इ. अक्षरे वापरतो. त्यांना चलपदे म्हणतात. $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ या बैजीक राशी आहेत. सर्व बैजीक राशी (x या नमुन्यात आहेत. आता समजा राशी (स्थिरपद) × (चलपद) या नमुन्यात लिहायची असेल तर स्थिरपद कोणते आहे माहीत नाही. अशा क्रियेमध्ये स्थिरपद म्हणून a, b, c इ. लिहितो. म्हणून ax ही राशी आहे असे म्हणतो.

तरीसुद्धा, स्थिरपदाचे अक्षर व चलपदाचे अक्षर मानण्यात फरक आहे. दिलेल्या प्रसंगात स्थिरपदाची किंमत शेवट पर्यंत स्थिर असते. म्हणजेच दिलेल्या उदाहरणात स्थिरपदाची किंमत बदलत नाही परंतु चलपदाची किंमत बदलत असते.

आता, समजा 3 एकक बाजू असलेला चौरस आहे. (आकृती 2.1 पहा) याची परिमिती किती आहे? तुम्हांला माहीत आहे चौरसाच्या चार बाजूंच्या लांबीची बेरीज़ म्हणजेच परिमिति होय. येथे प्रत्येक बाजू 3 एकक आहे. म्हणून याची परिमिति 4×3 आहे, म्हणजेच 12 एकक. 10 एकक बाजू असलेल्या चौरसाची परिमिति किती असेल? परिमिती 4×10 आहे. म्हणजेच 40 एकक. प्रत्येक बाजूची लांबी x एकक. (आकृती 2.2 पहा). परिमिति $4x$ एकक दिली आहे. म्हणजेच जर बाजूची लांबी वाढली तर परिमिती सुध्दा वाढते.



आकृती 2.1



आकृती 2.2

चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ काढू शकाल का? हे $x \times x = x^2$ चौरस एकक आहे.

x^2 ही बैजीकराशी आहे. तुम्हांला. $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$. या बैजीक राशी माहीत असतीलच. लक्षात ठेवा, घेतलेल्या सर्व बैजीक राशीच्या चलपदांचा घातांक पूर्णांक संख्या आहे. या राशीच्या नमुन्याला एक चलपद बहुपदी म्हणतात. वरील उदाहरणात चलपद x आहे. उदाहरणार्थ $x^3 - x^2 + 4x + 7$. ही x चलपद बहुपदी आहे. त्याच बरोबर $3y^2 + 5y$ ही y चलपद बहुपदी व $t^2 + 4$ ही t चलपद बहुपदी आहे.

$x^2 + 2x$ या बहुपदीत x^2 आणि $2x$ यांना बहुपदीची पदे म्हणतात. त्याबरोबर $3y^2 + 5y + 7$ या बहुपदीत तीन पदे आहेत. त्यांची नावे $3y^2$, $5y$ आणि 7. तुम्ही $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ या बहुपदीची पदे लिहू शकाल का? या बहुपदीला $-x^3$, $4x^2$, $7x$ आणि -2 अशी 4 पदे आहेत.

बहुपदीतील प्रत्येक पदाला सहगुणक असतो. म्हणून $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ मधील x^3 चा सहगुणक -1, x^2 चा सहगुणक $+4$, x चा सहगुणक 7 आणि -2 हा x^0 चा सहगुणक (आठवा $x^0 = 1$) आहे. $x^2 - x + 7$ मधील. x चा सहगुणक माहीत आहे का? तो -1 आहे.

2 ही सुध्दा बहुपदी आहे. 2, -5, 7 इ.ही स्थिर बहुपदीची उदाहरणे आहे. 0 स्थिर बहुपदींला शून्य बहुपदी म्हणतात. हे बहुपदींच्या सर्व प्रकारामध्ये महत्वाची भूमिका बजावते हे वरील वर्गात पहाल.

आता बैजीक राशी $x + \frac{1}{x}, \sqrt{x} + 3$ आणि $\sqrt[3]{y} + y^2$ पहा. तुम्हांला माहीत आहे $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ अशी लिहितो. येथे दुसऱ्या पदाचा म्हणजेच x^{-1} चा घातांक -1 आहे. म्हणजेच पूर्णांक संख्या नाही. म्हणून ही बैजीक राशी बहुपदी नाही.

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

पुन्हा $\sqrt{x}+3$ हे $x^{\frac{1}{2}}+3$ असे लिहितात. येथे x चा घातांक $\frac{1}{2}$. आहे. ती पुर्णांक संख्या नाही. म्हणून $\sqrt{x}+3$ ही बहुपदी आहे का? नाही. $\sqrt[3]{y}+y^2$ याबद्दल काय? ही सुध्दा बहुपदी नाही. का नाही?

जर बहुपदीतील चलपद x असेल तर त्या बहुपदीला आपण $p(x)$ किंवा $q(x)$ किंवा $r(x)$ इत्यादी लिहू शकतो. उदाहरण म्हणून अशी लिहू शकतो.

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

बहुपदी ही कोणत्याही संख्येच्या (मर्यादीत) पदांची असते. उदाहरणार्थ.

$x^{150} + x^{140} + ... + x^2 + x + 1$ ही बहुपदी 151 पदांची आहे.

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ आणि u^4 या बहुपदी पहा. तुम्ही पाहीला का प्रत्येक बहुपदी ही फक्त एक पदाची आहे. फक्त एक पद असलेल्या बहुपदीला **एकपदी** (monomials) म्हणतात. (mono म्हणजे एक)

आता खालील प्रत्येक बहुपदीचे निरीक्षण करा :

$P(x) = x + 1, q(x) = x^2 - x, r(y) = y^{30} + 1, t(u) = u^{43} - u$ प्रत्येकामध्ये किती पदे आहेत? प्रत्येक बहुपदीमध्ये दोन पदे आहेत. दोन पदे असणाऱ्या बहुपदीला **द्विपदी** म्हणतात (binomials). (bi म्हणजे दोन).

त्याचप्रमाणे फक्त तीन पदे असणाऱ्या बहुपदीला **त्रिपदी** (trinomials) म्हणतात. (tri म्हणजे तीन). त्रिपदीची काही उदाहरणे –

$p(x) = x + x^2 + \pi$ $\qquad$ $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$

$r(u) = 4 + 4^2 - 2$ $\qquad$ $t(y) = y^4 + y + 5$

आता $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ही बहुपदी पहा. x चा मोठा घातांक असलेले कोणते पद आहे? ते $3x^7$ आहे. या पदात xचा घातांक 7 आहे. त्याचप्रमाणे $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ या बहुपदीत y चा मोठा घातांक असलेले पद $5y^6$. आहे. यात y या पदांचा घातांक 6 आहे. बहुपदीतील चलपदाच्या मोठ्या घातांकाला आम्ही बहुपदीची कोटी असे म्हणतो. म्हणून $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ या बहुपदीची कोटी 7 आहे आणि $5y^6 - 4y^2 - 6$ या बहुपदांची कोटी 6 आहे. शून्य रहीत स्थिरपद बहुपदींची कोटी शून्य असते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 1: खाली दिलेल्या प्रत्येक बहुपदींची कोटी शोधा..

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

उकल: (i) चलपदाचा मोठा घातांक 5 आहे. म्हणून बहुपदीची कोटी 5 आहे.

(ii) चलपदाचा मोठा घातांक 8 आहे म्हणून. बहुपदींची कोटी 8 आहे.

(iii) 2 हे एकच पद आहे ते $2x^0$ असेही लिहितात. म्हणून x चा घातांक 0 आहे.म्हणूनच बहुपदीची कोटी 0 आहे.

आता, बहुपदी $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ आणि $s(u) = 3 - u$ यांचे निरीक्षण करा. यामध्ये काही साम्य पाहिलात का? प्रत्येक बहुपदीची कोटी 1 आहे. बहुपदीची कोटी 1 असलेल्या बहुपदीला रेषीय बहूपदी म्हणतात. 1 चलपद असलेल्या काही रेषीय बहुपदी $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$ या आहेत.

आता x चलपदाची 3 पदे असणाऱ्या रेषीय बहुपदी प्रयत्न करा आणि शोधा? तुम्ही ते शोधणार नाही कारण x च्या रेषीय बहुपदी मध्ये जास्तीत जास्त 2 पदे असतात. म्हणून कोणत्याही x च्या रेषीय बहुपदीचा सामान्य नमुना $ax + b$ असतो. येथे a आणि b ही स्थिरपदे आणि $a \neq 0$ (का?) त्याचप्रमाणे y मधील रेषीय बहुपदी $ay + b$ आहे.

आता या बहूपदींचा विचार करा.

$2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 आणि $x^2 + \frac{2}{5}x$

तुम्हांला मान्य आहे का यांची कोटी 2 आहे? बहुपदीची कोटी 2 असते तेव्हा त्याला **वर्ग बहुपदी** (quadratic polynomial) म्हणतात.

$5 - y^2$, $4y + 5y^2$ आणि $6 - y - y^2$ ही काही वर्ग बहुपदीची उदाहरणे आहेत. एक चलपद आम्ही वेगवेगळी चार पदे असणाऱ्या वर्ग बहुपदी लिहू शकतो का? एक चलपदाच्या जास्तीत जास्त वेगवेगळी 3 पदे असणाऱ्या वर्ग बहुपदी शोधा. जर तुम्ही आणखी काही वर्ग बहुपदीची यादी केला तर तुम्हांला समजून येईल की x मधील वर्गबहुपदीचा सामान्य नमुना $ax^2 + bx + c$ आहे. येथे $a \neq 0$ आणि a, b, c ही स्थिरपदे आहेत. त्याचप्रमाणे y– मधील वर्ग बहुपदीचा सामान्य नमुना $ay^2 + by + c$ जेथे $a \neq 0$ आणि a, b, c ही स्थिरपदे आहेत.

आम्ही तीन कोटी असलेल्या बहुपदीला **घन बहुपदी** (cubic polynomial) म्हणतो. x मधील $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ ही काही घन बहुपदीची उदाहरणे आहेत. एक चलपदाच्या घन बहुपदीमध्ये किती पदे असतात विचार करा? यामध्ये जास्तीत जास्त 4 पदे असतात. ही $ax^3 + bx^2 + cx + d$ या सामान्य नमुन्यात लिहितात. जेथे $a \neq 0$ आणि a, b, c आणि d ही स्थिरपदे आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता 1 कोटी, 2 कोटी आणि 3 कोटी बहुपदी कशा आहेत ते तुम्ही पाहिला आहात. कोणतीही नैसर्गिक संख्या n मधील एक चलपदाची n कोटी असलेली बहुपदी लिहू शकता का? एक चलपद x, कोटी n असलेल्या बहुपदीचा सामान्य नमुना.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

येथे a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_n ही स्थिरपद आणि $a \neq 0$ प्रत्यक्षात जर $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (सर्व स्थिरपदे शून्य आहेत) तिला 0 (शून्य) असे ही म्हणतात. शून्य बहुपदीची कोटी किती? शून्य बहुपदी कोटीची व्याख्या करता येत नाही. आम्हांला शून्य बहुपदी मिळते.

म्हणूनच आम्ही एक चलपदाची बहुपदी वापरतो. एकापेक्षा जास्त चलपदांचा बहुपदी सुध्दा आहेत. उदा. $x^2 + y^2 + xyz$ (चलपदे x, y आणि z आहेत). ही तीन चल पदांची बहुपदी आहे. त्याचप्रमाणे $p^2 + q^{10} + r$ (येथे p, q व r चलपदे आहेत). $u^2 + v^2$ (येथे u व v ही चलपदे आहेत). या बहुपदी तीन व दोन चलपदाच्या आहेत. अशा बहुपदींचा सखोल अभ्यास तुम्ही नंतर कराल.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 2.1

1. खालीलपैकी कोणत्या राशी एक चलपद असलेल्या आणि एक चलपद नसलेल्या बहुपदी आहेत? उत्तराचे कारण सांगा.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. खालील प्रत्येक उदाहरणातील x^2 चा सहगुणक लिहा.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. द्विपदीची कोटी 35 आणि एकपदीची कोटी 100 असलेली प्रत्येकी एक उदाहरण लिहा.

4. खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा..

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग व घन बहुपदीमध्ये वर्गीकरण करा.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$
(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 बहुपदीची शून्ये (Zeroes of Polynomials)

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ ही बहुपदी पहा.

जर आम्ही $p(x)$ मध्ये सर्व ठिकाणी x ची किंमत घेतली तर आम्हाला मिळते.

$$p(1) = 5(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

म्हणून $p(x)$ मध्ये $x = 1$ घेऊन किंमत 4 येते

त्याचप्रमाणे $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 = -2$

तुम्ही $p(-1)$ ची किंमत काढाल का?

उदाहरण 2: चलपदांच्या दिलेल्या किंमतीनुसार खालील प्रत्येक बहुपदींची किंमत काढा.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ जर $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ जर $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + b$ जर $t = a$

उकल : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$p(x)$ या बहुपदीत $x = 1$ किंमत घेतली.

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$p(1) = 5 - 3 + 7$$
$$p(1) = 12 - 3$$
$$p(1) = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$q(y)$ या बहुपदीत $y = 2$ किंमत घेतली.

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11}$$
$$q(2) = 3(8) - 8 + \sqrt{11}$$
$$= 24 - 8 + \sqrt{11}$$
$$= 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$p(t)$ या बहुपदीत $t = a$ किंमत घेतली.

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

आता $p(x) = x - 1$ ही बहुपदी घेऊन. $p(1)$ म्हणजे काय?

लक्षात ठेवा : $p(1) = 1 - 1 = 0$

$p(1) = 0$ म्हणजेच 1 हा बहुपदी $p(x)$ चा शून्य आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्याचप्रमाणे तुम्ही 2 हा $q(x)$ चे शून्य आहे. ते तपासा जेव्हा $q(x) = x - 2$.

सामान्यपणे, $p(x)$ या बहूपदीचे शून्य हे c ही संख्या आहे अशारीतीने की $p(c) = 0$

तुम्ही निरीक्षण केला असणारच की, बहुपदी $x - 1$ चे शुन्य हे 0 शी बरोबर समानता करून मिळते. म्हणून $x - 1 = 0$ तेव्हा $x = 1$ येते. आम्ही $p(x) = 0$ ला बहुपदी समीकरण म्हणतो आणि, $p(x) = 0$ या बहुपदीच्या समीकरणाचे वर्गमूळ (root of polynomial equation) 1 आहे. म्हणून 1 हे बहुपदी $x - 1$ चे शून्य आहे असे म्हणतो. किंवा $x - 1 = 0$ या बहुपदीच्या समीकरणाचे वर्गमूळ आहे.

आता 5 ही स्थिर बहुपदी पहा. याचा शून्य काय आहे सांगू शकाल? याला शून्य नाही कारण $5x^0$ मध्ये x च्या ऐवजी कोणतीही संख्या घेतली तर 5 मिळतात.

खरेतर शून्यरहीत स्थिर बहुपदीला शून्ये नसतात. शून्य बहुपदीची शून्ये कोणती आहेत? नियमानुसार, प्रत्येक वास्तव संख्या ही शून्य बहुपदीची शून्ये असतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3: बहुपदी $x + 2$ ची शून्ये -2 आणि 2 आहेत का तपासा.

उकल : जर $p(x) = x + 2$

$p(2) = 2 + 2 = 4$

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

म्हणून बहुपदी $x + 2$ चे शून्य -2 आहे. पण 2 नाही. म्हणून बहुपदी $x + 2$ चा शून्य नाही.

उदाहरण 4: बहुपदी $p(x) = 2x + 1$ ची शून्ये शोधा.

उकल : $p(x)$ ची शून्य शोधण्यासाठी $p(x) = 0$ यासारखे समीकरण सोडवा.

आता, $x = -\frac{1}{2}$ घेतल्यास $2x + 1 = 0$ येते

म्हणून $-\frac{1}{2}$ हे, बहुपदी $2x + 1$ चे शून्य आहे.

आता, जर $p(x) = ax + b, a \neq 0$ ही रेषीय बहुपदी आहे. $p(x)$ चे शून्य शोधण्यासाठी बहुपदी समीकरण $p(x) = 0$ ही किंमत घेऊन ती सोडवा.

आता $p(x) = 0$ म्हणजेच $ax + b = 0, a \neq 0$

म्हणून, $ax = -b$

$$x = \frac{-b}{a}$$

म्हणून $x = \frac{-b}{a}$ हे फक्त $p(x)$ चे शून्य आहे i.e. रेषीय बहुपदीला फक्त एक आणि एकच शून्य असते.

आता आपण म्हणून शकतो की $x - 1$ चे शून्य 1 आहे. आणि $x + 2$ चे शून्य -2 आहे.

उदाहरण 5: $x^2 - 2x$ या बहुपदीची शून्ये 2 आणि 0 आहेत पडताळा.

उकल : जर $p(x) = x^2 - 2x$

$p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

आणि $p(0) = 0 - 0 = 0$

$x^2 - 2x$ या बहुपदीची शून्ये 2 आणि 0 दोन्ही आहेत.

आता आपण आमच्या निरीक्षणांची यादी तयार करू.

(i) शून्य बहुपदीचे शून्य (0) पाहीजेच असे नाही.

(ii) शून्य (0) हे बहुपदीचे शून्य असू शकते.

(iii) प्रत्येक रेषीय बहुपदीचा फक्त एक आणि एकच शून्य असतो.

(iv) बहुपदीला एकापेक्षा जास्त शुन्ये असू शकतात.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 2.2

1. बहुपदी $5x - 4x^2 + 3$ ची किंमत शोधा जेव्हा –

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. खालील प्रत्येक बहुपदीचे $p(0), p(1)$ आणि $p(2)$ शोधा.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. समोर दिलेली शून्ये त्या बहुपदीची आहेत का पडताळा.

   (i) $p(x) = 3x + 1 ;\ x = -\frac{1}{3}$

   (ii) $p(x) = 5x - \pi ;\ x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1 ;\ x = 1, -1$

   (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2) ;\ x = -1, 2$

   (v) $p(x) = x^2 ;\ x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m\ ;\ x = -\dfrac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1\ ;\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1\ ;\ x = \dfrac{1}{2}$

4. खालील प्रत्येक उदाहरणातील बहुपदींची शून्ये शोधा.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$ (iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0$. c, d या वास्तव संख्या.

2.4 बहुपदींचे अवयव : (Factorisation of Polynomials)

उदाहरण 5 चे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा. $q\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ ही बाकी आहे.

$(2t + 1)$ हा $q(t)$ चा अवयव आहे म्हणून $q(t)$ बहुपदीच्या बाबतीत $q(t) = (2t + 1)\ g(t)$. या बहूपदीसाठी खालील सिध्दांताचे हे एक उदाहरण आहे.

अवयव प्रमेय (Factor Theorem)

> जर बहुपदींची कोटी $n \geq 1$ आणि a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल तर, (i) $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे जेव्हा $p(a) = 0$ आणि (ii) $p(a) = 0$ जेव्हा $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

सिध्दता :

शेष सिध्दांतानुसार $p(x) = (x - a)\ q(x) + p(a)$

(i) जर $p(a) = 0$ तर $p(x) = (x - a)\ q(x)$, $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे हे दर्शवितो.

(ii) $p(x)$ हा $(x - a)$ चा अवयव आहे जेव्हा $p(x) = (x - a)\ g(x)$, $g(x)$ या काही बहुपदी साठी $p(a - a)\ g(a) = 0$ वरील साध्य शेषसिद्धांतावरून लगेच प्राप्त करता येते.

पुढील उदाहरणे पहा.

उदाहरण 6: $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ आणि $(2x + 4)$ चा $(x + 2)$ हा $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ आणि $2x + 4$ चा अवयव आहे का ते तपासा.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उकल : $(x+2)$ चे शून्य -2 आहे, जर $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ आणि $s(x) = 2x + 4$

तर $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6 = 0$

म्हणून शेष सिध्दांतानुसार $(x+2)$ हा $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ चा अवयव आहे.

पुन्हा शेषसिद्धांतानुसार $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

म्हणून $(x+2)$ हा $(2x+4)$ या अवयव आहेत. तुम्ही अवयव प्रमेय लागू करायच्या अगोदर पण तपासू पाहू शकता $2x + 4 = 2(x+2)$

उदाहरण 7: $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ चा $(x-1)$ हा अवयव असेल तर k ची किंमत काढा.

उकल : $(x-1)$ हा $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ चा अवयव आहे $p(1) = 0$

आता $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

म्हणून $4 + 3 - 4 + k = 0$

म्हणून $k = -3$.

काही बहुपदींची कोटी 2 व 3 असलेल्या बहुपदीचे अवयवीकरण करण्यासाठी आम्ही अवयव प्रमेय वापरू. तुम्हांला माहीत आहेच की, $x^2 + lx + m$. या सारख्या वर्ग बहुपदीचे अवयवीकरण कसे करतात. मधले पद lm चे $ax + bx$ या स्वरूपात अवयव असे पाडा की, $ab = m, x^2 + lx + m = (x+a)(x+b)$ होईल. आता आम्ही $ax^2 + bx + c$ या स्वरूपाच्या वर्ग बहुपदीचे अवयव काढण्याचा प्रयत्न करू. जेथे $a \neq 0$ आणि a, b, c ही स्थिरपदे आहेत.

बहुपदी $ax^2 + bx + c$ चे अवयवीकरण करताना मधल्या पदाची फोड खालील प्रमाणे करतात.

जर अवयव $(px+q)$ आणि $(rx+s)$ असतील तर.

$$ax^2 + bx + c = (px+q)(rx+s)$$

$$= prx^2 + (ps+qr)x + qs$$

x^2 च्या सहगुणकाची तुलना केली तर $a = pr$ मिळते.

त्याचप्रमाणे, x च्या सहगुणकाची तुलना केली तर $b = ps + qr$ मिळते. आणि स्थिरपदाची तुलना $c = qs$ मिळते. ps आणि pr या दोन पदांची बेरीज b दर्शविते आणि गुणाकार $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ येतो.

$\therefore$ $ax^2 + bx + c$ च्या अवयवीकरणासाठी दोन संख्याची बेरीज म्हणजे b व त्यांचा गुणाकार ac घेतला पाहीजे हे उदाहरण 8 वरून आपल्याला समजेल.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 8: मधल्या पदाची फोड़ करून $6x^2 + 17x + 5$ चे अवयवीकरण अवयव प्रमेयाने करा.

उकल 1 मध्य पदाची फोड़ करण्याची पध्दत (By splitting method)

p व q या दोन संख्या अशा घेतल्या की $p + q = 17$ आणि $pq = 6 \times 5 = 30$ होईल. नंतर त्याचे अवयव मिळतात.

आता 30च्या अवयव जोड्या पहा. 1 आणि 30, 2 आणि 15, 3 आणि 10, 5 आणि 6.

यापैकी $p + q = 17$ आहे म्हणून 2 आणि 15 घेता येईल.

$$\begin{aligned}6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5\\ &= 6x^2 + 2x + 15x + 5\\ &= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)\\ &= (3x + 1)(2x + 5)\end{aligned}$$

उकल 2 (अवयव प्रमेय वापरून)

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6$$

समजा की, जर $p(x)$ ची शून्ये a आणि b आहेत तर.

$$6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b),\ ab = \frac{5}{6}$$

a आणि b च्या काही शक्यता त्या म्हणजे $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$

आता $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$

परंतु $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ म्हणून $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे

त्याचप्रमाणे $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ हा $p(x)$ चा अवयव सुध्दा अवयव आहे.

अशाच प्रकारे प्रयत्न करून,

$$\begin{aligned}\text{म्हणून } 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)\\ &= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)\\ &= (3x + 1)(2x + 5)\end{aligned}$$

वरील विभागणी पध्दतीचा वापर योग्य वाटतो. आणखी काही उदाहरणे पाहु.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 9 : $y^2 - 5y + 6$ चे अवयवीकरण अवयव प्रमेय वापरून करा.

उकल : जर $p(x) = y^2 - 5y + 6$, आता $p(y) = (y - a)(y - b)$ तुम्हांला माहीत आहेच की ab हे. स्थिरपद आहे म्हणून $ab = 6$, $p(y)$ चे अवयव काढायचे म्हणजेच 6 चे अवयव काढले पाहिजेत.

$\therefore$ 6 चे अवयव 1, 2 व 3 आहेत.

आता $p(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

$(y - 2)$ हा $p(y)$ चा अवयव आहे.

त्याचप्रमाणे $p(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0$

म्हणूनच $y^2 - 5y + 6$ चा $(y - 3)$ सुध्दा अवयव आहे.

म्हणूनच $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

लक्षात ठेवा, मधले पद $-5y$ ची फोड करून सुध्दा $y^2 - 5y + 6$ चे अवयव काढता येतात.

आता घन बहुपदींचे अवयवीकरण पाहूया. येथे मधील पद फोड करण्याची पध्दत योग्य नाही. आपल्याला कमीत कमी एक अवयव काढायचा आहे जो हे तुम्ही खालील उदाहरणामध्ये पाहू शकाल.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 10: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ चे अवयव पाड़ा.

उकल : जर $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142 - 120$.

प्रथम -120 चे अवयव पाहू. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7 \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24 \pm 30, \pm 60$ हे काही अवयव आहेत.

प्रयत्नाने $p(1) = 0$ मिळते म्हणून $x - 1$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

आता आम्ही पाहू शकतो

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22(x - 1) + 120(x - 1)$ ....(का?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ $\because$ [$(x - 1)$ समाईक घेऊन]

$p(x)$ ला $(x - 1)$ ने भागून सुध्दा हे मिळते.

आता $x^2 - 22x + 120$ चे अवयवीकरण एकतर मधल्या पदाची फोड़ करून किंवा अवयव प्रमेय वापरून करता येते.

मधल्या पदाची फोड करून आम्हांला मिळते :

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 10)$$

म्हणून $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

स्वाध्याय 2.3

1. खालील कोणत्या बहुपदीचा अवयव $(x + 1)$ आहे हे शोधा.
   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. अवयव प्रमेय वापरून खालील प्रत्येकामध्ये $g(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे. ते शोधा.
   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$
   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$
   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = (x - 3)$

3. जर $p(x)$ चा $(x - 1)$ हा अवयव असेल तर खालील प्रत्येकामधील k ची किंमत काढा.
   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. अवयव पाडा
   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$
   (iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. अवयव पाडा
   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 बैजीक नित्यसमीकरणे (Algebraic Identities)

तुम्ही मागील वर्गात बैजीक समीकरणातील बैजीक नित्य समीकरणांची आठवण करा. जी चलपदाच्या कोणत्याही किंमतीला सत्य असतात. मागील वर्गात खालील बैजीक नित्यसमीकरणांचा अभ्यास केला

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आहात.

नित्यसमीकरण (I) : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

नित्यसमीकरण (II) : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

नित्यसमीकरण (III) : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

नित्यसमीकरण (IV) : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

तुम्ही बैजीक राशींचे अवयवीकरण करण्यासाठी वरील बैजीक नित्यसमीकरणे वापरला आहात. तुम्ही यांचा उपयोग हिशेब करण्यातसुद्धा पाहाल.

उदाहरण 11: खालील गुणाकार योग्य नित्यसमीकरणे वापरून करा.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

उकल : (i) येथे आम्ही नित्यसमीकरण I वापरू शकतो : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ ही किमत घेऊन आम्हांला मिळते

$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2x(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(ii) वरील उदाहरणामध्ये नित्यसमीकरण IV वापरले असता $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

आपल्याला मिळेल.

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$

$= x^2 + 2x - 15$

उदाहरण 12: सरळ गुणाकार न करता 105×106 ची किंमत काढा.

उकल: $(105) \times (106) = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)100 + (5 \times 6)$ (IV) नित्यसमीकरण

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11,130$

तुम्ही पाहिला आहात की, बैजीक राशींचा गुणाकार काढण्यासाठी काही वर दिलेल्या नित्यसमीकरणाचा उपयोग केला आहे. या नित्यसमीकरणाचा उपयोग बैजीक राशीचे अवयवीकरण करण्यासाठी सुध्दा करतात हे तुम्ही खालील उदाहरणा मध्ये पाहू शकाल.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 13 : अवयव पाहा.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

उकल: (i) येथे तुम्ही पाहू शकाल की,

$$49a^2 = (7a)^2$$

$$25b^2 = (5b)^2$$

$$70ab = 2(7a)\,(5b)$$

$x^2 + 2xy + y^2$ बरोबर दिलेल्या राशीची तुलना केली असता

$x = 7a$ आणि $y = 5b$ निरीक्षणाने, नित्यसमीकरण I वापरून आम्हांला मिळेल.

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2$$

$$= (7a + 5b)\,(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

आता याची नित्यसमीकरण III शी तुलना करून आम्हांला मिळेल.

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आतापर्यंत आपल्या सर्व नित्यसमीकरणामध्ये द्विपदींचा गुणाकाराचा समावेश आहे.

आता नित्यसमीकरण I त्रिपदी $(x + y + z)$ पर्यंत वाढवू.

आम्ही $(x + y + z)^2$ नित्यसमीकरण I वापरून करू.

जर $x + y = t$ मानू

$\therefore\ (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (नित्यसमीकरण I वापरून)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t चीं किंमत घालून)
($\because\ t = x + y$)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (नित्यसमीकरण I वापरून)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (पदांची अदलाबदल करून)

म्हणून आम्हांला खालील नित्यसमीकरण मिळते.

नित्यसमीकरण (V) : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

टिप : डाव्या बाजूची राशी ही उजव्या बाजूचा विस्तार आहे.

लक्षात ठेवा $(x + y + z)^2$ यामध्ये तीन पदांचे वर्ग आणि तीन पदांचा गुणाकार आहे.

उदाहरण 14: $(3a + 4b + 5c)^2$ चे विस्तारीत रूप लिहा.

उकल : $(x + y + z)^2$ बरोबर राशीची तुलना करून आम्हाला मिळेल $x = 3a, y = 4b$ आणि $z = 5c$

नित्यसमीकरण V वापरून आपल्याला मिळेल.

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

उदाहरण 15: $(4a – 2b – 3c)^2$ विस्तार करा.

उकल: नित्यसमीकरण V वापरून आम्हांला मिळेल.

$$(4a – 2b – 3c)^2 = [4a +(– 2b)+(– 3c)]^2$$

$$= (4a)^2 + (–2b)^2 + (–3c)^2 + 2(4a)(–2b) + 2(–2b)(–3c) + 2(–3c)(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 – 16ab + 12bc – 24ca$$

उदाहरण 16: $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4zx$ चे अवयव काढा.

उकल: $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4zx$

$$= (2x)^2 + (– y)^2 +(z)^2 + 2(2x)(–y) + 2(–y)(z) + 2(z)(2x)$$

(नित्यसमीकरण V वापरून)

$$= (2x – y + z)^2$$

$$= (2x – y + z) (2x – y + z)$$

आता पर्यंत आम्ही दोन कोटी असलेल्या पदांबरोबर नित्यसमीकरणे कशी वापरतात ते पाहीले.

आता नित्यसमीकरण **I** हे

$(x + y)^3$ किंमत काढण्यासाठी वापरू.

$$(x + y)^3 = (x + y) (x + y)^2$$

$$= (x + y) (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

म्हणून आपणाला खालील नित्यसमीकरण मिळते.

नित्यसमीकरण (VI) : $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

नित्यसमीकरण VI मध्ये y ची किंमत $-y$ घेऊन आपणाला मिळेल.

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

नित्यसमीकरण (VII) : $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

उदाहरण 17: खालील घनांचे विस्तारीत रूप लिहा.

(i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(5p-3q)^3$

उकल

(i) $(x+y)^3$ ची दिलेल्या राशीबरोबर तुलना करून आपल्याला मिळेल

$x = 3a$ आणि $y = 4b$.

म्हणून नित्यसमीकरण VI वापरून आपल्याला मिळेल.

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2.$$

(ii) $(x-y)^3$ ची दिलेल्या राशीबरोबर तुलना करून आपल्याला मिळेल.

$x = 5p, y = 3q$

म्हणून नित्यसमीकरण VII वरून आपल्याला मिळेल.

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 18: योग्य नित्यसमीकरण वापरून खालील किंमती काढा.

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

उकल : (i) आम्हाला मिळेल

$$(104)^3 = (100+4)^3$$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4) \quad \text{(नित्यसमीकरण VI वापरून)}$$
$$= 1000000 + 64 + 124800$$
$$= 1124864$$

(ii) आम्हाला मिळेल $999^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ (नित्यसमीकरण VII वापरून)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999.$

उदाहरण 19: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ चे अवयव काढा.

उकल : दिलेली राशी अशी लिहिता येते

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ (नित्यसमीकरण VI वापरून)

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

आता $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

आपणाला विस्तार मिळतो.

$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (सरळ रूप देऊन)

म्हणून, आपल्याला खालील नित्यसमीकरण मिळते.

नित्यसमीकरण VIII : $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

उदाहरण 20: $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ चे अवयव पाडा.

उकल: येथे आपणाला मिळते.

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 2.4

1. नित्यसमीकरण वापरून गुणाकार करा.

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. सरळ गुणाकार न करता नित्यसमीकरण वापरून खालील किंमती काढा.

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. योग्य नित्यसमीकरण वापरून अवयव पाडा.

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. योग्य नित्यसमीकरण वापरून खालील प्रत्येकाचा विस्तार करा.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. अवयव काढा.

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. खालील घनांचे विस्तारीत रूप लिहा.

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. योग्य नित्यसमीकरण वापरून खालील पदांच्या किंमती काढा.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. खालील प्रत्येक बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. सिध्द करा

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. अवयव काढा.

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

(टिप : प्रश्न 9 पहा)

11. अवयव पाडा : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. सिध्द करा $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. जर $x + y + z = 0$ तर सिद्ध करा $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. सरळ घन न करता खालील प्रत्येकाची किंमत काढा.

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. खालील प्रमाणे आयताचे क्षेत्रफळ दिलेले आहे. तर त्याच्या शक्यत्या लांबी व रुंदीचे समीकरणे लिहा.

क्षेत्रफळ : $25a^2 - 35a + 12$	क्षेत्रफळ : $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. खालीलप्रमाणे घनायताचे घनफळ दिलेले आहे. तर त्यांच्या मापाचे शक्य ती समीकरणे लिहा.

घनफळ : $3x^2 - 12x$	घनफळ : $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)	(ii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.7 सारांश (Summary)

या प्रकरणात तुम्ही खालील गोष्टींचा अभ्यास केला आहात.

1. x चलपद राशीच्या बैजीक राशीमधील बहुपदी $P(x)$ चे स्वरूप –

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ---- + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ येथे a_0, a_1, a_2 ------ a_n हे स्थिरपद आणि $a_n \neq 0$.

   अनुक्रम a_0, a_1, a_2 ------ a_n हे x^0, x^1, x^2 ----x^n चे सहगुणांक आणि n ला बहुपदीची कोटी असे म्हणतात.

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}$,--- a_0 $(a_n \neq 0)$ ला बहुपदी $p(x)$ ची पदे म्हणतात.

2. एक पद असलेल्या बहुपदीला एकपदी म्हणतात.

3. दोन पदे असलेल्या बहुपदीला द्विपदी म्हणतात.

4. तीन पदे असलेल्या बहुपदीला त्रिपदी म्हणतात.

5. एक कोटी असलेल्या बहुपदीला रेषीय बहुपदी म्हणतात.

6. दोन कोटी असलेल्या बहुपदीला वर्ग बहुपदी म्हणतात.

7. तीन कोटी असलेल्या बहुपदीला घन बहुपदी म्हणतात.

8. जर a ही वास्तव संख्या असून a हा बहुपदी $p(x)$ चे शून्य असेल तर $p(a) = 0$ या प्रकारात, a ला समीकरण $p(x)$ चे वर्गमूळ सुध्दा म्हणतात म्हणून $p(x) = 0$

9. प्रत्येक एकरेषीयह बहुपदीचे एक चलपद शून्य असते, शून्येत्तर स्थिर बहुपदीचा शून्य नसतो आणि प्रत्येक वास्तव संख्या शून्य बहुपदीचा शून्य असतो. .

10. **अवयव प्रमेय :** जर $p(a) = 0$ व $(x - a)$ हा बहुपदी $p(x)$ चा अवयव असतो तसेच जर $(x - a)$ हा $p(x)$ च अवयव असेल तर $p(a) = 0$

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\ (x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रकरण- 3

सहनिर्देशक भूमिती (Coordinate Geometry)

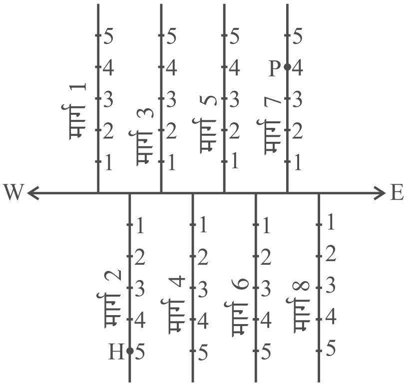
मरकेटरचा उत्तर ध्रुव, अक्षांश, कटिबंध, क्षेत्र आणि रेखांशाच्या रेषा यापैकी कोणते चांगले आहे? असे बेलमनने ओरडून विचारल्यावर खलाशी त्याला उत्तर देतील 'त्या केवळ पारंपारिक खुणा आहेत'. What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?' So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, ***The Hunting of the Snark***

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

संख्यारेषेवर बिंदू कसे दर्शवितात हे तुम्ही या अगोदर शिकला आहात. तुम्हांला हे पण माहीत आहे की, रेषेवरील बिंदूच्या स्थानांची स्थिति कशी असते. अनेक वेळा बिंदू शोधण्यासाठी व स्थानाचे वर्णन करण्यासाठी रेषेशिवाय अनेक पर्याय आहेत. खालील स्थितीचे उदाहरण पहा.

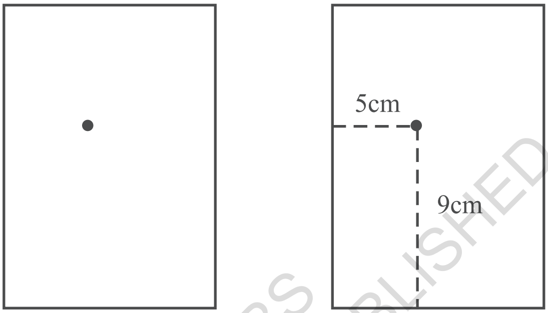


आकृती 3.1

I. आकृती 3.1 मध्ये, येथे मुख्य मार्ग हा पूर्व-पश्चिम दिशेला असून क्रमांक आहेत प्रत्येक मार्गाला घरांचा क्रमांक दिला आहे. यामुख्य मार्गाच्या उत्तर दक्षिणेला मार्ग पश्चिम-पुर्व दिशेला आहेत. येथे मित्राचे घर शोधण्यासाठी एक गोष्ट पुरेशी आहे का? उदाहरणार्थ जर आम्हांला म ाहीत असेल की तो मार्ग 2 मध्ये राहतो.

तर तुम्ही घर सहज शोधाल का? सहज शक्य नाही. जर आम्हांला त्याविषयी दोन गोष्टींची माहिती असेल, त्या म्हणजे कोणत्या मार्गावर त्याचे घर आहे आणि घराचा क्रमांक कोणता आहे. जर आम्हांला दुसऱ्या मार्गावरील 5 क्रमांकाच्या घरात पोहचायचे असेल तर प्रथम 2 रा मार्ग शोधून त्यावरील घर नंबर 5 शोधावे लागेल. आकृती 3.1 मध्ये 5 हे घराचे स्थान दर्शविते त्याचप्रमाणे P हे 7 व्या रस्त्यावरील घर नंबर 4 चे स्थान दर्शविते.

II. समजा कागदाच्या पानावर एक बिंदू काढला (आकृती 3.2 (a)). जर आम्ही तुम्हाला कागदावरील बिंदूचे स्थान सांगा असे विचारले तर तुम्ही ते कसे कराल? कदाचित तुम्ही असेही सांगाल कि तो बिंदू ''कागदाच्या वरच्या निम्या भागात आहे किंवा तो कागदाच्या डाव्या कोपऱ्याजवळ आहे'' किंवा तो कागदाच्या डाव्या बाजुच्या वरच्या कोपऱ्याजवळ आहे''. वरील विधाने बिंदूचे स्थान निश्चित दर्शवितात का? नाही, परंतु जर तुम्ही म्हणाला की ''बिंदू कागदाच्या डाव्या बाजूपासून 5 सेंमी अंतरावर आहे''. काही बिंदूच्या स्थानाची कल्पना येण्यासाठी हे मदत करते परंतु नक्की बिंदूचे स्थान सांगता येत नाही. थोड्या अधिक विचारांती तुम्ही म्हणू शकता की, कागदाच्या खालील रेषेपासून वर तो 9 cm अंतरावर आहे. आता आपणाला समजते की तो बिंदू कोठे आहे?



(a) (b)

आकृती 3.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यासाठी, आम्ही बिंदूचे स्थान निश्चित सांगण्यासाठी कागदाच्या डाव्या बाजूची रेषा आणि कागदाची तळाकडील रेषा या दोन रेषापासूनचे अंतर घेतले पाहिजे (आकृति 3.2 (b)), वेगळ्या शब्दात सांगावयाचे म्हणजे, आम्हांला बिंदूचे स्थान निश्चित करण्यासाठी दोन वेगवेगळ्या माहीतीची गरज आहे.

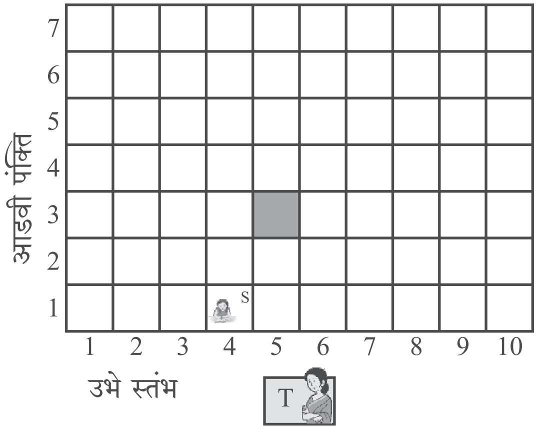
आता वर्गातील कृती पहा तिला ''बैठक व्यवस्था''म्हणतात.

कृती 1 (बैठक व्यवस्था) : सर्व डेस्क एकत्र करून वर्गाची बैठकीची योजना तयार करा. प्रत्येक डेस्कला एका चौरसाने दाखवा. प्रत्येक चौरसात डेस्कने व्यापलेल्या जागेत विद्यार्थ्याची नावे लिहा. वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याचे स्थान दोन वेगवेगळ्या माहीतीच्या आधारे वर्णन करता येईल.

(i) तो किंवा ती कोणत्या स्तंभात आहे.

(ii) तो किंवा ती कोणत्या पंक्तित रांगेत आहे.

जर तुम्ही डेस्कवर 5 च्या स्तंभात आणि 3 ऱ्या पंक्तित (रांगेत) बसला असाल (आकृती 8.3 मध्ये शेड केलेला भाग). तर तुमचे स्थान (5,3) आहे. येथे प्रथम स्तंभ संख्या व नंतर पंक्ती ची संख्या लिहितात. (3,5) हे तेच आहे का? तुम्ही वर्गातील दुसऱ्या विद्यार्थ्यांचे नाव व स्थान दर्शवा. उदाहरण जर सोनिया ही 4 च्या स्तंभात आणि 1 ल्या पंक्तित बसली असेल तर S(4,1) असे लिहितात. तुमच्या बसण्याच्या बैठक व्यवस्थेत शिक्षकाचा डेस्क येत नाही आम्ही फक्त शिक्षकाला निरीक्षक म्हणू शकतो.



T शिक्षकाचा डेस्क

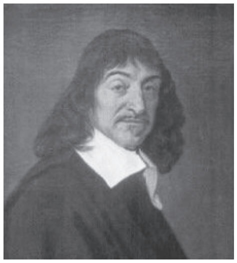
S. सोनियाचा डेस्क

(आकृती 3.3)

वरील चर्चेत तुम्ही निरीक्षण केले असणारच की, कोणत्याही वस्तूचे स्थान हे प्रतलातील दोन लंब रेषांनी दाखविता येते. बिंदूच्या बाबतीत आम्हांला तळाकडील रेषेपासूनचे त्याचप्रमाणे कागदाच्या डाव्या बाजूचे अंतर माहीत पाहिजे. बैठक व्यवस्थेत आम्हाला स्तंभांची संख्या आणि पंक्तीची संख्या माहीत असली पाहिजेत. या सरळ विचार धारेचे दुरगामी परिणाम होतात आणि त्यामुळे गणितातील सहनिर्देशक भूमिती **(Coordinate Geometry)**नावाच्या महत्वाच्या शाखेची निर्मिती झाली. या प्रकरणात, सहनिर्देशक भूमितीमधील काही मुलभूत संकल्पनाची ओळख करून देणे हाच मुख्य उद्देश आहे. या संबंधी तुम्ही पुढील वर्गात विस्ताराने अभ्यास कराल. हा अभ्यास सुरुवातीला फ्रेंच तत्वज्ञानी आणि गणिततज्ञ **' रेन डिस्कार्टस'** यांनी विकसीत केला आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

रेन डिस्कार्टस् हे सतराव्या शतकातील फ्रेंच गणितज्ञ असून अंथरूणात बसून विचार (चिंतन) करणे त्यांना आवडत होते. एक दिवस ते अंथरूणावरपडून विश्रांती घेत असताना विचार करून त्यांनी प्रतलातील एका बिंदूच्या स्थितीचे (स्थान) निर्धारीत करण्याच्या संबंधात एका समस्येचे उत्तर शोधून काढते. त्यांनी विकसीत केलेली पध्दत ही अक्षांश व रेखांश यांच्या जुन्या विचारधारेचे रूप होते. एका प्रतलातील बिंदूचे स्थान निश्चित करण्याच्या या पध्दतीला रेन डिस्कार्टस् यांच्या सन्मानार्थ 'कार्तेशियन पध्दत' हे नाव देण्यात आले आहे.



रेन डिस्कार्टस (1596-1650)

आकृती 3.4

स्वाध्याय 3.1

1. तुम्ही तुमच्या खोलीतील अभ्यासाच्या टेबलवरील टेबल लॅम्पचे स्थान दुसऱ्या व्यक्तिला कसे सांगाल.
2. **(रस्त्याचा नकाशा) :** एका शहराला मुख्य दोन रस्ते असून ते शहराच्या मध्यभागी एकमेकांना मिळतात. ते दोन्ही रस्ते पूर्व-पश्चिम व दक्षिण-उत्तर दिशेला आहेत.

शहरातील इतर रस्ते या रस्त्यांना समांतर असून ते त्या रस्त्यापासून 200 m. दूर आहेत. प्रत्येक दिशेने जवळ 5 रस्ते आहेत. तुमच्या वहीत 1 cm = 200 m. परिमाण घेऊन शहराचा नकाशा तयार करा रस्त्यांना सरळ रेषेने दाखवा.

तुमच्या नकाशात एकमेकांना मिळणारे अनेक रस्ते असू शकतात. एक विशेष एकमेकांना मिळणारा रस्ता दोन रस्त्यांनी बनला आहे. ज्यातील एक उत्तर-दक्षिण दिशेने जातो आणि दुसरा पूर्व-पश्चिम दिशेने जातो. प्रत्येक मिळणारा (क्रॉस) रस्ता अशाप्रकारे दर्शविला जातो की, जर दुसरा रस्ता उत्तर-दक्षिण दिशेने जात असेल आणि 5 वा रस्ता पूर्व-पश्चिम दिशेला जात असेल व दोन्ही वळणार रस्ते मिळत असतील तर त्या मिळणाऱ्या रस्त्याला (2,5) म्हणू. हे अशाच पध्दतीने तुम्ही ओळखा -

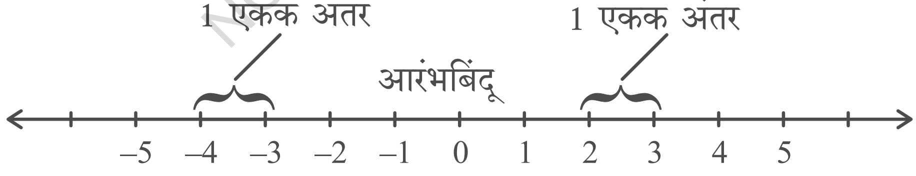
(i) (4,3) जाणारे किती वळण (क्रास) रस्ते मिळतील.

(ii) (3,4) मानले जाणारे किती क्रास रस्ते मिळतील.

3.2 कार्तेशियन पध्दत (Cartesian system)

संख्या पध्दती या प्रकरणात तुम्ही संख्यारेषेचा अभ्यास केला आहात.

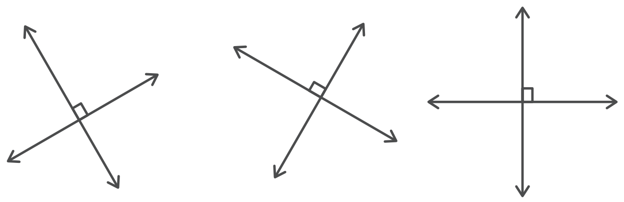
संख्यारेषेवर एका निश्चित बिंदूपासून ठराविक अंतरावर समान एककात एका दिशेने धन आणि दुसऱ्या दिशेने ऋण पूर्णांक अंकित केले जातात. ज्या स्थिर बिंदूपासून आपण अंतर घेतो त्याला आरंभबिंदू म्हणतो. रेषेवर समान अंतरावर बिंदू घेण्यासाठी आम्ही संख्यारेषेचा उपयोग करतो. जर 1 एकक अंतराला आपण 1 अंक मानला तर 3 एकक अंतराला 3 अंक मानतो. येथे 'O' ला आरंभबिंदूपासून धन दिशेला r अंतर घेतले तर त्या बिंदूला 'r' मानतो. आरंभबिंदूपासून ऋण दिशेला 'r' अंतर घेतले तर त्या बिंदूला '$-r$' मानतो. आकृती 3.5 मध्ये वेगवेगळ्या बिंदूचे स्थान संख्यरेषेवर दाखविले आहे.



आकृती 3.5

प्रतलात ऐकमेकांना लंब असणाऱ्या दोन रेषांचा शोध डिस्कार्टस् (Descartes) यांनी लावला व प्रतलातील बिंदूचे स्थान त्या रेषांवरून शोधले. लंबरेषा कोणत्याही दिशेने असू शकतात हे आकृती 3.6 मध्ये दाखविले आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



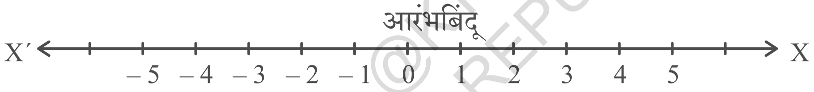
(a) (b) (c)

आकृती 3.6

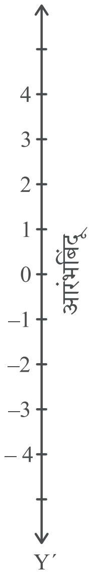
या प्रकरणात प्रतलात असलेल्या बिंदूचे स्थान दर्शविण्यासाठी दोन रेषांची निवड करतो. एक रेषा आडवी रेषा आणि दुसरी लंब उभी रेषा आकृती 3.6(c) मध्ये दाखविली आहे.

वास्तवात त्या रेषा खालीलप्रमाणे मिलविता येतात

दोन संख्या रेषा घ्या. त्यांना X'X व Y'Y अशी नावे द्या. X'X ही आडवी रेषा (आकृती 3.7(a)) घेऊन त्यावर संख्यारेषेप्रमाणे अंक लिहा. त्याचप्रमाणे Y'Y रेषा घेऊन तो आडवी न घेता उभी घ्या (आकृती 3.7(b)).



(a)

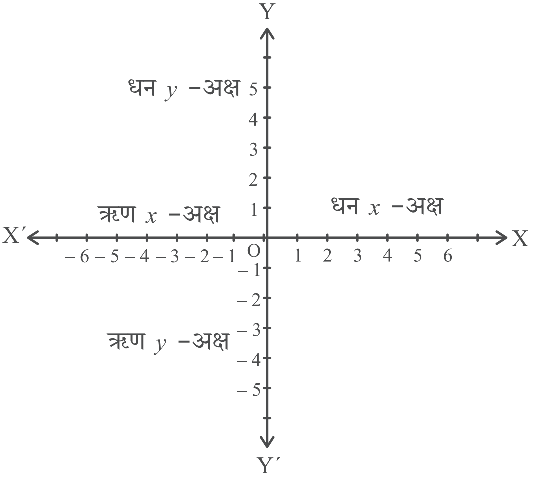


(b)

आकृती 3.7

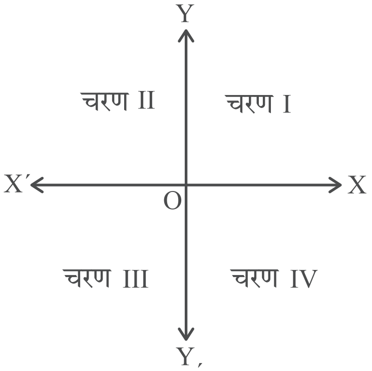
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

दोन्ही रेषा अशा घ्या की त्या ऐकमेकिंना आरंभ बिंदूत छेदतील (आकृती 3.8). आडवीरेषा X'X ला X -अक्ष आणि उभीरेषा Y'Y ला Y- अक्ष म्हणतात. दोन्ही X'X व Y'Y यांच्या छेदनबिंदूला आरंभबिदू म्हणतात. याला 'O' असे ही म्हणतात. OX आणि OY ला X –अक्ष व Y- अक्षची धन दिशा म्हणतात त्याचप्रमाणे OX' व OY' ला अनुक्रमे X -अक्ष व Y –अक्षची ऋण दिशा म्हणतात.



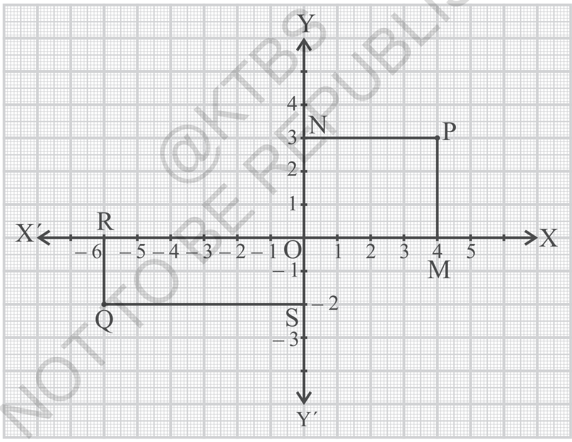
आकृती 3.8

तुम्ही निरीक्षण करा की हे अक्ष (Axes) (बहुवचनी शब्द AXIS) प्रतलाचे चार समान भाग करतात. त्या चार भागांना चरणे करतात. असे ही म्हणतात. त्यांना I, II, III आणि IV या संख्या असून OX पासून घड्याळाच्या काट्याच्या विरुध्द दिशेने आहेत. (पहा आकृती 3.9).म्हणूनच प्रतलात अक्ष व चरण येतात. त्याला प्रतल किंवा कार्तेशियन प्रतल किंवा सहनिर्देशक प्रतल किंवा XY प्रतल म्हणतो. तर अक्षांना सहनिर्देशक अक्ष असे म्हणतात.



आकृती 3.9

आता आपण पाहू की गणितात या पध्दतीला इतके महत्व का दिले आहे, आणि ही पध्दत कशी उपयोगी आहे. खालील आकृती पहा. आलेख पेपरवर अक्ष दाखविले असून P आणि Q बिंदूचे अक्षापासून अंतर माहीत करू. यासाठी X अक्षावर लंब PM आणि Y अक्षाला लंब PN काढा. त्याचप्रमाणे आकृती 3.10 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे QR आणि QS ला लंब काढा.



आकृती 3.10

येथे आपणांला आढळून येईल की,

(i) P बिंदूचे y–अक्षापासून व x–अक्षा पर्यंतच्या धन दिशेला मोजलेले लंब अंतर PN = OM = 4 एकक आहे.

(ii) P बिंदूचे x–अक्षापासून व y–अक्षा पर्यंतच्या धन दिशेला मोजलेल लंब अंतर PM = ON= 3 एकक आहे.

(iii) Q बिंदूचे y–अक्षापासून व x–अक्षा पर्यंतच्या ऋण दिशेला मोजलेल लंब अंतर QR = SQ = 6 एकक आहे.

(iv) Q बिंदूचे x-अक्षापासून व y–अक्षा पर्यंतच्या ऋण दिशेला मोजलेले लंब अंतर OS = RQ = 2 एकक आहे.

या अंतराच्या साहाय्याने आपण बिंदूचे स्थान कसे स्थापित करावे की आपणास कोणताही संशय राहू नये.

खालील गोष्टी वापरून आपण बिंदूचे सहनिर्देशक लिहू शकतो.

(i) बिंदूच्या y– अक्षापासून x– अक्षापर्यतच्या लंब अंतराला x–निर्देशक म्हणतात (x–अक्षाच्या धन दिशेला धन व y–अक्षाच्या ऋण दिशेला ऋण) P बिंदूसाठी + 4 आणि Q बिंदूसाठी –6 आहे. x– निर्देशकाला भुज (abscissa) असे सुध्दा म्हणतात.

(ii) बिंदूच्या x– अक्षापासून y– अक्षापर्यतच्या लंब अंतराला y–निर्देशक म्हणतात (y–अक्षाच्या धन दिशेला धन व x–अक्षाच्या ऋण दिशेला ऋण) P बिंदूसाठी + 3 आणि Q बिंदूसाठी –2 आहे. y– निर्देशकाला कोटी (ordinate) सुध्दा म्हणतात

(iii) बिंदूच्या सहनिर्देशक प्रतलात प्रथम x– निर्देशक येतो आणि नंतर y– निर्देशक येतो व ते निर्देशक कंसामध्ये लिहितात. म्हणूनच P चे सहनिर्देशक (4,3) आहेत व Q चे सहनिर्देशक (–6, –2) आहेत.

लक्षात ठेवा. प्रतलात सहनिर्देशक एकमेव असतो. (3,4) हे (4,3) शी सारखे नाहीत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

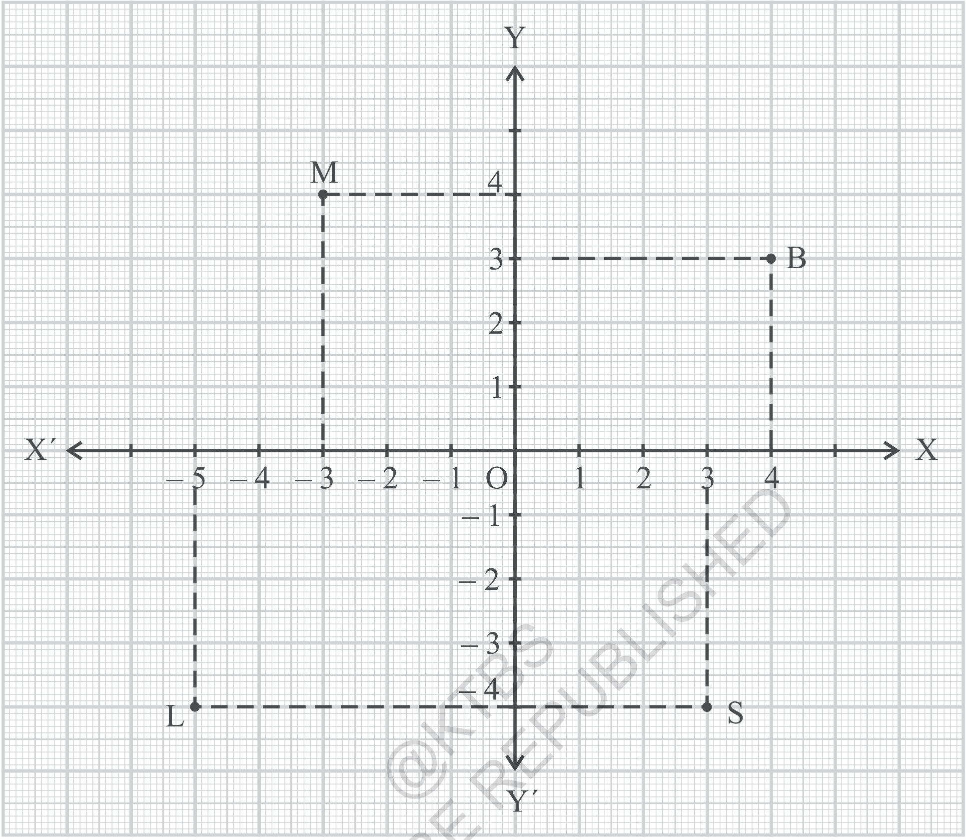
उदाहरण 1: आकृती 3.11 पाहून खालील विधाने पूर्ण करा.

(i) B बिंदूचा x– निर्देशक (भुज) आणि y निर्देशक (कोटी) अनुक्रमे _______ आणि _______ आहेत म्हणून B चे सहनिर्देशक (_______ , _______) हे आहेत.

(ii) बिंदू M चा x– निर्देशक आणि y निर्देशक अनुक्रमे _______ आणि ._______ आहेत. म्हणून M चे सहनिर्देशक (_______ , _______) हे आहेत.

(iii) बिंदू L– चा x– निर्देशक आणि y निर्देशक अनुक्रमे _______ आणि ._______ आहेत. म्हणून बिंदू L चे सहनिर्देशक (_______ , _______) हे आहेत.

(iv) बिंदू S चा x– निर्देशक आणि y निर्देशक अनुक्रमे_______ आणि _______ आहेत. म्हणून बिंदू S चे सहनिर्देशक (_______ , _______) हे आहेत.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 3.11

उकल : (i) B बिंदूचे y– अक्षापासूनचे अंतर 4 एकक आहे. B बिंदूचा x निर्देशक किंवा भूज (abscissa) 4, B बिंदूचे x– अक्षापासून अंतर 3 एकक म्हणूनच B बिंदूचा y निर्देशक किंवा कोटी (ordinate) 3 त्यामुळे B बिंदूचे सहनिर्देशक B(4,3) हे आहेत.

वरील(i) प्रमाणे -

(ii) M बिंदूचा x– निर्देशक आणि y– निर्देशक अनुक्रमे –3 आणि 4. आहे. म्हणूनच M– बिंदूचे सहनिर्देशक (–3, 4) हे आहेत.

(iii) L बिंदूचा x– निर्देशक आणि y– निर्देशक अनुक्रमे –5 आणि –4 आहे. म्हणूनच L बिंदूचे सहनिर्देशक (–5,–4) हे आहेत.

(iv) S बिंदूचा x– निर्देशक आणि y निर्देशक अनुक्रमे 3 आणि –4 आहे म्हणूनच S बिंदूचे सहनिर्देशक (3,–4) हे आहेत.

उदाहरण 2: आकृती 3.12 मध्ये दाखविलेल्या अक्षावर असलेल्या बिंदूचे सहनिर्देशक लिहा.

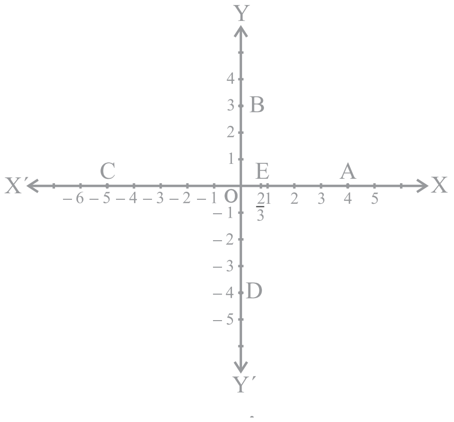
उकल: (i) A बिंदूचे y– अक्षापासून अंतर 4 एकक आणी x– अक्षापासून अंतर 0 एकक आहे. त्यामुळे बिंदू A चा x– निर्देशक 4 आणि y निर्देशक 0 आहे म्हणूनच A चे सहनिर्देशक (4, 0) हे आहेत.

(ii) B बिंदूचे सहनिर्देशक (0, 3) हे आहेत का?

(iii) C बिंदूचे सहनिर्देशक (–5, 0) हे आहेत का?

(iv) D बिंदूचे सहनिर्देशक (0, –4) हे आहेत का?

(v) E बिंदूचे सहनिर्देशक $\left(\frac{2}{3},0\right)$ हे आहेत का?



आकृती 3.12

x– अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचे x अक्षापासून अंतर नाही (0 अंतर) म्हणून y – अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा y – निर्देशक नेहमी 0 येतो. x –अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचे सहनिर्देशक (x, 0) या नमुन्यात येतात जेथे, x म्हणजे त्याचे y अक्षापासूचे अंतर. त्याचप्रमाणे y– अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचे सहनिर्देशक (0, y) नमुन्यात येतात जेथे y म्हणजे बिंदूचे x– अक्षापासूनचे अंतर आहे का?

आरंभबिंदु '**O**' चे सहनिर्देशक कोणते आहेत? दोन्ही अक्षापासून याचे अंतर 0 (शून्य) आहे. म्हणून यांचा x निर्देशक व y निर्देशक दोन्ही शून्य आहेत. त्यामुळेच आरंभबिंदूचे सहनिर्देशक (0,0) हे आहेत.

वरील उदाहरणाचे तुम्ही निरीक्षण केला असणार की बिंदूचे सहनिर्देशक व चरण यांच्या चिन्हामध्ये खालील संबंध आहेत–

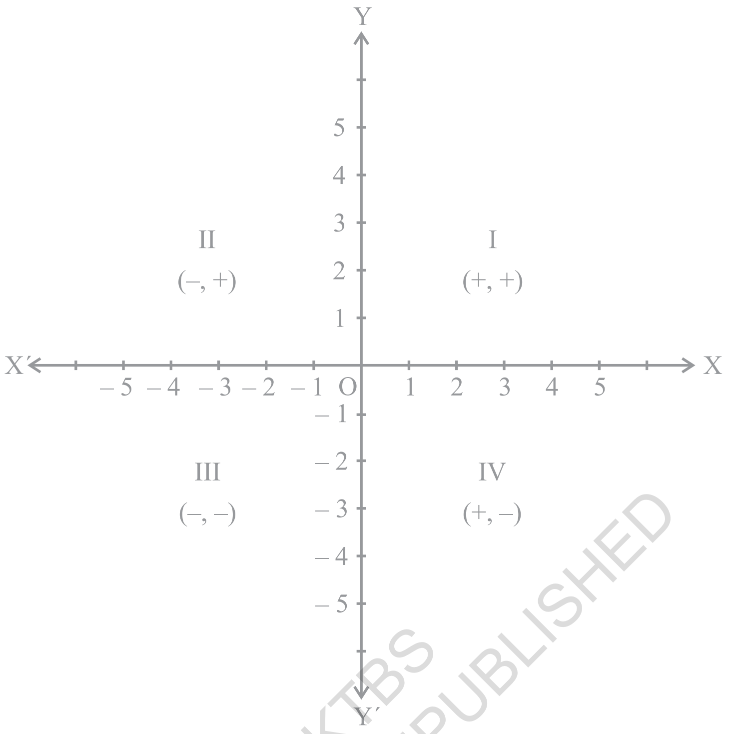
(i) जर बिंदू चरण I मध्ये असेल तर तो बिंदू (+, +) स्वरूपात येईल कारण I रे चरण धन x– अक्ष आणि धन y– अक्षाशी निगडीत आहे.

(ii) जर बिंदू चरण II मध्ये असेल तर तो बिंदू (–, +) स्वरूपात येईल कारण II रे चरण ऋण x– अक्ष आणि धन y– अक्षाशी निगडीत आहे.

(iii) जर बिंदू चरण III मध्ये असेल तर तो बिंदू (–, –) स्वरूपात येईल कारण III रे चरण ऋण x– अक्ष आणि ऋण y– अक्षाशी निगडीत आहे.

(iv) जर बिंदू चरण IV मध्ये असेल तर तो बिंदू (+, –) स्वरूपात येईल कारण IV थे चरण धन x– अक्ष आणि ऋण y– अक्षाशी निगडीत आहे. (आकृती 3.13).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 3.13

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

टिप : प्रतलात बिंदूचे स्थान दर्शविण्यासाठी वर जी पध्दत वापरली ती फक्त परंपरा आहे,जी सर्व जगाने स्विकारली आहे, या पध्दतीत असे सुध्दा होऊ शकते की प्रथम y – निर्देशक (कोटी) लिहिले असेल व नंतर x निर्देशक लिहिला असेल तरीसुध्दा ज्या पध्दतीचा उल्लेख आपण केला आहे त्याला सर्व जग कोणत्याही कल्पनेशिवाय स्विकार करते.

स्वाध्याय 3.2

1. खालील प्रत्येक प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) कार्तेशियन प्रतलात एखाद्या बिंदूचे स्थान दर्शविण्यासाठी आडवी रेषा व उभी रेषा काढलो जाते त्यांचे नाव काय?

(ii) दोन रेषांनी बनलेल्या प्रतलाच्या प्रत्येक भागाचे नाव काय?

(iii) जेथे दोन रेषा परस्परास छेदतात त्या छेदन बिंदूचे नाव लिहा.

2. आकृती 3.14 पहा व खालील उत्तरे लिहा.

(i) B बिंदूचे सहनिर्देशक कोणते?

(ii) C बिंदूचे सहनिर्देशक कोणते?

(iii) सहनिर्देशक (–3,–5) असलेला बिंदू ओळखा.

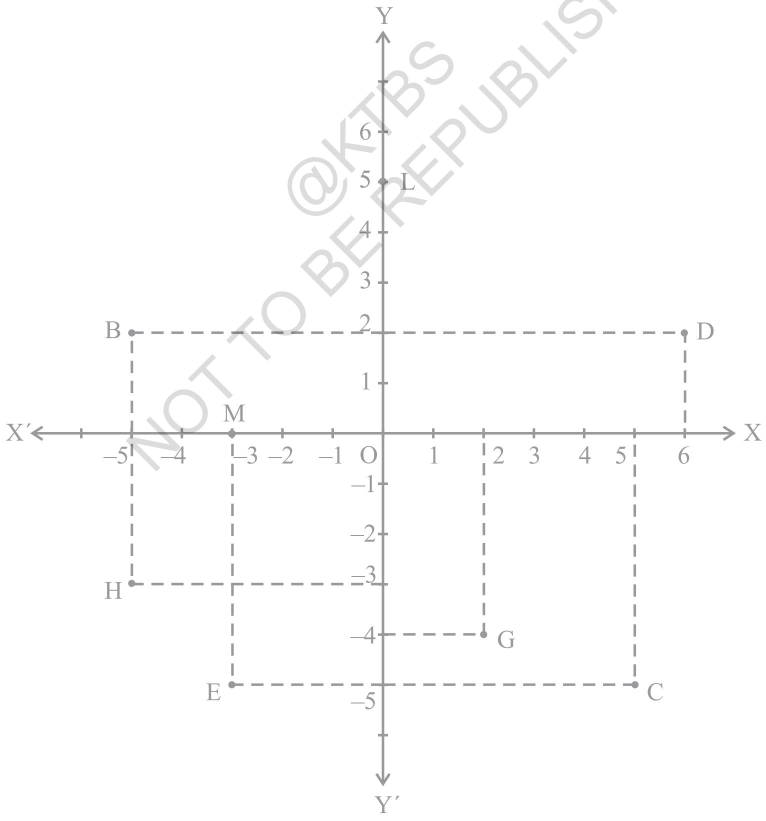
(iv) (2, –4) सहनिर्देशक असलेला बिंदू ओळखा.

(v) बिंदू D चा x– निर्देशक (भुज) सांगा

(vi) बिंदू H चा y– निर्देशक (कोटी) सांगा.

(vii) बिंदू L चे सहनिर्देशक सांगा.

(viii) बिंदू M चे सहनिर्देशक सांगा.



आकृती 3.14

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.3 सारांश

या प्रकरणात तुम्ही खालील गोष्टींचा अभ्यास केला आहे:

1. प्रतलात एक वस्तू किंवा एका बिंदूचे स्थान निश्चित करण्यासाठी दोन परस्परांना लंब असणाऱ्या रेषेची आवश्यकता असते ज्यातील एक आडवी रेषा व दुसरी उभी रेषा असते.
2. प्रतलाला कार्तेशियन किंवा सहनिर्देशक प्रतल म्हणतात आणि रेषांना निर्देशक अक्ष म्हणतात.
3. आडव्या रेषेला x अक्ष, व उभ्या रेषेला y अक्ष म्हणतात.
4. निर्देशक अक्ष प्रतलाला चार भागामध्ये विभागतात. त्यांना चरण असे म्हणतात.
5. अक्षांच्या छेदन बिंदूला आरंभबिंदू म्हणतात.
6. y- अक्षापासून कोणत्याही बिंदूच्या अंतराला त्याचा x निर्देशक किंवा ॲबसिसा आणि x अक्षापासून बिंदूच्या अंतराला y- निर्देशक किंवा ऑर्डिनेट म्हणतात.
7. जर बिंदूचा x निर्देशक x- आहे आणि y- निर्देशक y आहे तर (x, y) ला त्या बिंदूचे सहनिर्दे शक म्हणतात.
8. x- अक्षावर एका बिंदूचे सहनिर्देशक $(x, 0)$ या स्वरूपात असतात. y- अक्षावर एका बिंदूचे सहनिर्देशक $(0, y)$ स्वरूपात असतात.
9. आरंभबिंदूचे सहनिर्देशक 0 (0,0) असतात.
10. एका बिंदूचे सहनिर्देशक पहिल्या चरणात (+, +) स्वरूपात, दुसऱ्या चरणात (-,+), तिसऱ्या चरणात (-,-) आणि चौथ्या चरणात (+, -) स्वरूपात असतात. जेथे + ला धन वास्तव संख्या आणि - ला ऋण वास्तव संख्या म्हणतात.
11. जर $x \neq y$ असेल तर$(x, y) \neq (y, x)$ आणि जर $(x, y) = (y, x)$ असेल तर $x = y$ असेल

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

T8Y4L6

प्रकरण – 4

दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे (Linear Equations in two variables)

पृथःकारणात्मक कलेचे वैशिष्ट म्हणजे गणितातील कठीण समस्या समीकरणाच्या स्वरूपात मांडून ती जास्तीत जास्त सोपी करणे

– Edmund Halley

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.1 प्रस्तावना

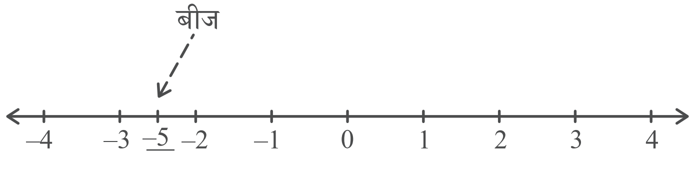
मागील इयत्तेत तुम्ही एक चलपद असणाऱ्या रेषीय समीकरणांचा अभ्यास केलेला आहे. तुम्ही एक चलपदीय रेषीय समीकरणे लिहू शकता का? $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ आणि $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ ही एक चलपदे असणाऱ्या रेषीय समीकरणाची काही उदाहरणे आहेत. काही समीकराणांचे उकल हे स्थिर असते हे आपणाला माहीत आहे. संख्यारेषेवरील उकल सोडविणे हे याची आठवण करा. या प्रकरणामध्ये, आपण एक रेषीय समीकरणांचे ज्ञान घेऊन दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे सोडवू शकतो. यामुळे आपल्यासमोर प्रश्न निर्माण होतो की, दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणाचे उकल होऊ शकते का? जर होय, तर ते अद्वितीय होते का? कार्तेशियन प्रतलावर यांचे उकल कसे होऊ शकते? या प्रश्नाचे उत्तर शोधण्यासाठी मागील प्रकरणाची संकल्पना पाहू शकतो.

4.2 रेषीय समीकरण

मागील अभ्यासाचे सर्वप्रथम स्मरण करून. खालीलप्रमाणे दिलेल्या समीकरणा विचार करू.

$$2x+5=0$$

याचे उत्तर म्हणजेच या समीकरणाचे बीज $-\frac{5}{2}$. हे आपण संख्यारेषेवर खालील प्रमाणे दर्शवू शकतो.



आकृती 4.1

जेव्हा आपण समीकरणे सोडवितो तेव्हा खालील मुद्यांचा नेहमी आपल्याला विचार करावा लागतो.

रेषीय समीकरणाच्या उकलावर परिणाम होत नाही, जेव्हा.

(i) समीकरणाच्या दोन्ही बाजूमधून संख्या मिळविल्यास किंवा वजा केल्यास.

(ii) शून्य रहीत संख्येने समीकरणाच्या दोन्ही बाजूला गुणाकार आणि भागाकार केल्यास.

खालील विधानाकड़े लक्ष द्या.

नागपूर येथे खेळविण्यात आलेल्या भारत आणि श्रीलंका यांच्यामधील एक दिवसीय आंतरराष्ट्रीय क्रिकेट सामन्यात भारताच्या दोन फलंदाजानी एकत्रीतपणे 176 धावा काढल्या. हे विधान समीकरणाच्या स्वरूपात मांडा.

येथे, आपण पाहू शकतो की आपल्याला एकाही शेळाडूच्या धावा माहीत नाहीत.

येथे दोन भिन्न घटक आहेत. त्याना आपण x आणि y. मानू म्हणून एका फलंदाजावे केलेल्या धावा x आणि दुसऱ्या फलंदाजावे ने केलेल्या धावा y. आहेत आम्हाला दिसून येईल की. $x + y = 176$,

कोणते योग्य समीकरण होईल?

हे दोन चलपदे असणारे रेषीय समीकरणाचे उदाहरण आहे. अशा या समीकरणामध्ये x आणि y ही चलपदे आहेत. पण दुसऱ्या अक्षरांचा वापर करून दोन चलपद असणारे रेषीय समीकरण रचू शकतो.

$1.2s + 3t = 5$, $p + 4q = 7$, $\pi u + 5v = 9$ आणि $3 = \sqrt{2}x - 7y$.

ही समीकरणे आपण दुसऱ्या स्वरूपात सुध्दा मांडू शकतो.

$1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ आणि $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ इत्यादी.

म्हणून, समीकरणे $ax + by + c = 0$ या स्वरूपात लिहिता येतात. येथे a, b आणि c वास्तव संख्या आणि a व b हे शून्य नाहीत. यांना दोन चलपदांचे रेषीय समीकरण असे म्हणतात.

उदाहरण 1 : खालील समीकरणे $ax + by + c = 0$ या स्वरूपात लिहून a, b व c च्या किंमती स्पष्ट करा. (किंमती लिहा)

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

उकळ : (i) $2x + 3y = 4.37$ हे लिहिताना $2x + 3y - 4.37 = 0$ मध्ये,

$a = 2$, $b = 3$ आणि $c = -4.37$

(ii) समीकरण $x - 4 = \sqrt{3}y$ हे लिहिताना $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ मध्ये, $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ आणि $c = -4$.

(iii) समीकरण $4 = 5x - 3y$ हे लिहिताना $5x - 3y - 4 = 0$ मध्ये, $a = 5, b = -3$ आणि $c = -4$. हे समीकरण आपण $-5x + 3y + 4 = 0$ असे लिहू शकता का? येथे $a = -5, b = 3$ आणि $c = 4$. होईल.

(iv) समीकरण $2x = y$ हे लिहिताना $2x - y + 0 = 0$ येथे $a = 2, b = -1$ आणि $c = 0$

$ax + b = 0$ हे सुध्दा समीकरणाच्या प्रकारामधील दोन चलपदाचे रेषीय समीकरणांचे उदाहरण आहे कारण हे असे सुध्दा लिहू शकतो की

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$ax + 0.y + b = 0$

उदाहरणात, $4 - 3x = 0$ हे लिहीताना $-3x + 0.y + 4 = 0$

उदाहरण 2: खालील प्रत्येक समीकरण हे दोन चलपदामध्ये लिहा.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

उकल : (i) $x = -5$ हे लिहिताना $1.x + 0.y = -5$ किंवा $1.x + 0.y + 5 = 0$.

(ii) $y = 2$ हे लिहिताना $0.x + 1.y = 2$ किंवा $0.x + 1.y - 2 = 0$.

(iii) $2x = 3$ हे लिहिताना $2x + 0.y - 3 = 0$.

(iv) $5y = 2$ हे लिहिताना $0.x + 5y - 2 = 0$.

स्वाध्याय 4.1

1. एका पुस्तकाची किंमत एका पेनाच्या किंमतीच्या दुप्पट आहे. हे विधान दोन चलपदांच्या रेषीय समीकरणामध्ये लिहा.

   (पुस्तकाची किंमत ₹ x आणि पेनाची किंमत ₹ y असे मानू).

2. खालील समीकरणे $ax + by + c = 0$ या स्वरूपात लिहा आणि प्रत्येक समीकरणातील a, b आणि c चलपदांच्या किंमती काढा.

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

   (iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

   (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

4.3 रेषीय समीकरणे सोडविणे.

एक चलपद असणाऱ्या प्रत्येक रेषीय समीकरणाची उकल हे अद्वितीय असते हे आपणास माहीत आहे.

दोन चलपदे असणारे रेषीय समीकरण सोडविण्याचा आपण विचार करू शकता का? समीकरणाम ध्ये दोन चलपदे असलेल्या रेषीय समीकरणाच्या उकला विषयी तुम्ही काय सांगू शकाल ? ज्याअर्थी समीकरणामध्यें दोन चलपदे आहेत त्याअर्थी त्याला उकलांची जोडी आहे. दोन चलपदे असून ती त्यांची किंमत निश्चित असून ती एक तर x आणि एक तर y असू शकते. जर समीकरण $2x + 3y = 12$ असेल तर येथे $x = 3$ आणि $y = 2$ हे उकल आहे. कारण, जेव्हा $x = 3$ आणि $y = 2$ समीकरणामध्ये मांडाल तर तुम्ही शोधू शकाल की,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

समीकरणाच्या या उकलामध्ये (3, 2) ही क्रमागत जोड़ी लिहू शकतो, येथे पहिली किंमत x ची आणि दुसरी किंमत y ची होते. त्याचप्रमाणे (0, 4) हे सुध्दा वरील समीकरणाची योग्य किंमत आहे.

दुसऱ्या पध्दतीनुसार (1,4) ही किंमत $2x + 3y = 12$ या समीकरणाची उकले नाहीत कारण $x = 1$ आणि $y = 4$ या किंमती मांडल्या तर $2x + 3y = 14$ होते पण 12 होत नाही. म्हणून स्मरण करा की (0, 4) ही किंमत होते तर (4, 0) ही किंमत होत नाही.

$2x + 3y = 12$ या समीकरणाच्या दोन किंमती येतात. म्हणजेच (3, 2) आणि (0, 4). आणखीन दुसऱ्या किंमती येऊ शकतात का? (6, 0) ही दुसरी किंमत तुम्हाला मान्य आहे का? यासाठी पडताळा, अशा पध्दतीने आपण वेगवेगळ्या किंमती काढू शकतो. $2x + 3y = 12$ यामध्ये तुमच्या आवडीने x ($x = 2$) किंमत घ्या. तर हे समीकरण $4 + 3y = 12$ या एक चलपद असणाऱ्या रेषीय समीकरणामध्ये तयार होते. हे सोडविताना $y = \frac{8}{3}$ म्हणजेच $\left(2, \frac{8}{3}\right)$.या दुसऱ्या किंमती $2x + 3y = 12$ या समीकरणाच्या आहेत. त्याचप्रमाणे $x = -5$ घेतले तर $-10 + 3y = 12$ या हे समीकरण मिळते. तर $y = \frac{22}{3}$ मिळते म्हणजेच $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$या दुसऱ्या प्रकारच्या किंमती $2x + 3y = 12$ समीकरणाच्या होऊ शकतात. म्हणूनच दोन चलपद असणाऱ्या रेषीय समीकरणाऱ्या किंमतीना अंत नाही. म्हणूनच दोन चलपद असणाऱ्या रेषीय समीकरणाची उकले अनंत आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : $x + 2y = 6$ या समीकरणाच्या चार वेगवेगळ्या किंमती काढा.

उकळ : सामान्यपणे पाहता, $x = 2, y = 2$ हे उकल आहे. कारण $x = 2, y = 2$

$$x + 2y = 2 + 4 = 6.$$

आता, $x = 0$ घेऊ, या x च्या किंमतीने दिलेले समीकरण. $2y = 6$ असे कमी होते म्हणजेच $y = 3$ ही समीकरणाची निश्चित किंमत होईल, म्हणून $x + 2y = 6$ या समीकरणाच्या $x = 0$, $y = 3$ किंमती आहेत. त्याचप्रमाणे $y = 0$ घेतले असता $x = 6$ मिळते. म्हणून, $x + 2y = 6$. या समीकरणाच्या $x = 6$, $y = 0$ किंमती असतील. शेवटी $y = 1$ घेतल्यास समीकरणाचे रूप $x + 2 = 6$ होते या समीकरणाचे $x = 4$ या किंमती होतील. (4, 1) हे सुद्धा दिलेल्या समीकरणाचे उकल आहे.

$\therefore$ समीकरणाच्या चार वेगवेगळ्या किंमती (2, 2), (0, 3), (6, 0) आणि (4, 1) मिळतात. याचप्रमाणे अनेक किंमती आपणाला मिळू शकतात.

टिप – सोप्या पध्दतीने विचार केल्यास समीकरणाचे उकल सोडविताना $x = 0$ मिळत असेल तर अनुक्रमे y ची किंमत सुध्दा मिळते. त्याच पध्दतीने जर $y = 0$ मिळविल्यास x ची किंमत मिळते.

उदाहरण 4 : खालील प्रत्येक समीकरणाची दोन उकले काढा.

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

उकल :

(i) जर $x = 0$ तर $3y = 12$ म्हणजेच $y = 4$ मिळते.म्हणूनच समीकरणाची उकले (0, 4) होतात. त्याचप्रमाणे जर $y = 0$ तर $x = 3$ म्हणजेच उकल (3, 0) होतील.

(ii) जर $x = 0$ तर $5y = 0$ म्हणजेच $y = 0$. म्हणूनच दिलेल्या समीकरणाची उकले (0, 0) आहेत. आता, जर $y = 0$ आपणास परत (0, 0) उकल मिळते. हे आगोदरच्या प्रमाणे समान आहे. दुसऱ्या पध्दतीने उकल केल्यास जर $x = 1$ तर y ची किंमत आपण पडताळल्यास $y = -\frac{2}{5}$ येते. म्हणून $2x + 5y = 0$ या समीकरणाचे दुसरे उकले $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ आहेत.

(iii) $3y + 4 = 0$ समीकरण लिहिताना $0 . x + 3y + 4 = 0$ यामध्ये x च्या कोणत्याही किंमतीस तुम्ही $y = -\frac{4}{3}$ काढू शकता. म्हणजेच $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ आणि $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ या प्रकारचे दोन उकल होतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 4.2

1. खालील दिलेले कोणते पर्याय बरोबर आहेत आणि का?

   जर $y = 3x + 5$

   (i) फक्त एकच उकल (ii) फक्त दोन उकले.

   (iii) अद्वितीय अनेक उकले.

2. दिलेल्या प्रत्येक समीकरणाची चार उकले लिहा.

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. खालील पैकी $x - 2y = 4$ या समीकरणाचे कोणते उकल आहे किंवा नाही ते तपासा.

   (i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) (1, 1)

4. $2x + 3y = k$ या समीकरणाचे उकल जर $x = 2, y = 1$ असेल तर k ची किंमत काढा.

4.4 सारांश

या पाठात तुम्ही खालील गोष्टींचा अभ्यास केला आहे.

1. $ax + by + c = 0$ या स्वरूपातील समीकरणात a, b आणि c वास्तव संख्या असून a आणि b शून्यविरहीत आहे. याला दोन चलपदांचे रेषीय समीकरण म्हणतात.
2. दोन चलपदे असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचे अस्थिर असे अनेक उकले आहेत.
3. रेषीय समीकरणाचे उकल हे दोन चलपद असणाऱ्या रेषीय समीकरणाच्या आलेखामध्ये प्रत्येक बिंदूत दर्शविले जाते. तसेच रेषीय समीकरणाचा आलेख हा रेषीय समीकरणाच्या प्रत्येक बिंदूचा उकल असतो.

U1J8K3

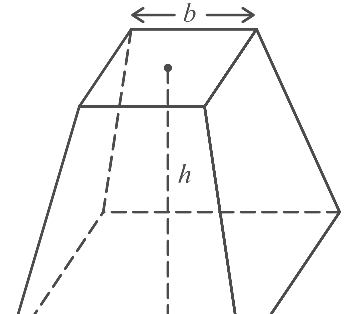
प्रकरण – 5

युक्लीडच्या भूमितीचा परिचय (Introduction to Euclid's Geometry)

5.1 प्रस्तावना

भूमिती (Geometry) या शब्दाचा उगम ग्रीक भाषेतील शब्द जियो (Geo) म्हणजेच भू (जमीन) आणि मेट्री (Metry) म्हणजेच 'मापन'यापासून झाला आहे. यावरून आपणाला लक्षात येते की, भूमीतीची कल्पना ही पृथ्वीच्या किंवा जमिनीच्या मोजमापनासाठी आवश्यकता असल्यामुळे उगम झाला आहे. गणिताच्या या शाखेचा अभ्यास वेगवेगळ्या प्राचीन व्यक्तीकडून वेगवेगळ्या रूपात केले गेले. येथे इजिप्त असो, चीन, भारत, ग्रीक किंवा इनकास इ. व्यवहारामध्ये अनेक प्रकारच्या समस्या आल्या आहेत. त्याचे निवारण करण्यासाठी त्याना भूमितीच्या वेगवेगळ्या गुणधर्मांचा विकास करणे योग्य वाटले.

उदाहरणार्थ, जेव्हा नाईल (Nile) नदीला पूर येत असे तेव्हा ज्यांच्या जमिनी (शेती) नदीच्या जवळ असत त्या शेतीचे बांध पुरातून वाहून जात असे. अशा वाहून गेलेल्या बांधांना परत बांधले जात असे. या कामासाठी इजिप्तवासीयांनी क्षेत्रफळ काढण्यासाठी अनेक भूमितीच्या नियमाचा उपयोग केला. अशा भूमितीचा उपयोग अन्नसाठा करण्यासाठी, आयताकृती भांड्यांची निर्मिती किंवा पिरॅमिड तयार करण्यासाठी होत असे. ते एक कापलेल्या पिरॅमडिचे (truncated pyramid) घनफळ काढण्याच्या सूत्राची पण माहिती होती. (आकृती 5.1 पहा) आपणास माहीत आहे की, पिरॅमिड ही एक अशा प्रकारची घनाकृती आहे जिचा पाया त्रिकोणाकृती किंवा चौरसाकृती किंवा बहुभुजाकृती असतो आणि तिचे वरील सर्व त्रिकोणी पृष्ठभाग एकाच बिंदूमध्ये वर मिळतात.



आकृती 5.1

कापलेला पिरॅमिड

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भारताच्या उपखंडामधील हरप्पा आणि मोहनजोदारो इ. ठिकाणी जेव्हा खोदकाम केले गेले तेव्हा आपणास असे आढळून आले की, सिंधू खोऱ्यातील लोकांनी (इ.स. पूर्व 3000) थोड्या प्रमाणात भूमितीचा वापर केला होता तेथील. शहरे अत्याधुनिक प्रकारे विकसीत होती आणि ती योजनाबध्द पध्दतीने निर्माण करण्यात आली होती. रस्ते परस्परांना समांतर होते आणि भूमिगत गटारींची सोय होती. तेथील रहिवाशी अंकगणितामध्ये पूर्णपणे निपुण होते. त्याना क्षेत्रमापनाचे ज्ञान होते. बांधकामासाठी लागणाऱ्या वीटा भट्टीत भाजल्या जायच्या आणि त्यांची लांबी : रुंदी : उंची ही अनुक्रमे 4 : 2 : 1 असायची.

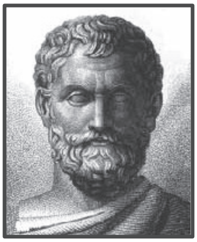
प्राचीन भारतात ''सुलभासुत्र'' (8000 BC ते 500 BC) हा भूमिती रचनेचा महत्वपूर्ण ग्रंथ होता. वैदिक काळात भूमितीचा उपयोग हा वैदिक पूजेसाठी लागणारे वेगवेगळ्या प्रकारचे अग्नीकुंड निर्माण करण्यासाठी करण्यात आला. पवित्र अग्नि अधिक प्रभावशाली होण्यासाठी त्यांचे स्थान, त्यांचा आकार आणि क्षेत्रफळांबाबतीत स्पष्टपणे तयार केलेल्या नियमानुसार असायचे. घरगुती धार्मिक क्रियांसाठी चौकोनी किंवा गोलाकार आकृतींचा वापर करत असत. परंतु सार्वजनिक पूजेच्या ठिकाणी नेहमी आयताकृती किंवा त्रिकोणाकृती किंवा समलंबाकृती आकाराची अग्नीकुंडे बनलेली असायची. दिलेल्या अथर्ववेदात 'श्रीयंत्र' मध्ये नऊ समद्विभूज त्रिकोण 'एकमेकांना' जोडून तयार केलेले यंत्र आहे. हे यंत्रे अशाप्रकारे जोडलेले असतात की, ज्यामुळे 43 लहान त्रिकोण निर्माण होतात. आकृतीची रचना करण्यासाठी भूमितीच्या वेगवेगळ्या प्रयोगाचा उपयोग होत असे परंतु या संबंधीत सिद्धतेची कोणत्याच प्रकारे चर्चा केली नाही.

वरील उदाहरणे हे दर्शवितात की, भूमितीचा विकास आणि प्रयोग जगातील प्रत्येक स्थळावर केला गेला आहे. पण याचा उपयोग व्यवस्थित होत नसे. प्राचीन काळात या भूमीतीच्या विकासाची एक रोमांचकारी गोष्ट म्हणजेच या भूमितीचे ज्ञान एका पिढीपासून दुसऱ्या पिढीपर्यंत पोहचविण्यासाठी एक तर तोंडी किंवा ताडाच्या वृक्षाच्या पानांवर असे संदेश लिहून वेगवेगळ्या मार्गाने संक्रमित केले जात होते त्याचप्रमाणे आपण पाहू शकतो की, प्राचीन मानव म्हणजे बेबीलोनियामध्ये भूमिती ही फक्त व्यवहारिक दृष्टीकोनापर्यंत मर्यादित होती. त्याचप्रमाणे भारत आणि रोममध्ये भूमितीचा विचार याच दृष्टीकोनातून झाला.

इजिप्त लोकामध्ये विकसीत केलेल्या भूमितीचे परिणामी विधानेच उपलब्ध होती. यामध्ये कृती बद्दलचे कोणतेच व्यापक नियम दिलेले नव्हते. वस्तुतः बेबीलोन आणि इस्त्राईल लोकांनी भूमितीचा उपयोग एक पध्दतशीर विज्ञानाच्या रूपात विकसित करण्यासाठी खूप कमी प्रमाणात काम केले. परंतू ग्रीक सारख्या लोकांनी कारणावर (तर्कावर) जास्त भर दिला, अशा विधानामध्ये ग्रीकांनी आपली अभिरुची निर्माण केली. नियमबध्द कारणांचा (deductive reasoning) वापर करून त्यांनी त्याचा पडताळा करून संशोधन केले.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रथम सिध्दता मांडणारे ग्रीक गणितज्ञ थेल्स (Thales) तुम्हाला आठवत असतील. त्यांनी एका वर्तुळाचा व्यास वर्तुळाला दुभागतो याची सिध्दता मांडली. थेल्सचा एकमेव शिष्य म्हणजेच पायथागोरस (Pythagoras) यांचे नाव आपण ऐकलेच आहे. पायथागोरस आणि त्यांच्या काही सहकाऱ्यांनी अनेक भूमिती गुणधर्मांचा शोध लावला आणि भूमितीच्या सिध्दांतांचा विकास केला. हे कार्य 300 BC पर्यंत चालूच राहीले. या वेळेला इजिप्तमधील अलेक्झँड्रिया या गणिताच्या शिक्षकाने आणि युक्लीडने गणिताची सर्व विधाने एकत्रित केली. त्याला 'द इलेमेंट्स' (The Elements) असे नाव दिले. या इलेमेंट्सला 13 अध्यायामध्ये विभागणी केली. प्रत्येकाला **'पुस्तिका'** असे नाव देण्यात आले. या पुस्तिकेतून पुढील पिढीला भूमितीची माहिती पोहचविण्याचा प्रयत्न केला.



थेल्स (ई.पू 640 - ई.पू. 546)
आकृती 5.2

यूक्लीड (ई.पू 352 - ई.पू. 265)
आकृती 5.3

या प्रकरणात आपण युक्लीडच्या भूमितीविषयी असणाऱ्या दृष्टीकोनांची चर्चा करणार आहोत आणि भूमितीची ही संकल्पना आपण वर्तमानात देखील वापरण्याचा प्रयत्न करू

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.2 युक्लीडच्या व्याख्या, मुलतत्वे आणि गृहीतत्वे.

युक्लीडच्या काळातील काही ग्रीक गणितज्ञांनी युक्लीडला भूमितीचा नमूना (model) मानले. बिंदू (point), रेषा (line), प्रतल (plane) इत्यादी संकल्पना अशा वस्तूवरून मांडण्यात आल्या की. त्या वस्तू त्यांच्या जवळपास अस्तित्वात होत्या. आकाश(space) आणि त्यांच्या जवळपासच्या घन वस्तूंच्या सिध्दांताची संकल्पना विकसित करण्यात आली. एका घनाला आकार (size), रूप (shape), स्थान (position) तसेच एका जागेवरून दुसऱ्या जागेवर घेताना स्थानबदल करत असते. त्याच्या कडांनी विशिष्ट झालेल्या भागाला पृष्ठभाग (surface) असे म्हणतात. ही पृष्ठे घनाच्या एका भागापासून दुसऱ्या भागाला जोडतात पण त्यांना विशिष्ट जाड़ी नसते. ही पृष्ठे सरळरेषेत किंवा वक्ररेषेत असतात. या रेषा बिंदूनी बनलेल्या असतात.

घनापासून बिंदूपर्यंत पृष्ठभाग-कडा-शिरोबिंदू या तीन चरणाचा विचार करू. या प्रत्येक चरणामध्ये एक विस्तार कमी होतो. त्याला मापे (dimension) म्हणतात. याकरिता आपण असे म्हणू शकतो की. एका घनाची तीन मापे. एका पृष्ठाची दोन मापे, एका रेषेची एक आणि एका बिंदूला मापे नसतात. यूक्लीडने या चरणाला व्याख्येच्या रूपात व्यक्त केले आहे. त्यांनी या व्याख्यासाठी आपल्या 'इलेमेंट्स' च्या पुस्तिका- 1 मध्ये 23 व्याख्या दिलेल्या आहेत. त्यातील काही व्याख्या खालील प्रमाणे आहेत.

1. एका बिंदू चे पुन्हा भाग होत नाहीत.
2. एका रेषेला रुंदी नसते पण लांबी असते.
3. प्रत्येक रेषेला अंत्यबिंदू असतात.
4. एक सरळरेषा अशी असते की जिच्यावर बिंदूंचे स्थान सपाट रूपात स्थिर असते.
5. एका पृष्ठभागाला लांबी आणि रुंदी असते.
6. पृष्ठभागाच्या कडा म्हणजे रेषा असतात.
7. एक सपाट पृष्ठभाग असा असतो की, जो स्वतःवर सरळ रेषांनी सपाट रूपात स्थिर असतो.

जर आपण लक्षपूर्वक या व्याख्यांचा अभ्यास केला तर आपणास लक्षात येते की, काही भागामध्ये लांबी, रुंदी, सपाट पृष्ठभाग इ. गोष्टींचे स्पष्ट ज्ञान आपणाला मिळते. उदाहरणार्थ, यूक्लीडने बिंदूची दिलेली व्याख्या आपण पाहू. या व्याख्येत एक भाग या गोष्टीचा उलगड़ा होणे आवश्यक आहे. आपण अशी कल्पना करू की, व्याख्येमध्ये नमुद केलेला एक भाग म्हणजे क्षेत्र जो बिंदूनी मर्यादीत असतो. परंतू पुन्हा आपण दोन या शब्दाची व्याख्या पाहू शकतो. म्हणजेच एका वस्तूची व्याख्या देण्यासाठी आपणास अनेक वस्तूंची व्याख्या देण्याची आवश्यकता आहे आणि अशा प्रकारे आपणास कधीच न संपणारी व्याख्याची एक श्रृंखला मिळते.

या गोष्टीचा विचार करून गणितज्ञानी आपले असे मत मांडले की, काही भौमितीक भागाची (पदाची) व्याख्या करता येत नाही. अशाप्रकारे आपण एका बिंदूच्या भूमीतीय संकल्पनेवर दिलेल्या व्याख्येच्या तुलनेत एक योग्य आंतरज्ञानात्मक अभ्यास प्राप्त करू शकतो. त्यासाठी एका बिंदूला एक सूक्ष्म बिंदूच्या काही ना काही अंत असतो किंवा त्याला काही सिमा आहेत.

अशाप्रकारची समस्या वर दिलेल्या व्याख्या 2 मध्ये आहे. यामध्ये लांबी आणि रुंदीचा संदर्भ त्याला आहे. आणि यामध्येही कोणत्याही पदाची पहिल्यांदा व्याख्या केलेली नाही. याचसाठी काही विषयांच्या अभ्यासासाठी काही पदांच्या व्याख्या करणे आवश्यक नाही. असे समजून त्या अव्याख्यीत ठेवल्या आहेत, यासाठी भूमितीमध्ये आपण बिंदू, रेषा आणि प्रतल (यूक्लीडच्या भाषेत सपाट पृष्ठभाग) अव्याख्यीत घटक आहेत. पण त्याचबरोबर ही गोष्ट सुध्दा आवश्यक आहे की, या पदांना आपण अंतरज्ञानात्मक रूपात निर्देशीत करू शकतो अथवा भौतिक प्रतिकृती (वस्तू) च्या सहाय्याने दर्शवू शकतो.

या व्याख्यांची सुरुवात करून युक्लीडने काही विधानाना सिध्द न करताच सत्य मानली आहेत. या कल्पना वास्तवामध्ये स्पष्ट होत्या. त्यांनी त्यांची दोन विभागात विभागणी केली ते म्हणजे मूलतत्वे (axioms) आणि गृहीतत्वे (postulates). त्यानी गृहीतत्वे जी मुख्यकरून भूमितीसाठीच वापरली. होती तर मुलतत्वे ही भूमितीमध्ये काही विधाने तयार करण्यासाठी ज्यांची सत्यता कोणत्याही पुराव्या शिवाय मान्य करावी लागत होती. युक्लीडची ही काही मुलतत्वे खालील प्रमाणे आहेत.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात ते परस्पराशी समान असतात.

2. समान घटकात समान घटक मिळविल्यास उत्तर समान येते.

3. समान घटकातून समान घटक वजा केल्यास उत्तर समान येते.

4. ज्या वस्तू एकमेकाशी समान असतात त्या परस्पराशी समान असतात.

5. पूर्ण हा त्याच्या खंडापेक्षा मोठा असतो.

6. समान घटकांची दुप्पट ही समान असते.

7. समान घटकांची निम्मपट ही समान असते.

या 'सर्व सामान्य कल्पना' कांही गोष्टीच्या मापाच्या सामान्य पहिल्या कल्पनाशी संबंधित आहेत. एक प्रतलीय आकृतीसाठी प्रयोग केला जाऊ शकतो. उदाहरणार्थ, जर एका त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे एका आयताच्या क्षेत्रफळाशी समान असेल आणि या आयताचे क्षेत्रफळ हे एका चौरसाच्या क्षेत्रफळाशी समान असते.

एकाच प्रकारच्या घटकांची तुलना केली जाऊ शकते किंवा मिळविली जाऊ शकते. परंतू भिन्न प्रकारच्या घटकांची तुलना करता येत नाही. उदाहरणार्थ एका रेषेला एका आयतबरोबर मिळविले जाऊ शकत नाही. किंवा एका कोनाची एका पंचभूजाकृतीशी तुलना केली जाऊ शकत नाही.

वरील दिलेल्या चौथ्या मुलतत्वेचा आधारे आपणास हे समजते की, जर दोन वस्तू समान असतील तर त्या समान असतात. म्हणजेच कोणतीही वस्तू ही स्वतःशी समानच असते. मुलतत्व – 5 'ज्या पेक्षा मोठा' ची व्याख्या देतो. उदाहरणार्थ : जर एखादा घटक B. कोणत्यातरी वेगळ्या घटकाचा A चा एक भाग आहे. तर . A या घटकाला B आणि इतर घटक C च्या समानतेच्या रूपात लिहिता येऊ शकते. सांकेतील रूपात $A>B$ चा आहे की, अर्थ असा C घटक असा आहे की $A = B + C$ होते.

आता युक्लीडच्या 5 व्या गृहीतत्वांची चर्चा करू.

गृहीतत्व 1 : एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत एक सरळ रेषा काढता येते.

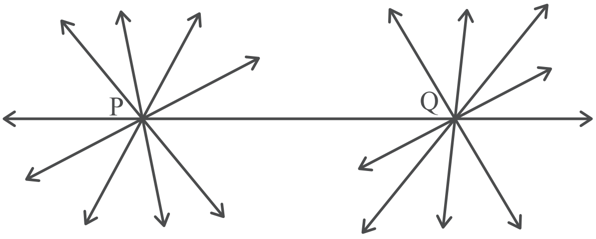
लक्षात घ्या की मुलतत्व आपणास माहीत आहे की, दोन भिन्न बिंदू मधून जाणारी रेषा आपण काढू शकतो परंतु यावरून आपणास माहीत होत नाही की, अशाप्रकारच्या एका पेक्षा अधिक सरळरेषा आपण काढू शकत नाही. परंतु आपल्या सर्व अभ्यासात यूक्लीडने काहीही न सांगता, दोन भिन्न बिंदूम धून जाणारी एक आणि एकच रेषा आपण काढू शकतो या संकल्पनेवर भर दिला आहे. या निकालाला आपण एका मुलतत्वात खालील रूपात मांडू शकतो.

मुलतत्व 2.1 : दिलेल्या दोन स्पष्ट बिंदूतून एक आणि एकच रेषा काढता येते.

बिंदू P मधून जाणाऱ्या किती रेषा काढता येतात. त्या सुद्धा Q बिंदूतूनच जातात? (आकृती 5.4 पहा) केवल एक ही रेषा ती म्हणजे PQ आहे. Q बिंदूतून जाणाऱ्या अशा किती रेषा आहेत ज्या P

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बिंदूतून जातात? केवळ एक PQ रेषा अशा प्रकारे वरील विधान हे एक स्वयंसिध्द सत्य आहे. आणि म्हणूनच त्याला एका मुलतत्वाच्या रूपात मांडण्यात आले.



आकृती 5.4

गृहीतत्व 2 : एक रेषाखंड दोन्ही बाजूला अमर्यादितपणे वाढविता येतो.

लक्षात घ्या ज्याला आपण रेषाखंड (line segment) म्हणतो त्याला युक्लीडने सांत रेषा म्हटले आहे. म्हणूनच आताच्या भाषेमध्ये, दुसरे गृहीतत्व हे सांगते की, एका रेषाखंडाला दोन्ही बाजूने अमर्यादितपणे वाढविता येते (आकृती 5.5 पहा)

आकृती 5.5

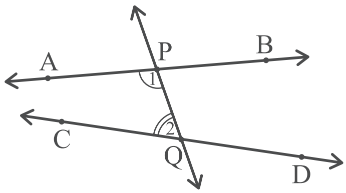
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

गृहीतत्व 3 : कोणताही मध्य आणि कोणत्याही चित्र्येने वर्तुळ काढले जाऊ शकते.

गृहीतत्व 4 : सर्व काटकोन एकमेकाला समान असतांत.

गृहीतत्व 5 : जर एक सरळरेषा दुसऱ्या दोन सरळरेषांना अशाप्रकारे छेदते की. एकाच बाजूला असणारे दोन अंतर कोन एकत्रपणे दोन काटकोनापेक्षा लहान असतात. जर दुसरी सरळरेषा त्या बाजूला वाढविली तर छेदल्यामुळे जे कोन होतात ते दोन काटकोनापेक्षा लहान असतात.

उदाहरणार्थ, आकृती 5.6 मध्ये रेषा PQ, रेषा AB आणि CD ला अशाप्रकारे छेदते की आंतरकोन 1 आणि 2 ची बेरीज PQ च्या उजव्या अंगास आहे. आणि 180° पेक्षा कमी आहे. म्हणजेच AB आणि CD शेवटी PQ च्या डाव्या बाजूस एकमेकांना छेदतात



आकृती 5.6

वरील सर्व गृहीततत्वावरून आपणास लक्षात येते की पाचवे गृहीततत्व अधिक गुंतागुंतीचे आहे. दुसरीकडे पाहता 1 ते 4 गृहीततत्वे सरळ आणि स्पष्ट आहेत. ज्या स्वयंसिध्द सत्य मानल्या जातात. परंतू त्यांना सिध्द करता येत नाही म्हणून या विधानांना सिध्देतेविनाच स्विकारता येते. कारण पाचव्या गृहीततत्वाच्या अभ्यासासाठी पुढील भागाकडे अधिक लक्ष दिले आहे.

आजकाल मुलतत्वे आणि गृहीततत्वे या दोन्ही घटकांना एक दुसऱ्यासाठी प्रयोग केला गेला आहे. वास्तविकता मुलतत्वे म्हणजेच क्रिया पद् आहे. जेव्हा आपण असे म्हणतो की, 'या आपण एक मुल तत्व' करू. म्हणजेच 'आपण जगात घडणाऱ्या घटनांच्या आधारे विधाने करू'' या सत्यतेचे निरीक्षण नंतर केले गेले. जर ते सत्य होत असेल तर तर ते मुलतत्वाच्या रूपात स्विकारावे लागले.

काही गृहीततत्वाना एक स्थिर पध्दत मानण्यात आली आहे. जर या गृहीततत्वापासून असे विधान करणे असत्य आहे जे अन्य गृहीततत्व किंवा सिध्द केलेल्या विधानाच्या विरोधात आहे. म्हणजेच जर गृहीततत्वाची काही पध्दत दिलेली असेल तर ही निश्चित करणे आवश्यक आहे की या पध्दती स्थिर आहेत.

यूक्लीडने अन्य परिणाम सिध्द करण्यासाठी आपली मुलतत्वे आणि गृहीततत्वे वापरली आहेत. याचा उपयोग करून काही अनुमानजन्य विचार वापरून घटकांना सिध्द केले आहेत. ज्या विधानांना त्यानी सिध्द केले त्याला 'प्रमेय' (theorem) असे म्हटले जाते. युक्लीडने आपल्या गृहीततत्वांचा, मुलतत्वांच्या, व्याख्यांच्या आणि पहिल्या सिध्द केलेल्या प्रमेयाचा उपयोग करून एक तर्कशुध्द श्रृंखलेमध्ये 465 घटकांचे अनुमान काढले. भूमितीच्या पुढील काही प्रकरणामध्ये आपण या प्रमेयांचा उपयोग करून काही विधाने सिध्द करणार आहोत.

आता आपण पुढील काही उदाहरणामध्ये हे पाहणार आहोत की युक्लीडने काही परिणामाच्या सिध्दतेसाठी त्याच्या मुलतत्वांचा आणि गृहीततत्वांचा उपयोग केला आहे.

उदाहरण 1 : जर A, B आणि C हे एकाच रेषेवर स्थिर असलेले बिंदू असून बिंदू B हा A व C च्या मध्ये स्थिर आहे (आकृती 5.7 पहा) तर सिध्द करा की $AB + BC = AC$

आकृती 5.7

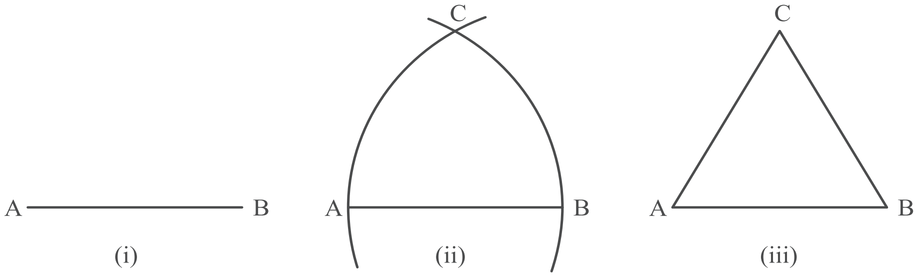
उकल :वरील आकृतीत $AB + BC$ हा AC चा संपाती आहे. त्याचबरोबर, युक्लीडचे मुलतत्व (4) वरून ज्या वस्तू समान असतात त्या परस्पराशी समान असतात. म्हणून हे सिध्द होऊ शकते की

$$AB + BC = AC$$

लक्षात घ्या, या उकलामध्ये असे मानले गेले आहे की, दोन बिंदूतून जाणारी एक आणि एकच रेषा काढता येते.

उदाहरण 2 : सिध्द करा की, दिलेल्या एका रेषाखंडावर एका समभुज त्रिकोणाची रचना करता येते.

उकल: वरील विधानावरून AB ही कोणत्याही लांबीचा रेषाखंड दिलेला आहे. (आकृती 5.8(i) पहा).



आकृती 5.8

युक्लीडच्या मुलतत्व (3) चा उपयोग करू. काही रचना करणे आवश्यक आहे. आपण बिंदू A ला केंद्र आणि AB ला त्रिज्या मानून एक कंस काढू (आकृती 5.8(ii) पहा). याचप्रकारे B ला केंद्र आणि BA ला त्रिज्या मानून आणखीन एक कंस काढू. या कंसाचा छेदन बिंदू C मानू. आता रेषाखंड AC व AB सांधू आणि हा ΔABC होईल (आकृती 5.8(iii) पहा)

यासाठी आपणास सिध्द कारावयाचे आहे की. हा त्रिकोण समभुज त्रिकोण आहे. म्हणजेच AB = AC = BC होईल.

आता AB = AC आहे, कारण या एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत. (एकाच वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या समान असतात.)

त्याचप्रमाणे AB = BC.... (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

वरील दोन्ही विधानावरून आणि मुलतत्व (1) वरून आपण असा

निष्कर्ष करू शकतो की, AB = BC = AC आहे.

म्हणून ΔABC हा एक समभुज त्रिकोण आहे.

लक्षात ठेवा की, येथे युक्लीडने काहीही न सांगता हे मान्य केले आहे की केंद्र A व B बिंदूतून काढलेले कंस एकमेकांना एकाच बिंदूत छेदतात.

आता आपण एक प्रमेय सिध्द करू की, जे विविध निकालामध्ये अनेक वेळा उपयोगात आणले जातात.

प्रमेय 5.1 : दोन स्पष्ट रेषामध्ये एकापेक्षा अधिक समाईक बिंदू असू शकत नाहीत.

सिध्दता : येथे आपणास दोन रेषा *l* व *m* दिलेल्या आहेत. आपणास हे सिध्द करावयाचे आहे की, *l* व *m* यांना केवळ एकच समाईक बिंदू आहे.

काही वेळासाठी आपण असे मानू की दोन रेषा दोन स्पष्ट बिंदू P व Q मध्ये परस्परांना छेदतात. याचबरोबर आपल्याकडे दोन स्पष्ट P व Q बिदूमधून जाणाऱ्या *l* व *m* या दोन रेषा आहेत. परंतू हे

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विधान प्रमेय 5.1 च्या विरुध्द आहे. त्याच्यानुसार दोन स्पष्ट बिंदूमधून जाणारी एक आणि एकच रेषा असते. म्हणून आपण ही कल्पना मानतो की, दोन रेषा स्पष्ट बिंदूतून जातात हे चुकीचे आहे.

यावरून आपण कोणता निष्कर्ष लावू शकतो? आपण निष्कर्ष लावू शकतो की, दोन रेषामध्ये एकापेक्षा अधिक बिंदू समाईक नसतात.

स्वाध्याय 5.1

1. खालील विधानापैकी कोणती विधाने सत्य किंवा असत्य आहेत? तुमच्या उत्तराला कारणे द्या.

   (i) एका बिंदूतून जाणारी केवळ एक आणि एकच रेषा काढता येते.

   (ii) दोन स्पष्ट बिंदुतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात.

   (iii) एक सांत रेषा (रेषाखंड) दोन्ही बाजूंनी अमर्यादितपणे वाढविली जाऊ शकते.

   (iv) जर दोन वर्तुळे समान असतील तर त्यांच्या त्रिज्या ही समान असतात.

   (v) आकृती 5.9 मध्ये जर AB = PQ आणि PQ = XY आहे, तर AB = XY असते.

आकृती 5.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. खालील प्रत्येक घटकांची व्याख्या लिहा. यामध्ये अशी काही पदे आहेत की ज्यांची व्याख्या करणे आवश्यक आहे? ती कोणती आहेत? आणि त्याची व्याख्या आपण कशी कराल.

   (i) समांतर रेषा (ii) लंब रेषा

   (iii) रेषाखंड (iv) वर्तुळाच्या त्रिज्या

   (v) चौरस

3. खालील दिलेल्या दोन मुलतत्वाचा विचार करा.

   (i) दोन स्पष्ट बिंदू A व B दिलेले असताना. तेथे C हा तिसरा बिंदू असा येतो की जो A व B च्या मध्ये असतो.

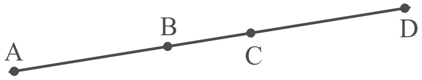
   (ii) येथे अशाप्रकारे तिन बिंदू स्थापन करा की, जे एका रेषेवर स्थापित नाहीत.

   या मुलतत्वामध्ये कोणती व्याख्या न करणारा असा शब्द आहे का? गृहिततत्वे ही सातत्यपूर्ण आहेत का ? या युक्लीडच्या मुलतत्वावरून प्राप्त होतात का? स्पष्ट करा.

4. जर A व B या दोन बिंदूच्यामध्ये C हा बिंदू असा आहे की, AC = BC तर सिध्द करा की $AC = \frac{1}{2}AB$. आकृती काढून स्पष्ट करा.

5. उदाहरण 4 मध्ये C बिंदू रेषाखंड AB चा मध्ये आहे. तर सिध्द करा की, एका रेषाखंडाला एक आणि एकच मध्य बिंदू असतो.

6. आकृती 5.10 मध्ये जर AC = BD आहे तर, सिध्द करा AB = CD



आकृती 5.10

7. युक्लीडच्या गृहीतत्वाच्या सूचिमध्ये दिलेल्या गृहीतत्व 5 ला एक सर्वव्यापी सत्य का मानण्यात आले (लक्षात ठेवा हा प्रश्न पाचव्या गृहीततत्वाशी संबंधीत आहे.)

5.4 सारांश

या प्रकारणामध्ये आपण खालील गोष्टींचा अभ्यास केला आहे:

1. जरी युक्लीडने बिंदू, रेषा आणि प्रतलाच्या व्याख्या केल्या आहेत परंतू गणितज्ञांनी या व्याख्यांचा स्विकार केलेला नाही. म्हणून भूमितीमध्ये आता त्यांना अपरिभाषिक पदांच्या रूपात स्विकारले आहे.

2. गृहीतत्वे आणि मुलतत्वे या अशा कल्पना आहे की त्या स्षष्टपणे सर्वव्यापी सत्य आहेत. याना सिध्द केले जाऊ शकत नाही.

3. प्रमेय ही अशी विधाने आहेत ज्यांना व्याख्या गृहीतके आणि पहिली सिध्द केलेली विधाने आणि तर्कशुध्द पध्दतीने सिध्द केले आहे.

4. यूक्लीडची काही मुलतत्वे अशी आहेत.

   (i) जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात ते परस्पराशी समान असतात.

   (ii) समान घटकात समान घटक मिळविण्यास उत्तर समान येते.

   (iii) समान घटकातून समान घटक वजा केले उत्तर समान येते.

   (iv) वस्तू ज्या एकमेकाशी समान असतात त्या परस्पराशी समान असतात.

   (v) पूर्ण हा त्याच्या खंडापेक्षा मोठा असतो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(vi) समान घटकांची दुप्पट ही समान असते.

(vii) समान घटकांची निम्मपट ही समान असते.

5. यूक्लिडचे गृहीतत्वे खालील प्रमाणे आहेत.

गृहीतत्व 1 : एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत जाणारी एक सरळरेषा काढता येते.

गृहीतत्व 2 : एका रेषाखंडाला दोन्ही बाजूला अमर्यादितपणे वाढविता येते.

गृहीतत्व 3 : एखादा सरळ रेषाखंड दिला असता, रेषाखंड ही त्रिज्या आणि त्याचा एक अंत्यबिंदू मध्य घेऊन वर्तुळ काढता येते.

गृहीतत्व 4 : सर्व काटकोन एकरूप असतात.

गृहीतत्व 5 : जर एक सरळ रेषा दुसऱ्या दोन सरळरेषांना छेदते अशा प्रकारे की एका बाजूला असणारे दोन आंतरकोन एकत्रपणे दोन काटकोनापेक्षा लहान असतात. जर दुसरी सरलरेषा त्या बाजूला वाढतिली तर छेदलेले कोन हे दोन काटकोनापेक्षा लहान असतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

R2E1E4

प्रकरण - 6

रेषा आणि कोन (Lines and Angles)

6.1 प्रस्तावना

प्रकरण 5 मध्ये आपण शिकलो की, एक रेषा काढण्यासाठी कमीत कमी दोन बिंदूची आवश्यकता असते. आपण काही गृहीतकांचा सुध्दा अभ्यास केला आहे, आणि त्यांचा उपयोग करून काही प्रमेय सुध्दा सिध्द केले आहेत. या प्रकरणामध्ये आपणाला कोन आणि त्यांचे गुणधर्म यांचा अभ्यास करता येईल. जेव्हा दोन रेषा परस्परांना छेदतात आणि दोन समांतर रेषांना एक छेदीका छेदते अशा गुणधर्माचा अभ्यास करू. त्याचबरोबर गुणधर्मांना सिध्द करण्यासाठी तर्कशुध्द पध्दतीचा वापर करण्यात येतो हे आपण मागील इयत्तेत सिध्दताद्वारे या गुणधर्माची पडताळणी करून पाहीली आहे.

आपण आपल्या दैनंदिन जीवनात सपाट प्रतलाच्या कडामध्ये बनलेले अनेक प्रकारचे कोन पाहिले असतील. सपाट प्रतलाचा उपयोग करून एकाच प्रकारचे नमुने बनविण्यासाठी आपणास कोनांची विस्तारीत माहीती असणे आवश्यक आहे. उदाहरणार्थ आपण आपल्या शाळेच्या विज्ञान प्रदर्शनासाठी बांबूच्या काड्यांचा उपयोग करून एक झोपडीची प्रतिकृती बनवू इच्छित असाल तर, विचार करा आपण ते कसे बनविणार. काही बांबूच्या काड्यांना आपण परस्पर समांतर ठेवणार आणि काहींना तिरक्या, जेव्हा एक अभियंता (Architect) एक बहुमजली इमारतीचे एक रेखाचित्र काढतो, तेव्हा त्याला भिन्न कोनांवर परस्पर छेदणाऱ्या किंवा समांतर रेषा काढाव्या लागतात. आपण असा विचार करू की, ती रेषा आणि कोनांच्या माहीती शिवाय या इमारतीचे रेखाचित्र (Plan) काढू शकतो का?

विज्ञानामध्ये, आपण प्रकाशाच्या गुणधर्माच्या किरणांचे आलेख(Ray diagrams) काढून त्याचा अभ्यास करतो. उदाहरणार्थ प्रकाशाचे अपवर्तन (refraction) या गुणधर्माचा अभ्यास करण्यासाठी जेव्हा प्रकाश किरण एका माध्यमातून दुसऱ्या माध्यमात प्रवेश करतात तेव्हा आपण परस्परांना छेदणाऱ्या आणि समांतर रेषांचा उपयोग करतो. जेव्हा एखाद्या वस्तूवर दोन अथवा अधिक बल कार्य करतात तेव्हा आपण या बलांचा त्या वस्तूवर झालेले परिणामी बल माहीती करून घेण्यासाठी आलेख काढतो की, ज्यामध्ये बलाची मांडणी रेषाखंडाद्वारे केलेली असते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यावेळी आपणास अशा कोनामधील संबंध माहिती असणे आवश्यक आहे की ज्यांची किरणे परस्परांना समांतर किंवा छेदणारी असतील. एका मनोऱ्याची उंची किंवा एखाद्या जहाजावरील प्रकाश, घरांचे अंतर माहिती करून घेण्यासाठी आपणास क्षितीज आणि दृष्टी रेषा (line of sight) या दरम्यान तयार झालेल्या कोनांची माहिती असणे आवश्यक आहे.

जेव्हा कोन आणि रेषा दिले असता अशाप्रकारच्या दुसऱ्या उदाहरणात वापरू शकतो. भूमितीच्या या उपघटकामध्ये तुम्ही कोन आणि रेषा यांचे गुणधर्म अनेक प्रकारे उपयोगात आणू शकता.

प्रथम मागील इयत्तेत कोन आणि रेषा यांची व्याख्या आणि मुख्य मुद्दे शिकला आहात ते आठवा.

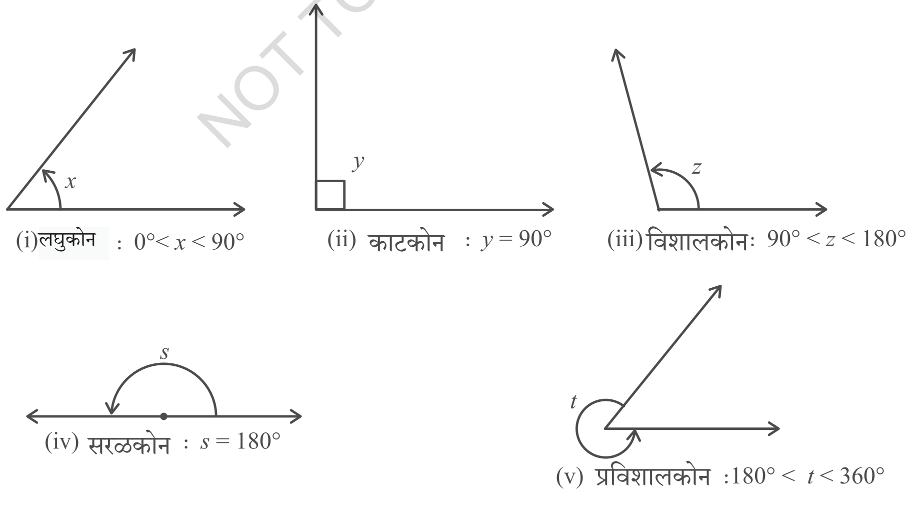
6.2 काही मुद्दे आणि व्याख्या (Basic terms and definition)

आठवा की, दोन अंत्य बिंदू असणाऱ्या एका रेषेच्या भागाला रेषाखंड म्हणतात आणि एक अंत्य बिंदू असणाऱ्या एका रेषेच्या भागाला किरण म्हणतात. AB रेषाखंड $\overline{AB}$ या चिन्हाने दर्शवितात. त्याचप्रमाणे किरण AB हा $\overrightarrow{AB}$ या चिन्हाने दर्शवितात . काही वेळेला रेषाखंड व किरण हे l,m,n या सारख्या लहान अक्षरामध्ये सुध्दा दर्शवितात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एकाच रेषेवर तीन किंवा तीनपेक्षा अधिक बिंदू असतील तर त्यांना एकरेषीय बिंदू (collinear points) म्हणतात.

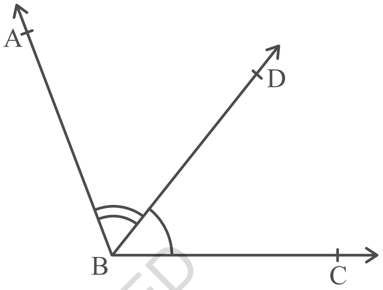
जेव्हा दोन किरणांना एकच अंत्य बिंदू असेल तेव्हा तेथे कोन निर्माण होतो. कोन निर्माण करणाऱ्या किरणाला कोनाची बाजू म्हणतात आणि अंत्यबिंदूला कोनाचा शिरोबिंदू असे म्हणतात. तुम्ही वेगवेगळ्या कोनांचा अभ्यास करू शकता, ते म्हणजेच, लघुकोन, काटकोन, विशालकोन, सरळकोन आणि प्रविशालकोन (आकृती 6.1 पहा).



आकृती : 6.1 कोनांचे प्रकार

लघुकोनांचे माप 0° ते 90° च्यामध्ये व काटकोन 90° शी समान असतो. 90° पेक्षा मोठा आणि 180° पेक्षा लहान असणाऱ्या कोनाला विशाल कोन असे म्हणतात. तसेच आठवा की, सरळकोन 180° असतो. 180° पेक्षा मोठा आणि 360° पेक्षा लहान असणाऱ्या कोनाला प्रविशाल कोन म्हणतात. त्याचप्रमाणे जर दोन कोनांची बेरीज़ 90° असेल तर त्या कोनांना कोटिकोन म्हणतात आणि जर दोन कोनांची बेरीज 180° असेल त्या कोनांना पूरक कोन म्हणतात.

मागील इयत्तेत संलग्न कोनाविषयी शिकला आहात. (आकृती 6.2 पहा) दोन कोन सलग्न होतात, जेव्हा दोन कोनांना एकच सामाईक बाजू असते. आकृती 6.2 मध्ये ∠ABC व ∠DBC हे संलग्न कोन आहेत. BD किरण हा सामाईक बाजू आणि B हा सामाईक शिरोबिंदू आहे. किरण BA व BC हे या असमाईक बाजू आहेत. जेव्हा दोन कोन सलग्न असतील तेव्हा असमाईक बाजूशी अंतरीत केलेल्या कोनांची बेरीज त्याच्याशी समान असते. हे आपण असे लिहू शकतो की,

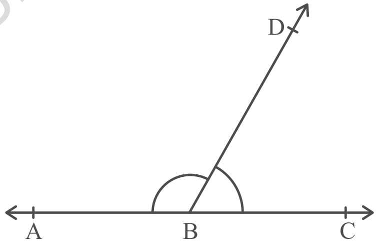


आकृती : 6.2 संलग्न कोन

∠ABC = ∠ABD + ∠DBC

लक्षात ठेवा की, ∠ABC व ∠ABD हे सलग्न कोन नाहीत. का? कारण BA या समाईक बाजूशी BD व BC या असमाईक बाजू आहेत.

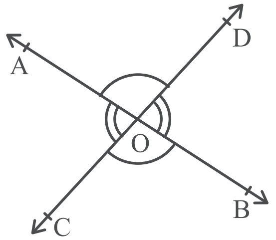
आकृती 6.2 मधील जर BA व BC या असमाईक बाजू असून त्या आकृती 6.3 मध्ये दर्शविल्या आहेत. यामध्ये ∠ABD व ∠DBC या कोनाना पूरक कोन म्हणतात.



आकृती : 6.3 पूरक कोन

तुम्ही पुन्हा पाहू शकता की, 0 बिंदूत छेदणाऱ्या AB व CD या दोन रेषांमध्ये शिरोविरुध्द कोन अंतरीत आहेत (आकृती 6.4 पहा) शिरोविरुध्द कोनाच्या येथे दोन जोडया आहेत.

∠AOD व ∠BOC ही एक जोडी आहे तर दुसरी जोड़ी तुम्ही शोधू शकता का?

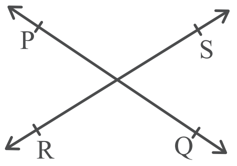


आकृती : 6.4 शिरोविरुध्द कोन

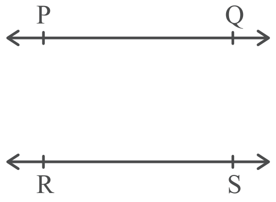
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.3 परस्परांना छेदणाऱ्या आणि न छेदणाऱ्या रेषा

एका कागदावर PQ व RS या दोन भिन्न रेषा काढा. आकृती 6.5(i) व आकृती 6.5 (ii) मध्ये दर्शविलेल्या प्रमाणे दोन भिन्न रेषांची रचना करा.



(i) **छेदणाऱ्या रेषा**



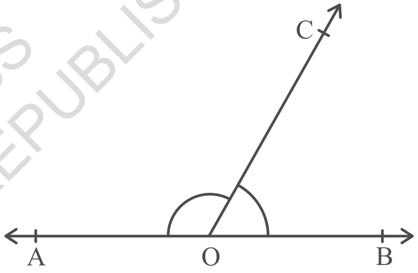
(ii) **न छेदणाऱ्या (समांतर) रेषा**

आकृती 6.5: दोन भिन्न प्रकारच्या रेषांची रचना.

दोन रेषा बाह्यबाजूने दोन्ही बाजूनी वाढविल्या असता रेषेचा गुणधर्म आठवा. आकृती 6.5(i) मध्ये PQ व RS या रेषा छेदलेल्या रेषा आहेत आणि आकृती 6.5(ii) मध्ये समांतर रेषा आहेत. लक्षात ठेवा की, भिन्न बिंदूतील समाईक लंबातरांची लांबी समांतररेषेशी समान असते. या समान लांबीला समांतर रेषेमधील अंतर असे म्हणतात.

6.4. कोनांच्या जोड्या

घटक 6.2 मध्ये पूरक कोनाची व्याख्या काही सलग्न कोन, सरळ कोन, कोटी कोन, पूरक कोन इ याबद्दल शिकला आहात. या कोनांच्या संबंधीत तुम्ही विचार करू शकता का? आता, एका रेषेवर उभा असणारा किरण या संबंधीत पाहू या, आकृती 6.6 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एका रेषेवर एक किरण उभा आहे अशी रचना करा. त्या रेषेला AB व किरणाला OC असे नाव द्या. 0 या बिंदूतून कोणते कोन तयार होतात? ते म्हणजे $\angle AOC$, $\angle BOC$ आणि



आकृती : 6.6 पूरक कोन

$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOB$ .....(1)

असे लिहू शकतो का? हा. (का? यासाठी घटक 6.2 मधील संलग्न कोन पहा) $\angle AOB$ या कोनाचे मापन काय? ते 180 आहे, (का?) .....(2)

(1) व (2) वरून $\angle AOC + \angle BOC = 180$ असे सांगू शकता का? वरील चर्चा ही आपण खालील मुलतत्वानी सोडवू शकतो.

मुलतत्व 6.1: जर एका रेषेवर एक किरण उभा असेल तर बनलेल्या दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180^o असते.

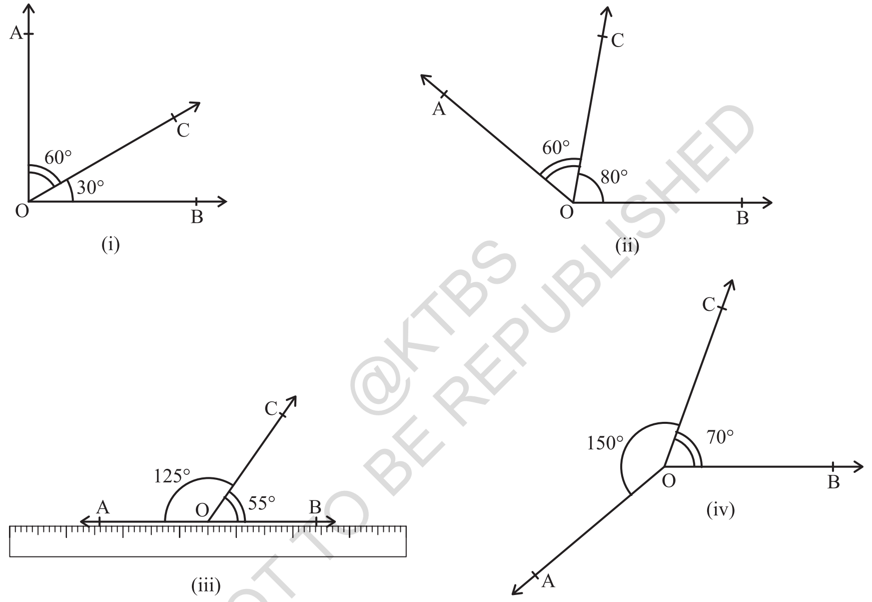
आठवा, जर दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180^o असेल तर त्या कोनांना पूरक कोन असे म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

मुलतत्व 6.1 मध्ये 'रेषेवर एक किरण उभा आहे' असे दिलेले आहे. यावरून आपण अनुमान करू शकतो की दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180° असते. मुलतत्व 6.1 दुसऱ्या पध्दतीने लिहू शकतो का? म्हणजेच मुलतत्व 6.1 मध्ये अनुमान असे घेवू आणि त्यावरून दिलेले हा अनुमान येतो.

(A) जर एका रेषेवर एक किरण उभा असेल तर दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180° असते. (तर ही रेषेवी असमान बाजू जी बनली आहे).

आता. तुम्ही पाहू शकता की विधान (A) आणि मुलतत्व 6.1 हे एकमेकांचा व्यत्यास आहे. विधान (A) हे बरोबर आहे की नाही हे आपणाला माहीत नाही. आकृती 6.7 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वेगवेगळ्या पध्दतीने सलग्न कोनाची रचना करा. असमान असणारे कोन एकाच बाजूस दर्शवा.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 6.7. इतर मापाचे संलग्न कोन

आकृती 6.7 (iii) मधीलच शोधू. मोजपट्टीच्या दोन्ही असमान असणाऱ्या बाजूस A, O आणि B या बिंदूवर OC हा किरण उभा आहे. तसेच $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ पाहू शकतो. यावरून अनुमान काढू शकतो की. विधान (A) बरोबर आहे. म्हणून अशाच प्रकारे आपण पुढील पध्दतीने मुलतत्व साध्य करू शकतो.

मुलतत्व 6.2 : जर दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180° असेल तर असमान बाजूस असणारे कोन एक रेषा तयार करतात.

या कारणासाठी, वरील दोन मुलतत्वांना पूरक मुलतत्वे म्हणतात. आता दोन रेषा एकमेकांना

छेदतात हे उदाहरणाद्वारे पाहू. जेव्हा दोन रेषा एकमेकांना छेदतात तेव्हा शिरोविरुध्द कोन समान असतात हे मागील इयत्तेत शिकला आहात. विधान–1 मध्ये सिध्द केलेली पायरी खालील दिलेल्या सिद्धतेसाठी लक्षात ठेवा.

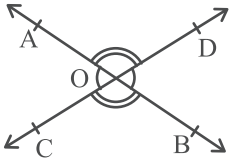
प्रमेय 6.1 : जर दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील तर शिरोविरुध्द कोन समान असतात.

सिध्दता : दोन रेषा परस्परांना छेदतात हे वरील विधानात दिले आहे. आकृती 6.8 मध्ये AB व CD या दोन रेषा एकमेकांना 0 बिंदूत छेदतात. येथे दोन शिरोबिंदूच्या जोड्या दिल्या आहेत.

(i) $\angle AOC$ व $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ व $\angle BOC$. $\angle AOC = \angle BOD$ व $\angle AOD = \angle BOC$

हे आपणाला सिध्द करायचे आहे.

आता CD रेषेवर OA किरण उभा आहे.



आकृती 6.8
शिरोविरुध्द कोन

$\therefore \angle AOC + \angle AOD = 180^o$ (पूरक कोन) .... (1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^o$ असे लिहू शकतो का? .... (2)

(1) व (2) वरून

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD \therefore$

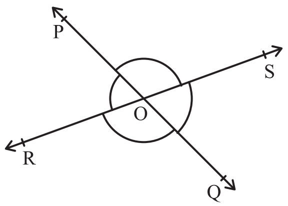
$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ (घटक 5.2 मधील मुलतत्व 3)

त्याचप्रमाणे : $\angle AOD = \angle BOC$

आता पुरक मुलतत्व आणि प्रमेय 6.1 वरून काही उदाहरणे सोडवू या.

उदाहरण 1 : आकृती 6.9 मध्ये PQ व RS या रेषा एकमेकांना O बिंदूत छेदतात जर

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ तर सर्व कोन ओळखा.



आकृती 6.9

उकल : $\angle POR + \angle ROQ = 180^o$ .... (पूरक कोन)

पण $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$

तर, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^o = 75^o$

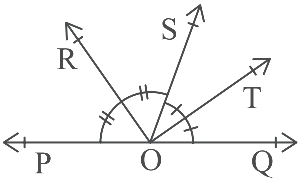
तसेच $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^o = 105^o$

आता $\angle POS = \angle ROQ = 105^o$ ....(शिरोविरुध्द कोन)

आणि $\angle SOQ = \angle POR = 75^o$ ....(शिरोविरुध्द कोन)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 2 : आकृती 6.10 मध्ये, POQ या रेषेवर OS हा किरण उभा आहे. $\angle$ POS आणि $\angle$ SOQ या कोनाचे कोनदुभाजक अनुक्रमे OR व OT हे किरण आहेत. जर. $\angle$ POS = x तर $\angle$ ROT काढा.



आकृती 6.10

उकल: POQ या रेषेवर OS हा किरण उभा.

$\therefore \angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

पण $\angle POS = x$

तर $x + \angle SOQ = 180^\circ$

म्हणून, $\angle SOQ = 180^\circ - x$

आता किरण OR हा $\angle$ POS चा कोनदुभाजक आहे.

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$$
$$= \frac{1}{2} \times x$$
$$= \frac{x}{2}$$

त्याचप्रमाणे, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$
$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

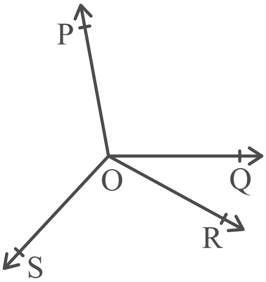
आता $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2}$$
$$= 90^\circ$$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

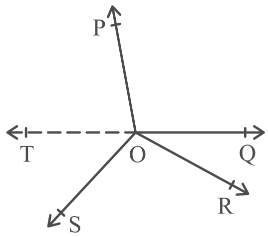
उदाहरण 3: आकृती 6.11 मध्ये OP, OQ, OR, आणि ‹OS हे चार किरण आहेत. तर .

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ सिध्द करा.



आकृती 6.11

उकल : आकृती 6.11 मध्ये मागील बिंदू दर्शविणारे OP, OQ, OR किंवा OS किरण तयार होतात. तर OT या किरणा मधून T या बिंदूपर्यंत TOQ रेषा वाढविली. आता TOQ या रेषेवर OP हा किरण उभा आहे.



आकृती 6.12

$\therefore \angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ ...... (1) (पूरक कोन)

त्याचप्रमाणे TOQ रेषेवर OS किरण उभा.

$\therefore \angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ ..... (2)

पण $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

म्हणून (2) वरून

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ ..... (3)

आता (1) व (3) ची बेरीज करू

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ (4)

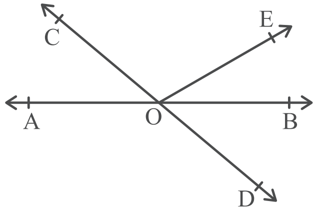
पण $\angle TOP + \angle TOS = \angle POQ$

(4) वरून

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

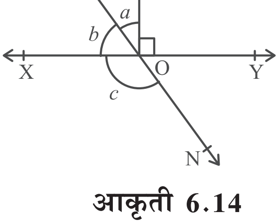
स्वाध्याय 6.1

(1) आकृती 6.13 मध्ये AB व CD रेषा O या बिंदूत छेदतात. जर $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ आणि $\angle BOD = 40^\circ$ तर $\angle BOE$ आणि $\angle COE$ काढा.



आकृती 6.13

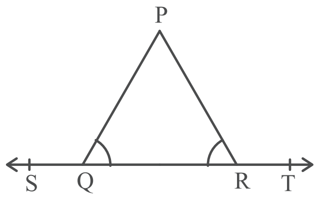
(2) आकृती 6.14 मध्ये XY व MN रेषा O बिंदूत छेदतात. जर $\angle POY = 90^\circ$ आणि $a : b = 2 : 3$ तर c ची किंमत काढा.



आकृती 6.14

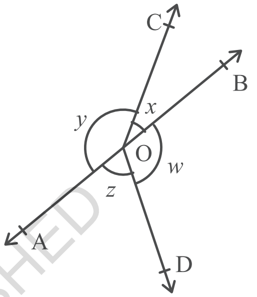
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(3) आकृती 6.15 मध्ये $\angle PQR = \angle PRQ$ तर $\angle PQS = \angle PRT$ सिध्द करा.



आकृती 6.15

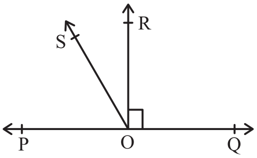
(4) आकृती 6.16 मध्ये जर $x + y = w + z$ तर AOB ही एक रेषा आहे असे सिध्द करा.



आकृती 6.16

(5) आकृती 6.17 मध्ये POQ ही रेषा आहे. PQ रेषेवर OR किरण लंब आहे. OP आणि OR या किरणाच्या मधोमध OS हा आणखीन एक किरण आहे. तर सिध्द करा.

$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$



आकृती 6.17

(6) $\angle XYZ = 64^o$ आणि XY ही 'P' बिंदूपर्यत वाढविली आहे. या माहितीवरून आकृती काढा. जर YQ हा असेल तर $\angle XYQ$ आणि $\angle QYP$ च्या किंमती काढा.

6.5 एकाच रेषेशी असणाऱ्या समांतर रेषा

जर समान रेषा दोन समांतररेषा असतील तर ते एकम कांशी समांतर असतात का? हे पडताळूया. आकृती 6.18 मध्ये $m \parallel l$ आणि $n \parallel l$

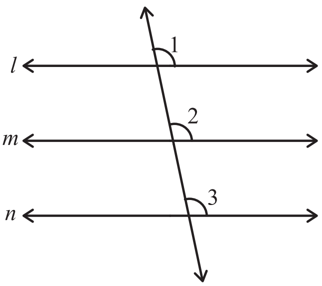
l, m आणि n या रेषांना t ही छेदिका काढली आहे.

$m \parallel l$ आणि $n \parallel l$ दिले आहे.

तेव्हा $\angle 1 = \angle 2$ आणि $\angle 1 = \angle 3$

(संगत कोनाचे मुलतत्व)

$\angle 2 = \angle 3$ (का?)



आकृती 6.18

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

पण $\angle 2$ आणि $\angle 3$ संगत कोन असून ते समान आहेत.

म्हणूनच रेषा $m \parallel$ रेषा n .

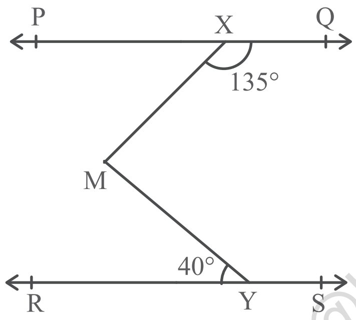
(संगत कोनाचे व्यस्त मुलतत्व)

खालील दिलेल्या प्रमेयामध्ये हा निकाल दर्शविलेला आहे.

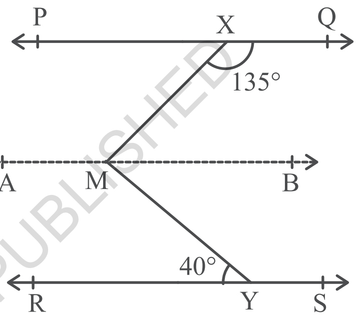
प्रमेय 6.6 : एकाच रेषेला समांतर असणाऱ्या रेषा परस्परांशी समांतर असतात.

टिप दोन रेषांसाठी सुध्दा वरील गुणधर्म साध्य करू शकतो. आता समांतर रेषे संबंधीत काही उदाहरणे सोडवूया.

उदाहरण 4 : आकृती 6.19 मध्ये जर PQ $\parallel$ RS, $\angle$ MXQ = 135^o आणि $\angle$ MYR = 40^o तर$\angle$ XMY काढा.



आकृती 6.19



आकृती 6.20

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : येथे M बिंदूतून जाणारी AB ही रेषा PQ ला समांतर काढली हे आकृती 6.20 मध्ये काढले आहे. आता AB $\parallel$ PQ आणि PQ $\parallel$ RS

त्याचप्रमाणे AB $\parallel$ RS (का ?)

आता $\angle$ QXM + $\angle$ XMB =180^o

(AB $\parallel$ PQ , XM छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन

पण $\angle$ QXM = 135^o

म्हणून $135^o + \angle$ XMB = 180^o

$\therefore$ $\angle$ XMB = 45^o (1)

आता $\angle$ BMY = $\angle$ MYR (AB $\parallel$ RS व्युत्क्रम कोन)

$\angle$ BMY = 40^o (2)

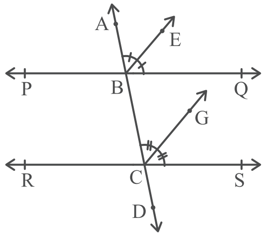
(1) व (2) ची बेरीज करू

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^{o} + 40^{o}$$

$$\angle XMY = 85^{o}$$

उदाहरण 5: जर दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता आंतरकोन कोनांची जोड़ी समांतर रेषेत असते तर सिध्द करा की, त्या दोन रेषा एकमेकांना समांतर असतात.

उकल : आकृती 6.21 मध्ये PQ व RS दोन रेषांना AD ही छेदिका अनुक्रमे B व C मध्ये छेदते. $\angle ABQ$ मधून BE हे किरण काढले आणि $\angle BCS$ मधून CG किरण काढले. आणि BE || CG.



आकृती 6.21

आपणास PQ || RS सिध्द करावयाचे आहे.

$\angle ABQ$ मधून BE किरण काढले आहे

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ .... (1)

तसेच $\angle BCS$ मधून CG किरण काढले.

$\therefore \angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ .... (2)

पण BE||CG आणि AD ही छेदिका.

$\therefore \angle ABE = \angle BCG$ .... (3) (संगत कोन)

(1) व(2) हे (3) मध्ये मांडू

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

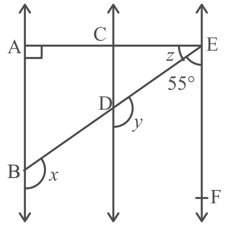
$\therefore \angle ABQ = \angle BCS$

पण PQ आणि RS ला AD या छेदिकेशी आंतरीत असणारे संगतकोन समान आहेत.

$\therefore$ PQ || RS (संगतकोनाचे विधान)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 : आकृती 6.22 मध्ये $AB \parallel CD$ आणि $CD \parallel EF$ तसेच $EA \perp AB$ जर. $\angle BEF = 55^\circ$ असेल तर x, y आणि z च्या किंमती काढा.



आकृती 6.22

उकल : $y + 55^\circ = 180^\circ$

(ED या छेदिकेच्या एकास अंगास असणारे आंतरकोन)

$\therefore \quad y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

$x = y$

($AB \parallel CD$ संगतकोनाचे विधान)

$x = 125^\circ$

आता $AB \parallel CD$ आणि $CD \parallel EF$ तसेच $AB \parallel EF$

$\therefore \angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (EA या छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन)

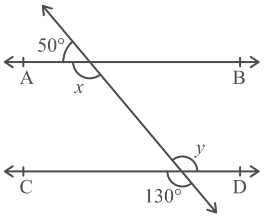
$\therefore 90^\circ + Z + 55^\circ = 180^\circ$

$Z = 35^\circ$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

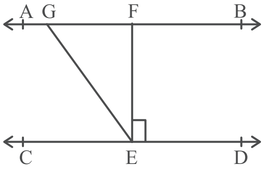
स्वाध्याय 6.2

1) आकृती 6.23 मध्ये, x आणि y च्या किंमती काढून $AB \parallel CD$ सिध्द करा.



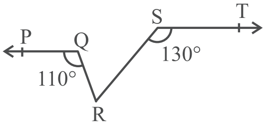
आकृती 6.23

2) आकृती 6.24 मध्ये, जर $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ आणि $\angle GED = 126^\circ$ तर $\angle AGE$, $\angle GEF$ आणि $\angle FGE$ काढा..



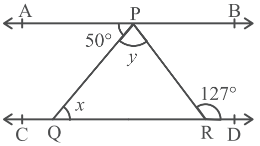
आकृती 6.24

3) आकृती 6.25 मध्ये, जर $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110^\circ$ आणि $\angle RST = 130^\circ$ तर $\angle QRS$ काढा. (टिप : R बिंदूतून ST ला समांतर असणारी रेषा काढा.)



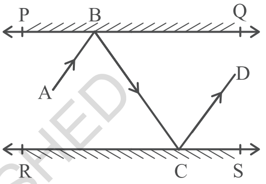
आकृती 6.25

4) आकृती 6.26 मध्ये, जर $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50^\circ$ आणि $\angle PRD = 127^\circ$ तर x आणि y काढा.



आकृती 6.26

5) आकृती 6.27 मध्ये PQ आणि RS हे दोन आरशे एकमेकांना समांतरमध्ये ठेवले. PQ या आरशावर B बिंदू AB हा पतन किरण आहे. RS या आरशावर C बिंदूतून येणारा परावर्तित किरण BC आहे आणि परत तो CD ला परावर्तित करतो तर सिध्द करा $AB \parallel CD$.



आकृती 6.27

6.8 सारांश

या प्रकरणात तुम्ही खालील गोष्टींचा अभ्यास केलात.

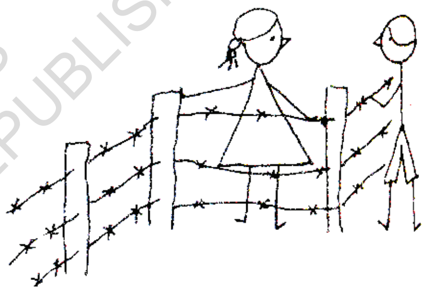
1. जर एका रेषेवर एक किरण उभा असेल तर दोन संलग्न कोनांची बेरीज 180° असते या गुणधर्मालाच सरळ रेषेवरील मुलतत्वे म्हणतात.
2. जर दोन रेषा एकमेकांना छेदत असतील तर शिरोविरुध्द कोन समान असतात.
3. दिलेली रेषा दुसऱ्या रेषेशी समांतर असेल तर त्या रेषा परस्पराशी समांतर असतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अनुबंध – 1

गणितामधील सिध्दांत (पुरावे)(Proofs in Mathematics)

A 1.1 परिचय (Introduction)



समजा तुमच्या कुटुंबाचा स्वतःचा एक प्लॉट(भूखंड) आहे. त्याला सभोवती कुंपण घातलेले नाही. तुमच्या शेजारच्या प्लॉट मालकाने तुम्हाल न कळवता आपल्या प्लॉट सभोवती कुंपण घातले. त्याचे कुंपण घालून झाल्यानंतर तुमच्या लक्षात आले की तुमच्या प्लॉटचा काही भाग त्यांच्या कुंपण घातलेल्या प्लॉटमध्ये गेला आहे. आता तुम्ही तुमच्या प्लॉटवर अतिक्रमण झाले आहे हे कसे सिध्द कराल? तुमची पहिली पायरी अशी असेल की, गावातील वयस्कर लोकांना बोलवून त्यांच्या मदतीने प्लॉटची हद्द बरोबर करून घेऊ शकाल. परंतु समजा वयस्करांच्यामध्ये निर्णय देण्यांत मतभेद झाले तर, काही जण म्हणतील तुमचे बरोबर आहे तर काही जण म्हणतील तुमच्या शेजारच्यांचे बरोबर आहे. असे झाल्यास तुम्ही काय कराल? तुमच्याकड़े आता एकच पर्याय असेल की तुमच्या प्लॉटची हद्द योग्य होईल आणि ते सर्वांना मान्य करावे लागेल. तो पर्याय म्हणजे तुमच्या गावचा सरकारी मान्यता असलेल सर्व्हेक्षणाचा नकाशा. आवश्यकता भासल्यास कोर्टाच्या नियमानुसार हद्दी योग्य होतील आणि तुमचे बरोबर व शेजारच्यांचे चुक हे सिध्द होईल.

आता आपण दुसरी घटना पाहू. समजा तुमच्या आईने ऑगस्ट 2016 महिन्याचे घराचे विद्युत बील भरलेले आहे. परंतु सप्टेंबर 2016 या महिन्याचे विद्युत बील आले त्यामध्ये ऑगस्ट महिन्याचे भरलेले नाही असा उल्लेख होता. आता तुम्ही विद्युत मंडळाने केलेला उल्लेख चुकीचा आहे असे कसे सिध्द कराल? तुम्ही ऑगस्ट महिन्याची बिलाची भरलेली पावती दाखवून ऑगस्टचे बिल भरलेले आहे असे सिध्द करू शकाल.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

दैनंदिन जीवनात असे अनेक प्रसंग येतात त्यापैकी दोन उदाहरणे आपण पाहिली. काही वेळा अनेक विधाने किंवा दावे सिध्द करून बरोबर किंवा चूक सिध्द करावी लगतात.

काही वेळा बरीचशी उदाहरणे कोणतीही सिध्दता न देता आम्ही स्विकारतो. परंतू गणितामध्ये तर्कशास्त्रानुसार सिध्द होणारीच विधाने चूक किंवा बरोबर स्विकारतो (काही मूलतत्वे सोडून).

गणितामधील अनेक सिध्दता हजारो वर्षापासून ज्ञात आहेत आणि त्या गणिताच्या प्रत्येक शाखेचे केंद्र आहेत. माहित असलेली पहिली विश्वासनिय ही सिध्दता ग्रीक तत्ववेता आणि गणितज्ञ थेल्स यांनी दिली. मेसोपोटॅमिया, इजिप्त, चिन आणि भारत या सारख्या प्राचीन संस्कृतींमध्ये मध्य (केंद्र)गणित होते. परंतु ते आताच्या सारखे सिध्दांत वापरत होते की नाही याचे स्पष्ट पुरावे नाहीत.

या प्रकरणात आपण विधान म्हणजे काय, गणितात युक्तिवादाचे कोणते प्रकार समाविष्ट होतात आणि गणिती सिध्दतेमध्ये कोणत्या गोष्टी असतात हे पाहू.

A 1.2. गणिताने स्विकारण्यायोग्य विधाने (Mathematically Acceptable Statements)

या विभागात आपण गणिताने स्विकारण्यायोग्य विधानांच्या अर्थाचे स्षष्टीकरण करण्याचा प्रयत्न करू. विधान हे वाक्य आदेशवजा किंवा आश्चर्यकारक नसते आणि त्यामुळे विधान हा प्रश्न नसतौ !

उदाहरणार्थ, ''तुझ्या केसाचा रंग कोणता आहे?'' हे विधान नाही, हा प्रश्न आहे.

(a) ''कृपया जा आणि थोड़े पाणी घेऊन ये'' ही विनंती किंवा आदेश आहे, विधान नाही.

(b) ''व्वा, काय सुंदर सुर्यास्त आहे ! हे एक उद्गारवाचक वाक्य आहे. हे विधान नाही.

सामान्यपणे, विधान हे खालील पैकी एक असू शकते.'

- नेहमी सत्य (always true)
- नेहमी असत्य (always false)
- संदिग्ध (मोघम) (ambiguous)

येथे ''संदिग्ध (मोघम)'' शब्दासाठी थोड़े स्पष्टीकरण करण्याची गरज आहे. संदिग्ध विधान करण्यास दोन स्थिति असतात. पहिली स्थिति म्हणजे जेव्हा विधान नेहमी खरे किंवा नेहमी चूक (असत्य) याचा निर्णय घेऊ शकत नाही. उदाहरणार्थ, ''उद्या गुरुवार आहे'' हे संदिग्ध आहे, विधान बरोबर कि चूक याचा निर्णय घेण्यास मागचा पुढचा संदर्भ दिलेला नाही.

संदिग्धता ठरविण्यास दुसरी स्थिति म्हणजे जेव्हा विधान व्यक्तिनिष्ठ असते. म्हणजे काही लोकांना विधान खरे आहे तर काहीना खोटे आहे असे वाटते उदाहरणार्थ ''कुत्रे बुध्दिमान असतात' हे संदिग्ध आहे. कारण काही लोक यावर विश्वास ठेवतात तर काही जण नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 1 : खालील विधाने नेहमी खरी (सत्य), नेहमी (चूक) असत्य किंवा संदिग्ध (मोघम) आहेत का ते सांगा. तुमची उत्तरे पडताळा.

(i) एका आठवडयात 8 दिवस असतात.

(ii) येथे पाऊस पडत आहे.

(iii) पश्चिमेला सूर्यास्त होतो.

(iv) गौरी एक प्रेमळ मुलगी आहे.

(v) दोन विषम पूर्णांकाचा गुणाकार सम असतो..

(vi) दोन नैसर्गिक सम संख्यांचा गुणाकार समसंख्या येतो.

उकल :

(i) हे विधान नेहमी असत्य कारण एका आठवडयामध्ये 7 दिवस असतात.

(ii) हे विधान संदिग्ध आहे, कारण 'येथे' म्हणजे कोठे हे नेमके स्पष्ट होत नाही.

(iii) हे विधान नेहमी सत्य आहे, कारण सुर्यास्त नेहमी पश्चिमेलाच होतो आपण कोठेही रहात असलो तरी.

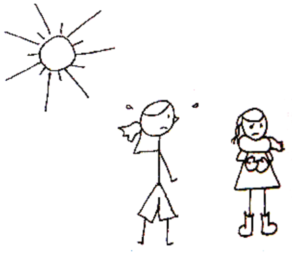
(iv) हे विधान संधिग्ध आहे. कारण हे व्यक्तिनिष्ठ विधान आहे. गौरी काही जणांच्या बाबतीत प्रेमळ असेल परंतु काही जणांची बाबतीत नसेलही.

(v) हे विधान नेहमी असत्य आहे. कारण दोन विषम संख्यांचा गुणाकार नेहमी विषम संख्या येते.

(vi) हे विधान नेहमी सत्य आहे. यासाठी आम्ही काही तरी कृती करण्याची आवश्यकता आहे. विभाग A 1.4 मध्ये सिध्द केले आहे.

मागे सांगितल्याप्रमाणे, आपल्या दैनंदिन जीवनात आपण विधानांच्या बंधनकारते विषयी फार काळजी करत नाही. उदाहरणार्थ, समजा तुमच्या मित्रांने सांगितले की जुलै महिन्यात केरळमधील मनंतवाडी येथे दररोज पाऊस असतो. तुम्ही संभाव्यता धरून त्यावर विश्वास ठेवता. एक दोन दिवस पाऊस नसेल तरी ही तुम्ही मित्राशी यावर चर्चा करत नाही.

दुसरे उदाहरण आपण कित्येकदा आपापसात बोलतो जसे ''आज फारच गरमी आहे?'' अशी विधाने आपण लगेच स्विकारतो हे जरी मोघम वाक्य असले तरीही कारण आम्हाला मागचा-पुढचा संदर्भ माहित असतो.



''आज फारच गरमी आहे?'' याचा वेगवेगळा अर्थ असू शकतो. कारण कुमांनच्या लोकांना जास्त गरमी वाटेल, परंतू

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चेन्नईच्या लोकांना जास्त गरमी वाटणार नाही.

गणिती वाक्ये संदिग्ध (मोघम) नसतात. गणिती विधाने सत्य किंवा असत्य असतात ती फक्त स्विकारण्यायोग किंवा वैध असतात.

उदाहरणार्थ : $5 + 2 = 7$ नेहमी बरोबर, म्हणून $5 + 2 = 7$ हे सत्य विधान व $5 + 3 = 7$ हे असत्य विधान.

उदाहरण 2: खालील विधाने सत्य की असत्य ते सांगा.

(i) त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज़ $180°$ असते.

(ii) 1 पेक्षा मोठी असणारी प्रत्येक विषम संख्या ही मूळ (अविभाज्य) संख्या असते.

(iii) x या कोणत्याही वास्तव संख्येसाठी $4x + x = 5x$.

(iv) x या प्रत्येक वास्तव संख्येसाठी $2x > x$.

(v) x या प्रत्येक वास्तव संख्येसाठी $x^2 \geq x$.

(vi) जर चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतील तर, तो चौरस असतो.

उकल :

(i) हे विधान सत्य आहे. प्रकरण 6 मध्ये आम्ही सिध्द केलेले आहे..

(ii) हे विधान असत्य आहे. उदाहरणार्थ 9 ही मूळ संख्या नाही.

(iii) हे विधान सत्य आहे.

(iv) हे विधान असत्य आहे, उदाहरणार्थ $x = -1$ आणि $2 \times (-1) = -2$ आणि $-2 \ngtr -1$.

(v) हे विधान असत्य आहे, उदाहरणार्थ $x = \frac{1}{2}$ आणि $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ आणि $\frac{1}{4}$ हा $\ngtr \frac{1}{2}$. पेक्षा मोठा नाही.

(vi) हे विधान असत्य आहे. उदाहरणार्थ, समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतात परंतु तो चौरस नसतो.

तुमच्या लक्षात आले असेल की सांगितलेली विधाने सत्य की असत्य ठरविण्यास गणिताने पडताळून पाहावी लगतात म्हणून

उदा (ii) मध्ये 9 ही मूळ संख्या नाही. विधान असे की 1 पेक्षा मोठी असणारी विषम संख्या हीमूळ संख्या असते. परंतु हे सत्य नाही. अशी विधाने असणाऱ्या उदाहरणांना विरुद्ध उदाहरण (counter example) म्हणतात. आम्ही याबद्दल A 1.5 भागात अधिक चर्चा करू.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुमच्या हे सुध्दा लक्षात आले असेल की, विधाने (iv) ,(v) व (vi) ही विधाने असत्य आहेत. त्यांच्यावर काही प्रतिबंध लादून आपण त्यांना सत्य ठरवू शकतो.

उदाहरण 3: खालील चुकीची विधाने बरोबर करून पुन्हा सांगा

(i) सर्ववास्तव संख्येसाठी x $2x > x$.

(ii) सर्ववास्तव या प्रत्येक संख्येसाठी x $x^2 \geq x$.

(iii) एका संख्येला त्याच संख्येने भागल्यास नेहमी उत्तर 1 मिळते.

(iv) वर्तुळात जीवकेडून वर्तुळ परिघावर होणारा कोन 90° चा असतो.

(v) जर चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतील तर तो चौरस असतो.

उकल :

(i) जर $x > 0$ तर $2x > x$.

(ii) जर $x \leq 0$ किंवा $x \geq 1$ तर $x^2 \geq x$.

(iii) कोणत्याही संख्येला 0 (शुन्य) शिवाय त्याच संख्येने भागल्यास उत्तर 1 मिळते.

(iv) वर्तुळात व्यासाकडून वर्तुळ परिघावर होणारा कोन 90° चा असतो.

(v) जर चौकोनाच्या सर्व बाजू व सर्व आंतरकोन समान असतील तर तो चौकोन चौरस असतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय A 1.1

1. खालील विधाने नेहमी सत्य, नेहमी असत्य किंवा संदिग्ध आहेत ते सांगा तुमची उत्तरे पडताळून पहा.

   (i) एका वर्षामध्ये 13 महिने असतात.

   (ii) दिवाळी शुक्रवारी येणार आहे.

   (iii) मगदीतील तापमान 26°C आहे.

   (iv) पृथ्वीला एक चंद्र आहे.

   (v) कुत्रा उडू शकतो.

   (vi) फेब्रूवारी मध्ये 28 दिवस असतात.

2. खालील विधाने सत्य किंवा असत्य ते सांगा. तुमच्या उत्तरांना कारणे द्या.

   (i) चौकोनाच्या सर्व आंतरकोनांची बेरीज 350° असते.

(ii) कोणत्याही वास्तव संख्या x साठी $x^2 \geq 0$

(iii) समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो.

(iv) दोन समसंख्यांची बेरीज़ समसंख्या असते.

(v) दोन विषमसंख्यांची बेरीज विषमसंख्या असतात.

3. योग्य प्रतिबंध लादून खालील विधाने सत्य करून पुन्हा सांगा.

(i) सर्व अविभाज्य संख्या विषमसंख्या असतात..

(ii) एका वास्तव संख्येची दुप्पट नेहमी समसंख्या असते.

(iii) x या कोणत्याही संख्येसाठी $3x + 1 > 4$.

(iv) x या कोणत्याही संख्येसाठी, $x^3 \geq 0$.

(v) प्रत्येक त्रिकोणातील मध्यगा ही कोन दुभाजक सुध्दा असते.

A 1.3. अनुमानिक विचारसरणी (युक्तिवाद) (Deductive Reasoning)

एका असंदिग्ध (मोघम) नसणाऱ्या विधानाचे सत्य शोधण्यास वापरलेली तर्कशुध्द पध्दत म्हणजे आनुमानिक विचारसरणी होय. आनुमानिक विचारसरणी काय आहे हे समजून घेण्यास, तुमच्यासाठी एक कोड़े सोडविण्यास घेऊ.

तुमच्याकडे चार कार्डे दिलेली आहेत. प्रत्येक कार्डावर एका बाजूला एक संख्या व दुसऱ्या बाजूला इंग्रजी अक्षर छापलेले आहे.

A	V	6	5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

समजा तुम्हाला कार्डासंबंधी खालील नियम सांगितले :

''कार्डाच्या एका बाजूला जर समसंख्या असेल, तर दुसऱ्या बाजूला स्वर (vowel) असेल' नियम सत्य आहे का? हे तपासण्यास कार्डावर सर्वात लहानसंख्या कोणती? अर्थातच सर्व कार्डे परतून तपासण्याचा तुम्हाला पर्याय आहे. परंतु ठराविक कमी कार्डांच्या संख्येने हे तुम्ही करू शकाल?

लक्षात घ्या, तुम्हाल सांगितलेच आहे की ज्या कार्डाच्या एका बाजूला सम संख्या असेल त्याच्या दुसऱ्या बाजुला स्वर असेल. असे सांगितलेले नाही की कार्डाच्या एका बाजूला स्वर असेल तर दुसऱ्या बाजूला समसंख्या असेलच. ती असेल किंवा असणार सुध्दा नाही. नियम असा सुध्दा सांगितलेला नाही की, कार्डच्या एका बांजुला विषम संख्या असेल तर दुसऱ्या बाजुला व्यंजन असेल. तसे असेल सुध्दा किंवा असणार पण नाही.

म्हणून, A असलेली बाजु परतण्याची गरज आहे का? नाही. तेथे दुसऱ्या बाजुला समसंख्या किंवा विषमसंख्या असेल तरी सुद्धा नियम लागू असतो.

5 चा संख्येबद्दल काय? पुन्हा आम्हाला कार्ड उलटविण्याची गरज नाही कारण तेथे दुसऱ्या बाजूला स्वर किंवा व्यंजन असेल नियम तसाच राहतो.

परंतु तुम्हाला V किंवा 6 उलटविण्याची गरज आहे, जर V च्या दुसऱ्या बाजूला समसंख्या असेल तर नियम भंग केल्यासारखे होईल तसेच 6 च्या दुसऱ्या बाजूला व्यंजन असेल तरी सुध्दा नियम भंग केल्यासारखे होईल.

हे कोडे सोडविण्यास आम्ही ज्या तंत्राचा प्रयोग केला त्याला **अनुमानिक** विचारसरणी म्हणतात. याल अनुमानिक म्हणतात कारण आम्ही निकालाशी (अनुमान काढण्यापर्यंत) किंवा तर्कशास्त्राचा उपयोग करून पूर्वी प्रस्थापीत केल्या गेलेल्या विधानापासून एक विधान प्राप्त करू शकतो. उदाहरणार्थ वरील कोड्यात, तर्कशास्त्राच्या संवादाच्या क्रमाने आम्ही अनुमान काढले की आम्हाला फक्त V आणि 6 असलेली कार्डे उलटवण्याची आवश्यकता आहे.

अनुमानिक विचारसरणी ठराविक विधान सत्य की असत्य ठरावण्यास मदत करते कारण सामान्य विधान खरे आहे हे जाणून घेण्याची ही विशेष बाब आहे. उदाहरणार्थ, एकदा आम्ही दोन विषम संख्याचा गुणाकार विषम संख्या येते हे सिध्द केले की आम्ही लगेच सांगतो की 70001×134563 हा गुणाकार विषम संख्या येते. कारण या विषम संख्या आहेत.

अनुमानिक विचारसरणी अनेक शतकांपासून मानवी विचारांचा एक अंश असून आमच्या दैनंदिन जीवनात त्याचा उपयोग प्रत्येक वेळी होत आला आहे. उदाहरणार्थ : अस विधान समजा की, सोलारिस फुल तेव्हाच उमळते जेव्हा आदल्या दिवशीचे तापमान 28°C पेक्षा जास्त असते आणि काल्पनिक दरीमध्ये 15 सप्टेंबर 2005 रोजी सोलारिस फूल फुलते अशी सत्य विधाने आहेत. नंतर अनुमानिक विचारसरणीचा उपयोग करून असा निष्कर्ष काढतो की 14 सप्टेंबर 2005 रोजी काल्पनिक दरीमध्ये तापमान 28°C पेक्षा जास्त होते.

दुर्दैवाने आम्ही आमच्या दैनंदिन जीवनात नेहमी बरोबर युक्तिवाद वापरत नाही. अनेकदा चुकीच्या युक्तिवादामुळे अनेक निष्कर्षावर येतो. उदाहरणार्थ, जर तुमचा मित्र एक दिवस भेटल्यानंतर हसला नाही तर तुम्ही समजता की तो माझ्या वर रागावलेला आहे. ‘‘ जर तो माझ्यावर रागावलेल असेल म्हणून तो माझ्याशी हसला नाही.’’ हे सुध्दा सत्य असेल की त्याचे डोके दुखत असणार म्हणून तो हसला नसेल.दैनंदिन घटनामध्ये तुम्ही काही निष्कर्षावर पडताळणी करू शकत नाही का? हे निष्कर्ष तर्कावर आधारित आहेत की नाहीत याची खात्री करा. चुकीच्या तर्कावर आधारित आहेत की बरोबर तर्कावर आधारित आहेत याची खात्री करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 1.2

1. खालील प्रश्नांची उत्तरे देण्यास आनुमानिक विचारसणीचा उपयोग करा.

   (i) मानव हा सस्तन प्राणी आहे. सर्व सस्तनी पृष्ठवंशीय असतात. या दोन विधानावर आधारित तुम्ही मानवाबद्दल काय निष्कर्ष काढू शकाल?

   (ii) ॲन्थोनी हा एक न्हावी आहे. दिनेशने त्याचे केस कापले. तर ॲन्थोनीने दिनेशचे केस कापले असा निष्कर्ष तुम्ही काढू शकाल?

   (iii) मंगळ ग्रहावरील रहिवाशांची जीभ लाल आहे. गुलग हा मंगळावरील आहे. या दोन विधानांच्या आधारे गुलग बद्दल तुम्ही काय निष्कर्ष काढाल?

   (iv) एका ठराविक दिवशी चार तासापेक्षा जास्त पाऊस पडला की दुसऱ्या दिवशी गटारी स्वच्छ कराव्या लागतात. आज 6 तास पाऊस पड़ला तर गटारींच्या उद्याच्या स्थितीबद्दल तुम्ही काय निष्कर्ष कराल?

   (v) खालील व्यंगचित्रात गाईच्या युक्तीवादात कोणता विरोधाभास आहे?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. पुन्हा एकदा तुम्हाला चार कार्डे दिली, प्रत्येक कार्डाच्या एका बाजूला एक संख्या छापलेली आहे आणि दुसऱ्या बाजूला इंग्रजी मुळाक्षर छापले आहे. त्यापैकी फक्त दोन कार्डे परतून पाहिल्यास खालील नियम शक्य आहेत काय?

   ''जर एखाद्या कार्डाच्या एका बाजूला व्यंजन असेल तर दुसऱ्या बाजूला विषम संख्या पाहिजे.''

B	3	U	8

A 1.4. प्रमेय, अनुमान आणि मूलतत्वे

आतापर्यंत आपण काही विधाने आणि त्यांची विधीग्राह्यता तपासणे याबद्दल चर्चा केलेली आहे. या भागामध्ये तुम्ही तीन वेगवेगळ्या प्रकारच्या वाक्यामधील भेद काय आहेत याबद्दल अभ्यास कराल. गणित हे खालील तीन विधानापासून बनलेले आहे ती म्हणजे. प्रमेय, अनुमान आणि मुलतत्वे.

आतापर्यंत तुम्ही काही प्रमेयांची माहिती घेतलेलीच आहे. तर सांगा प्रमेय म्हणजे काय?

उदाहरणार्थ खालील सर्व विधाने ही प्रमेय आहेत ते कसे हे भाग A 1.5 मध्ये पहाल.

प्रमेय A 1.1 त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज 180°C आसते.

प्रमेय A 1.2 दोन सम नैसर्गिक संख्याचा गुणाकार सम आसते.

प्रमेय A 1.3 कोणत्याही तीन क्रमवार नैसर्गिक सम संख्यांच्या गुणाकाराला 16 ने निःशेष भाग जातो.

अनुमान हे असे विधान आहे जे गणिताचे पूर्वज्ञान आणि अनुभव यावरूनच मांडले जाते. म्हणजेच आपल्या गणितातील अंतर्ज्ञान (तात्कालीन ज्ञानावरून) अनुमान हे सत्य असेल किंवा असत्य असेल. जर आपण ते सिध्द केले तर त्याला प्रमेय म्हणतात. गणितज्ञ एखादे अनुमान घेवून त्याचा नमुना पाहून बुध्दीच्याचातुर्याने त्याचा तर्क व अनुमानाचे प्रयोग करतात. आता आपण काही नमुने घेवून त्यावर बुध्दीच्याचातुर्याने तर्क कसे करता येते ते पाहू.

उदाहरण 4: कोणत्याही तीन क्रमावर समसंख्या घ्या आणि त्यांची बेरीज करा.

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$4 + 6 + 8 = 18$$

$$6 + 8 + 10 = 24$$

$$8 + 10 + 12 = 30$$

$$20 + 22 + 24 = 66$$

या बेरजेवरून तुम्ही काही नमुने तयार करू शकाल का? त्याबद्दल तुम्ही काय अनुमान देऊ शकाल?

उकल : अनुमान असे असेल

(i) तीन क्रमवार समसंख्याची बेरीज ही सम असते.

(ii) तीन क्रमवार समसंख्यांच्या बेरजेला 6 ने भाग जातो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5: संख्याचा खालील नमुना घेवूया त्याला पास्कलचा त्रिकोण असे म्हणतात.

ओळ		संख्यांची बेरीज़
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

7 व्या आणि 8 व्या ओळीतील अंकांच्या बेरजेबद्दल तुम्ही कोणता अनुमान काढाल? 21 व्या ओळीतील अंकांची बेरीज किती असेल? तुम्ही हा नमुना पाहिलात? तर्क करून n व्या ओळीतील अंकांची बेरीज काढण्याचे सूत्र तयार करा.

उकल:

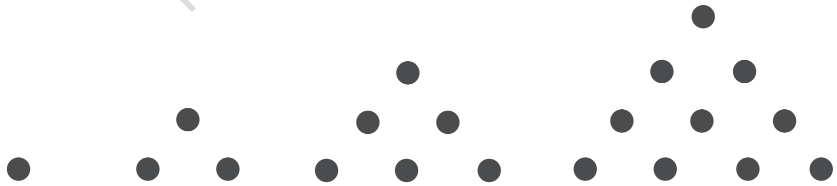
7 व्या ओळीतील संख्यांची बेरीज = $2 \times 32 = 64 = 2^6$

8 व्या ओळीतील संख्यांची बेरीज = $2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 व्या ओळीतील संख्यांची बेरीज = 2^{20}

n व्या ओळीतील संख्यांची बेरीज = 2^{n-1}

उदाहरण 6: खालील नमुन्याकडे पहा. समजा T_n ही एक त्रिकोणी संख्या आहे..



T_1 T_2 T_3 T_4

आकृती A 1.1

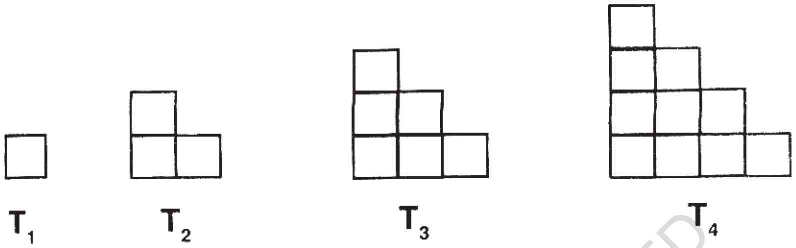
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे टिंबांची रचना त्रिकोणाच्या आकारात केली आहे.

येथे $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ .... आणि इत्यादि तर T_5 च्या किंमतीचा अंदाज करा? T_6 किती असेल? तसेच T_n किती असेल?

T_n बद्दल अनुमान करा.

तुम्ही खालील प्रमाणे आकृत्या काढून घेतल्यास मदत होईल.



आकृती A 1.2

उकल :

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

अनुमान बद्दलचे एक महत्वाचे उदाहरण आपल्या समोर येत आहे (जे आतापर्यंत सत्य की असत्य हे सिध्द केलेले नाही) ते म्हणजे गोल्डबॅचचे अनुमान. जे एक महान गणितज्ञ ख्रिस्तियन गोल्डबॅचच्या (1690–1764) नावावरून आले आहे.

हे अनुमान असे सांगते की ? 4 पेक्षा मोठा सम पूर्णांक हा दोन विषम मुळसंख्याच्या बेरजेमध्ये व्यक्त करता येतो.

आपण सुध्दा हे सत्य की असत्य हे पडताळून पाहू शकता.

तुम्ही कदाचित आश्चर्यचकित झाला असाल.

कदाचित् गणितात आपल्या समारे येणाऱ्या सर्व गोष्टीची सिध्दता देऊ शकतो. आणि जर नाही तर का नाही?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हे खरे आहे की गणितातील प्रत्येक क्षेत्र हे काही विधानावर अवलंबून असते जे कोणत्याही सिध्दते शिवाय ग्राह्य मानली जाते. जी स्वयं सिध्द सत्य आहेत या विधानाना मूलतत्वे म्हणतात. प्रकरण – 5 मध्ये आपण युक्लिडची मूलतत्वे आणि गृहीततत्वे याबद्दल अभ्यास केला आहात. (अलिकडे आम्ही मुलतत्वे व गृहिततत्वे या मध्ये भेद करत नाही).

उदाहरणार्थ : युक्लिडच्या पहिल्या गृहिततत्वानुसार कोणतेही दोन बिंदू जोडून एक सरळ रेषा काढता येते आणि तिसऱ्या गृहितत्वानुसार एखादा सरळ रेषाखंड दिला असता रेषाखंड ही त्रिज्या आणि त्याचा अंत्यबिंदू मध्य घेवून वर्तुळ काढता येते.

वरील विधाने पूर्णपणे सत्य आहेत आणि युक्लिडने ती सत्य आहेत असे ग्राह्य मानले. का? कारण सर्व काही आम्ही सिध्द करू शकत नाही. आणि आपण कोठून तरी सुरुवात ही केलीच पाहिजे. काही विधाने खरी आहेत असे आम्ही घेतले पाहिजे आणि आपले ज्ञान हे तर्कशास्त्राच्या नियमानुसार मूल–तत्वाचा वापर करून मजबूत केले पाहिजे.

आपण आश्चर्यचकित झाला असाल की ही विधाने स्वयंसिध्द असून सुध्दा आपण त्याच सर्व विधानांना खरी म्हणून का स्विकारु शकत नाही. याला अनेक कारणे आहेत. अनेकदा आपले तर्कज्ञान चुकीचे असू शकते. चित्रे किंवा नमुने फसवू शकतात आणि खात्रीने एकच पर्याय असतो की ते सिध्द करण्यासाठी काहीतरी सत्य असते. उदाहरणार्थ, आम्ही सर्वजण हे मानतो की एका अंकाने दूसऱ्या अंकाला गुणले असता येणारा गुणाकार हा त्या दोन्ही अंकापेक्षा मोठा असतो पण आम्हाला माहीत आहे की हे नेहमीच खरे नसते उदाहरणार्थ, $5 \times 0.2 = 1$ येथे 1 हा 5 पेक्षा लहान आहे.

आकृती A 1.3 पहा. AB किंवा CD यापैकी

कोणता रेषाखंड लांब आहे?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती A 1.3

येथे दोन्ही रेषाखंड हे समान लांबीचे आहेत, तरीपण AB हा लहान दिसतो.

मुलतत्वांच्या सत्यपणाबद्दल तुम्हांला आश्चर्य वाटत असेल परंतू मुलतत्वे ही आपल्या आंतर्ज्ञानाचा आधार घेऊन व त्यांच्या स्वयंसिध्द माहितीवरून निवडली जातात. त्यामुळे आपण मुलतत्वांना सत्य म्हणून स्विकारतो. असे असुनसुध्दा आपणास असे आढळून आले की एखादे मुलतत्व चुकीचे असू शकते. याशक्यतेच्या विरुध्द बचाव काय? आम्ही पुढील क्रम घेतो.

(i) मुलतत्वामध्ये अति खोलवर न जाता साध्य परिस्थितीत फक्त मूलतत्वे आणि युक्लिडची पाच गृहीततत्वे घेवून आही शेकडो प्रमेय सिध्द करू शकतो.

(ii) हे निश्चित करा की मूलतत्वे ही सुसंगत आहेत.

आम्ही असे समजू की सर्व मूलतत्वे ही सुसंगत नाहीत, जर आम्ही एक मुलतत्व हे वापरून दूसरे मूलतत्व चूकीचे आहे हे दर्शविले तर. उदाहरणार्थ : खालील दोन विधाने लक्षात घेवून आम्ही मूलतत्वे ही सुसंगत नाहीत हे दाखवू शकतो.

विधान 1 : कोणतीही पूर्ण संख्या ही तिच्या पुढील संख्येपेक्षा मोठी नसते.

विधान 2 : एका पूर्ण संख्येला शून्याने भागले असता एक पूर्ण संख्याच मिळते.

(लक्षात ठेवा, शून्याने भागले असता (∞) व्याख्या न करणारे उतर येते. पण कांही क्षणापुरते आपण हे सत्य मानून काय होते ते पाहू).

विधान 2 चुकीचे मूलतत्व हे आता किंवा नंतर नक्कीच उत्तराला विरोध दर्शविते. आम्ही असे मानू की नक्कीच येथे विरोध आहे, जेव्हा एक विधान आणि त्याचेच नकारात्मक विधान ही दोन्ही विधाने सत्य आढळतात.

उदाहरणार्थ : वरील विधान 1 आणि विधान 2 पुन्हा घ्या.

विधान 1 वरून आम्ही $2 \neq 1$ हे सिध्द करू शकतो.

आता $x^2 - x^2$ चे अवयव खालील दोन पध्दतीने घेवू.

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ आणि

(ii) $(x^2 - x^2) = (x + x)(x - x)$ | $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ नुसार

म्हणून $x(x - x) = (x + x)(x - x)$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विधान 2 वरून दोन्ही बाजूमधील $(x - x)$ नाहीसे करून

$x = 2x$ हे मिळते

यावरून हे सिध्द होते कि $2 = 1$.

म्हणजेच आपल्याकड़े $2 \neq 1$ आणि त्याचे नकारात्मक $2 = 1$

ही दोन्ही विधाने सत्य आहेत. हाच विरोधाभास आहे. चुकीचे मूलतत्व घेतल्यामुळे हा विरोधाभास उद्भवला. जे पूर्ण संख्येला शून्याने भागले असता पूर्ण संख्यांच मिळते.

म्हणून आम्ही जी विधाने मूलतत्वे म्हणून घेतो त्यांच्या बाबतीत भरपूर विचार विनिमय आणि सुक्ष्मदृष्टि पाहिजे. आपण हे नक्की केले पाहिजे की ही विधाने असातत्य किंवा तर्कशुद्ध विरोधाभास दर्शविणार नाहीत. शिवाय मूलतत्वाची निवड ही काही वेळा आम्हाला नविन शोधाकडे घेवून जातात. प्रकरण 5 मध्ये आपणाला 5 व्या गृहिततत्वाबद्दल तसेच युक्लीडच्या भूमिती बद्दल माहिती आहेच. आपण पाहिलाच आहात की गणितज्ञांच्या मते पाचवे गृहिततत्व हे गृहिततत्व नसून तो एक प्रमेय आहे जो चौथ्या गृहीततत्वाच्या सहाय्याने सिध्द करता येतो. अद्भूतरित्या या सर्व प्रयत्नातून युक्लीडच्या भूमितीचा शोध लागला.

या भागाच्या शेवटी पुन्हा एकदा मूलतत्व, प्रमेय आणि अनुमान या मधील फरकाबद्दल उजळणी करूया.

गणिती विधाने जी स्वयंसिद्ध आहेत आणि कोणत्याही पुराव्याशिवाय ग्राह्य मानली जातात त्याना मूलतत्वे म्हणतात.

गणिती विधाने, ज्यांची सत्यता ही अजून सिध्द व्हायची आहे. त्यांना **गृहिततत्वे** म्हणतात. आणि जे गणिती विधान तर्कशुध्द पध्दतीने सिध्द करता येते त्याला **प्रमेय** म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

स्वाध्याय A 1.3

1. कोणत्याही तीन क्रमवार समसंख्या घेऊन त्यांचा गुणाकार करा. उदाहरणार्थ $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ इत्यादी अशा गुणाकाराबद्दल तीन अनुमान तयार करा.

2. पुन्हा एकदा पास्कलचा त्रिकोण घ्या.

   पहिली ओळ : $1 = 11^0$

   दुसरी ओळ : $11 = 11^1$

   तिसरी ओळ : $121 = 11^2$

   चौथी ओळ आणि पाचवी ओळ याबद्दल अनुमान तयार करा. असेच अनुमान तयार होऊ शकते का पहा. तुमचे अनुमान 6 व्या ओळीलाही लागू पडते का ?

3. पुन्हा एकदा (आकृती A-1.2) त्रिकोणी संख्या पाहू. दोन संलग्न त्रिकोणी संख्यांची बेरीज करा उदा : $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$ तर $T_4 + T_5$ ची किंमत किती? , $T_{n-1} + T_n$ बद्दल अनुमान तयार करा.
4. खालील नमुना पहा.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

   खालील प्रत्येकाचे अनुमान तयार करा.

   $\left.\begin{array}{l} 111111^2 \ldots\ldots \\ 1111111^2 \ldots\ldots \end{array}\right\}$

   हे अनुमान सत्य आहे का? हे तपासा.
5. या पुस्तकात वापरलेल्या पाच मूलतत्वांची यादी करा.

A 1.5 गणिती सिध्दता म्हणजे काय?

आता आपण सिध्दतेबद्दलच्या विविध बाजू पाहू. प्रथम आपण पडताळा आणि सिध्दता यामधील फरक समजावून घेऊ. यापुर्वी तुम्ही गणितातील काही सिध्दता शिकलात, मूख्यत्वे तुम्हाला काही विधाने पडताळण्यास सांगितली जातात.

उदाहरणार्थ : कोणत्याही दोन सम संख्यांचा गुणाकार सम असतो.

हे काही संख्या घेऊन पडताळण्यास सांगितले असते. म्हणून तुम्ही कोणत्याही दोन सम संख्या सहजपणे निवडू शकता.

समजा 24 आणि 2006 यांचा गुणाकार केल्यास.

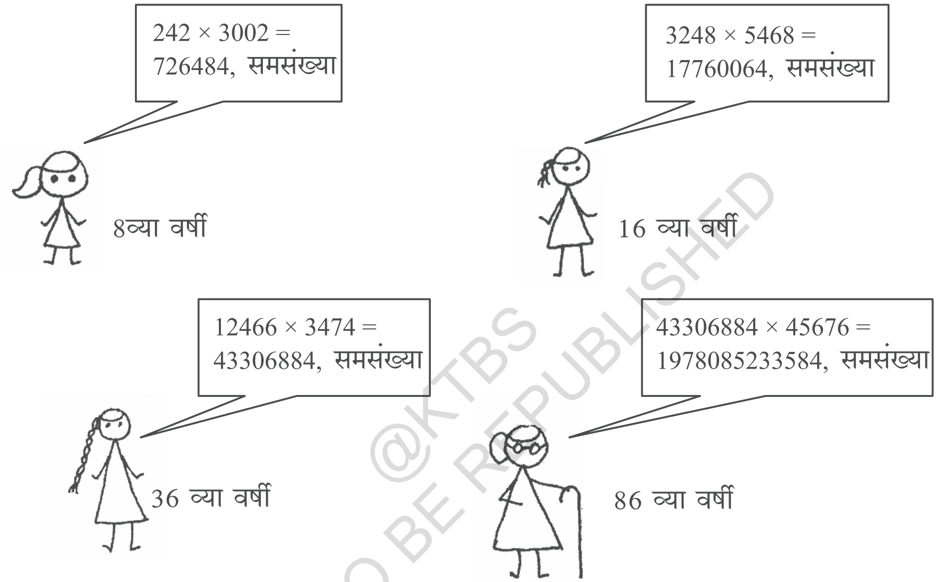
$24 \times 2006 = 48144$ ही समसंख्या मिळते. आतापर्यंत अशाप्रकारची अनेक उदाहरणे तुम्ही केली असणारच.

तसेच तुम्हाला अनेक त्रिकोण रचून त्यामधील आंतरकोनांची बेरीज करण्याचा उपक्रम वर्गामध्ये करायला सांगितला होता असेल. मोजण्यातील काही उणीवा वगळता, त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज $180°$ येते हे आढळून आले असेलच.

या पध्दतीमध्ये काय उणीवा आहेत? पडताळण्याच्या या पध्दतीमध्ये अनेक समस्या आहेत आणि दिलेले विधान सत्य आहे यावर विश्वास ठेवण्यास, हेच आपल्याला मदत करते पण आपण तरी सुध्दा खात्रीपूर्वक सांगू शकत नाही की ते सर्व घटनांसाठी सत्य आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरणार्थ : अनेक समसंख्यांच्या जोड्यांच्या गुणाकारावरून आपण हे अनुमान करू शकतो की, दोन समसंख्यांचा गुणाकार हा समसंख्याच असतो. तथापी दोन सम संख्यांचा गुणाकार सम संख्या असते याची खात्री नाही. भौतिकरित्या तुम्ही शक्य असलेल्या सर्व समसंख्यांच्या जोड्यांचा गुणाकार करताना तपासू शकत नाही. जर तुम्ही व्यंगचित्रामधील मुली सारखे करीत असाल तर तुम्ही तुमच्या उर्वरित जीवनात समसंख्याच्या जोड्यांचा गुणाकार करीत रहाल. याप्रमाणेच तुम्ही अजून असे त्रिकोण रचला नसाल ज्यांच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज 180° पर्यत येत नाही. शक्य असलेल्या सर्व त्रिकोणांच्या आंतरकोनांची बेरीज करून मोजू शकत नाही.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या शिवाय सुरवातीला पडताळणे हे अनेकदा चुकीच्या मार्गाने होते. उदाहरणार्थ, पास्कलच्या त्रिकोणावरून अनुमान करण्याची इच्छा झाली (स्वाध्याय A1.3 मधील प्र.2). आणि मागील पडताळणी वरून $11^5 \Rightarrow 15101051$ पण वास्तवात $11^5 = 161051$ आहे. म्हणून आम्हाला काही घटनांच्या बाबतीत पडताळणीवर अवलंबून राहता येत नाही. याठिकाणी आणखी एक पध्दत आहे ती म्हणजे विधानाची सिध्दता देणे.

तर्कशुध्द तत्वांचा वापर करून गणिती विधानाची सत्यता सिध्द करण्याच्या पध्दतीला **'गणिती सिध्दता'** असे म्हणतात.

घटक A-1.2 मधील उदाहरण 2 सोडविताना तुम्ही पाहू शकता की गणिती विधान असत्य असे म्हणतात. हे एक विरुध्द उदाहरण तयार करण्यास आवश्यक असते.

म्हणून जरी हजारो घटना पडताळून पाहिल्या तरी गणिती विधानाची सबलता सिध्द करू शकत नाही. तेव्हा एकच विरुध्द उदाहरण पुरेसे असते ज्यामुळे गणित चुकीचे ठरू शकते हा एकच मुद्दा अत्यंत महत्वाचा आहे.

गणिती विधान आहे चकीचे हे दाखविण्यासाठी एकच प्रत्युदाहरण शोधणे पूरेसे आहे. म्हणून $(7 + 5) = 12$ हे एक असे विरुध्द उदाहरण आहे जे सिध्द करत नाही की, दोन विषम संख्यांची बेरीज विषम संख्या असते.

आता आपण सिध्दतेमध्ये असलेल्या मूलभूत घटकांची यादी करू.

(i) प्रमेयाची सिध्दता देण्यासाठी आपल्याकडे एक स्थूल विचार असावा की त्याची कशी सुरुवात करावी याबद्दल थोडक्यात माहिती असावी.

(ii) प्रमेयामध्ये प्रथम दिलेली माहिती (गृहीत) व्यवस्थीत समजून घेऊन वापरता यावी.

उदाहरणार्थ : प्रमेय A 1.2 ची जातिप्रतिज्ञा कोणत्याहि दोन सम संख्यांचा गुणाकार हा समसंख्या असते म्हणजेच आम्हाला दोन सम नैसर्गिक संख्या दिलेल्या असतील तर आम्ही त्यांच्या गुणधर्माचा वापर केला पाहिजे.

अवयव प्रमेय मध्ये (प्रकरण 2 मध्ये) तुम्हाला एक बहूपदी दिलेली आहे आणि सांगितले आहे की $p(a) = 0$ हे वापरून तुम्हाला $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे हे दाखवायचे आहे.

त्याप्रमाणेच अवयव प्रमेयाच्या व्यत्यास (converse) सुध्दा जर $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असेल तर वरील गृहितक वापरून तुम्हाला $p(a) = 0$ हे सिध्द करावयाचे असते.

प्रमेयाची सिध्दता मांडताना काही वेळेला तुम्हाला रचना सुध्दा करावी लागते. उदाहरणार्थ : त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज $180°$ आहे हे सिध्द करण्यासाठी वरील शिरोबिंदूतून पायाला समांतर रेषा काढून समांतर रेषांचे गुणधर्म वापरू शकता.

(iii) सिध्दतामध्ये आपण अनेक गणिती विधाने क्रमाने मांडू शकतो सिध्दते मधील प्रत्येक गणिती विधान हे सिध्दतेमध्येच मागे तर्कशुध्द पध्दतीने तयार केलेल्या विधानावरून, किंवा पूर्वीच्या प्रमेयाच्या सिध्दतेवरून किंवा मूलतत्व किंवा गृहितकावरून मांडू शकता.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) प्रमेयामध्ये जी गोष्ट सिध्द करावयाची आहे ती सिध्द करण्यासाठी. गणितातील सत्य विधानांचे निष्कर्ष हे तर्कशुध्द पध्दतीने क्रमाने मांडून करू शकतो.

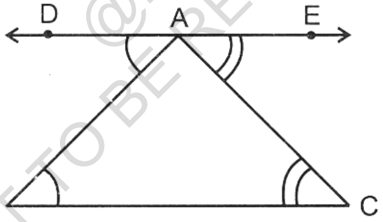
वरील सर्व घटकांचा अभ्यास करण्यासाठी आम्ही प्रमेय A 1.1 आणि त्याची सिध्दता याचे पृथःकरण पाहू. हा प्रमेय तुम्ही या पूर्वी प्रकरण 6 मध्ये शिकला आहातच. प्रमेयाची सिध्दता मांडण्यासाठी आकृती काढणे फार महत्वाचे आहे. तथापि सिध्दतेमधील प्रत्येक विधान हे तर्क करूनच सिध्द करावे लागते. अनेकदा आम्ही असे ऐकले आहे कि विद्यार्थी अशी विधाने करतात की हे दोन कोन समान आहेत कारण ते आकृतीत समान दिसत आहेत. किंवा तो कोन 90° चा आहे कारण त्या दोन बाजू एकमेकांना लंब आहेत अशा दिसत आहेत. अशाप्रकारे दिसण्यावरून फसव्या गोष्टीपासून सावध रहा. (लक्षात ठेवा आकृति A 1.3)

म्हणून आता आपण प्रमेय A 1.1 पाहू.

प्रमेय A1.1: **त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतर कोनांची बेरीज** 180° **असते.**

सिध्दता: ABC हा एक त्रिकोण आहे (आ. A 1.4 पहा)

आम्हाला $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ आहे असे सिध्द केले पाहीजे. ...... (1)



आकृती A1.4

A मधून जाणारी $\overline{BC}$ ला समांतर असणारी DE ही रेषा काढा. ...... (2)

DE रेषा BC ला समांतर आहे आणि AB हि छेदिका आहे म्हणून $\angle DAB$ आणि $\angle ABC$ हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

म्हणून प्रकरण 6 मधील प्रमेय 6.2 वरून ते समान आहेत.

म्हणजेच $\angle DAB = \angle ABC$ ...... (3)

त्या प्रमाणेच $\angle CAE = \angle ACB$ ...... (4)

यावरून $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ ...... (5)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पण $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$ कारण हे सरळ रेषा तयार करतात ...... (6)

आता आपण सिध्दतेमधील प्रत्येक पायरीवर चर्चा करूया.

पायरी (1) : आपला प्रमेय हा त्रिकोणाच्या गुणधर्मा संबंधित आहे म्हणून आपण त्रिकोणापासून सुरुवात करूया. .

पायरी (2) : हा पुढील गोष्टीतील माहिती देणारा एक मुद्दा आहे किंवा यावरून प्रमेय सिध्द करण्यासाठी कसे पुढे जायचे या बद्दल ज्ञान देते. अनेकदा भौमितीक सिध्दता देताना रचनेची गरज असते.

पायरी (3) आणि (4) : समांतर रेषा DE आणि BC यांच्या वस्तुस्थिति वरून आम्ही हा निष्कर्ष काढू शकतो की

$\angle DAE = \angle ABC$ आणि $\angle CAE = \angle ACB$ (रचना) आणि पुर्वी सिध्द केलेला प्रमेय 6.2 ज्याची जातिप्रतिज्ञा आहे दोन समांतर रेषांना एक छेदिका छेदत असेल तर तयार होणारे व्युत्क्रम कोन समान असतात.

पायरी 5 : या ठिकाणी आम्ही यूकलिडचे मूलतत्व वापरू (प्रकरण 5 पहा) ज्याची व्याख्या आहे समान घटकात समान घटक मिळविल्यास उत्तर समान येते. जे सिध्द करते

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$

म्हणजेच त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज ही एक रेषेवर तयार होणाऱ्या कोनांच्या बेरजे इतकी असते.

पायरी 6 : या ठिकाणी आम्ही संलग्न कोनांची जोड़ी चे मूलतत्व प्रकरण 6 मधील वापरव शकतो. ज्याची व्याख्या आहे.

एका सरळ रेषेवर तयार होणाच्या सर्व कोनांची बेरीज 180° असते.

जो सिद्ध करते $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$

पायरी 7 : येथे युक्लीडचे मूलतत्व वापरू शकतो ज्याची व्याख्या आहे.

जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात ते परस्परांशी समान असतात. यावरून निष्कर्ष मिळतो.

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$

सूचना लक्षात ठेवा पायरी 7 मधील तत्व प्रमेयामध्ये वापरतो तो प्रमेय सिध्द केला आहे.

आता आपण A 1.2 आणि A 1.3 मधील हे दोन प्रमेय कोणत्याही पृथःकरणा शिवाय सिध्द कर शकतो .

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय : A 1.2

कोणत्याही दोन समसंख्यांचा गुणाकार समसंख्यांच असते.

सिध्दता : समजा x आणि y या दोन सम संख्या आहेत. आम्हाला हे सिध्द करावयाचे आहे की xy ही समसंख्या आहे.

x आणि y या समसंख्या आहेत म्हणून त्याना 2 ने भाग जातो. म्हणून त्यांना $x = 2m$ आणि $y = 2n$ स्वरूपात मांडू शकतो. जेथे m व n या कोणत्याही नैसर्गिक संख्या आहेत.

आता $xy = 4mn$

$4mn$ ला 2 ने भाग जातो म्हणून xy ला 2 ने भाग जातो

$\therefore$ xy ही समसंख्या आहे.

प्रमेय : A 1.3 कोणत्याही तीन क्रमवार नैसर्गिक सम संख्याच्या गुणाकारालाला 16 ने भाग जातो.

सिध्दता: कोणत्याही तीन क्रमवार सम संख्या $2n, 2n + 2$ आणि $2n + 4$ या स्वरूपात असू शकतात ज्यामध्ये n ही कोणतीही नैसर्गिक संख्या आहे. आम्हाला हे सिद्ध करावयाचे आहे की यांचा गुणाकार $(2n) \times (2n + 2) \times (2n + 4)$ या ला 16 ने भाग जातो.

$(2n) \times (2n + 2) \times (2n + 4)$
$= 2n \times 2\,(n + 1) \times 2\,(n + 2)$
$= 2 \times 2 \times 2n\,(n + 1)\,(n + 2)$
$8n\,(n + 1)\,(n + 2)$

आता आपल्याकडे दोन घटना आहेत. n ही सम संख्या असेल किंवा विषम. आता आपण प्रत्येक घटनेचा तपास करू.

समजा n ही सम संख्या आहे :

म्हणून आम्ही लिहू शकतो $n = 2m$ जेथे m ही एक नैसर्गिक संख्या आहे.

आणि आता

$$2n \times (2n + 2)\,(2n + 4) = 8(2m)\,(2m + 1)\,(2m + 2)$$
$$= 16\,m\,(2m + 1)\,(2m + 2)$$

म्हणून $2n\,(2n + 2)\,(2n + 4)$ ला 16 ने भाग जातो.

पुढे जर n ही विषम संख्या आहे तर $n + 1$ ही विषम संख्या आहे.

म्हणून आम्ही लिहू शकतो $n + 1 = 2r$ जेथे r ही कोणतीही नैसर्गीक संख्या आहे.

$\therefore$ म्हणून $2n\,(2n + 2)\,(2n + 4) = 8n\,(n + 1)\,(n + 2)$
$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$
$$= 16r\,(2r - 1)\,(2r + 1)$$

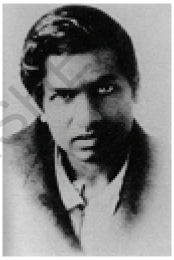
म्हणून $2n\,(2n + 2)\,(2n + 4)$ ला 16 ने भाग जातो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून दोन्ही घटनामध्ये आम्ही सिध्द केले आहे की कोणत्याही तीन क्रमवार समसंख्यांच्या गुणाकाराला 16 ने भाग जातो.

यावरून आम्ही काही निष्कर्ष व्यक्त करू शकतो की औपचारिकरित्या सिध्दता लिहणे आणि गणिताच्या पध्दतीने सिध्दता तयार करणे यामधील फरक कसा असतो. वर नमूद केल्या प्रमाणे प्रत्येक सिध्दतेला एखादे कारण असतेच (काही वेळेला एकापेक्षा जास्त). गणितज्ञाजवळ असलेले अंतःर्ज्ञान हेच एक केंद्रबिंदू आहे जे विचार करायला आणि निष्कर्ष निश्चित करायला मदत करते. अनेकदा प्रेमेयाची सिध्दता लिहताना गणिततज्ञाजवळ अनेक गोष्टी असतात पण त्या योग्य क्रमात नसतात. पण योग्य सिद्धता लिहित असताना गणिततज्ञ आपल्या तर्कज्ञानाचा वापर करून. भरपूर विचार करत आणि उदाहरणे घेवून योग्य क्रमात मांडण्याचा प्रयोग करतो. आपल्याकडे असलेल्या सर्जनशील कलेचा वापर करून हे सर्व वाद विवादात्मक वाक्ये एकत्रीत लिहिल्यानंतरच योग्य सिध्दता मिळते.

थोर भारतीय गणिततज्ञ श्रीनिवास रामानुजन यांनी अनेक उच्च प्रतिच्या क्लृप्त्या वापरून अनेक गणिती विधाने तयार करून ठेवली आहेत आणि ती सत्य आहेत असा त्यानी दावा केला आहे. त्यापैकी अनेक सत्य आहेत असे सिध्द झाले असून ती प्रसिध्द प्रमेय म्हणून आम्ही स्विकारले आहे. तरी सुध्दा आज ही संपूर्ण जगभरातील काही गणितज्ञ यांचे हे अनुमान सत्य (किंवा असत्य) ठरविण्यासाठी प्रयत्न करीत आहेत.



श्रीनिवास रामानुजन
(1887–1920)
आकृती A1.5

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 1.4

1. खालील विधानांना असत्य सिध्द करण्यासाठी विरोधी उदाहरणे (प्रत्युदाहरणे) द्या.
   (i) जर दोन त्रिकोणाचे संगत कोन समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.
   (ii) चारी बाजू समान असणाऱ्या चौकोनाला चौरस म्हणतात.
   (iii) चारी कोन समान असणाऱ्या चौकोनाला चौरस म्हणतात.
   (iv) जर a आणि b हे कोणतेही दोन पूर्णांक असतील तर $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
   (v) n ही कोणतीही पूर्ण संख्या असेल तर $2n^2 + 11$ ही मूळ संख्या आहे.
   (vi) $n^2 - n + 41$ ही मूळ संख्या आहे.
2. तुमच्या आवडीची कोणतीही एक सिध्दता घ्या आणि वरील भागामध्ये जसे दिले आहे तसे त्याचे प्रत्येक पायरीला विश्लेषण करा. (गृहीत म्हणजे काय? प्रमेय म्हणजे काय? काय सिध्द केले आहे, कोणते मूलतत्व वापरले इत्यादी)

3. कोणत्याही दोन विषमसंख्यांची बेरीज ही सम असते हे सिध्द करा.
4. कोणत्याही दोन विषमसंख्यांचा गुणाकार ही विषम संख्याच असते हे सिध्द करा.
5. कोणत्याही तीन क्रमवार समसंख्यांच्या बेरजेला 6 ने भाग जातो हे सिध्द करा.
6. $y = 2x$ या समीकरणाच्या रेषेवर असंख्य बिंदू आहेत हे सिध्द करा।

   (**टीप :** कोणत्याही n पूर्णाकांच्या बाबतीत $(n,\ 2n)$ हा एक बिंदू घ्या)
7. तुम्हाला तुमच्या काही मित्रानी एखादी संख्या मनात धरायला सांगितली असणार त्या संख्येच्या बाबतीत अनेक क्रिया करायला सांगितल्या असणार आणि मूळसंख्या माहित नसतानाही तुमच्या मनातील शेवटची संख्या सांगितली असणार आणि ते कसे शक्य आहे याचा अभ्यास करा.

   (i) एक संख्या मनात धरा. तिची दुप्पट करा. त्यामध्ये नऊ मिळवा. पुन्हा तुमच्या मनातील संख्या मिळवा. नंतर तीनने भागा. पुन्हा चार मिळवा. तुमच्या मनातील संख्या वजा करा तुमचे उत्तर येईल सात.

   (ii) कोणतीही एक तीन अंकी संख्या लिहा (उदाहरणार्थ 425 तेच अंक पुन्हा एकदा लिहून 6 अंकी संख्या तयार करा (425425). तुमच्या नवीन संख्येला 7, 11 आणि 13 ने भाग जातो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A 1.6 सारांश

या अनुबंधमध्ये तुम्ही खालील गोष्टींचे अध्ययन केले आहे.

1. गणितात विधान जर नेहमी सत्य किंवा असत्य असेल तरच ते स्विकारण्याजोगे असते.
2. गणिती विधान असत्य आहे असे दाखविण्यासाठी एक विरुध्द उदाहरण पुरेसे आहे.
3. मूलतत्वे ही पुराव्या शिवाय खरी मानलेली विधाने आहेत.
4. अनुमान हे विधान ज्यावर आम्ही गणिती अंतर्ज्ञानाच्या आधारावर विश्वास ठेवून सत्य मानतो परंतू ते आम्ही सिध्द करावयाचे असते.
5. जे गणिती विधान तर्कशुध्द पध्दतीने सिध्द करता येते त्याला प्रमेय म्हणतात.
6. गणिती विधाने सिध्द करण्याचे मुख्य तर्कशुध्द साधन म्हणजे आनुमानिक युक्तिवाद (विचारसरणी) आहे.
7. सिध्दता ही एका नंतर एक येणाऱ्या गणिती विधानांच्या क्रमाने तयार होते. सिध्दतेमधील प्रत्येक विधान मागील माहितीच्या विधानावरून तर्कशुध्दपणे मांडलेले असते. किंवा पूर्वी सिध्द केलेल्या प्रमेयावर किंवा मूलतत्वावर किंवा गृहित प्रमेयावर अनुमानित केलेले असते.

उत्तर सूची

स्वाध्याय 1.1

1. होय, $0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}$ इत्यादी, प्रत्येक q ला देखील ऋण पूर्णांक मानले जाऊ शकते.

2. 3 आणि 4 या संख्यांच्या दरम्यान अनेक परिमेय संख्या असू शकतात त्या मिळविण्याची एक पध्दत आहे. $3=\frac{21}{6+1}$ आणि $4=\frac{28}{6+1}$ तेंव्हा सहा संख्या मिळतात त्या म्हणजे $\frac{22}{7},\frac{23}{7},\frac{24}{7},\frac{25}{7},\frac{26}{7,},\frac{27}{7}$

3. $\frac{3}{5}=\frac{30}{50}$, $\frac{4}{5}=\frac{40}{50}$ म्हणून, पाच परिमेय संख्या $\frac{31}{50},\frac{32}{50},\frac{33}{50},\frac{34}{50},\frac{35}{50}$.

4. (i) सत्य आहे. कारण पूर्ण संख्याच्या संग्रहात सर्व नैसर्गिक संख्या असतात.

   (ii) असत्य आहे. उदा -2 ही एक पूर्ण संख्या नाही.

   (iii) असत्य आहे उदा. $\frac{1}{2}$ ही परिमेय संख्या असली तरी ती पूर्णांक संख्या नाही.

स्वाध्याय 1.2

1. (i) सत्य आहे, कारण वास्तव संख्याचा सट परिमेय आणि अपरिमेय संख्यानी बनलेला असतो.

   (ii) असत्य आहे, कारण कोणतीही ऋण संख्या कोणत्याही नैसर्गिक संख्येचे वर्गमूळ असू शकत नाही.

   (iii) असत्य आहे, उदाहरणार्थ 2 ही वास्तव संख्या असली तरी ती अपरिमेय नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. नाही, उदाहरणार्थ $\sqrt{4} = 2$, एक परिमेय संख्या आहे.

3. आ. 1.8 मध्ये दाखवलेली क्रिया अनेकवेळा करा. प्रथम $\sqrt{4}$ मिळवा आणि त्यानंतर $\sqrt{5}$ मिळवा.

स्वाध्याय 1.3

1. (i) 0.36 सांत

(ii) $0.\overline{09}$ अखंड आवर्ती

(iii) 4.125 सांत

(iv) $0.\overline{230769}$ अखंड आवर्ती

(v) $0.\overline{18}$ अखंड आवर्ती

(vi) 0.8225 सांत

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overrightarrow{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overrightarrow{5714258}$,

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overrightarrow{714285}$, $\frac{6}{7}$ ℵ6 $\frac{1}{7}$ $0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [$x = 0.666......$ समजा. म्हणून $10\ x = 6.666......$ किंवा $10\ x = 6 + x$ किंवा $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (ii) $\frac{1}{999}$

4. 1 समजा. [$x = 0.9999......$ म्हणून $10x$ + $9.9999........$ किंवा $10\ x = 9 + x$ किंवा $x = \frac{9}{9} = 1$

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q च्या मुळ अवयवामध्ये केवळ 2 चा घात किंवा 5 चा घात किंवा दोन्ही घात असू शकतात.

7. 0.0100100010000 ...., 0.202002000200002.........., 0.003000300003........ .

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. 0.75075007500075000075......, 0.767076700767000767......, 0.80800800080008 ....

9. (i), आणि (v) अपरिमेय आहे, (ii), (iii) आणि (iv) परिमेय आहे.

स्वाध्याय 1.4

1. (i) अपरिमेय संख्या (ii) परिमेय संख्या

(iii) परिमेय संख्या (iv) अपरिमेय संख्या

(v) अपरिमेय संख्या

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6

(iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. याची कोणताही विसंगती नाही. हे लक्षात ठेवा की, जेव्हा कधीही एका पट्टीने किंवा अन्य कोणत्याही पध्दतीने लांबी मोजता तेव्हा तुम्हाला केवळ एक जवळचे परिमेय प्रमाण प्राप्त होते. म्हणून c किंवा d अपरिमेय आहे हे तुम्हाला कळू शकत नाही.

4. 1 आकृती. 1.17 पहा

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

स्वाध्याय 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8

(iv) $\frac{1}{5}\left[125^{-\frac{1}{3}}=\left(5^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

स्वाध्याय 2.1

1. (i) आणि (ii) एका चलपदीतील बहूपदी आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(v) तीन चलपदीतील एक बहूपदी आहे.

(iii), (iv) बहुपदी नाही, कारण या बहूपदीचे घात पूर्ण संख्या नाहीत.

2. (i) 1 (ii) −1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (वेगवेगळ्या सहगुणकाच्या सहाय्याने आणखी कांही बहूपदी तुम्ही लिहू शकता)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) वर्गीय (ii) घनबहूपदी (iii) वर्गीय (iv) रेषीय बहूपदी

(v) रेषीय बहुपदी (vi) वर्गीय (vii) घन बहूपदी

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 2.2

1. (i) 3 (ii) −6 (iii) −3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4, (iii) 0, 1, 8 (iv) −1, 0, 3

3. (i) होय (ii) नाही (iii) होय (iv) होय

(v) होय (vi) होय

(vii) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ या बहुपदीचा एक शुन्य आहे परंतु $\frac{2}{\sqrt{3}}$ बहुपदीचा शुन्य नाही

(viii) नाही

4. (i) − 5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-d}{c}$

स्वाध्याय 2.3

1. $(x + 1)$ हा (i) चा एक अवयव आहे परंतु (ii), (iii) आणि (iv) या बहुपदीचा अवयव नाही.

2. (i) होय (ii) नाही (iii) होय

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$

   (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

स्वाध्याय 2.4

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-\text{ü}x-$ (iii) $9x^2-3x-20$

   (iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984.

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$

   (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$.

4. (i) $x^{\text{ü}}+4y\ \ +16z\ \ +4xy+16yz+8xz$

   (ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

   (iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12yz+12yz-8xz$

   (iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

   (v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

   (vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$

   (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$

   (ii) $\left(-\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)\left(-2\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)$

   (iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$

(iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$ (v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 52)\left(9y^2+25z^2-15yz\right)$

(ii) $\left(4m-7n\right)\left(16m^2+49m^2+28mn\right)$

11. $(3x + y + z)\left(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz\right)$.

12. उजव्या बाजूला (RHS) सरळ रूप घ्या.

13. नित्यसमिकरण VIII मध्ये $x + y + z = 0$ घाला.

14. (i) −1260. समजा A = – 12, $b = 7$, $c = 5$ इथे $a + b + c = 0$ प्रश्न 13 मध्ये दिलेल्या उत्तराचा वापर करा.

15. (i) एक संभाव्य उत्तर आहे : लांबी = $5a-3$, रुंदी = $5a-4$.

(ii) एक संभाव्य उत्तर आहे : लांबी = $7y - 3$, रुंदी = $5y + 4$

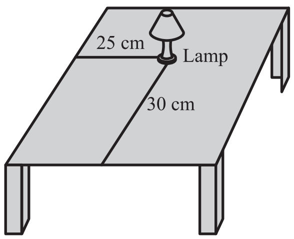
16. (i) एक संभाव्य उत्तर आहे : 3, x, आणि $x - 4$.

(ii) एक संभाव्य उत्तर आहे : $4k$, $3y + 5$.आणि $y - 1$

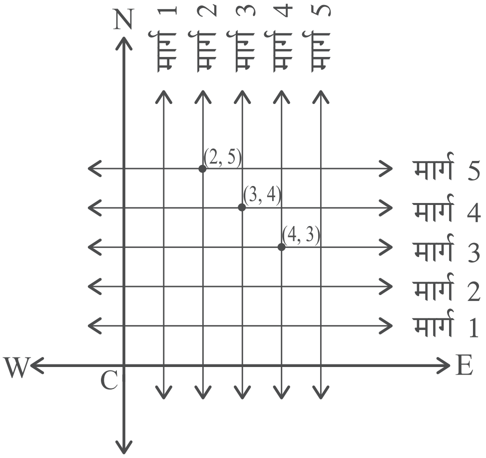
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 3.1

1. एक लँम्पला एक बिंदू समजा आणि टेबलाला एक प्रतल समजा, टेबलाचे कोणतेही दोन लांबट काटकोनी कोपरे घ्या. मोठ्या कोपऱ्यापासून लॅम्पचे अंतर मोजून घ्या. सम जा हे अंतर या 25 cm आहे. आता लहोन कोपऱ्यापासून लॅम्पचे अंतर मोजा, 30 cm आहे असे समजा. ज्या क्रमाने तुम्ही लॅम्प ठेवला आहे त्यानुसार त्याची स्थिती (30, 25) किंवा (25, 30) अशी लिहू शकता.



2. मार्गाची योजना खालील आकृतीमध्ये दाखविली आहे.



दोन्ही क्रॉस केलेले मार्ग. आकृतीत खुणा केले आहेत. ते एकमेव मिळतात. कारण दोन संदर्भरेषांमध्ये आपण स्थान निश्चितीसाठी दोन्हींचा वापर केला आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

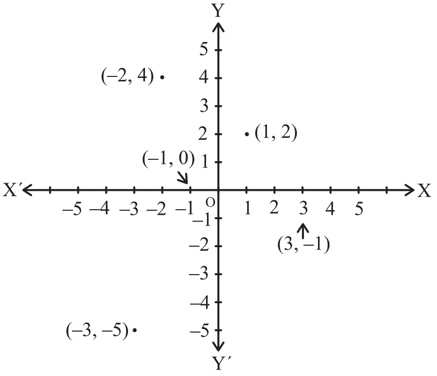
स्वाध्याय 3.2

1. (i) x – अक्ष आणि y – अक्ष
   (ii) चरण
   (iii) आरंभबिंदू

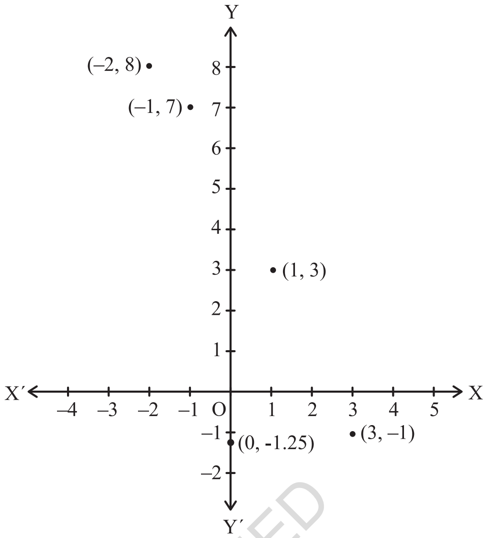
2. (i) (−5, 2) (ii) (5, − 5) (iii) E (iv) G
   (v) 6 (vi) −3 (vii) (0, 5) (viii) (−3, 0)

स्वाध्याय 3.3

1. बिंदू (−2, 4) चरण II मध्ये स्थिर आहे. बिंदू (3,1) चरण IV मध्ये स्थिर आहे. बिंदू (−1, 0) ऋण अक्ष – x व स्थिर आहे बिंदू (1, 2) चरण I मध्ये स्थिर आहे. आणि बिंदू (−3, −5) चरण III मध्ये स्थिर आहे. सोबतच्या आकृतीत बिंदूंची स्थाननिश्चिती दाखविली आहे.



2. दिलेल्या आकृतीमध्ये बिंदूचे स्थान टिंबाद्वारे दर्शविण्यात आले आहे.



स्वाध्याय 4.1

1. $x-2y=0$

2. (i) $2x+3y-9.3\overline{5}=0$; $a=2$, $b=3$, $c=-9.3\overline{5}$

(ii) $x-\frac{y}{5}-10=0$; $a=1$, $b=-\frac{1}{5}$, $c=-10$

(iii) $-2x+3y-6=0$; $a=-2$, $b=3$, $c=-6$

(iv) $1.x-3y+0=0$; $a=1$, $b=-3$, $c=0$

(v) $2x+5y+0=0$; $a=2$, $b=5$, $c=0$.

(vi) $3x+0.y+2=0$; $a=3$, $b=0$, $c=2$

(vii) $0.x+1.y-2=0$; $a=0$, $b=1$, $c=-2$

(viii) $-2x+0.y+5=0$; $a=-2$, $b=0$, $c=5$.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय 4.2

1. कारण x च्या प्रत्येक किंमतीसाठी, y ची एक क्रमबद्ध किंमत असते. आणि उलट सुलट ही किंमत असते.

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,–1).

(ii) $(1, 9-\pi)$, $(0, 9)$, $(-1, 9+\pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) (0, 0), (4, 1), (–4, 1), $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) नाही (ii) नाही (iii) होय

(iv) नाही (v) नाही

4. 7

स्वाध्याय 5.1

1. (i) असत्य : विद्यार्थी हे आपल्या डोळ्यांनी पाहू शकतात.

   (ii) असत्य : हे विधान 2.1 या गृहीतकाशी विसंगत आहे.

   (iii) सत्य. (मूलतत्व 2)

   (iv) सत्य. जर एका वर्तुळाच्या व्याप्त भागास दुसऱ्या व्याप्त भागावर ठेवले, तर ते समान असतील म्हणून यांची केंद्रे आणि सीमा संपांती असतात म्हणून त्यांच्या त्रिज्या संपाती असतात.

   (v) सत्य : युक्लीडचे पहिले गृहित

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. विद्यार्थ्यांना ज्यांची माहिती असायला हवी असे अनेक परिभाषीक शब्द आहेत. कारण यात दोन वेगवेगळ्या परिस्थितींचा अभ्यास केला जातो. म्हणजेच (i) जर A आणि B असे दोन बिंदू दिलेले असतील, तर त्यांच्या मध्ये C बिंदू असतो, (ii) जर A आणि B दिले असतील तर तुम्ही C बिंदू घेऊ शकता जो A आणि B ला छेदून जाणाच्या रेषेवर स्थिर नसतो. ही 'गृहितके' युक्लीडच्या गृहितकाचे अनुसरण करत नाहीत. तरीही ते गृहितक 2.1 चे अनुसरण करतात.

4. $AC = BC$

म्हणून $AC + AC = BC + AC$ (समान बाजू मिळविल्या)

म्हणून $2\ AC = AB$ [$BC + AC$ हे AB चे संपाती आहे]

म्हणून $AC = \frac{1}{2}\ AB$

5. तात्पुरते असे समजा की, C व D हे AB चे दोन मध्यबिंदू आहेत. जिथे C व D वेगवेगळे बिंदू नाहीत हे दाखविणार आहोत.

6. $AC = BD$ (दिलेले आहे) .... (1)

$AC = AB + BC$ (B बिंदू A व C च्या मध्ये आहे) .... (2)

$BD = BC + CD$ (C बिंदू, B आणि D च्या मध्ये आह .... (3)

(1), (2) व (3) च्या किंमती (1) मध्ये ठेवून हे दाखविला येते.

AB + BC = BC + CD समान भाग वजा करून

7. जगातील कोणत्याही भागातील कोणत्याही वस्तु संदर्भात हे सत्य आहे. त्यामुळे त्याला वैश्विक सत्य समजले जाते.

स्वाध्याय 6.1

1. 30°, 250° 2. 126°

4. एका बिंदूवरील सर्व कोनांची बेरीज = 360°

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ आणि $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$.

6. 122°, 302°

स्वाध्याय 6.2

1. 130°, 130° 2. 126°, 36°, 54°

3. 60° 4. 50°, 77°

5. आपाती कोन = परावर्तन कोन. बिंदू B वर BE ⊥ PQ काढा. बिंदू C व CF ⊥ RS काढा.

6. ΔPQR च्या सर्वकोनांची बेरीज = ΔQTR च्या कोनांची बेरीज आणि $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

स्वाध्याय A 1.1

1. (i) असत्य. वर्षामध्ये 12 महिने असतात.

(ii) संदिग्ध : एका दिलेल्या वर्षी दिवाळी शुक्रवारी असू शकते आणि असू शकत टी नाही.

(iii) संदिग्ध : 26°c वर्षात कधी कधी मागादीत असू शकते.

(iv) नेहमीच सत्य

(v) नेहमीच असत्य : कुत्रे उडू शकत नाहीत.

(vi) संदिग्ध एका लिप वर्षात फेब्रुवारी महिन्याचे 29 दिवस असतात.

2. (i) असत्य एक चौरसाच्या आंतरकोनांची बेरीज 360° असते.

(ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(v) असत्य उदा. $7 + 5 = 12$ ही विषमसंख्या नाही.

3. (i) दोन पेक्षा मोठ्या असणाऱ्या सर्व मूळ संख्या विषम असतात.

(ii) नैसर्गिक संख्येची दुप्पट ही नेहमीच सम असते.

(iii) कोणत्याही $x > 1$ साठी, $3x + 1 > 4$

(iv) कोणत्याही $x \geq 0$ साठी $x^3 \geq 0$.

(v) एका समभुज त्रिकोणात मध्यगा ही कोन दुभाजक असते.

स्वाध्याय A 1.2

1. (i) मानवाला पाठीचा कणा असतो..

(ii) नाही, दिनेश आपले केस इतर कोणत्याही दिवशी कापू शकला असता.

(iii) गुलग ची जीभ लाल आहे.

(iv) गटाराची सफाई तात्काल करायला हवी असा निष्कर्ष आपण काढतो.

(v) शेयटी असणारे सर्वच प्राणी कुत्रे असावेत हे गरजेचे नाही. उदा. बैल, माकड, मांजर या प्राण्यांनाही शेपूट असते परंतु ते कुत्रे नसतात.

2. आता तुम्ही B आणि 8 ला उलट करून पहा. दुसरीकडे 'B' जर समसंख्या असेल तर नियमभंग होतो. अशा तऱ्हेने जर दुसरीकडे 8 वर एक स्वर असेल तर नियमभंग होतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

स्वाध्याय A 1.3

3. तीन संभाव्य घटना घडण्याचे योग असे आहेत.

(i) कोणत्याही तीन क्रमवार संख्यांचा गुणाकार सम असतो.

(ii) कोणत्याही तीन क्रमवार सम संख्याच्या गुणाकारास 4 ने भाग जातो.

(iii) कोणत्याही तीन क्रमवार सम संख्यांच्या गुणाकारात 6 ने भाग जातो.

2. चौथी ओळ : $1331 = 11^3$ पाचवी ओळ : $14\,641 = 11^4$ चौथ्या व पाचव्या ओळी लागू होते नाही. कारण $6^5 \neq 15101051$

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$, $T_{n-1} + T_n = n^2$

4. $111111^2 = 12345654321$

$1111111^2 = 1234567654321$.

5. विद्यार्थ्यांचे स्वतःचे उत्तर उदाहरणासाठी युक्लीडच्या गृहितक घ्या.

स्वाध्याय A 1.4

1. (i) समान कोन, परंतु वेगवेगळ्या बाजू असणारे कोणतेही दोन त्रिकोण असू शकतात.

(ii) समभूज चौकोनाच्या बाजू समान असतात परंतू तो चौरस असलेच असे नाही.

(iii) आयताचे सर्व कोन समान असतात परंतू तो चौरस असलेच असे नाही.

(iv) $a = 3$ आणि $b = 4$ असताना विधान सत्य नाही.

(v) $n = 11$ असल्यास $2n^2 + 11 = 253$, ही मुळ संख्या नाही.

(vi) $n = 41$ असल्यास $n^2 - n + 41$ ही मूल संख्या नाही.

2. विद्यार्थ्यांचे स्वतःचे उत्तर

3. x व y या दोन विषम संख्या असल्याचे मानले. तर $x = 2m + 1$ तिथे m ही नैसर्गिक संख्या आहे. $y = 2n + 1$ तसेच n ही एक नैसर्गिक संख्या आहे. $x + y = 2 (m + n + 1)$ म्हणून $x + y$ ला 2 ने भाग जातो व समसंख्या आहे.

4. प्रश्न 3 पहा $xy = (2m + 1) (2n +1) = 2 (2mn + m + n) + 1$ म्हणून xy ला 2 ने भाग जाणार नाही, म्हणून ती विषम आहे.

5. समजा $2n$, $2n + 2$ आणि $2n + 4$ या तीन क्रमागत सम संख्या आहेत. तेंव्हा यांची बेरीज $6 (n + 1)$ आहे जीला 6 ने भाग जातो.

7. (i) समजा मूळ संख्या 'n' आहे. तेंव्हा आपण पूढील क्रियहा करतो.

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9$$
$$\rightarrow 3n + 9 \rightarrow \frac{3n + 9}{3} = n + 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow n + 3 + 4 = 7 \rightarrow n + 7 - n = 7$$

(ii) लक्ष द्या $7 \times 11 \times 13 = 1001$ आहे तीन अंकी संख्या समजा $a.b.c$ घ्या. तेंव्हा $1001 \times abc = abcabc$ असते म्हणून सहा अंकी संख्या $abcabc$ ला 7, 11 आणि 13 ने भाग जातो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS