कर्नाटक सरकार

गणित

MATHEMATICS

9

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

इयत्ता नववी

मराठी माध्यम

भाग – 2

विद्ययाऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

© KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

भाग – 2

अनुक्रमणिका

A1L2W7

अ.न.	प्रकरण	पृष्ठक्रमांक
7.	**त्रिकोण** 7.1 प्रस्तावना 7.2 एकरूप त्रिकोण 7.3 एकरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म 7.4 त्रिकोणांचे काही गुणधर्म 7.5 त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे आणखी काही गुणधर्म 7.6 सारांश	1 - 21
8.	**चौकोन** 8.1 समांतरभुज चौकोनांचे गुणधर्म 8.2 मध्यबिंदूचा प्रमेय 8.3 सारांश	22 - 34
9.	**वर्तुळ** 9.1 जीवने वर्तुळाच्या बिंदूत अंतरित केलेला कोन 9.2 जीवेच्या मध्यावरून काढलेला लंब 9.3 समान जीवा आणि त्यांचे मध्यापासूनचे अंतर 9.4 वर्तुळाच्या कंसाने अंतरित केलेले कोन 9.5 चक्रिय चौकोन 9.6 सारांश	35 - 48
10.	**हिरॉन्सचे सूत्र** 10.1 हिरॉन्सचे सूत्र वापरून त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ 10.2 सारांश	49 - 53

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11.	**पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ** 11.1 लंब वर्तुळाकार शंकूचे पृष्ठफळ 11.2 गोलाचे पृष्ठफळ 11.3 लंब वर्तुळाकार शंकुचे पृष्ठफळ 11.4 गोलाचे घनफळ 11.5 सारांश	54 - 68
12.	**सांख्यिकी** 12.1 माहिती आलेखाने दर्शविणे 12.2 सारांश	69 - 84
परिशिष्ट-2	**गणिती नमुन्यांचा परिचय** A2.1 प्रस्तावना (परिचय) A2.2 शब्दातील समस्यांचे परिक्षण A2.3 गणितामधील काही नमुने A2.4 नमुना प्रक्रियेचे फायदे आणि तोटे A2.5 सारांश	85 - 104
	उत्तरे (सुचना)	105 -110

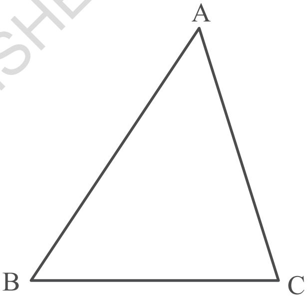
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

E5S6P8

प्रकरण – 7

त्रिकोण (Triangles)

7.1 प्रस्तावना



आकृती 7.1

मागील इयत्तेत तुम्ही त्रिकोण आणि त्याच्या गुणधर्मा विषयी अभ्यास केला आहात. तुम्हाला माहीत आहे की एका प्रतलातील तीन रेषा परस्परास अंत्यबिंदूत सांधून बंधिस्त होणाऱ्या समतल आकृतीला त्रिकोण म्हणतात. (त्रि म्हणनेच तीन) किंवा (Tri- तीन). त्रिकोणाला तीन कोन, तीन बाजू आणि तीन शिरोबिंदू असतात. उदाहरणात त्रिकोण ABC हा ΔABC असा लिहितात (आकृती 7.1 पहा) AB, BC, CA या तीन बाजू, $\angle A, \angle B, \angle C$ हे तीन कोन आणि A, B, C. हे तीन शिरोबिंदू आहेत.

प्रकरण 6 मध्ये, त्रिकोणाच्या काही गुणधर्मांचा अभ्यास तुम्ही केला आहात. या प्रकारणात तुम्ही त्रिकोणांची एकरूपता, एकरूपतेचे नियम, काही त्रिकोणांचे गुणधर्म आणि त्रिकोणांची असमानता यांचा विस्तारीत अभ्यास कराल.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

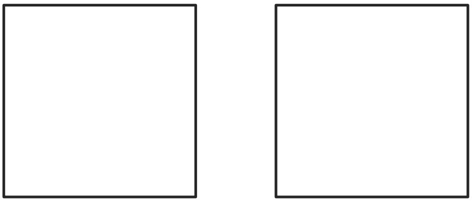
7.2 त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of Triangles)

तुम्ही पहा की, एकाच आकार असणारी तुमची दोन छायांचित्रे सारखीच (समान) असतात. त्याचप्रमाणे दोन समान आकाराच्या बांगड्या, एकाच बँकमधून घेतलेली दोन ATM कार्डे आकाने सारखीच असतात. एकाच वर्षामध्ये तयार केलेली एक रूपयाची दोन किंवा अधिक नाणी एकमेकावर ठेवल्यास ती पूर्णपणे एकमेकांना झाकून घेतात.

तुम्ही आठवू शकता का, अशा आकृतींना काय म्हणतात? तर त्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात. (एकरूपता म्हणजेच त्या आकृतीचा आकार आणि माप दोन्ही समान असते).

समान त्रिज्या असणारी दोन वर्तुळे एकमेकांवर ठेवा, काय निरीक्षण करू शकाल? ती एकमेकाशी जुळतात म्हणून आम्ही त्यांना एकरूप वर्तुळे म्हणू शकतो.

पुन्हा एक कृती करू. समान मापाचे दोन चौरस बाजू बाजूला ठेवल्यास (आकृती 7.2 पहा) किंवा दुसऱ्या चौरसावरच्या जोगेवर ठेवू किंवा दोन समान आकाराचे दोन त्रिकोण (Equilateral) एकमेकावर ठेवल्यास ते आपणास एकरूप आहेत अशी जाणिव होते.



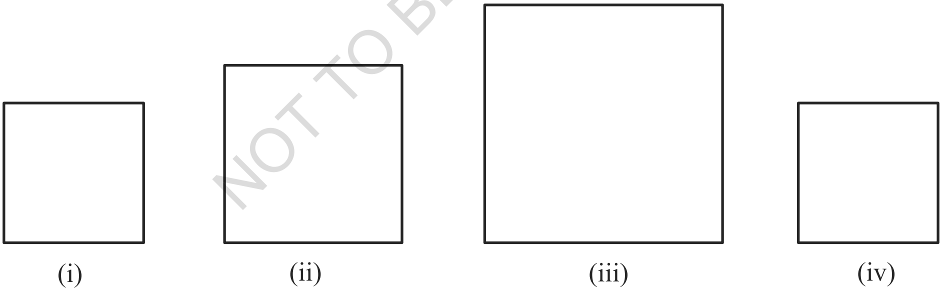
आकृती 7.2

आम्ही एकरूपतेचा अभ्यास का करुया? शितपेटीमधल्या (Refrigerator) बर्फाच्या साचाचे (ice tray) निरीक्षण करा. म्हणजेच साचामधील असलेले सर्व बर्फ एकरूपतेचे लक्षण दर्शवितात. साचामधील असलेल्या बर्फाची जागा सुध्दा एकरूपता दर्शविते. (हे सर्व आयताकृती किंवा त्रिकोणाकृती किंवा वर्तुळाकृती असू शकतात). म्हणून जेव्हा सारख्याच वस्तू बनवायच्या असतात तेव्हा असे साचे बनविण्यासाठी एकरूपतेच्या संकल्पनेचा वापर करतात.

काही वेळेला तुम्हाला तुमच्या पेनची रिफील (Refill) बदलण्यास सुध्दा अडचण येऊ शकते. जर नवीन रिफील तुमच्या पेनच्या आकाराची नसेल तर ती पेनमध्ये व्यवस्थित बसत नाही. जेव्हा जुनी रिफील आणि नवीन रिफील एकरूप असते तेव्हाच ती पेनमध्ये बसते. अशाप्रकारे आपल्या दैनंदिन जीवनामध्ये अशी अनेक उदाहरणे आहेत की ज्यामध्ये एकरूपतेचे गुणधर्म आढळतात.

तुम्ही एकरूपतेची अशी आणखीन उदाहरणे सांगू शकाल का?

आकृती 7.3 मध्ये, कोणते चौरस एकमेकांशी एकरूप नाहीत?



आकृती 7.3

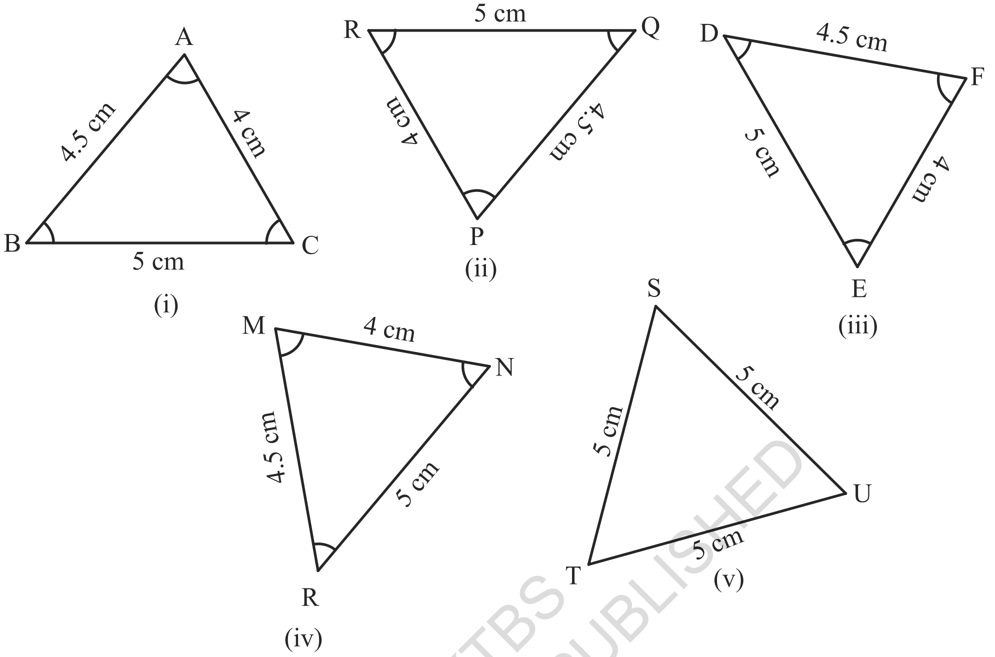
आकृती 7.3 (ii) आणि (iii) हे आकृती 7.3 (i) शी एकरूप नाहीत. पण आकृती 7.3 (iv) मधील चौरस आकृती 7.3 (i) मधील चौरसाशी आकृती एकरूप आहे.

आता दोन त्रिकोणाच्या एकरूपतेबद्दल चर्चा करू.

तुम्हाला माहीत आहे की, जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू आणि तीन कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू आणि संगत कोनाशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आकृती 7.4 (i) मध्ये दिलेल्या ΔABC शी कोणता त्रिकोण एकरूप आहे?



आकृती 7.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 7.4 (ii) ते (v) मधून प्रत्येक त्रिकोण कापून बाजूला करा आणि फिरवा आणि ΔABC ला समान होतील असे प्रयत्न करा. आकृती 7.4 (ii), (iii) आणि (iv) मधील त्रिकोण हे ΔABC शी एकरूप आहेत तसेच आकृती 7.4 (v) मधील $\Delta\ TSU$, हा $\Delta\ ABC$ एकरूप नाही.

जर ΔPQR हा ΔABC शी एकरूप आहे तर $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ असे लिहू शकतो.

जेव्हा $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ आहेत तेव्हा ΔABC चे संगत बाजू ΔPQR च्या संगत बाजूशी समान असतात आणि कोनाच्या संदर्भात असेच होते.

म्हणूनच PQ ला AB, QR ला BC, RP ला CA जूळते, $\angle P$ ला $\angle A$, $\angle Q$ ला $\angle B$ आणि $\angle R$ ला $\angle C$ जुळतो. तसेच त्यांचे अनुक्रमे शिरोबिंदू सुध्दा जुळतात. म्हणून P चा संगत शिरोबिंदू A, Q चा संगत शिरोबिंदू B, R चा संगत शिरोबिंदू C . हे आपण खालील प्रमाणे लिहू शकतो.

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

या संगत घटकावरून $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ होतात. पण $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ असे लिहिता येत नाही.

त्याचप्रमाणे 7.4 (iii) वरून

FD $\leftrightarrow$ AB, DE $\leftrightarrow$ BC आणि EF $\leftrightarrow$ CA

आणि F $\leftrightarrow$ A, D $\leftrightarrow$ B, आणि E $\leftrightarrow$ C

$\therefore$ ΔFDE $\cong$ ΔABC. पण ΔDEF $\cong$ ΔABC हे बरोबर नाही.

आकृती 7.4 (iv) आणि ΔABC हे एकरूप त्रिकोण होतात.

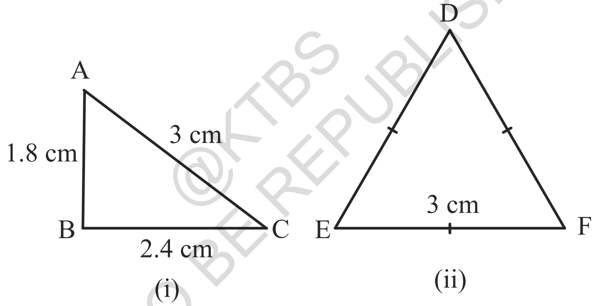
संकेतात त्रिकोणाची एकरूपता लिहिताना त्यांचे संगत शिरोबिंदू समान असले पाहिजेत.

लक्षात ठेवा की, एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक समान असतात आणि हे असे लिहितात ए.त्रि. सं.घ (एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक) किंवा CPCT (corresponding parts of congruent triangles)..

7.3 त्रिकोणाच्या एकरूपतेचे गुणधर्म

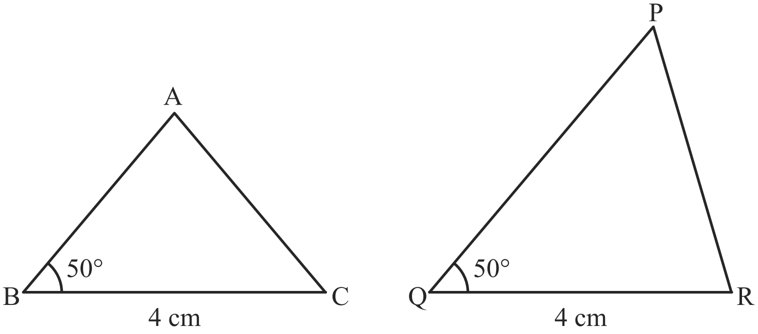
मागील इयत्तेत एकरूप त्रिकोणाच्या एकूण 4 अटी शिकला आहात. त्या आता आठवूया.

एक बाजू 3cm असणारे कोणतेही दोन त्रिकोण रचा. ते एकरूप त्रिकोण आहेत का? निरीक्षण करा की, ते एकरूप नाहीत. (आकृती 7.5 पहा).



आकृती 7.5

आता एक बाजू 4cm आणि एक कोन 50° असणारे दोन त्रिकोण रचा (आकृती 7.6 पहा) ते एकरूप होतात का?



आकृती 7.6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पहा की, हे दोन त्रिकोण एकपरूप नाहीत.

त्रिकोणाच्या जोड्यांची ही कृती पुन्हा करू.

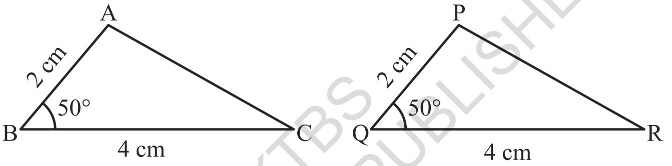
म्हणजे, त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी दिलेली समानता असणारी एक बाजूंची जोडी किंवा एक कोनांची जोड़ी इतकेच. योग्य ठरत नाही.

जर दुसरी बाजूंची जोडी ही कोनाशी समान आणि समानच असेलतर ?

आकृती 7.7 मध्ये $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ आणि तसेच $AB = PQ$ आता, ΔABC आणि ΔPQR या एकरूपतेला तुम्ही काय म्हणू शकाल?

आकृती 7.7 मध्ये ΔABC व ΔPQR पडताळा की, दिलेले दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे या संबंधीत मागील इयत्तेत शिकला आहात ते आठवा.

दुसऱ्या त्रिकोणाच्या जोड्या घेऊन ही कृती परत करा. एकरूप त्रिकोणासाठी दोन बाजू आणि त्यासंबंधीत कोनात समानता आहे असे निरीक्षण करू शकाल का?



आकृती 7.7

त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी ही पहिली अट आहे.

मुलतत्व 7.1 : एकरूपतेचे बा. को. बा. गृहितक (SAS) नियम :

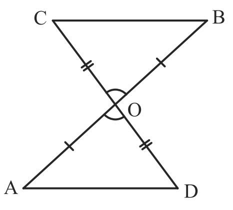
जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू आणि संगत समाविष्ट कोनाशी समान असेल तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

या गृहीतकाला या पूर्वी माहीत असलेल्या गृहीतकाच्या सहाय्याने सिध्द करता येत नाही आणि म्हणून याला एक गृहीतच्या रूपाने सत्य मानले गेले आहे.

आता यासाठी एक उदाहरण घेऊ.

उदाहरण 1 : आकृति 7.8 मध्ये $OA = OB$ आणि $OD = OC$. तर सिध्द करा की,

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ आणि (ii) $AD \parallel BC$.



आकृती 7.8

उकल : (i) ΔAOD आणि ΔBOC चे निरीक्षण करा.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\}$$ (दिलेले घटक)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तसेच जर $\angle AOD$ आणि $\angle BOC$ या शिरोविरुध्द कोनांच्या जोड्या आहेत, तर

$\angle AOD = \angle BOC$

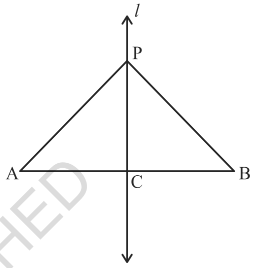
म्हणून $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (बा.को.बा. गृहीतक)

(ii) ΔAOD व ΔBOC या एकरूप त्रिकोणात इतर संगत घटक सुध्दा समान आहेत.

म्हणून $\angle OAD = \angle OBC$. आणि AD व BC रेषेशी संबंधीत असणारे हे विरुध्द कोन आहेत.

$\therefore AD \parallel BC$

उदाहरण 2 : AB ही रेषा असून या रेषेवर लंब असणारी *l* ही छेदीका आहे. जर *l* या रेषेवर P बिंदू असेल तर सिध्द करा की. A व B ला P हा समान अंतरावर आहे.



आकृती 7.9

उकल: रेषा $l \perp AB$ आणि AB मधून छेदून जाणारा C हा मध्यबिंदू आहे (आकृती 7.9 पहा). PA = PB असे आपण सिध्द करूया.

ΔPCA व ΔPCB मध्ये

$AC = BC$ (C हा AB या मध्यबिंदू)

$\angle PCA = \angle PCB = 90^o$ (दिलेले)

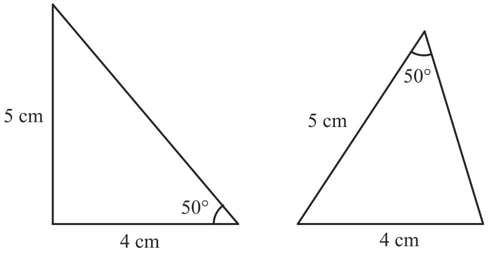
$PC = PC$ (सामाईक)

म्हणून, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (बा.को.बा गृहीतक)

आणि PA = PB, या एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू आहेत.

आता, त्रिकोणाच्या संगत बाजूशी न असणारा कोन आणि 4cm व 5cm बाजू आणि कोणताही एक कोन 50° असणाऱ्या दोन त्रिकोणाची रचना करा (आकृती 7.10 पहा).

हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत का?



आकृती 7.10

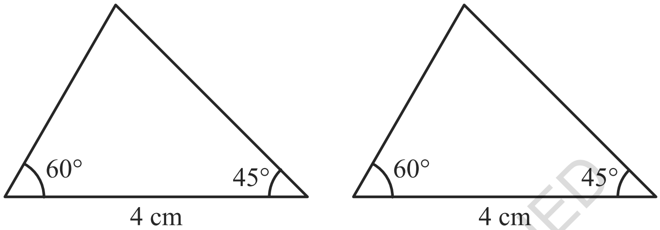
हे दोन एकरूप त्रिकोण नाहीत असे मानू.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्रिकोणाच्या काही जोड्या घेऊन ही कृती पुन्हा करू. हे त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण निरीक्षण केले आहे. यासाठी समान बाजूंची जोड़ी असणारे संबंधीत समान कोन महत्वाचे असतात.

म्हणून, बा.को.बा (SAS) हे एकरूपतेचे गृहीतक (नियम) आहे पण ते को.बा.बा (ASS) किंवा बा.बा. को (SSA) हे होत नाहीत.

नंतर, दोन त्रिकोणाची अशी रचना करा की, त्या दोन त्रिकोणाचे संगत कोन 60^o आणि 45^o असून या कोना संबंधीत 4cm ची संगत बाजू होईल. (आकृती 7.11 पहा).



आकृती 7.11

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हे दोन त्रिकोण विभक्त करून ते एकमेकावर ठेवा यासावरून काय निरीक्षण कराल? एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोनाशी पूर्णपणे झाकून जाईल. त्रिकोणाच्या काही जोड्या घेऊन ही कृती पुन्हा करू. यावरून आपण निरीक्षण कराल की, त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी दोन संगत कोनाशी समाविष्ट असणारी एक सगत बाजू पुरेशी आहे.

एकरूपतेच्या या निकालाला कोन-बाजू-कोन गृहीतक म्हणतात आणि हे को.बा.को (ASA) या स्वरूपात लिहितात. हे गृहीतक मागील इयत्तेत पडताळले आहे आता हे गृहीतक सिध्द करू.

बा.को.बा हे एकरूपतेचे गृहीतक वापरून आपण हा निष्कर्ष सिध्द करू आणि याला प्रमेय असे म्हणू..

प्रमेय 7.1: (को.बा.को गृहितक)

जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनाशी आणि एका संगत बाजूशी समान असेल तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

उकल: ΔABC व ΔDEF हे दोन त्रिकोण दिलेले आहेत.

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

आणि $BC = EF$

आपण सिध्द करू की, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

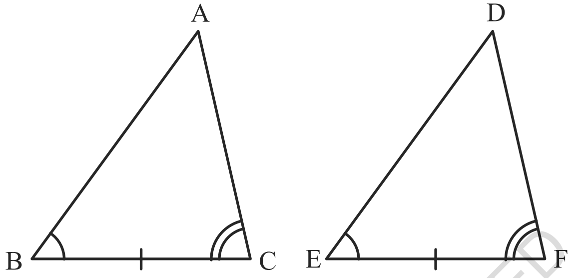
हे दोन एकरूप त्रिकोण सिध्द करण्यासाठी खालील तीन पायऱ्या दिल्या आहेत.

पयारी (i) आता $AB = DE$ (आकृती 7.12 पहा)

तुम्ही काय निरीक्षण केलात? तुम्ही निरीक्षण केला की.

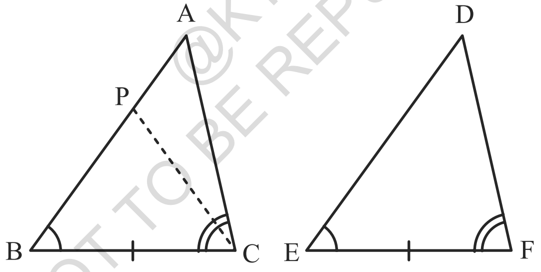
AB = DE	(मानलेले)
$\angle$ B = $\angle$ E	(दिलेले)
BC = EF	(दिलेले)

म्हणून Δ ABC $\cong$ Δ DEF (बा.को.बा. गृहीतक)



आकृती 7.12

पायरी (ii): जर AB > DE असेल तर, AB या बाजूवर P बिंदू असा घेतला की PB = DE होते. आता Δ PBC व Δ DEF मध्ये (आकृती 7.13 पहा)



आकृती 7.13

निरीक्षण करा Δ PBC व Δ DEF मध्ये

PB = DE	(रचनेवरून)
$\angle$ B = $\angle$ E	(दिलेले)
BC = EF	(दिलेले)

यावरून, Δ PBC $\cong$ Δ DEF (को.बा.को. गृहीतक)

जर संगत घटक समान असतील तर त्रिकोण एकरूप असतात.

म्हणून,	$\angle$ PCB = $\angle$ DEF	
पण	$\angle$ ACB = $\angle$ DEF	(दिलेले आहे.)
$\therefore$	$\angle$ ACB = $\angle$ DEF	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हे शक्य आहे का?

जर A हा P शी संगत असेल तर सिध्द होते.

किंवा BA = ED

Δ ABC $\cong$ Δ DEF...... (बा.को.बा.गृहीतक)

पायरी (iii): जर AB < DE तेव्हा DE बाजूवर M हा बिंदू घेतला असता पायरी (ii) च्या सिध्दतेनुसार ME = AB होते. तर आम्ही AB = DE घेऊ शकतो आणि म्हणून ΔABC $\cong$ ΔDEF होते.

समजा जर, दोन त्रिकोणामध्ये दोन कोनांच्या जोड्या आणि संगत बाजू समान असतात पण या बाजू त्या संगत कोनांच्या जोडीशी अंतर्गत (संबंधीत) नसतात हे दोन त्रिकोण आता सुध्दा एकरूप असतील का?

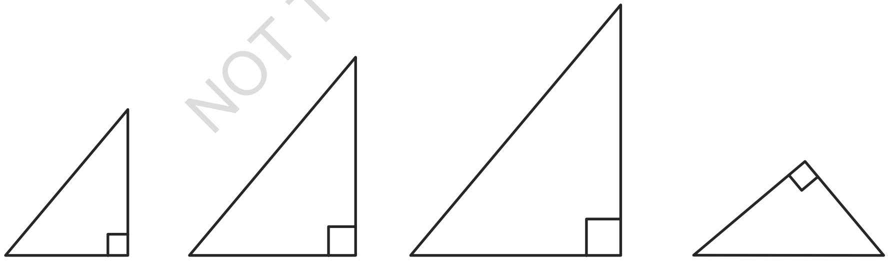
तुम्ही निरीक्षण करा की त्रिकोण एकरूप आहेत. याचे कारण सांगू शकाल का?

तुम्हाला माहित आहे की. त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज 180° असते. म्हणून त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या जोडया समान असतील तर तिसऱ्या कोनांची जोडी सुध्दा समान असते. (त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज 180°)

म्हणून, जर दोन त्रिकोणामध्ये एका त्रिकोणाचे दोन कोन व एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन व एका संगत बाजूशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. म्हणून याला को.को.बा.(AAS) गृहीतक म्हणतात.

आता, खालील कृती करू.

40°, 50° आणि 90° कोन असणारे त्रिकोण रचा. अशा तुम्ही किती त्रिकोणांची रचना करू शकाल? बाजूंची लांबी कमी जास्त घेऊन आपण शक्य होईल तितके त्रिकोण काढू. (आकृती 7.14 पहा)



आकृती 7.14

निरीक्षण करा की, त्रिकोण परस्पराशी एकरूप आहेत किंवा नाहीत.

म्हणून, त्रिकोणाची समानता त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी पूरेशी नाही. म्हणून, त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी तीन घटकापैकी एक बाजू असली पाहिजे.

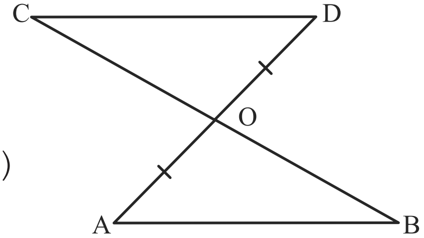
आता यासाठी आणखी काही उदाहरणे घेऊ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : रेषाखंड AB हे रेषाखंड CD ला समांतर असून. O हा AB चा मध्यबिंदू आहे. (आकृती 7.15 पहा) तर सिध्द करा.

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O हा सुध्दा BC चा मध्यबिंदू आहे.

उकल:



आकृती 7.15

(i) Δ AOB व Δ DOC मध्ये

$\angle ABO = \angle DCO$

(व्युत्क्रम कोन $AB \parallel CD$ व BC ही छेदिका)

$\angle AOB = \angle DOC$ (शिरोविरुध्द कोन)

OA = OD (दिलेले)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (को.बा.को)

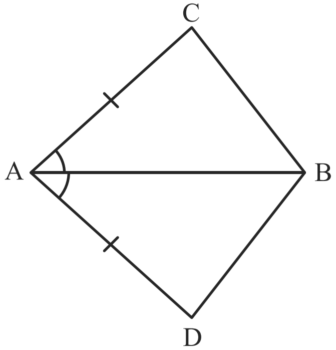
(ii) OB = OC

म्हणून 'O' हा BC चा मध्यबिंदू आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 7.1

(1) चौकोन ACBD मध्ये AC = AD आणि $\angle A$ च AB हा दुभाजक (आकृती 7.16 पहा) सिध्द करा $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. BC व BD याबद्दल काय सांगू शकाल?



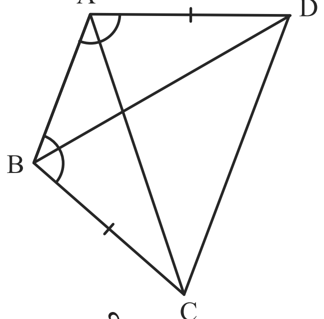
आकृती 7.16

(2) ABCD या चौकोनामध्ये AD = BC व $\angle DBA = \angle CBA$ असेल तर सिध्द करा.

(1) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

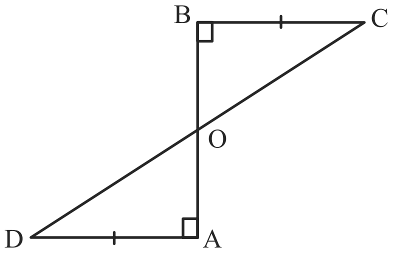
(2) BD = AC

(3) $\angle ABD = \angle BAC$



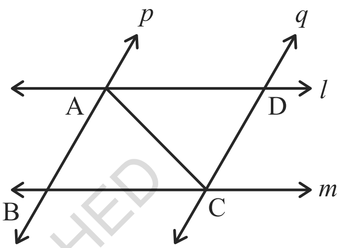
आकृती 7.17

(3) AB ही रेषा समान असणाऱ्या BC व AD ला लंब आहे (आकृती 7.18 पहा) तर सिध्द करा. AB ही CD ला दुभागते.



आकृती 7.18

(4) p व q या समांतर असणाऱ्या रेषा l व m समांतर असणाऱ्या रेषेला छेदतात (आकृती 7.19 पहा) तर सिध्द करा $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.



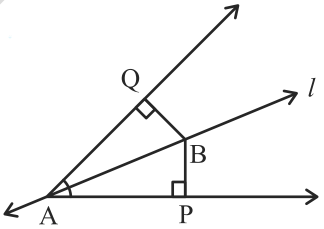
आकृती 7.19

(5) $\angle A$ ला l हा दुभाजक असून. B हा l वर कोणताही एक बिंदू आहे. $\angle A$ च्या बाजूवर असणाऱ्या B बिंदूवर BP आणि BQ लंब टाकलेला आहे. (आकृती 7.20 पहा). तर

सिध्द करा

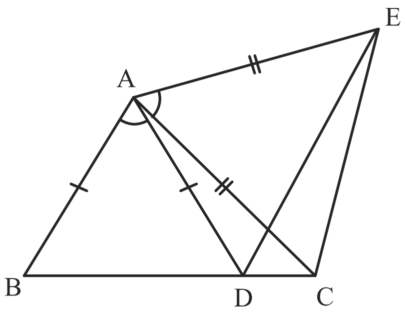
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ किंवा $\angle A$ च्या बाजूपासून B हा समान अंतरावर आहे.



आकृती 7.20

(6) आकृती 7.21 मध्ये AC = AE, AB = AD आणि $\angle BAD = \angle EAC$ तर सिध्द करा BC = DE.



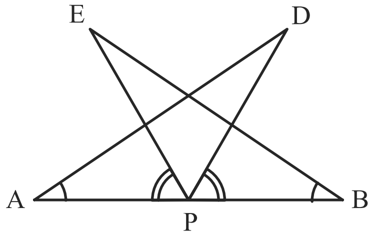
आकृती 7.21

©KTBS NOT TO BE RE-PUBLISHED

(7) AB हा रेषाखंड असून P हा त्याचा मध्यबिंदू आहे. AB च्या एकाच बाजूस असणारे D व E हे बिंदू असून $\angle BAD = \angle ABE$ व $\angle EPA = \angle DPB$ आहे. (आकृती 7.22 पहा) तर सिध्द करा.

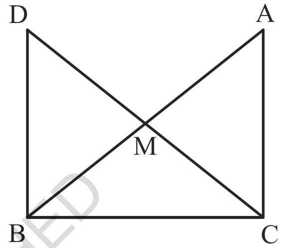
(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$



आकृती 7.22

(8) काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये. C हा काटकोन आहे. AB या कर्णावर M हा मध्यबिंदू आहे. C हे M पर्यंत सांधले आणि D पर्यंत असे वाढविले की DM=CM होईल तसेच D व B सांधले (आकृती 7.23 पहा) तर सिध्द करा की.



आकृती 7.23

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ हा काटकोन आहे.

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7.4 त्रिकोणाचे काही गुणधर्म

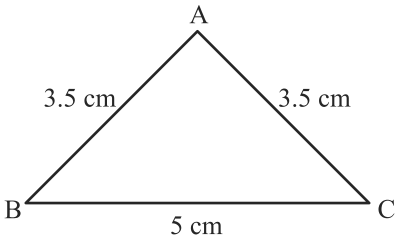
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

मागील भागात आपण त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या दोन गृहीतकांचा अभ्यास केला आहात. दोन बाजू समान असणाऱ्या त्रिकोणाच्या गुणधर्माचा अभ्यास करण्यासाठी या निष्कर्षाचा वापर करू.

खालील दिलेली कृती करा.

3.5cm समान असणाऱ्या दोन बाजू आणि 5cm तिसरी बाजू असणारी त्रिकोणाची रचना करा (आकृती 7.24 पहा). अशी रचना मागील इयत्तेत केली आहे.

अशा त्रिकोणाला काय म्हणतात हे तुम्हाला आठवते का?



आकृती 7.24

जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असतील तर त्या त्रिकोणाला समद्विभूज त्रिकोण म्हणतात. म्हणून आकृती 7.24 मध्ये ΔABC हा समदिभूज त्रिकोण $AB = AC$ आहे.

आता $\angle B$ व $\angle C$ मोजा, काय निरीक्षण कराल?

भिन्न बाजूंचा उपयोग करून समद्विभूज त्रिकोणाची ही कृती पुनः करा.

आपण पाहता की, अशा प्रत्येक त्रिकोणात समान बाजू समोरील कोन समान असतात.

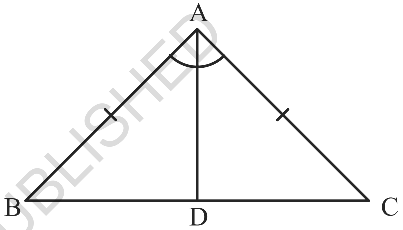
हा एक समद्विभूज त्रिकोणासाठी महत्वाचा गुणधर्म सत्य ठरतो. या गुणधर्माला खालील पध्दतीने सिध्द करू.

प्रमेय 7.2 : एका समद्विभूज त्रिकोणामध्ये समान बाजूसमेरील कोन समान असतात.

सिध्दता : ABC या समद्विभूज त्रिकोणामध्ये $AB = AC$ आहे तर आपणाला

$\angle B = \angle C$ सिध्द करावयाचे आहे.

आता, $\angle A$ चा कोनदुभाजक काढून हा BC ला D मध्ये छेदतो (आकृती 7.25 पहा).



आकृती 7.25

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ΔBAD व ΔCAD मध्ये

$AB = AC$	(दिलेले)
$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना)
$AD = AD$	(सामाईक)
म्हणून $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(बा.को.बा) नियम
म्हणून $\angle ABD = \angle ACD$	(एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन)

$\therefore \angle B = \angle C$

याचा व्यत्यास सुध्दा सत्य होतो का? म्हणजेच जर एकाद्या त्रिकोणाचे दोन कोन समान असतील तर त्यांच्या सम्मुख (समोरील) बाजू समान असतात. असे ठरवू शकतो का?

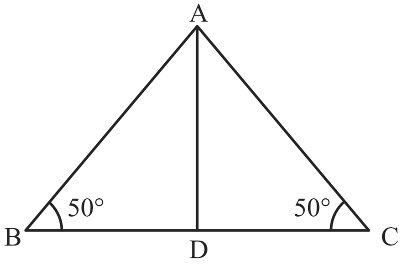
खालील दिलेली कृती करा.

Δ ABC ची अशी रचना करा की, BC ही कोणतीही लांबी असून $\angle B = \angle C = 50^o$ आहे. $\angle A$ चा दुभाजक D हा BC ला मिळतो (आकृती 7.26 पहा).

त्रिकोणाच्या आकाराचा एक पेपर कापा (तो Δ ABC, आहे) आणि शिरोबिंदू C येईल असा त्रिकोण ABC, AD वरून दुमडा.

AC आणि AB या बाजूबद्दल आपण काय सांगू शकाला ?

निरीक्षण करा की, AC हा AB शी पूर्णपणे जुळतो.



आकृती 7.26

म्हणून AC = AB

असे अनेक त्रिकोण घेऊन ही कृती पुनः करा.

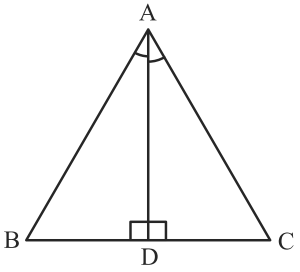
प्रत्येक वेळेस आपणास दिसून येईल की. समान कोनासमोरील बाजू समान असतात. हे खालील प्रमाणे सिध्द करू शकतो.

प्रमेय 7.3: एका त्रिकोणाच्या समान कोनासमोरील बाजू समान असतात. हा प्रमेय 7.2 चा त्यत्यास आहे.

हा प्रमेय तुम्ही को.बा.को (ASA) या एकरूपतेच्या गृहीतकावरून सिध्द करू शकता.

या निष्कर्षासाठी खालील उदाहरणे सोडवू ?

उदाहरण 4: ΔABC मध्ये BC वर लंब असणारा AD हा $\angle$A चा कोनदुभाजक आहे. (आकृती 7.27 पहा) तर सिध्द करा AB = AC आणि ΔABC हा समद्विभूज आहे.



आकृती 7.27

उकल : Δ ABD व Δ ACD मध्ये

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिलेले)

$AD = AD$ (सामाईक)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^o$ (दिलेले)

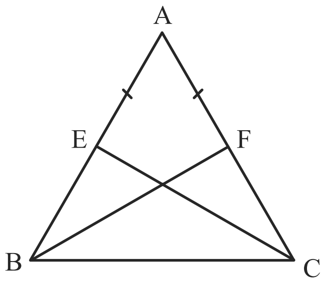
$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (को.बा.को)

म्हणून AB = AC (एकरूप Δ चे संगत घटक.)

किंवा ΔABC हा समद्विभूज त्रिकोण आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

उदाहरण 5: ΔABC च्या AB व AC समान बाजू असून अनुक्रमे E व F हे मध्यबिंदू आहेत (आकृती 7.28 पहा). तर सिध्द करा BF = CE.



आकृती 7.28

उकल : Δ ABF व Δ ACE मध्ये

$AB = AC$ (दिलेले)

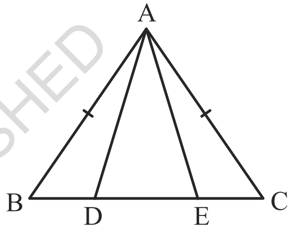
$\angle A = \angle A$ (सामाईक कोन)

$AF = AE$ (समान बाजूंची निम्मपट)

$\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (बा.को.बा.)

म्हणून $BF = CE$ (एकरूप Δ चे संगत घटक)

उदाहरण 6 : समद्विभूज ΔABC मध्ये AB = AC आहे. BC वरील D व E बिंदू असून BE = CD (आकृती 7.29 पहा) तर सिध्द करा AD = AE.



आकृती 7.29

उकल : Δ ABD व Δ ACE मध्ये

$AB = AC$ (दिलेले) ... (1)

$\angle B = \angle C$ (समान बाजूसमोरील कोन) ... (2)

तसेच $BE = CD$

$\therefore BE - DE = CD - DE$

$BD = CE$ ... (3)

म्हणून, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2) व (3) व बा.को.बा नियमानुसार)

$AD = AE$ (एकरूप Δ चे संगत घटक.)

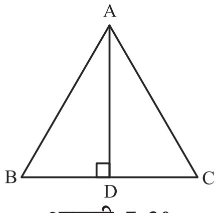
@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 7.2

(1) समद्विभूज ΔABC मध्ये AB = AC आहे. $\angle B$ आणि $\angle C$ चे कोनादुभाजक परस्परांना O बिंदूत छेदतात. A व O सांधा. तर सिध्द करा

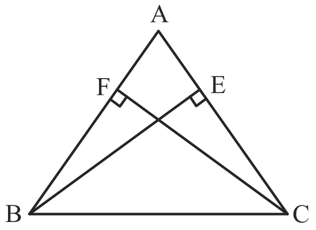
(i) OB = OC (ii) $\angle A$ चा AO हा दुभाजक आहे.

(2) ΔABC मध्ये $AD \perp BC$ (आकृती 7.30 पहा) तर सिध्द करा ΔABC हा समद्विभूज त्रिकोण असून AB = AC आहे.



आकृती 7.30

(3) समद्विभूज ΔABC मध्ये, $CF \perp AB$ व $BE \perp AC$ आहे (आकृती 7.31) तर सिध्द करा $CF = BE$.

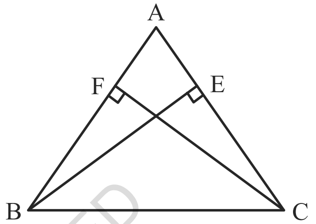


आकृती 7.31

(4) ΔABC मध्ये AB व AC वर काढलेले शिरोलंब अनुक्रमे CF व BE समान आहे. (आकृती 7.32 पहा) तर सिध्द करा.

(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

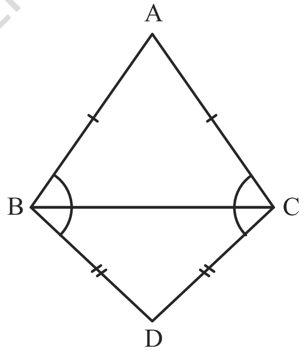
(ii) $AB = AC$ म्हणजेच ΔABC हा समद्विभूज आहे.



आकृती 7.32

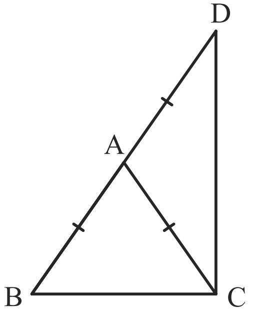
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(5) BC या एकाच पायावर उभे असणारे ABC व DBC हे दोन समद्विभूज त्रिकोण आहेत (आकृती 7.33 पहा) तर सिध्द करा $\angle ABD = \angle ACD$



आकृती 7.33

(6) Δ ABC या समद्विभूज त्रिकोणामध्ये $AB = AC$ आहे. BA बाजू D पर्यंत अशी वाढविली की, $AD = AB$ होईल (आकृती 7.34 पहा) सिध्द करा $\angle BCD$ हा काटकोन आहे.



आकृती 7.34

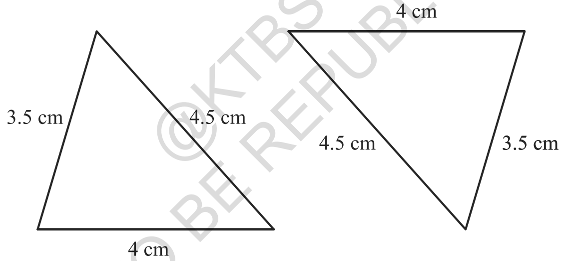
(7) ABC हा काटकोन त्रिकोण असून $\angle A = 90^\circ$ आणि $AB = AC$. असेल तर $\angle B$ व $\angle C$ काढा.

(8) सिध्द करा की, एका समभूज त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन 60° असतो.

7.5 त्रिकोणाच्या एकरूपतेचे काही गुणधर्म

आपण या पाठात पाहिले आहे की दोन त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी एका त्रिकोणाचे तीन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन कोनाशी समान असले तरी ते एकरूपतेसाठी आवश्यक नाही. पण यावरून आपण विचार करू शकतो की, दोन त्रिकोणाच्या एकरूपतेसाठी एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूशी समान असतील तर ते एकरूपतेसाठी आवश्यक होते. मागील इयत्तेत आपण शिकला आहात की ही स्थिति योग्य ठरते.

हे निश्चित करण्यासाठी 4cm, 3.5cm आणि 4.5cm बाजू असणारे दोन त्रिकोणाची रचना करा. (आकृती 7.35 पहा) या त्रिकोणांना कापा आणि ते एकमेकांवर ठेवा. यावरून तुम्ही काय निरीक्षण कराल? जर समान बाजू एकमेकांवर समान असतील तर ते दोन त्रिकोण परस्पराशी समाविष्ट होतील. म्हणून दोन्ही त्रिकोण एकरूप होतील.



आकृती 7.35

अनेक प्रकारचे त्रिकोण घेऊन ही कृती करा की, आपण एकरूपतेचे एक गृहीतक पाहू शकतो.

प्रमेय 7.4 : (बा.बा.बा. गृहीतक) : जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत तीन बाजूशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

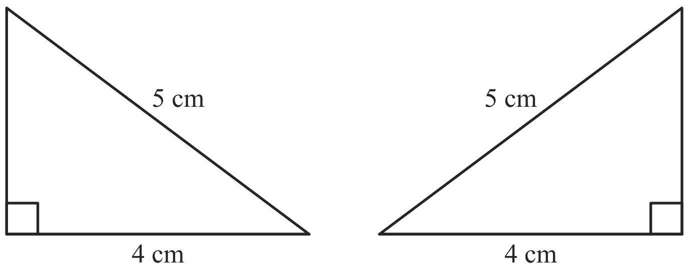
एक उपयुक्त रचना करून हा प्रमेय सिध्द करू.

या अगोदर आपण बा.को.बा(SAS) गृहीतकामध्ये पाहीलात की, दोन त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या जोड्या आणि एक कोनांची जोडी समान नसेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप नसतात.

ही कृती करा.

दोन काटकोन त्रिकोण असे रचा की, त्यांचा कर्ण 5 cm आणि एक बाजू 4 cm होईल (आकृती 7.36 पहा). :

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 7.36

या दोन त्रिकोणांना परस्परावर एकमेकावर असे ठेवा की, एका त्रिकोणाची समान बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या समान बाजूवर असेल. आणि ते फिरवा. यावरून आपण काय निरीक्षण कराल?

दोन त्रिकोण एकमेकांशी संपूर्णपणे एकमेकात समाविष्ट झाले आहेत. आणि ते एकरूप आहेत. काटकोन त्रिकोणाच्या इतर जोड्या घेऊन ही कृती पुन्हा करा. यावरून कोणते निरीक्षण कराल?

तुम्ही पाहू शकता की, त्रिकोणाची एका बाजूंची जोडी आणि कर्ण समान असतील तर ते काटकोन त्रिकोण एकरूप आहेत. असे तुम्ही मागील इयत्तेत पड़ताळणी केली आहे.

यावरून आपण खालील एकरूपतेचे गृहीत पाहू शकतो..

प्रमेय 7.5 : (एकरूपतेचे कर्ण भूजा गृहीतक) जर दोन काटकोन त्रिकोणामध्ये एका त्रिकोणाची एक बाजू आणि कर्ण दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजूशी आणि संगत कर्णाशी समान असेल तर ते दोन काटकोन त्रिकोण एकरूप असतात.

लक्षात ठेवा की, RHS म्हणजेच R (Right Angle) काटकोन, H- Hypotenuse कर्ण S (side) बाजू.

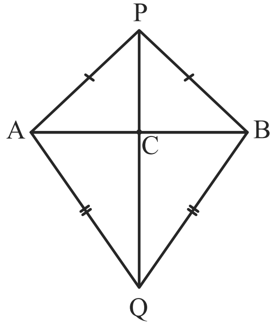
आता काही उदाहरणे पाहूया.

उदाहरण 7: AB ही रेषाखंड आहे, P आणि Q, AB या रेषेवर असे बिंदू आहेत की ते A व B बिंदूपासून समान अंतरावर आहेत (आकृती 7.37 पहा) तर सिध्द करा PQ हा AB चा लंबदुभाजक आहे.

उकल : PA = PB आणि QA = QB दिले असून

$PQ \perp AB$ व PQ हा AB च लंबदुभाजक आहे असे सिध्द करू PQ ही रेषा AB ला C बिंदूत छेदते.

या आकृतीमध्ये तुम्हाला दोन एकरूप त्रिकोण दिसून येतात का?



आकृती 7.37

Δ PAQ व Δ PBQ मध्ये

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$AP = BP$ (दिलेले)

$AQ = BQ$ (दिलेले)

$PQ = PQ$ (सामाईक)

म्हणून, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (बा.बा.बा)

$\angle APQ = \angle BPQ$ (एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक)

आता ΔPAC व ΔPBC मध्ये

$AP = BP$ (दिलेले)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ सिध्द केले)

$PC = PC$ (सामाईक)

म्हणून $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (ब.को.बा)

$AC = BC$ (एकरूपतेचे संगत घटक) ... (1)

आणि $\angle ACP = \angle BCP$ (एकरूपतेचे संगत घटक)

तसेच $\angle ACP + \angle BCP = 180^o$ (पूरक कोन)

म्हणून $2\angle ACP = 180^o$

किंवा $\angle ACP = 90^o$ ... (2)

(1) व (2) वरून तुम्ही निष्कर्ष काढू शकता की, PQ हा AB चा लंबदुभाजक आहे.

(टीप : जर $AP = BP$ दिले असताना ΔPAQ व ΔPBQ एकरूप दर्शविल्या शिवाय तुम्ही $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ सिध्द करू शकत नाही. तसेच

$PC = PC$ (समाईक)

आणि $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB मध्ये समान बाजूचे विरुध्द कोन)

या निष्कर्षाचे मुख्य कारण म्हणजेच एकरूपतेसाठी बा.बा.को (SSA) गृहीतक योग्य नाही तसेच कोन हा त्याच्या संगत असणाऱ्या बाजूच्या जोडीशी नाही.)

यासाठी काही अधिक उदाहरणे घेऊ.

उदाहरण 8 : l व m या दोन रेषा A या बिंदूत छेदतात आणि त्या रेषा P बिंदूपासून समान अंतरावर आहेत. (आकृती 7.38 पहा) तर सिध्द करा की, दोन्ही रेषेच्या मधील कोनांला दुभागणारी रेषा AP आहे.

उकल : दिलेले आहे की, l व m या रेषा एकमेकांना A या बिंदूत छेदतात

$PB \perp l$, $PC \perp m$ दिले असता

$PB = PC$ होते.

$\angle PAB = \angle PAC$ असे आपणाला दर्शवायचे आहे..

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Δ PAB व Δ PAC मध्ये

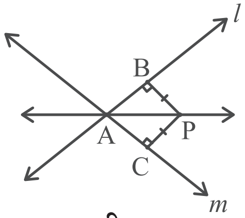
PB = PC (दिलेले)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^o$ (दिलेले)

PA = PA (सामाईक)

म्हणून Δ PAB $\cong$ Δ PAC (कर्ण भुजा गृहीत)

$\angle PAB = \angle PAC$ (एकरूपतेचे संगत घटक)

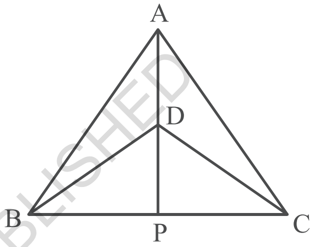


आकृती 7.38

लक्षात घ्या की. वरील निकाल हा स्वाध्याय 7.1 मधील उदा. 5 चा व्यत्यास आहे.

स्वाध्याय 7.3

1. Δ ABC व Δ DBC हे दोन समद्विभूज त्रिकोण BC या एकाच पायावर उभे आहेत आणि BC वरील. A व D मधून जाणारी रेषा आहे.(आकृती 7.39 पहा). जर AD वाढविली असता BC वर P बिंदूत छेदते तर

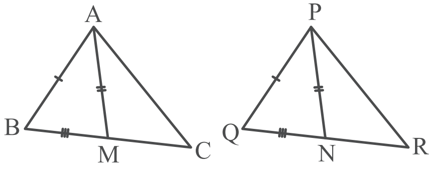


आकृती 7.39

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$
   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$
   (iii) $\angle A$ आणि $\angle D$ चा AP हा दुभाजक आहे.
   (iv) AP हा BC चा लंबदुभाजक आहेत असे सिध्द करा.

2. समद्विभूज ΔABC मध्ये AD हा शिरोलंब असून AB=AC आहे तर सिध्द करा.
   (i) AD हा BC ला दुभागतो (ii) $\angle A$ ला AD ला दुभागतो.

3. Δ ABC मध्ये AB व BC या दोन बाजूची मध्यगा PQ व QR बाजूच्या PN मध्यगेशी समान आहे (आकृती 7.40 पहा). तर सिध्द करा.



आकृती 7.40

   (i) Δ ABM $\cong$ Δ PQN
   (ii) Δ ABC $\cong$ Δ PQR

4. ΔABC मध्ये BE व CF हे दोन समान शिरोलंब आहेत. कर्ण भुजा ग्रहीतकाचा वापर करून ΔABC हा समद्विभूज त्रिकोण आहे असे सिध्द करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. ΔABC हा समद्विभूज त्रिकोण असून $AB = AC$ आहे, तसेच $AP \perp BC$ असेल तर सिध्द करा $\angle B = \angle C$.

7.6 सारांश :

या प्रकरणामध्ये आपण खालील गोष्टींचा अभ्यास केला आहात

(1) जर त्रिकोणाचा आकार आणि त्रिकोणाची मापे समान असतील तर दोन त्रिकोणाच्या आकृत्या एकरूप असतात.

(2) समान त्रिज्यांची दोन वर्तुळे एकरूप असतात..

(3) समान बाजू असलेले दोन चौरस एकरूप असतात.

(4) ABC व PQR या दोन एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ आणि $C \leftrightarrow R$ असेल तर $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ या चिन्हाने दर्शवितात.

(5) जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत दोन बाजू आणि संगत एका कोनाशी समान असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप होतात. (बा.को.बा गृहीतक)

(6) जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यानी समाविष्ट केलेली एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यानी समाविष्ट केलेल्या एका संगत बाजूशी समान असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात (को.बा.को. गृहीतक)

(7) जर एक त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एका संगत बाजूशी समान असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात (को.को. बा गृहीतक)

(8) त्रिकोणाच्या समान बाजूसमेरील कोन समान असतात..

(9) त्रिकोणाच्या समान कोनासमेरील बाजू समान असतात.

(10) कोणत्याही समभुज त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन 60° असतो.

(11) जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात (बा.बा.बा. गृहीतक). (SSS)

(12) जर दोन काटकोन त्रिकोणात एका त्रिकोणाची एक बाजू आणि कर्ण दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एक बाजू आणि कर्णाशी समान असलील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. (कर्ण भूजा गृहीतक)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रकरण – 8

चौकोन (Quadrilaterals)

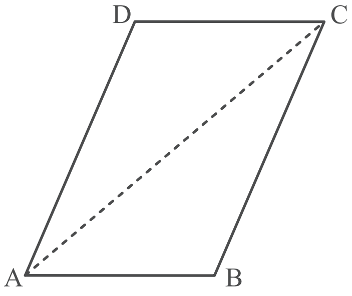
तुम्ही इ. VIII वी च्या वर्गामध्ये चौकोन आणि त्याचे प्रकार यांचा अभ्यास केला आहे. चौकोनोला चार बाजू चार कोन व चार शिरोबिंदू असतात.

समांतरभुज चौकोनाच्या काही गुणधर्मांची उजळजी करू

8.1. समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म

समांतरभूज चौकोन हा चौकोन असून त्याच्या समोरासमोरील बाजूंची जोडी समांतर असते.

आता आपण एक कृती करू.



आकृती 8.1

कागदी पुठ्ठयामधून एक समांतरभुज चौकोन कापून घ्या व तो कर्णाच्या दिशेने कापा. तुम्हाला दोन त्रिकोण मिळतील. या त्रिकोणाविषयी तुम्ही काय सांगू शकाल? (आकृती 8.1 पहा.)

एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणावर ठेवा, तुम्हाला काय दिसून येईल? दोन्ही त्रिकोण एकरूप त्रिकोण आहेत. असे अनेक समांतरभूज चौकोन घेऊन वरील प्रमाणे कृती करा. प्रत्येक वेळी तुम्हाला दोन एकरूप त्रिकोण मिळतात. यावरून समांतरभुज चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण त्याला दोन एकरूप त्रिकोणांत विभागतो. हा निष्कर्ष सिध्द करूया.

प्रमेय 8.1 : समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण चौकोनास दोन एकरूप त्रिकोणांत विभागतात.

सिध्दता : ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. AC हा त्याचा कर्ण (आकृती 8.2) व AC समांतरभुज चौकोन ABCD ला दोन एकरूप त्रिकोणांत विभागतो.

Δ ABC आणि ΔCDA हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे सिध्द करावयाचे आहे.

Δ ABC व Δ CDA यामध्ये BC || AD व AC ही छेदिका आहे.

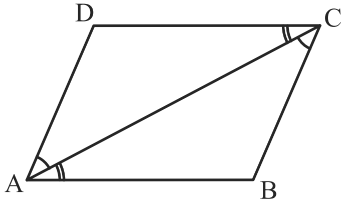
$\angle$ BCA = $\angle$ DAC (व्युत्क्रम कोन)

AB || DC व AC छेदिका

$\therefore$ $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (व्युत्क्रम कोन)

आणि AC = CA (समाईक बाजू)

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ASA नियम)



आकृती 8.2

किंवा AC कर्ण समांतरभुज चौकोनास दोन एकरूप त्रिकोणामध्ये विभागतो.

आता समांतरभुज चौकोनाच्या विरूध्द बाजू मोजा. AB= DC व AB= BC आहेत. यावरून समांतर चौकोनाचा आणखी एक गुणधर्म खालील प्रमाणे

प्रमेय 8.2 : समांतरभुज चौकोनात संमुख बाजू समान असतात.

यापूर्वी तुम्ही सिध्द केले आहे की, कर्ण समांतरभुज चौकोनास दोन एकरूप त्रिकोणांत विभागतो. तुम्ही संमुख बाजूविषयी व संमुख कोनाविषयी काय सांगाल?

ते समान आहेत.

म्हणून AB = DC आणि AD = BC

आता या निष्कर्षाचा व्यत्यास काय? तुम्हाला माहीत असलेल्या प्रमेयानुसार व्यत्यास सुध्दा प्रमेयाप्रमाणेच सिध्द करावे लागतात प्रमेय 8.2 खालील प्रमाणे सांगितला जातो.

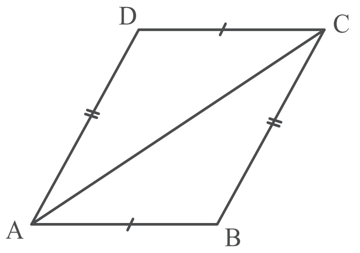
जर समांतरभुज चोकोन असेल तर त्याच्या संमुख बाजुच्या जोड्या समान असतात.याचा व्यत्यास असा आहे.

प्रमेय 8.3 : जर चौकोनाच्या संमुख बाजुच्या जोड्या समान असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

याची कारणमिमांसा तुम्ही कराल का?

चौकोन ABCD मध्ये AB = CD व AD = BC.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 8.3

(आकृती **8.3 :** पहा) कर्ण AC काढला.

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (का ?)

म्हणून $\angle BAC = \angle DCA$

$\angle BCA = \angle DAC$ (का ?)

आता ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे का ? सांगू शकाल का?

तुम्ही आता पाहिले आहेच की समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू समान असतात. व्यत्यासाने जर समुंख बाजुंची जोडी चौकोनात समान असेल तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

असाच निष्कर्ष आपण समुंख कोनांच्या जोडीबद्दल काढू शकतो.

समांतरभुज चौकोन काढा व त्याचे कोन मोजा, तुम्हाला काय दिसून येते.

समुंख कोनांची प्रत्येक जोडी समान आहे.

प्रमेय 8.4 समांतरभूज चौकोनाच्या समुख कोनाची जोडी समान असते

आता या निष्कर्षाचा व्यत्यास सत्य आहे का? होय. कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्माचा उपयोग करून आणि समांतर बाजू छेदिकेने छेदल्याने आपण असे म्हणू शकतो की, व्यत्यास आहे हे सत्य असून आणखी एक प्रमेय खालील प्रमाणे तयार होतो.

प्रमेय 8.5 : एखाद्या चौकोनात संमुख कोनाची प्रत्येक जोडी समान असेल तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

येथे समांतरभुज चौकोनाचा दुसरा गुणधर्म आहे. त्याचा अभ्यास करूया ABCD समांतरभुज काढा. चौकोनाचे कर्ण एकमेकास O मध्ये छेदू द्या (आकृती 8.4 पहा).

OA, OB, OC व OD मोजा. तुम्हाला काय आढळते?

OA = OC आणि OB = OD

'O' हा दोन्ही कर्णांचा मध्य बिंदू आहे. हीच कृती अनेक

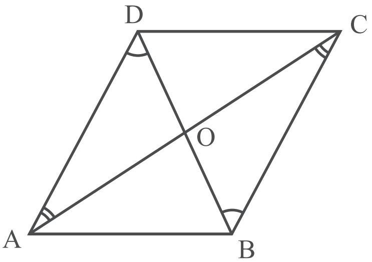
समांतरभुज चौकोन घेऊन करा. प्रत्येक वेळी आपणांस असे दिसून

येते की O हा दोन्ही कर्णांचा मध्यबिंदू आहे. म्हणून प्रमेय खालील प्रमाणे

$\therefore$ यावरील प्रमेय खालील प्रमाणे आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 8.6 : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात.

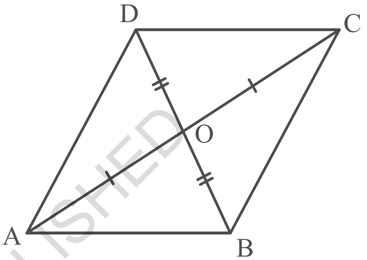


आकृती 8.4

जर चौकोनाचे कर्ण एकमेकास दुभागत असतील तर काय घडेल ? तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असेल काय? होय हे खरे आहे. हा निष्कर्ष प्रमेय 8.6 च्या निष्कर्षाचा व्यत्यास आहे.

तो खालील प्रमाणे.

प्रमेय 8.7 : जर चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागत असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.



आकृती 8.5

याचे कारण तुम्ही शोधू शकता ?

आकृती 8.5 पहा

OA = OC आणि OB = OD दिले आहे.

म्हणून $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (का ?)

$\angle ABO = \angle CDO$ (का ?)

यापासून AB || CD

तसेच BC || AD

$\therefore$ ABCD हा समांतरभूज चौकोन आहे.

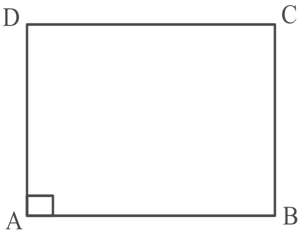
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 1 : आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो हे सिध्द करा.

आयत म्हणजे काय?

आयत हा समांतरभुज चौकोनच आहे ज्याचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

उकल : ABCD हा आयत आहे व $\angle A = 90^0$ आहे.



आकृती 8.6

आपणास सिध्द करायचे आहे आहे. $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

AD || BC आणि AB ही छेदिका आहे. (आकृती 8.6 पहा)

$\angle A + \angle B = 180^0$ छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे कोन)

परंतु $\angle A = 90^0$

म्हणून $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

आता $\angle C = \angle A$ आणि $\angle D = \angle B$

समांतरभूज चौकोनाचे समुख कोन

म्हणून $\angle C = 90^0$ व $\angle D = 90^0$

म्हणून आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

उदाहरण 2 : समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस लंब असतात. हे दाखवा.

उकल : ABCD हा समभुज चौकोन आहे (आ. 8.7 पहा).

तुम्हाला माहीत आहे AB = BC = CD = DA (का?)

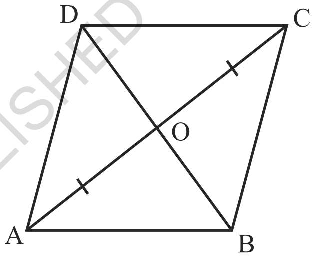
आता Δ AOD व Δ COD यामध्ये

OA = OC (समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात.)

OD = OD (समाईक)

AD = CD (गृहीत)

म्हणून $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (बा.बा.बा. नियम)



आकृती 8.7

म्हणून $\angle AOD = \angle COD$ (संलग्न कोन)

परंतु $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (संलग्न कोन)

$2\angle AOD = 180^0$

$\angle AOD = 90^0$

म्हणून समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस लंब असतात.

उदाहरण 3 : ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे. ज्यामध्ये AB = AC, बाह्य कोन $\angle$PAC हा AD ने दुभागतो आणि CD || AB (आकृती **8.8** पहा).

(i) $\angle$ DAC = $\angle$ BCA आणि (ii) ABCD हा समांतरभुज चौकोने आहे.

उकल : ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ज्यामध्ये AB = AC (गृहित)

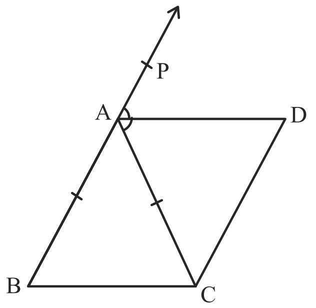
$\angle ABC = \angle ACB$ (समान बाजुसमोरील कोन)

तसेच $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (बाह्य कोन)

किंवा $\angle PAC = 2 \angle ACB$ … (1)

आता AD हा $\angle PAC$ ला दुभागतो

म्हणून $\angle PAC = 2 \angle DAC$ … (2)



आकृती 8.8

((1) आणि (2)वरून)

$\therefore 2 \angle DAC = 2 \angle ACB$ म्हणून $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) आता या समान कोनामुळे व्युत्क्रम कोनांची जोडी बनते जेव्हा BC व AD यांना AC ही छेदीका आहे.

$\therefore BC \parallel AD$

तसेच $BA \parallel CD$ (गृहित)

आत ABCD च्या संमुख बाजुंच्या जोड्या समांतर आहेत.

$\therefore$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 4: दोन l व m समांतररेषांना p या छेदिकेने छेदले आहे (आकृती 8.9 पहा). तर आंतरकोनांच्या दुभाजकानी बनलेला चौकोन आयत आहे हे दाखवा.

येथे : $PS \parallel QR$ दिलेले आहे छेदिका PQ ने त्याना A व C या बिंदूत छेदले आहे.

आपणाला ABCD हा आयत आहे हे दाखवावे लागणार आहे.

आता $\angle PAC = \angle ACR$ ($l \parallel m$) आणि रेषा PQ ने तयार झालेले व व्युत्क्रम कोन

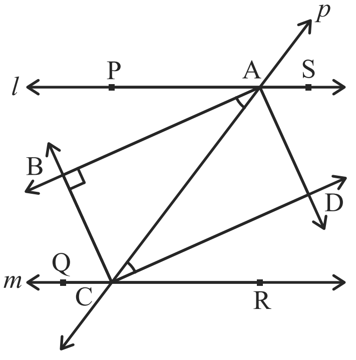
म्हणून $\frac{1}{2} \angle PAC = \frac{1}{2} \angle ACR$

$\therefore \angle BAC = \angle ACD$

ही कोनांची जोडी व्युत्कुम कोनांची जोडी बनते

AB आणि DC रेषा AC ने छेदल्या आहेत व ते समान कोन आहेत.

$\therefore AB \parallel DC$



आकृती 8.9

त्याचप्रमाणे $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ आणि $\angle CAD$ याचे समान कोन आहेत)

ABCD हा चौकोन समांतरभुज चौकोन आहे.

तसेच $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (एकरेषीय जोडी)

म्हणून $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

किंवा $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

म्हणून $\angle BAD = 90^0$

म्हणून ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे, ज्यामध्ये एक कोन 90^0 आहे.

म्हणून ABCD हा आयत आहे.

उदाहरण 5 : समांतरभुज चौकोनाच्या प्रत्येक कोनांच्या दुभाजकामुळे आयत तयार होतो.

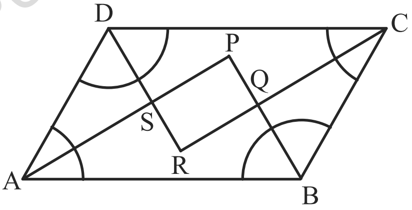
उकल : समजा, ABCD या समांतरभुज चौकोनाच्या $\angle A$ व $\angle B$, $\angle B$ व $\angle C$, $\angle C$ व $\angle D$, $\angle D$ आणि $\angle A$ यांच्या कोन दुभाजकांचे छेदनबिंदु अनुक्रमे P, Q, R, व S आहेत .

ΔASD मध्ये तुम्ही काय निरीक्षण कराल?

$\angle D$ रेषा DS ला दुभागते व $\angle A$ ला AS दुभागते.

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$



आकृती 8.10

$= \frac{1}{2} \times 180^0$ ($\angle A$ व $\angle D$ हे छेदीकेच्या एकाच अंगास असणारे कोन आहेत)

$= 90^0$

तसेच $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (त्रिकोणांच्या कोनांची बेरीज)

किंवा $90^0 + \angle DSA = 180^0$

किंवा $\angle DSA = 90^0$

तसेच $\angle PSR = 90^0$ ($\angle DSA$ चा छेदन विरूध्द कोन)

त्याचप्रमाणे $\angle APB = 90^0$ किंवा $\angle SPQ = 90^0$ दाखविता येईल,

चौकोन PQRS मध्ये प्रत्येक कोन काटकोन आहे. असा आपण निष्कर्ष काढू शकतो की हा आयत आहे? दाखविले आहे. की $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ आणि $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$

त्यामुळे संमुख बाजुचे दोन्ही कोन समान होतात म्हणून चौकोन PQRS हा समांतरभुज चौकोन असून त्याचा प्रत्येक कोन 90^0 आहे आणि त्यामुळेच PQRS हा आयत आहे.

स्वाध्याय 8.1

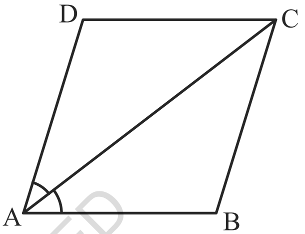
1. जर चौकोनाचे कर्ण समान असतील तर तो आयत असतो हे दाखवा.

2. चौरसाचे कर्ण समान असून एकमेकास काटकोनान दुभागतात हे सिध्द करा.

3. समांतरभुज चौकोन ABCD चा AC हा कर्ण $\angle A$ ला दुभागतो (आकृती 8.11 पहा).

   तर (i) AC हा कर्ण $\angle C$ ला सुध्दा दुभगतो

   (ii) ABCD हा समभुज चौकोन असे दाखवा



आकृती 8.11

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. ABCD हा आयत आहे. AC कर्ण $\angle A$ व. $\angle C$ ला दुभागतो तर

   (i) ABCD हा चौरस आहे.

   (ii) BD कर्ण $\angle B$ व $\angle D$ ला दुभागतो

5. ABCD समांतरभुज चौकोनामध्ये DP = BQ होईल असे कर्ण BD वर P व Q हे दोन बिंदु घेतले आहेत. (आकृती 8.12 पहा.) तर दाखवा की,

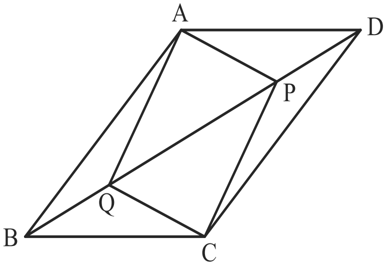
   (i) Δ APD $\cong \Delta$ CQB

   (ii) AP = CQ

   (iii) Δ AQB $\cong \Delta$ CPD

   (iv) AQ = CP

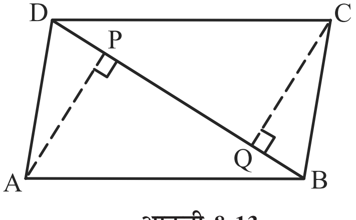
   (v) APCQ हा समांतरभूज चौकोन आहे.



आकृती 8.12

6. ABCD समांतरभूज चौकोन आहे. AP व CQ या लंबरेषा अनुक्रमे शिरोबिंदू A व C पासून BD कर्ण काढलेले आहेत (आकृती 8.13) तर असे दाखवा की

   (i) Δ APB $\cong \Delta$ CQD (ii) AP = CQ



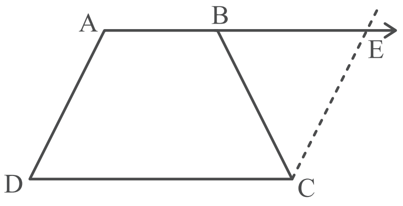
आकृती 8.13

7. ABCD हा समलंब चौकोन आहे. ज्यामध्ये AB||CD आणि AD = BC (आ. 8.14 पहा)तर असे दाखवा.

(i) $\angle A = \angle B$ (ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) कर्ण AC = कर्ण BD.



आकृती 8.14

[AB वाढवा आणि C मधून रेषा अशी काढा की DA ला समांतर होईल व AB वाढवून E मध्ये मिळते]

8.2 मध्यबिंदूचा प्रमेय (Midpoint Theorem)

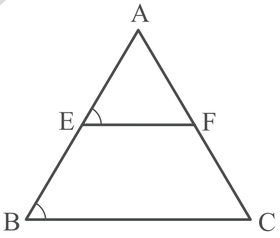
तुम्ही त्रिकोण व चौकोनाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास केला आहे आता आणखीन एका गुणधर्माचा अभ्यास करू जो त्रिकोणाच्या बाजुंच्या मध्यबिंदूशी संबंधीत आहे.

एक त्रिकोण रचा आणि त्याच्या दोन बाजूंचे मध्य बिंदू E व F निश्चत करा. E आणि F जोडा (आकृती 8.15 पहा).

EF आणि BC मोजा $\angle$ AEF व$\angle$ABC मोजा तुम्हाला काय आढळते? तुम्हाला असे दिसून येईल की

$EF = \frac{1}{2} BC$ आणि $\angle AEF = \angle ABC$

त्यामुळे EF || BC मिळते.



आकृती 8.15

याच प्रकारची कृती वेगवेगळे त्रिकोण घेऊन पडताळून पहा. तुम्ही खालील प्रमेयावर येऊन पोहोचाल.

प्रमेय 8.8 : त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजुंचे मध्यबिदू सांधणारी रेषा ही तिसऱ्या बाजूस समांतर असते.

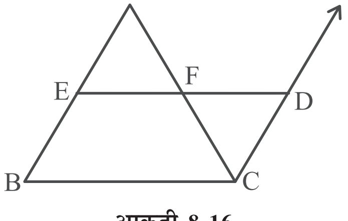
तुम्ही हा प्रमेय खालील पध्दतीने सोडवू शकता.

आ. 8.16 पहा ज्यामध्ये E आणि F हे अनुक्रम AB आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत व CD || BA.

Δ AEF $\cong$ Δ CDF (को. बा.को. नियम)

म्हणून EF = DF आणि BE = AE = DC (का?)

BCDE हा समांतरभुज चौकोन आहे.



आकृती 8.16

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

यापासून EF || BC

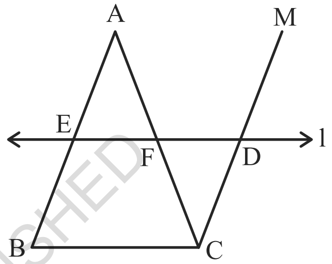
$$EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC.$$

प्रमेय 8.8 चा व्यत्यास तुम्ही सांगू शकाल ? व्यत्यास सत्य आहे का? या प्रमेयाचा व्यत्यास सत्य असेल तर तो तुम्हाला खालील प्रमेयात सागितल्या प्रमाणे दिसून येईल

प्रमेय 8.9 : त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाणारी सरळ रेषा जर दुसऱ्या बाजूस समांतर असेल तर ती रेषा तिसऱ्या बाजूस दुभागते.

आकृती 8.17 : मध्ये असे दिसून येते की AB चा मध्यबिंदू E असून ही l रेषा A मधून जाते आणि EC ला समांतर आहे. आणि CM || BA .

Δ AEF आणि ΔCDF यांच्या एकरूपतेचा उपयोग करून AF = CF हे सिध्द करा.



आकृती 8.17

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 : Δ ABC मध्ये AB, BC आणि CA यांचे मध्ये बिंदू अनुक्रमे D, E आणि F आहेत (आकृती 8.18) तर Δ ABC चे चार एक्ररूप त्रिकोणात विभाजन होते आहे दाखवा.

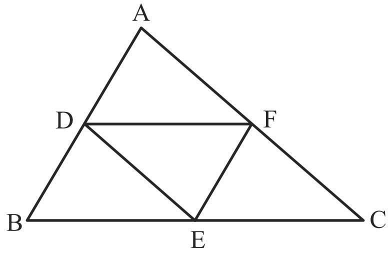
उकल : Δ ABC मध्ये AB आणि BC यांचे D आणि E हे मध्य बिंदू आहेत. प्रमेय 8.8 नुसार DE || AC

DF || BC आणि EF || AB.

∴ ADEF, BDFE आणि DFCE हे समांतरभूज चौकोन आहेत BDFE चा कर्ण DE हा आहे.

∴ Δ BDE ≅ Δ FED

त्याच प्रमाणे Δ DAF ≅ Δ FED

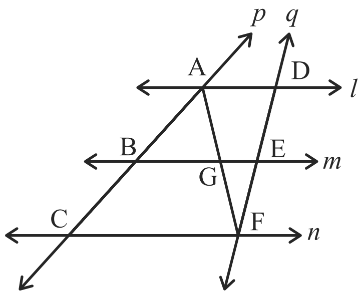


आकृती 8.18

आणि Δ EFC ≅ Δ FED

हे चार ही त्रिकोण एकरूप आहेत.

उदहरण 7 : l, m आणि n या तीन समांतर रेषांना p व q या छेदिकानी असे छेदले आहे की p छेदीकेचे AB आणि BC समान भाग होतात तर असे दाखवा की l, m , n हे q छेदिकेचे दोन भाग करतात. DE आणि EF .



आकृती 8.19

उकल : AB = BC . गृहित

DE = EF हे सिध्द केले पाहिजे. AF जोडा ती m रेषेस G बिंदू छेदते. समलंब चौकोन ACFD या दोन त्रिकोणात विभागतो. Δ ACF आणि Δ AFD Δ ACF मध्ये B हा AC चा मध्यबिंदू आहे (AB = BC)

आणि BG || CF (m || n)

∴ AF चा मध्यबिंदू G आहे (प्रमेय 8.9 नुसार)

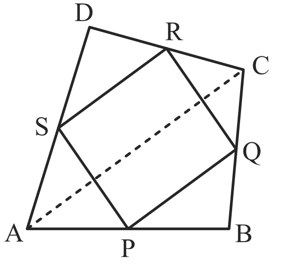
आता Δ AFD मध्ये AF चा मध्यबिंदू G आहे GE||AD आणि त्यामुळे प्रमेय 8.9 वरून E हा DF चा मध्य बिंदू आहे

∴ DE = EF

दुसऱ्या शब्दात सांगायचे झाल्यास l, m आणि n हे q वर समान भगात छेदतात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 8.2



आकृती 8.20

1. ABCD या चौकोनात P, Q, R, व S हे अनुक्रमे AB, BC, CD आणि DA चे मध्य बिंदू आहेत. AC हा कर्ण आहे तर असे दाखवा की, (आकृती 8.20 पहा)

   (i) SR || AC आणि $SR = \frac{1}{2} AC$

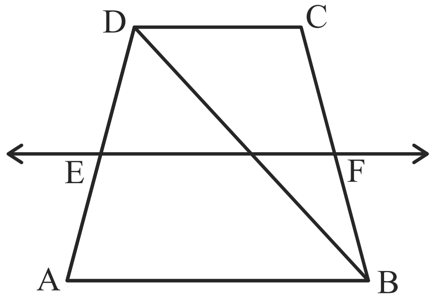
   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

2. ABCD हा समभुज चौकोन आहे आणि P, Q, R आणि S हे अनुक्रमे AB, BC, CD व DA चे मध्यबिदू आहेत. तर PQRS हा आयत आहे हे सिध्द करा.

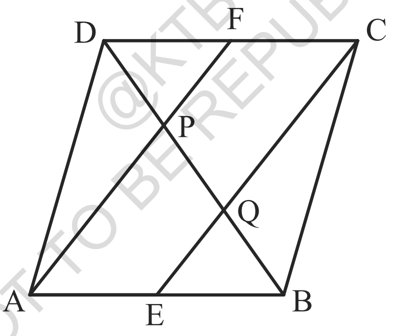
3. ABCD हा आयत आहे. P, Q, R आणि S हे अनुक्रमे AB, BC, CD व DA चे मध्यबिंदु आहेत तर PQRS हा समभुज चौकोन आहे दाखवा.

4. ABCD हा समलंब चौकोन आहे ज्यामध्ये AB || DC, BD कर्ण AD चा मध्यबिंदू E आहे.E मधून काढलेली रेषा BC ला F मध्ये छेदते (आकृती 8.21). तर F हा BC चा मध्य बिंदू आहे हे सिध्द करा.



आकृती 8.21

5. ABCD या समांतरभुज चौकोनांत E व F हे अनुक्रमे AB व CD चे मध्यबिंदू आहेत. (आकृती 8.22 पहा). असे दाखवा की, रेषाखंड AF व EC मुळे कर्ण BD ला तीन समान भागात विभागतात.



आकृती 8.22

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. ABC हा $\angle C$ शिरोबिंदूशी काटकोन त्रिकोण आहे.कर्ण AB चा मध्यबिंदू M मधून काढलेला असून व BC ला समांतर असणारी रेषा AC ला D मध्ये छेदता.

तर (i) D हा AC चा मध्यबिदू आहे.

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ असे दाखवा

8.3. सारांश

या प्रकरणामध्ये खाली गोष्टींचा तुम्ही अभ्यास केला आहे.

1. समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याला दोन एकरूप त्रिकोणात विभागतो.

2. समांतरभूज चौकोनांत

   (i) विरूध्द बाजू समान असतात.

   (ii) विरूध्द कोन समान असतात.

   (iii) कर्ण एकमेकांस दुभागतात.

4. आयताचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात व कर्ण समान असतात त्याचा व्यत्यास सत्य असतो.

5 . समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस काटकोनात दुभागतात आणि त्याचा व्यत्यास सत्य असतो.

6. चौरसाचे कर्ण एकमेकांस काटकोनात दुभागतात व समान असतात आणि उलट क्रिया.

7. त्रिकोणाच्या कोणात्याही दोन बाजूचे मध्यबिंदू सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजुच्या निम्मी असून तिला समांतर असते.

8. Δ च्या एका बाजूच्या मध्यातून जाणारी रेषा दुसऱ्या बाजूस समांतर असेल तर ती तिसऱ्या बाजूस दुभागते.

9. चौकोनाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू सांधून तयार होणारा चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

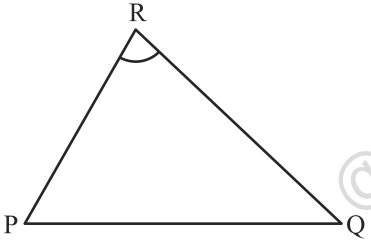
A3Y1C1

प्रकरण – 9

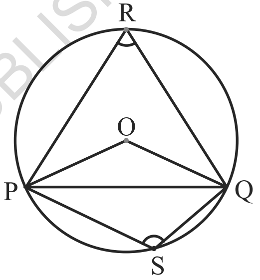
वर्तुळ (Circle)

9.1 जीवेने वर्तुळच्या परिघावर आंतरित केलेले कोन.

PQ रेषाखंड घ्या. R हा एक बिंदू घेऊन PR आणि QR जोडा (आकृती 9.1 पहा).



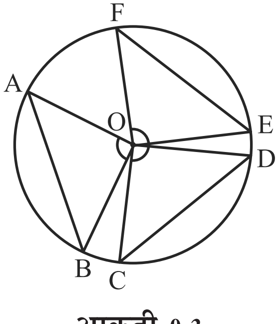
आकृती 9.1



आकृती 9.2

$\angle PRQ$ ला PQ रेषाखंडाने R बिंदूशी आंतरीत केलेला कोन म्हणतात आ.9.2 मधील $\angle POQ$, $\angle PRQ$ आणि $\angle PSQ$ याना काय म्हणतात ? $\angle POQ$ हा जीवा PQ ने वर्तुळ मध्य शी आंतरित केलेला कोन आहे. $\angle PRQ$ आणि $\angle PSQ$ हे PQ जीवेने अनुक्रमे विशालकंसावरील R व लघुकंसावरील S बिंदूशी आंतरित केलेले कोन आहेत.

आता जीवेचा आकार व जीवेने आंतरित केलेला केंद्रांशी कोन यामधील संबंध पाहू. वर्तुळात अनेक वेगवेगळ्या जीवा काढा आणि त्यांनी केंद्राशी आंतरित केलेले कोन पडताळा. जास्त लांबीच्या जीवेने केंद्राशी आंतरित केलेला कोन मोठा असतो. जर आपण समान लांबीच्या जीवा घेतल्यास काय घडते? त्यानी केंद्राशी आंतरित केलेले कोन समान आहेत की नाहीत?



आकृती 9.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 9.1: वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळमध्यांशी समान कोन आंतरित करतात.

सिध्दता : AB व CD या O वर्तुळमध्य असलेल्या वर्तुळातील दोन जीवा आहेत. (आकृती 9.4 पहा)

सिध्द करावयाचे आहे. $\angle AOB = \angle COD$

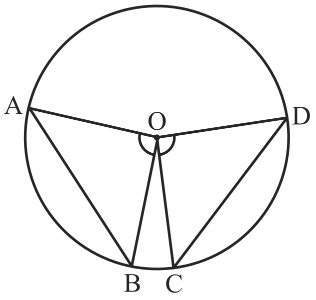
Δ AOB व Δ COD मध्ये

OA = OC (वर्तुळाच्या त्रिज्या)

OB = OD (वर्तुळाच्या त्रिज्या)

AB = CD (गृहित)

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (बा. बा. बा. नियम)

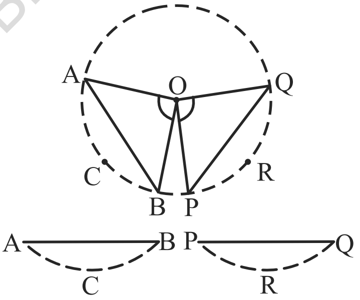


आकृती 9.4

त्यामुळे $\angle AOB = \angle COD$ (एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक)

आता जर वर्तुळाच्या दोन जीवांनी वर्तुलमध्याशी समान कोन आंतरित केले असतील, तर तुम्ही त्या जीवे विषयी काय सांगाल? त्या समान आहेत किंवा नाहीत? यासाठी खालील कृती तपासा.

ट्रेसींग कागद घेऊन त्यावर एक वर्तुळ काढा. ते वर्तुळ कापून घ्या. त्यामुळे गोल चकती मिळेल. O' वर्तुळमध्याशी कोन $\angle AOB$ असा काढा की, $\angle AOB$ हा $\angle POQ$ शी समान कोन असतील . AB आणि PQ शी दोन्ही चकत्या कापा. (आकृती 9.5 पहा) तुम्हाला ACB व PRQ असे दोन वर्तुळखंड मिळतील. जर ते वर्तुळखंड एका वर एक असे ठेवल्यास आपणास काय दिसून येते ? ते एकमेकांस तंतोतंत जुळतात म्हणजेच ते एकरूप आहेत.



आकृती 9.5

AB = PQ .

प्रमेय 9.2: जर वर्तुळाच्या दोन जीवानी वर्तुळमध्याशी आंतरित केलेले कोन समान असतील तर त्या जीवा समान असतात.

वरील प्रमेय हा प्रमेय 9.1 चा व्यत्यास आहे.

आकृती 9.4 पहा

जर आपण $\angle AOB = \angle COD$ घेतला तर

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (का ?)

तेव्हा आपणांस AB = CD आढळते का ?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

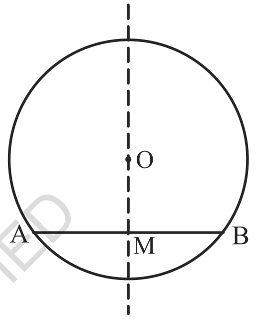
स्वाध्याय 9.1

1. समान त्रिज्येची दोन वर्तुळे एकरूप असतात हे स्मरण करा.दोन एकरूप वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळमध्यांशी समान कोन आंतरित करतात हे सिध्द करा.
2. जर एकरूप वर्तुळाच्या जीवा वर्तुळमध्यांशी समान कोन आंतरित करतात.तेव्हा वर्तुळातील त्या जीवा समान आतात.

9.2 वर्तुळमध्यातून जीवेवर काढलेला लंब

कृती: ट्रेसींग कागदावर एक वर्तुळ काढा. 'O' हा वर्तुळमध्य आहे. AB ही जीवा काढा. 'O' मधून कागदाला अशी घडी घाला की जीवेचा एक भाग दुसऱ्या भागावर पडेल. AB या जीवेची M बिंदूशी घडी होईल तेव्हा, $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ किंवा OM ही AB ला लंब होईल. B बिंदु A बिंदूशी जुळतो

$\therefore$ MA = MB.



आकृती 9.6

याची सिध्दता OA व OB जोडून आणि काटकोन त्रिकोण Δ OMA आणि Δ OMB हे एकरूप सिध्द करून दाखविता येते. हे उदाहरण खालील फलीताची एक ठराविक गोष्ट बनते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 9.3 : वर्तुळमध्यातून जीवेवर काढलेला लंब जीवेस दुभागतो.

हा प्रमेयाचा व्यत्यास आहे का? प्रथम प्रमेय 9.3 मध्ये काय गृहित आहे व काय सिध्द कारवयाचे आहे? वर्तुळमध्यापासून जीवेवर लंब टाकलेला आहे आणि तो जीवेस दुभागतो. म्हणून व्यत्यासा मध्ये काय तत्व आहे? जर वर्तुळमध्यातून काढलेली रेषा जीवेस दुभागते म्हणून रेषा ही जीवेस लंब आहे.

प्रमेय 9.4 : वर्तुळ मध्यातून काढलेली रेषा जीवेस दुभागत असेल तर ती जीवेस लंबरूप असते

हे सत्य आहे काय ? काही उदा घेऊन प्रयत्न करा व पहा तुम्हाला ते सत्य असल्याचे दिसून येईल.

सर्व साधारण पणे खालील अभ्यासावरून आम्ही टप्पे लिहून त्याची कारणे देऊ.

AB ही O मध्य असलेल्या वर्तुळाची जीवा असून O हा AB च्या M या मध्यबिंदूशी जोडलेला आहे. OM $\perp$ AB. OA आणि OB जोडा (आकृती 9.7 पाहा).

Δ OAM व Δ OBM मध्ये

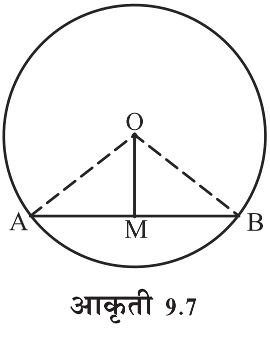
OA = OB (का ?)

AM = BM (का ?)

OM = OM (समाईक)

$\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (कसे ?)

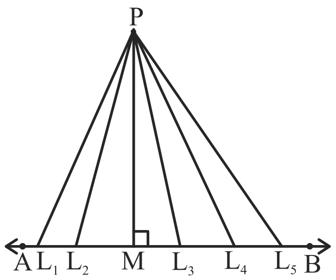
$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ (का ?)



आकृती 9.7

9.3 वर्तुळाच्या समान जीवा आणि त्यांचे वर्तुळमध्यापासून अंतर.

AB ही सरळरेषा असून P हा एक बिंदू आहे रेषेवर असंख्य जर आम्ही हे बिंदू P शी जोडल्यास आपणांस असंख्य रेषा मिळतील PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4.......इत्यादी यापैकी कोणते P पासून AB चे अंतर आहे? या सर्व रेषाखंडापैकी आकृती 9.8 मध्ये दाखविल्या प्रमाणे P पासूनचे AB वरील लंब PM हे कमीत कमी अंतर असेल, गणितामध्ये या कमीत कमी अंतरास PM ला P पासूनचे AB चे अंतर म्हणू शकतो.

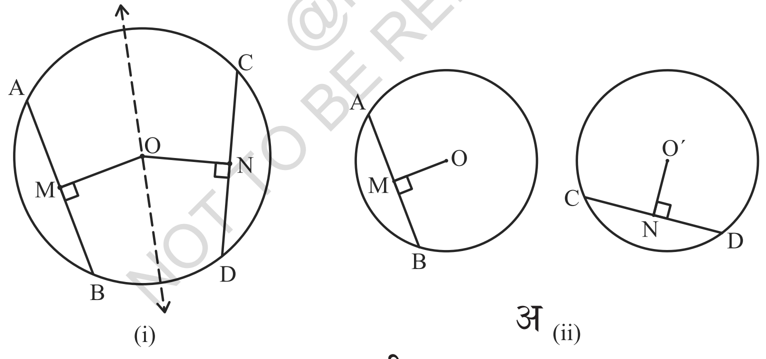


आकृती 9.8

एखाद्या बिंदूपासून रेषे पर्यंतचे अंतर त्याच्या लंबाच्या लांबी एवढे असते. जर बिंदू हा त्या रेषेवर असेल तर त्याचे त्या रेषेपासूनचे अंतर शून्य असते.

वर्तुळाला असंख्य जीवा असतात. वर्तुळामध्ये जीवा काढून पाहील्यास वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा लहान जीवेपेक्षा वर्तुळमध्याच्या जवळ असते. वर्तुळामध्ये वेगवेगळ्या लांबीशी अंतर मोजून पाहिल्यास आपणांस तसे आढळून येते. व्यासाचे वर्तुळ मध्यापासून अंतर काय असते, जी वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा आहे. वर्तुळमध्य व्यासावरच असल्याने त्यामधील अंतर हे शुन्य असते. जीवेची लांबी व वर्तुळ मध्यापासूनचे तिचे अंतर यांच्यामधील संबंधाविषयी विचार करूया.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

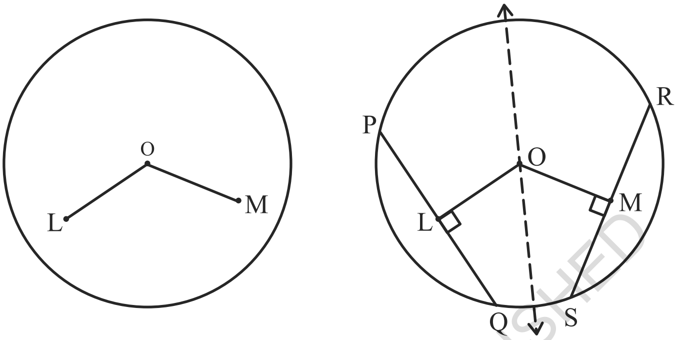


आकृती 9.9

कृती : ट्रेसिंग कागदावर कोणत्याही त्रिजेचे वर्तुळ काढा. व दोन समान जीवा काढा AB व CD व त्यावर वर्तुळ मध्यातून OM व ON असे लंब टाका. आता आकृती अशी दुमडा की D बिंदू B वर व C बिंदू A च्या घडीवर असून N बिंदू M वर असेल म्हणून OM=ON होईल. या प्रमाणे दोन एकरूप वर्तुळांचे O व O^1 वर्तुळामध्य असून AB व CD या समान जीवा आहेत. $OM \perp AB$ व $O^1N \perp CD$ काढा. (आकृती 12.22 (ii) प्रमेय). एका वर्तुळाची चकती काढा व व ती दुसऱ्या वर्तुळावर अशी असेलकी AB ज्या CD ज्यावर तंतोतंत जुळेल. तेंव्हा तुम्हला दिसून येईल की, O बिंदू O^1 वर M बिंदू N वर येतील यावरून खालील निष्कर्ष मिळेल.

प्रमेय 9.5 : वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळ मध्यापासून समान अंतरावर असतात.

या प्रमेयाचा व्यत्यास सत्य की असत्य आहे. यासाठी, O मध्य असलेले एक वर्तुळ काढा O पासून OL व OM (आकृती 9.10 (ii)) असे वर्तुळात असणारे समान रेषाखंड काढा त्याना लंबरूप होतील अशा PQ व RS जीवा काढा. (आकृती 9.10 (ii) पहा). PQ व RS मोजा त्यामध्ये काय फरक आहे? नाही. दोन्ही जीवा समान आहेत. वरील कृती वेगवेगळे रेषाखंड घेऊन त्याना लंबरूप होतील अशा जीवा काढा.



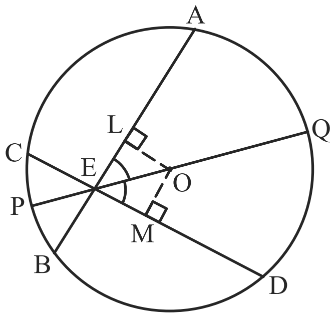
(i) (ii)

आकृती 9.10

प्रमेय 9.6 वर्तुळात वर्तुळमध्यपासून समान अंतरावर असणाऱ्या जीवा समानलंबीच्या असतात.

उदाहरण 1 : जर एकमेकांस छेदणाऱ्या दोन जीवा त्यांच्या छेदन बिंदूतून जाणाऱ्या व्यासाशी छेदन बिंदूजवळ समान कोन करत असतील तर त्या जीवा समान असतात हे सिध्द करा.

उकल : AB आणि CD या वर्तुळाच्या दोन जीवा असून O हा वर्तुळमध्ये आहे, त्या जीवा एकमेकांस E बिंदूतात छेदतात. E मधून जाणारा PQ हा व्यास आहे. असा की $\angle AEQ = \angle DEQ$ (आकृती 9.11 पाहा)



आकृती 9.11

तुम्हाला सिध्द करावयाचे आहे AB = CD $OL \perp AB$ व $OM \perp CD$ काढा.

आता $\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$

(कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

Δ OLE आणि Δ OME मध्ये

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\angle LEO = \angle MEO$ (का?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (सिध्द)

EO = EO (समाईक)

$\therefore \Delta OLE \cong \Delta OME$ (का ?)

यावरून OL = OM (को.को.बा.)

$\therefore$ AB = CD (का?)

स्वाध्याय 9.2

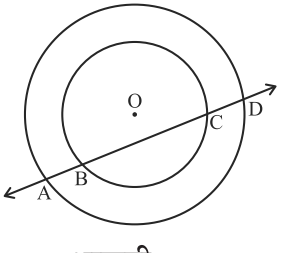
1. 5cm व 3cm त्रिजेची वर्तुळे एकमेकास दोन बिंदूत छेदतात आणि त्यांच्या वर्तुळमध्यामधील अंतर 4cm आहे. तर समाईक जीवेची लांबी काढा.

2. जर वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळाच्या आत एकमेकांस छेदत असतील तर एका जीवेचा रेषाखंड हा दुसऱ्या जीवेच्या रेषाखंडाइतका आहे. हे सिध्द करा.

3 जर दोन समान जीवा एकमेकांस वर्तुळात छेदत असतील तर छेदन बिंदू व वर्तुळमध्य सांधणारी रेषा त्या जीवांशी समान कोन करतात हे सिध्द करा.

4 O मध्य असणाऱ्या दोन समकेंद्री वर्तुळाना जर एक सरळरेषा A,B,C व D बिंदूत छेदत असेल तर AB = CD हे (आकृती 9.12 पहा).

5 एका बागेत 5 मी. त्रिजेच्या वर्तुळावर उभे राहून रेश्मा, सलमा आणि मनदिप एक खेळ खेळत आहेत रेश्मा सलमाकडे चेंडू फेकते, सलमा मनदिपकडे, मनदिप रेश्माकडे, जर रेश्मा आणि सलमा आणि सलमा व मनदिप यांच्यामधील अंतर प्रत्येकी 6 मीटर असेल तर रेश्मा आणि मनदिपमधील अंतर किती?



आकृती 9.12

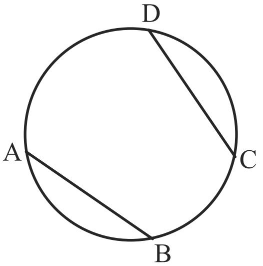
6 एका कॉलनी मध्ये 20m त्रिजेची वर्तुळाकार बाग आहे. त्याच्या हद्दीवर समान अंतरावर अंकूर, सय्यद व डेव्हीड हे खेळण्यातले टेलिफोन हातात घेऊन एकमेकांशी बोलत आहेत. तर प्रत्येक टेलीफोनच्या दोऱ्याची (धागा) लांबी काढा.

9.4 वर्तुळाच्या कंसानी आंतरित केलेले कोन :

तुम्हाला दिसून आले आहेच की व्यासा व्यातिरिक्त जीवेच्या अंत्यबिंदू मुळे वर्तुळाचे दोन कंसात भाग होतात. एक विशालकंस व दुसरा लघुकंस जर तुम्ही समान जीवा घेतल्या तर मिळणाऱ्या कंसाचा आकार काय असेल? एका जीवेने मिळालेला कंस हा दुसऱ्या जीवेने मिळालेल्या कंसशी समान आहे?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

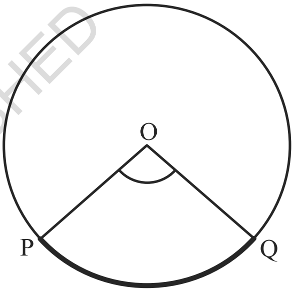
होय. ते लांबीने सुध्दा समान असतात. ते एकरूप कंस ही होतात जर ते एकमेकावर ठेवले तर न वाकविता किंवा न फिरविता ते एकमेकांशी तंतांतंत जुळतात. CD जीवेने जर कंस कापून तो AB जीवेने बनलेल्या कंसावर ठेवला तर तुम्हाला CD व AB व तंतोतंत जुळते हे दिसून येईल (आकृती 9.13 पहा) यावरून समान जीवा कंस आंतरित करतात व्यत्यासाने एकरूप कंस वर्तुळाच्या समान जीवा बनतात.



आकृती 9.13

जर एका वर्तुळाच्या दोन जीवा समान आहेत, तर त्यानी बनविलेले कंस एकरूप आहेत. व्यत्यासाने जर दोन कंस एकरूप असतील तर त्यांच्या पासून बनलेल्या जीवा समान असतात.

कंसाने केंद्राशी (वर्तुळमध्याशी) आंतरित केलेल्या कोनाची व्याख्या सलग्न जीवेने केंद्राशी आंतरित केलेला कोन असते लघुकंसाने लघुकोन आंतरित केला जातो तर विशालकंसाने प्रविशाल कोन आंतरित केला जातो. म्हणून आकृती 9.14 मध्ये PQ या लघुकंसाने आंतरित केलेला वर्तुळमध्याशी कोन $\angle POQ$ आणि विशाल कंसाने O येथे आंतरित केलेला कोन प्रविशाल कोन $\angle POQ$ आहे.



आकृती 9.14

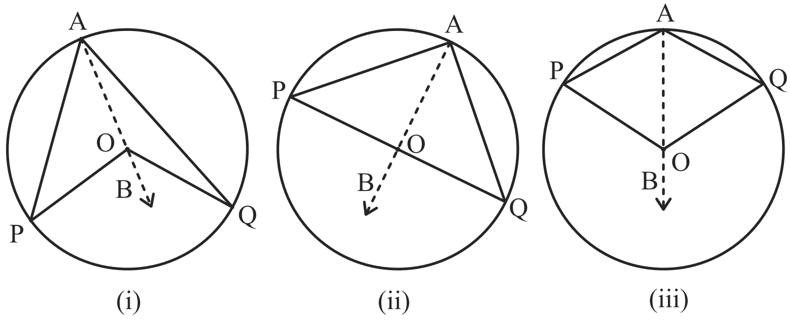
वरील गुणधर्म व प्रमेय 12.1 वरून खालील निष्कर्ष खरा आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वर्तुळाचे एकरूप कंस वर्तुळमध्यांशी समान कोन आंतरित करतात म्हणून वर्तुळाच्या जीवेने वर्तुळमध्याशी आंतरित केलेला कोन हा संलग्न लघु कंसाने वर्तुळमध्याशी केलेल्या कोनाइतका असतो. खालील प्रमेय कंसाने आंतरित केलेला वर्तुळमध्याशी कोन व परिघाशी कोन यातील संबंध सांगतो.

प्रमेय 9.7 : कोणात्याही वर्तुळात एका कंसाने वर्तुळमध्याशी आंतरीत केलेला कोन त्याच कंसाने वर्तुळावर अंतरीत केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.

सिध्दता : वर्तूळात PQ कंसाने वर्तुळमध्य O येथे $\angle POQ$ आंतरीत केलेला असून $\angle PAQ$ हा परिघावर A बिंदूत अंतरीत केला आहे. आम्हाला सिध्द करावयाचे आहे $\angle POQ = 2\angle PAQ$.



आकृती 9.15

आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे 9.15 (i) PQ लंघुकंस (ii) PQ अर्धवर्तुळ आणि iii. PQ मोंठा(विशाल) कंस आहे. AO जोडून B पर्यंत वाढविला $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$ कारण Δ चा बाह्यकोन त्यांच्या आंतरविरूध्द दोन कोनांच्या बेरजेइतका असतो.

तसेच ΔOAQ मध्ये

$OA = OQ$ .... (वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\angle OAQ = \angle OQA$ .... (प्रमेय 7.5)

$\therefore \angle BOQ = 2\angle OAQ$ ...(1)

त्याचप्रमाणे $\angle BOP = 2\angle OAP$ ...(2)

1 व 2 वरून $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

$\therefore \angle POQ = 2\angle PAQ$ ...(3)

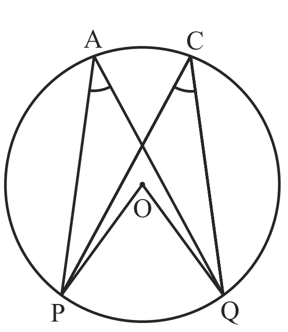
आकृती 9.16 (iii) मध्ये PQ हा विशालकंस आहे (3) मध्ये बदल करून, प्रविशाल कोन. $\angle POQ = 2\angle PAQ$

समजा आपण P व Q बिंदू सांधून PQ जीवा तयार केली तर $\angle PAQ$ ला रेषाखंडले PAQP कंसाने बनलेला कोन म्हणतात.

प्रमेय **9.7 :** मध्ये A हा वर्तुळवरील एक बिंदू आहे. जर आपण दुसरा एखादा बिंदू C घेतल्यास (आ. **9.16** पहा)

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

$\therefore \angle PCQ = \angle PAQ$



आकृती 9.16

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमेय 9.8 : वर्तुळाच्या एकाच वर्तुळखंडातील कोन समान असतात.

प्रमेय 9.8 मधील आकृती (ii) ची चर्चा केल्यास.

$\angle PAQ$ हा अर्ध वर्तुळातील कोन आहे.

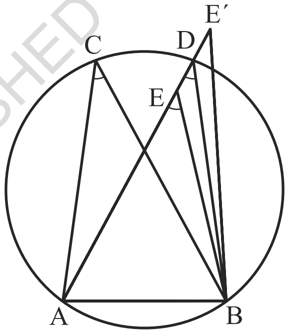
$$\therefore \angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

जर आपण दुसरा बिंदू C वर्तुळावर घेतल्यास $\angle PCQ = 90^\circ$ मिळेल यावरून दुसरा एक गुणधर्म सापडतो असा की, अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो.

प्रमेय 9.8 चा व्यत्यास सुध्दा सत्य आहे तो खालील प्रमाणे आहे.

प्रमेय 9.9: जर दोन बिंदू सांधणाऱ्या रेषाखंडाने दुसऱ्या दोन बिंदूशी (जे त्या रेषाखंडाच्या बाजूला आहेते) समान कोन आंतरीत करतात. तर ते चारही बिंदू वर्तुळावर असतात.

या निष्कर्षाची सत्यता खालील प्रमाणे पहाता येते आकृती 9.17 मध्ये AB रेषांखंडाने C व D या दोन बिंदूशी समान कोन आंतरित केलेले आहेत. $\angle ACB = \angle ADB$ येथे A, B, C व D हे वर्तुळावर आहेत असे दाखवायचे आहे A, B व C मधून जाणारे वर्तुळ काढा. समजा हे वर्तुळ D मधून जात नाही तर ते AD ला E मध्ये छेदते, किंवा E मध्ये छेदते.



आकृती 9.17

जर A, C, E व B हे बिंदू वर्तुळावर असतील.

$\angle ACB = \angle AEB$ (का ?)

परंतु $\angle ACB = \angle ADB$ (गृहित)

$\therefore \angle AEB = \angle ADB$

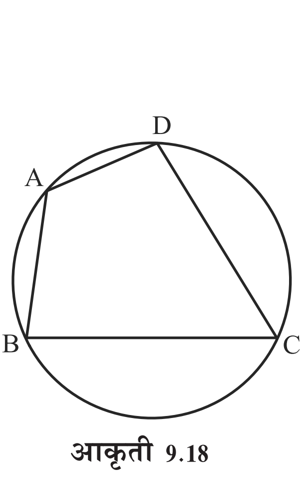
हे शक्य नाही जेंव्हा E हा D शी निगडीत आहे.

त्याच प्रमाणे E^1 सुध्दा D शी निगडीत आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

9.5 चक्रिय चौकोन (Cyclic Quadrilateral)

चौकोन ABCD ला चक्रीय चौकोन म्हणतात जेंव्हा A, B, C व D हे सर्व शिरोबिंदू वर्तूळावर आहेत. (आकृती **9.18** पहा) अशा चौकोनाचा विषेश गुणधर्म पहायला मिळतो. कांही चक्रीय चौकोन रचा वेगवेगळ्या बाजू असलेले चक्रीय काढून त्यांचे सर्व कोन मोजा त्यातील विरूध्द कोनाची बेरीज करा व खालील तक्यात भरा



आकृती 9.18

अनुक्रम	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

वरील तक्त्यावरून आपण काय निष्कर्ष काढाल?

$\angle A + \angle C = 180$ आणि $\angle B + \angle D = 180°$ असे आढळतात यावरून

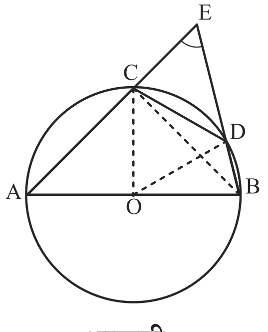
प्रमेय 9.10 : चक्रीय चौकोनाच्या समुख कोनोच्या दोन्ही जोड्यापरस्परांना पूरक असतात किंवा चक्रीय चौकोनात विरूध्द कोनांच्या जोडींची बेरीज 180^0 असते.

या प्रमेयाचा व्यत्यास प्रमेय खाली दिलेल्याप्रमाणे.

प्रमेय 9.11 : जर एखाद्या चौकोनाच्या विरूध्द (समुंख) कोनांच्या जोडीची बेरीज 180^0 असेल तर तो चक्रिय चौकोन आहे.

उदाहरण 2 : आकृती 9.19 मध्ये AB ही वर्तुळाचा व्यास आहे. CD ही वर्तुळाच्या त्रिजेएवढीच जीवा आहे. AC व BD जेंव्हा वाढविल्या जातात तेंव्हा E मध्ये छेदतात.

सिध्द करा $\angle AEB = 60°$



आकृती 9.19

उकल : OC, OD आणि BC जोडा

ΔODC हा समभुज Δ आहे

$\therefore \angle COD = 60°$

आता $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (प्रमेय 9.7 वरून)

$\therefore \angle CBD = 30°$

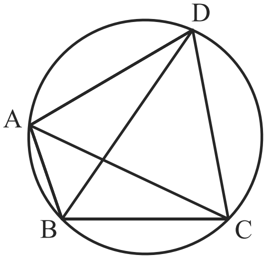
परत $\angle ACB = 90°$ (का ?)

$\therefore \angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

$\therefore \angle CEB = 90° - 30° = 60°$ ie $\angle AEB = 60°$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3: आकृती 9.20 मध्ये ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे. AC व BD कर्ण आहेत जर $\angle DBC = 55^\circ$ आणि $\angle BAC = 45^\circ$ तर $\angle BCD$ ची किंमत काढा.



आकृती 9.20

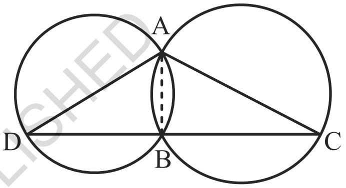
उकल : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (एकाच वर्तुळखंडातील कोन)

$\therefore \angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

$\therefore \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (चक्रीय चौ.चे समुंख कोन)

$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 100 = 80^\circ$

उदाहरण 4 : दोन वर्तुळे एकमेकांस A व B मध्ये छेदतात AD व AC या दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत (आकृती 9.21 पाहा). तर असे सिध्द करा की B हा DC रेषाखंडावरील बिंदू आहे.



आकृती 9.21

उकल : AB जोडा

$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ\end{array}\right\}$ (अर्धवर्तुळखंडातील कोन)

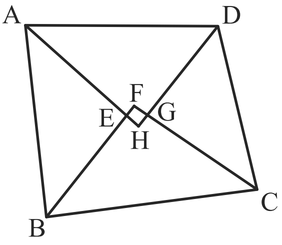
$\therefore \angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

म्हणून DBC ही सरळरेषा आहे.

ie B हा बिंदू रेषाखंड DC वर आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 5 : चौकोनाच्या आंतरकोनांच्या दुभाजकानी बनलेला चौकोन चक्रीय चौकोन आहे हे सिध्द करा.



आकृती 9.22

उकल : ABCD या चौकोनाचे कोन दुभाजक अनुक्रमे AH, BF, CF आणि DH हे आहेत $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ चे आहेत यानी चौकोन EFGH तयार होतो.

आता $\angle FEH = \angle AEB = 180 - (\angle EAB - \angle EBA)$ (का ?)

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

आणि $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ (का ?)

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$\angle FEH + \angle FGH = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

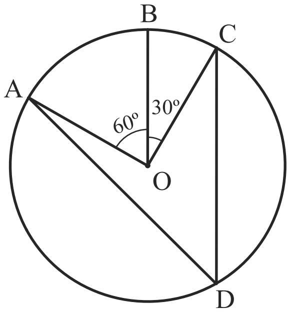
$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ = 360^0 - 180^0 = 180^0$

म्हणून प्रमेय 9.11 वरून EFGH हा चक्रीय चौकोन आहे.

स्वध्याय 9.3

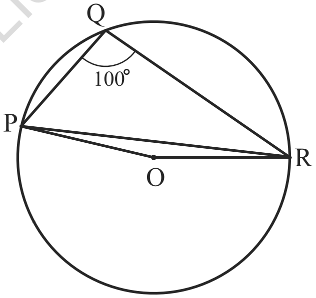
1. आकृती 9.23 मध्ये O मध्य असलेल्या वर्तुळावर A,B,C हे तीन बिंदू आहेत असे की, $\angle BOC = 30°$ आणि $\angle AOB = 60°$, जर D हा कंस ABC शिवाय वर्तुळावरील बिंदू असेल तर $\angle ADC$ शोधा.



आकृती 9.23

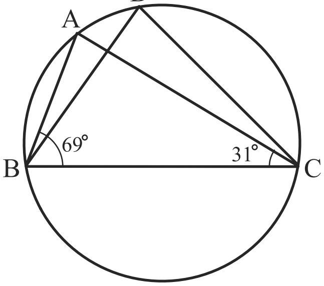
2. वर्तुळाची जीवा व त्रिज्या समान आहेत तर जीवेने लघुकंसाशी आंतरीत केलेला व विशाल कंसाशी आंतरीत केलेला कोन काढा.

3. आकृती 9.24 मध्ये $\angle PQR = 100°$ P,Q, आणि R हे O मध्य असलेल्या वर्तुळावरील बिंदू आहेत तर $\angle OPR$ शोधा.



आकृती 9.24

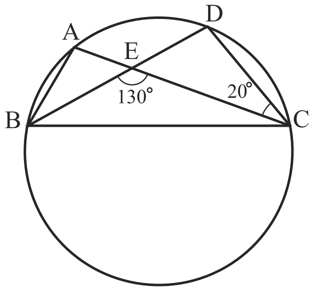
4. आकृती 9.25 मध्ये $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$. तर $\angle BDC$ शोधा.



आकृती 9.25

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. आकृती 9.26 मध्ये A,B,C आणि D हे चार बिंदू वर्तुळावरील आहेत AC व BD रेषाखंड E मध्ये छेदतात $\angle BEC = 130°$ आणि $\angle ECD = 20°$ तर $\angle BAC$ शोधा.



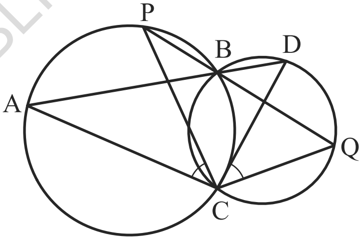
आकृती 9.26

6. ABCD चक्रीय चौकोनाचे कर्ण E बिंदूत छेदतात. जर $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$ तर $\angle BCD$ शोधा आणि जर AB = BC असेल तर $\angle ECD$ शोधा.

7. जर चक्रीय चौकोनाचे कर्ण हे वर्तुळाचे व्यास आहेत. तर आयत आहे हे सिध्द करा.

8. जर समलंब चौकोनाच्या असमांतर बाजू समान आहेत तर सिध्द करा तो चक्रीय चौकोन आहे.

9. जर दोन वर्तुळे B व C बिंदूता छेदत आहेत. तर B बिंदूतून दोन रेषाखंड ABD व PBQ असे काढले की,ते वर्तुळास A,D,ते P ,Q बिंदूत छेदतात तेव्हा $\angle ACP = \angle QCD$ असे सिध्द करा.



आकृती 9.27

10. Δ च्या दोन बाजू व्यास घेऊन वर्तुळे काढली तर त्यांच्या छेदनबिंदू Δ च्या तिसऱ्या बाजुवर असतो हे सिध्द करा.

11. Δ ABC व ΔADC हे दोन काटकोन त्रिकोण असून त्यांचा समाईक कर्ण AC आहे. तर सिध्द करा $\angle CAD = \angle CBD$.

12. चक्रीय समांतरभूज चौकोन आयत असतो हे सिध्द करा.

9.6 सारांश

या प्रकरणात तुम्ही खालील मुद्दे शिकला आहात.

1. एका स्थिर बिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या एकाच पातळीतील बिंदूच्या मार्गास वर्तुळ म्हणतात.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळामध्यांशी समान कोन आंतरीत करतात .
3. जर वर्तुळाच्या दोन जीवानी वर्तुळमध्याशी समान कोन आंतरीत केले असतील तर त्या जीवा समान असतात.
4. वर्तुळाच्या केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेस दुभागतो.
5. वर्तुळाच्या वर्तुळमध्यातून जीवेला दुभागणारी रेषा काढली असता ती जीवेस लंबरूप असते.
6. वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळमध्यापासून समान अंतरावर असतात
7. वर्तुळमध्यापासूनसमान अंतरावर असणाऱ्या जीवा समान असतात.
8. जर वर्तुळाचे दोन कंस समान असतील तर त्यांच्या सलग्न जीवा समान असतात व्यत्यासाने जर वर्तुळाच्या जीवा समान असतील तर त्यानी बनलेले कंस समान असतात.
9. वर्तुळाचे एकरूप कंस वर्तुळमध्याशी समान को आंतरीत करतात.
10. एखाद्या कंसाने वर्तुळमध्यांशी आंतरीत केलेला कोन हा त्या कंसाने वर्तुळावरील कोणत्याही बिंदूशी आंतरीत केलेल्या कोनाच्या दूप्पट असतो.
11. वर्तुळाच्या एकाच वर्तुळखंडातील कोन समान असतात.
12. अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो..
13. जर दोन बिंदू सांधाणारा रेषाखंड त्याच अंगास असणाऱ्या इतर दोन बिंदूशी समान कोन आंतरीत करीत असतील तर ते चारही बिंदू वर्तुळावर असतात.
14. चक्रीय चौकोनाच्या समुंख कोनाची बेरीज 180° असते.
15. जर चौकोनाच्या समुंख कोनांची बेरीज 180° असेल तर तो चौकोन चक्रीय चौकोन असतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

L3F3K3

प्रकरण– 10

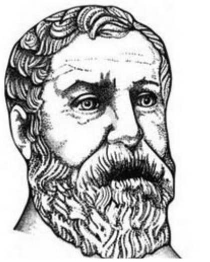
हिरॉनचे सूत्र (Heron's Formula)

आम्हाला माहित आहे की, एखाद्या त्रिकोणाची उंची दिली असता, त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}$ पाया × उंची. एखाद्या विषमभूज Δ ची बाजू माहित असून उंची माहित नसेल तर त्याचे क्षेत्रपळ कसे काढाल?

आता समजा की एका विषमभुज त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंची लांबी आपल्याला माहीत आहे परंतु उंची माहीत नाही. तरीही तुम्ही त्याचे क्षेत्रफळ काढू शकाल का? उदाहरणार्थ, एका त्रिकोणाकृती बागेच्या बाजूंची लांबी अनुक्रमे 40 m, 32 m आणि 24 m आहे. तुम्ही त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढाल? तुम्हाला सूत्र वापरावयाचे झाल्यास नक्कीच उंची काढावी लागेल. परंतू उंची काढण्यासाठी आमच्यापासी कोणताच उल्लेख नाही. प्रयत्न करा जर आपणाला शक्य नाही तर पुढील भागात पहा.

10.1 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ – हिरॉनच्या सुत्रानुसार

हिरॉनचा जन्म इ. सन 10 च्या सुमारास इजिप्त मधील अलेक्झांड्रीया येथे झाला असावा. त्याने उपयोजीत गणितासाठी कार्य केले. गणित आणि भौतिक विषयासाठी त्यांनी केलेले कार्य व लेखन हे व्यापक आणि वैविध्यपूर्ण गणले जाते. भूमितीमधील क्षेत्रमापन या विषयाशी संबंधीत समस्यंतवर तीन पुस्तके लिहिली. पहिल्या पुस्तकात त्याने चौरस आयत, त्रिकोण असमांतर चौकोन विवीध आकारामध्ये चौकोन, नियमित आकाराच्या बहुभुजाकृती वर्तूळ, दंडगोलांचे पृष्ठभाग, शंकू, गोल यांच्या पृष्ठफळाबाबत लिहिले आहे. या पुस्तकामध्ये हिरॉनने तीन बाजूवरून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ कसे काढावे याचे सूत्र शोधून काढले आहे.



हिरान

(इ. सन 10 ते इ. सन 75)

आकृती 10.1

हिरॉनने दिलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सुत्राला हिरॉनचे सूत्र म्हणून देखिल ओळखले जाते. ते खालील प्रमाणे आहे.

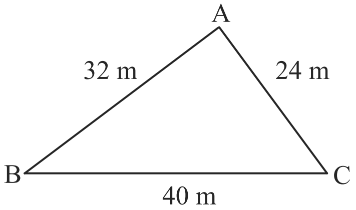
$$\text{त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \ldots\ldots\ (I)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यामध्ये a, b आणि c या त्रिकोणाच्या बाजू आणि s = अर्ध परिमिती म्हणजेच त्रिकोणाच्या परिमिती चे अर्धे $= \frac{a+b+c}{2}$.

हे सूत्र, ज्या त्रिकोणाची उंची काढणे शक्य नसते तेव्हा याचा वापर करता येतो. त्रिकोणाकृति आकाराच्या बागेचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी या सुत्राचा वापर करू (आकृती क्र. 10.2 पहा)

यात $a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m



आकृती 10.2

$\therefore \quad s = \frac{40 + 24 + 32}{2}$ m

$= 48$ m

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

ABC या बागेचे क्षेत्रफळ

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$

$= 384$ m^2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

निरीक्षण केल्यास आपणास दिसून येईल की, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ यावरून बागेच्या बाजू काटकोन त्रिकोणात आहेत. यातील सर्वात मोठी बाजू जी 40 m आहे ती कर्ण आणि AB व AC मधील होणारा कोन 90°.

सूत्र क्रमांक I चा वापर करून आपण बागेच्या क्षेत्रफळाचा पडताळा पाहू शकतो.

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 24$ m^2 $= 384$ m^2

हिरॉनच्या सुत्राच्या सहाय्याने आलेल्या उत्तराशी हे वरील उत्तर समान आहे हे दिसून येते.

आता आपण हिरॉनच्या सुत्राचा वापर करून या आधी सोडविलेल्या क्षेत्रफळांच्या उदाहरणावरून चर्चा करू.

(i) 10 cm बाजू असलेला समभुज त्रिकोण.

(ii) दोन बाजूंची लांबी प्रत्येकी 5 cm आणि असमान बाजू 8 cm असलेला समद्विभुज त्रिकोण.

उदाहरण (i) $\quad S = \frac{10 + 10 + 10}{2} = 15$ cm

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ cm^2

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ cm^2

$= 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

उदाहरण (ii) $S = \dfrac{8+5+5}{2} = 9\ \text{cm}$

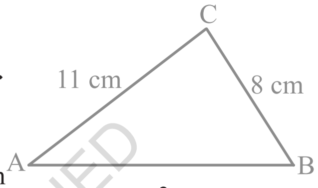
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{9\,(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}\ \text{cm}^2$

$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2$

$= 12\ \text{cm}^2$

आता आपण आणखीन जास्त उदाहरणे सोडवू.

उदाहरण 1: त्रिकोणाच्या दोन बाजू अनुक्रमे 8 cm आणि 11 cm असून त्यांची परिमिती 32cm आहे तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा. (आकृती क्र. 10.3)



आकृती 10.3

उकल : त्रिकोणाची परिमिती = 32 cm, $a = 8$ cm आणि $b = 11$ cm

$\therefore$ तिसरी बाजू $c = 32\ \text{cm} - (8 + 11)\ \text{cm} = 13\ \text{cm}$

म्हणून $2s = 32\ \text{cm}\ s = \dfrac{32}{2} = 16\ \text{cm}$

$(s - a) = (16 - 8)\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$

$(s - b) = (16 - 11)\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$

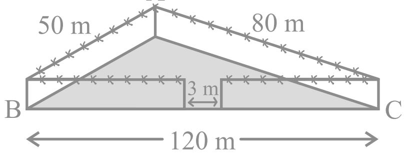
$(s - c) = (16 - 13)\ \text{cm} = 3\ \text{cm}$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2$

$= 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$

उदाहरण 2 : बाजूंची लांबी 120 m, 80 m, 50 m असलेली ABC ही एक त्रिकोणाकृती बाग आहे. (आकृती क्र. 10.4 पहा). बागेची माळीण धनिया हिला बागेसभोवती कुंपण घालून आतील बाजूस गवताची लागवड करावयाची आहे. लागवडीसाठी किती जागा लागेल? येण्याजाण्या करीता 3 m रुंद-ीच्या प्रवेशद्वारासाठी जागा सोडून बागेसभोवती तारेचे कुंपण घालण्यासाठी ₹ 20 / मीटर प्रमाणे येणारा खर्च काढा.



आकृती 10.4

उकळ : बागेचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी दिलेल्या मुद्दानुसार

$2s = 50\ \text{m} + 80\ \text{m} + 120\ \text{m} = 250\ \text{m}$

$s = 125\ \text{m}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$(s-a) = (125 - 120)$ m = 5 m

$(s-b) = (125 - 80)$ m = 45 m

$(s-c) = (125 - 50)$ m = 75 m

म्हणून, त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$

$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$

त्याच प्रमाणे बागेची परिमिती= AB + BC + CA = 250 m

म्हणून कुंपणासाठी आवश्यक तारेची लांबी = 250 m – 3 m (गेटची रुंदी सोडून) = 247 m

कुंपणासाठी येणारा खर्च = ₹ 20 × 247

= ₹ 4,940

उदाहरण 3: एका त्रिकोणाकृती खुल्या जागेच्या बाजूंच्या लांबीचे प्रमाण 3 : 5 : 7 आहे. त्याची परिमिती 300 m आहे तर त्या जागेचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : मीटर एककात जागेच्या बाजूंचे प्रमाण $3x$, $5x$ आणि $7x$ असे मानू (आकृती क्र. 10.5 पहा).

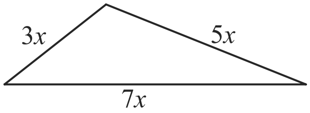
आम्हाला माहीत आहे की $3x + 5x + 7x = 300$ (त्रिकोणाची परिमिती)

म्हणून $15x = 300$

ज्यामूळे $x = 20$

त्रिकोणांच्या बाजूंची लांबी 3 × 20 m, 5 × 20 m, 7 × 20 m

ते म्हणजे 60 m, 100 m आणि 140 m.



आकृती 10.5

आता क्षेत्रफळ काढू शकाल (हिरॉनच्या सुत्राचा वापर करून)

माहितीच्या आधारे $s = \dfrac{60 + 100 + 140}{2}$ m = 150 m

क्षेत्रफळ $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ \text{m}^2$

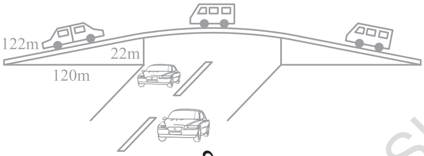
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$

$= 1500\sqrt{3}\ \text{m}^2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

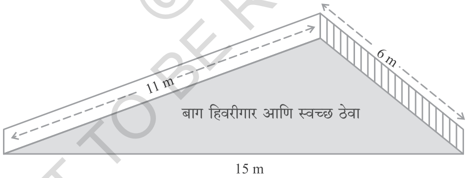
स्वाध्याय 10.1

1. 'पुढे शाळा आहे' अशी सूचना असलेला वाहतूकीचा सूचना फलक समभुज त्रिकोणाच्या आकाराचा असून त्याच्या बाजूची लांबी 'a' एकक आहे. तर सूचना फलकाचे क्षेत्रफळ शोधा (हिरॉनच्या सुत्राचा वापर करून) जर त्या फलकाची परिमिती 180 cm असेल तर त्या सूचना फलकाचे क्षेत्रफळ किती?
2. एक उड्डाणपूलाच्या खालील बाजूला असलेल्या भिंती त्रिकोणाकृती आहेत. त्यांचा वापर जाहिरातीसाठी केला जातो. भिंतीच्या बाजू प्रत्येकी 122 m, 22 m आणि 120 m आहेत. (आकृती क्र. 10.6 पहा).
   जाहिरातीचा दर ₹ 5000 प्रत्येक m^2 प्रत्येक वर्षासाठी असा आहे. एका कंपनीने त्यापैकी एक भिंत 3 महिन्यांच्या भाडेतत्वावर घेतली तर त्यांना किती भाडे द्यावे लागेल?



आकृती 10.6

3. एका बागेत एक घसरगुंडी आहे. त्याच्या एका बाजूच्या भिंतीवर "**बाग हिरवीगार आणि स्वच्छ ठेवा**" असा संदेश रंगविला आहे. (आकृती 10.7 पहा) त्या भिंतीच्या बाजू 15m, 11m , 6m आहेत तर रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 10.7

4. एका त्रिकोणाच्या दोनबाजू अनुक्रमे 18cm आणि 10cm लांबी च्या असून त्याची परिमिती 42cm आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
5. एका त्रिकोणाच्या बाजू 12 : 17 : 25 या प्रमाणात असून त्याची परिमिती 540cm आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
6. एका समद्विभुज त्रिकोणाची परिमिती 30cm असून समान असलेल्या प्रत्येक बाजूची लांबी 12cm आहे. त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

10.2 सारांश

या प्रकरणात तुम्ही खालील गोष्टी शिकलात.

1. हिरॉनच्या सुत्राचा वापर करून a, b आणि c बाजू असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढता येते, जे खालील प्रमाणे आहे.

   त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ज्यात $s = \frac{a+b+c}{2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

X7C6M5

प्रकरण– 11

पृष्ठफळ आणि घनफळ (Area and Volume)

11.1 शंकुचे पृष्ठफळ

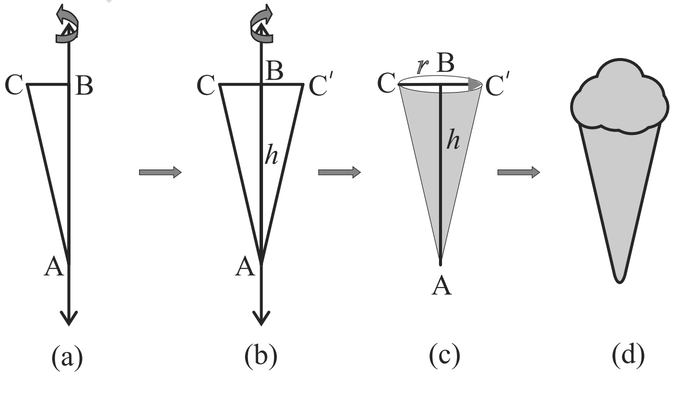
यापूर्वी, आपण घन, घनायत आणि वृत्तचितीच्या पृष्ठभागांचे पृष्ठफळ यांचा अभ्यास केलेला आहे. आता शंकूच्या पृष्ठभागाच्या क्षेत्रफळाचा अभ्यास करूया.

आतापर्यंत आपण एखाद्या घन आकृतीची कल्पना एकावर एक समरूप आकृत्या रचून घेतल्या अशा आकृत्याना आपण लोलक (prism) म्हणतो. आता आपण अशा घनाकृतीचा अभ्यास करू की जे लोलक नाहीत (अशा घनाकृतीना पिरॅमिडस म्हणतात) त्याची निर्मिती कशी होते ते पाहू.

कृती : कोन B हा काटकोन असेल असा ABC हा एक काटकोन त्रिकोण कागदावर कापून काढला. त्यातील AB या लंब बाजूच्या वरील टोकाला एक दोरा चिकटवा [आकृती 11.1(a)पहा] दोऱ्याचे वरील टोक तुमच्या हातात धरून त्रिकोणाच्या पायाची बाजू फिरवा. काय घडते?

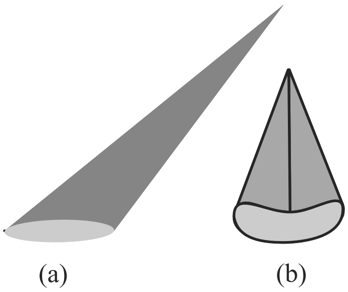
त्रिकोण जोरात फिरू लागल्याते दिसणारे आकृती तुम्ही ओळखलात का? (आकृती 11.1 (b)) त्यामुळे तुम्हाला आईसक्रीम भरून दिलेल्या पात्राची आठवण झाली ना? (आकृती 11.1 (c) व (d) स) पहा.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 11.1

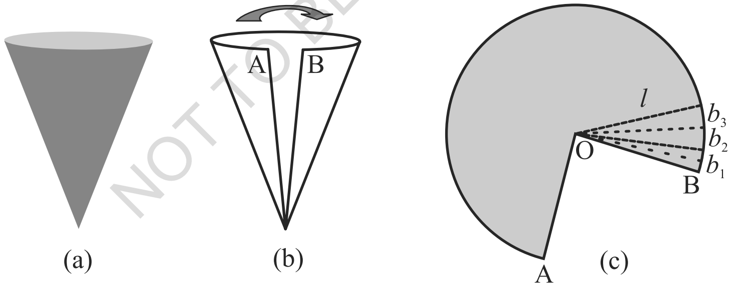
अशा शंकूला लंब वर्तुळाकार शंकू म्हणतात. आकृती 11.1 (c) मध्ये लंब वर्तुळाकार शंकू दर्शविला आहे. यामध्ये A ला शिरोबिंदू म्हणतात AB ला उंची, BC ला त्रिज्या आणि AC ला तिरकस उंची म्हणतात. येथे 'B' हा शंकूच्या वर्तुळाकार तळाचा केंद्र आहे यामधील उंची, त्रिज्या आणि तिरकस उंची ही अनुक्रमे *h*, *r* आणि *l* अक्षरानी दर्शविलेली आहे. आता पून्हा एकदा, आपण कोणत्या शंकूला लंब शंकू म्हणत नाहीत ते पाहू (आकृती 11.2 (a) मध्ये पहा) येथे दर्शविलेले शंकू हे लंब शंकू नाहीत. कारण शिरोबिंदू आणि पायाच्या वर्तुळाचा मध्य हे जोडले असता ते काटकोनात नाहीत आणि (b) मध्ये पाया वतुळाकार नाही शंकू या प्रकरणाचा विचार केला असता शंकू म्हणजेच लंब वर्तुळाकार शंकू असा होता.



आकृती 11.2

कृती : (i) ज्यामध्ये कागद दुमडला गेला नाही अशा प्रकारचा एक कागदाचा शंकू घ्या. तकापा त्याच्या बाजू सरळ करा. आणि उघडा तिथे तुम्हाला शंकूचा पृष्ठभाग मिळेल (शंकू ज्या ठिकाणाहून कापला तीच त्या शंकूची तिरकस उंची जी आपण '*l*' अक्षराने दर्शवितो) कापलेला भाग आपल्याला वर्तुळाकार केकचा एक भाग असा दिसतो.

(ii) A आणि B म्हणून दर्शविलेली दोन टोके एकत्र आणली असता तुम्हाला शंकूचा वर्तुळाकार भाग दिसेल जो आकृती 11.3 (c) मध्ये दर्शविला आहे जो शंकूचा वर्तुळाकार पाया बनतो.



आकृती 11.3

(iii) आकृती 11.3(c) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे O बिंदूपासून टोकापर्यंत काढलेल्या रेषेवरून कागद कापून त्याचे शंभर भाग केले. प्रत्येक कापलेला भाग जवळजवळ लहान त्रिकोण होईल, ज्याची उंची शंकूच्या तिरकस उंची '*l*' ला समान असेल.

(iv) आता प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ त्रिकोणाचा पाया $\times\ l$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore$ सर्व कागदाच्या तुकड्यांचे क्षोत्रफळ

= सर्व त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज

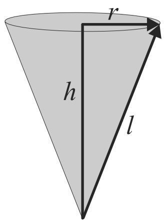
$= \frac{1}{2} b_1, l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \ldots\ldots.$

$= \frac{1}{2} l [b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..]$

$= \frac{1}{2} l$ संपूर्ण वक्राकार भागाची लांबी 11.3 (c)($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots..$ हे आकृतीच्या वक्राकार भागापासून बनले आहेत.)

परंतु आकृतीचा वक्राकार भाग हा शंकूच्या पायाची परिमिती बनवितो. आणि शंकूच्या पायाचा परीघ = $2\pi r$, ज्यामध्ये r ही शंकूची त्रिज्या आहे.

शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ = $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$



आकृती 11.4

येथे r ही त्याच्या पायाची त्रिज्या आणि l ही त्याची तिरकस उंची आहे.

सुचना : पायथागोरसच्या नियमांचा वापर करून $l^2 = r^2 + h^2$ (आकृती 11.4 च्या निरिक्षणा वरून) येथे h ही शंकूची उंची आहे.

म्हणून $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

आता, जर r त्रिज्येच्या शंकूचा पाया भरीव असेल तर त्याचे आवश्यक क्षेत्रफळ πr^2 इतके होईल.

शंकूचे संपूर्ण पृष्ठफळ = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r (l + r)$

उदाहरण 1 : त्रिज्या 7 cm आणि तिरकस उंची 10 cm असलेल्या शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$ ही किंमत घ्या).

उकळ : शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ = πrl

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10\ cm^2$

$= 220\ cm^2$

उदाहरण 2 : शंकूची उंची 16 cm, पायाची त्रिज्या 12 cm आहे तर शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ आणि एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$ ही किंमत घ्या)

उकल : येथे h = 16 cm आणि $r = 12$ cm

$\therefore\ l^2 = h^2 + r^2$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm = 20 cm

म्हणून, पार्श्व पृष्ठफळ = πrl

= $3.14 \times 12 \times 20 cm^2$

= $753.6\ cm^2$

एकूण पृष्ठफळ = $\pi rl + \pi r^2$

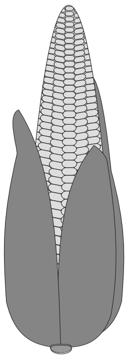
= $(753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) cm^2$

= $(753.6 + 452.16)\ cm^2$

= $1205.76\ cm^2$

उदाहरण 3 : एका मक्याच्या कणसाचा आकार साधारणपणे शंकूसारखा आहे. त्याच्या सर्वात मोठया भागची त्रिज्या 21 cm आणि लांबी (उंची) 20 cm आहे. कणसाच्या 1 cm^2 जागेत चार दाणे आहेत तर पूर्ण कणसामध्ये किती दाणे आहेत ते काढा. (आकृती 11.5 पहा).

उकल : कणसातील असणारे दाणे हे त्याच्या पार्श्वभागावर असतात त्यासाठी आपणाला पार्श्वपृष्ठ काढणे आवश्यक आहे, त्यामुळे दाण्यांची एकूण संख्या काढणे शक्य होईल. आपणाला कणसाची उंची दिली आहे त्यासाठी त्याची तिरकस उंची काढणे आवश्यक आहे.



आकृती 11.5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

= $\sqrt{404.41}$ cm

= 20.11 cm

कणसाचे पार्श्वपृष्ठफळ = πrl

= $\frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 cm^2 = 132.726\ cm^2$

= $132.73\ cm^2$ (अंदाजे)

कणसाच्या पार्श्व पृष्ठ भागाच्या 1 cm^2 मध्ये आढळणारे दाणे= 4

म्हणून कणसाच्या पार्श्व पृष्ठफळाच्या भागावर आढळणाऱ्या दाण्यांची संख्या = 132.73×4

= 530.92

= 531 (अंदाजे)

कणसावर सुमारे 531 दाणे असतील.

स्वाध्याय 11.1

(π जिथे उल्लेख केला नाही तिथे = $\pi = \frac{22}{7}$ किंमत घ्या)

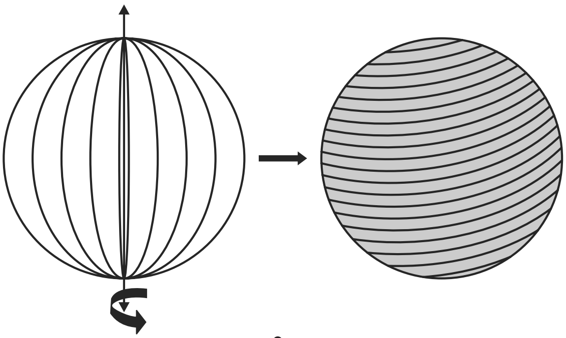
1. एका शंकूच्या पायाचा व्यास 10.5cm आणि तिरकस उंची 10cm आहे तर त्या शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ काढा.
2. तिरकस उंची 21 m आणि पायाचा व्यास 21 m असलेल्या एका शंकूचे पूर्ण पृष्ठफळ काढा..
3. एका शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ 308 cm^2 आणि त्याची तिरकस उंची 14 cm आहे. तर
   (i)शंकूच्या पायाची त्रिज्या आणि
   (ii) शंकूचे संपूर्ण पूर्ण पृष्ठफळ काढा.
4. एक शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची 10 m आणि पायाची त्रिज्या 24 m आहे तर.
   (i) शंकुची तिरकस उंची काढा.
   (ii) कॅनव्हास कपड्याची किंमत 1 m^2 ₹ 70 आहे तर तंबू बनविण्यासाठी लागणाऱ्या कॅनव्हासची किंमत काढा.
5. तंबूची उंची 8 m आणि पायाची त्रिज्या 6 m असा एक शंक्वाकृती तंबू बनवायचा आहे. त्यासाठी 3 m उंची ची ताड़पत्री घेतल्यास त्या ताडपत्रीची लांबी किती? तंबूला कापड झाकताता सुमारे 20 cm ताडपत्री बाजारातून आणली त्यासाठी तितल्या जाडीची ताडपत्री किती घ्यावी लागणार आहे. (π = 3.14 ही किंमत घ्या)
6. एका शक्वांकृती आकाराच्या शिखराची तिरकस उंची 25 m आणि पायाचा व्यास 14 m आहे. त्याच्या पार्श्वपृष्ठभागाला रंगविण्यासाठी ₹ 210 दर 100 m^2 या दराने येणारा खर्च काढा.
7. विदुषकाने घातलेली टोपी शक्वांकृती असून त्याची त्रिज्या 7 cm आणि उंची 24 cm आहे. अशा 10 टोप्या बनविण्यासाठी किती कागद लागेल ते काढा.
8. मुख्य रस्त्यापासून बस थांबा वेगळा आहे हे दर्शविण्यासाठी दोन्हीच्या मध्ये शंकूच्या आकाराचे 50 बॅरीकेडस् जे जुन्या कार्डबोर्डापासून प्रक्रिया करून बनविले आहेत ते ठेवले आहेत. प्रत्येक शंकूच्या पायाचा व्यास 40 cm आणि उंची 1 m आहे. त्यांच्या बाहेरील भागाला रंगवायचे आहे. रंगविण्याचा दर ₹ 12 m^2 असा आहे तर सर्व शंकूना रंगविण्यासाठी किती खर्च येईल? (π = 3.14 ही किंमत वापरा आणि $\sqrt{1.04}$ = 1.02 घ्या.)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

11.2 गोलाचे पार्श्वपृष्ठफळ

गोल म्हणजे काय? तो वर्तुळासारखाच असतो का? एका कागदावर तुम्ही वर्तुळ काढू शकाल का? हो, काढू शकतो. कारण वर्तुळ ही एक प्रतलीय आकृती असून ज्याचा प्रत्येक बिंदू हा एका स्थीर बिंदूपासून (ज्याला आपण वर्तुळमध्य म्हणतो) निश्चित अंतरावर असतो. (अंतराला त्रिज्या म्हणतो) आता. वर्तुळाच्या व्यासावर एक दोरा चिकटविला आणि मागील घटकात ज्याप्रमाणे त्रिकोण फिरविला तसे वर्तुळ फिरविल्यास एक घनाकृती दिसते. (आकृती 11.6 पहा) त्याचे कशाशी जुळत आहे? चेंडू?

होय, त्यालाच आपण गोल म्हणतो.



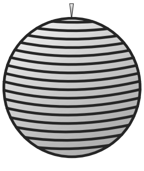
आकृती 11.6

वर्तुळाला फिरवील्यानंतर जो गोल दिसतो, त्यावेळी वर्तुळाच्या मध्याशी काय घडते ते ओळखू शकाल का? तो गोलाचा मध्य बनतो. गोल ही एक त्रिमितीय घनाकृती असून जी अवकाशातील सर्व बिंदूपासून बनली आहे. गोलाचा एक स्थिर बिंदू ज्याला आपण गोलाचा मध्य म्हणतो त्याच्यापासून स्थिर अंतरावर हे बिंदू असतात, स्थिर अंतराला आपण त्रिज्या म्हणतो. त्यांच्यापासून गोल बनतो.

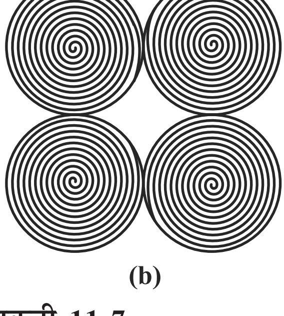
टीप : गोल हा चेंडूच्या पृष्ठभागासारखा असतो. घन गोल हा शब्द ज्या घनाचा पृष्ठभाग गोलाकार असतो त्यासाठी वापरला जातो.

कृती : तुम्ही कधी भोवरा खेळलात का अथवा कोणी तरी खेळताना पाहिलात का? तुम्हाला माहीत असेल की त्याच्या भोवती दोरा कसा गुंडाळला जातो. आता एक चेंडू घ्या त्यात एक खिळा टोचून बसवा. खिळ्याचा आधार घेऊन चेंडूसभोवती दोरा गुंडाळा (आकृती 11.7 (a) पहा). दोऱ्याच्या सुरुवात आणि शेवट या ठिकाणी खूण करा. चेंडूच्या पृष्ठभागावर दोरा पूर्णपणे गुंडाळला जाईपर्यंत.

आता शिक्षकांची मदत घेऊन त्या चेंडूचा व्यास मोजून घ्या ज्याच्या सहाय्याने तुम्हाला सहजपणे त्रिज्या मिळेल. आता एका कागदावर चेंडूच्या त्रिज्येच्या लांबी इतकीच त्रिज्या असलेली चार वर्तुळे काढा. (आकृति 11.7 (b) पहा) त्या वर्तुळावर दोरा ठेवून ती वर्तुळे एकानंतर एक अशी भरा.



(a)



(b)

आकृती 11.7

यामधून तुम्ही काय साध्य केले ?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जो दोरा तुम्ही चेंडूच्या पृष्ठभागाला पूर्णपणे आवरण घाळण्यासाठी वापरला त्याची लांबी कागदावर काढलेल्या चार वर्तुळाच्या क्षेत्रांना व्यापते. वर्तुळांची त्रिज्या आणि गोलाची त्रिज्या समान आहे. याचा अर्थ काय होतो? यातून आपणाला असे दिसून येते की, त्रिज्या r असलेल्या गोलाचे पृष्ठफळ हे वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या 4 पट = $4 \times (\pi r^2)$ आहे.

गोलाचे पृष्ठफळ = $4\pi r^2$

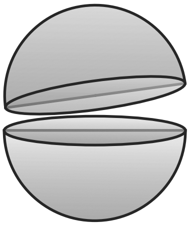
येथे r ही गोलाची त्रिज्या आहे.

गोलाच्या पृष्ठफळाला किती बाजू आहेत? ती एकच असून वक्राकार असते.

एक घन स्वरूपातील गोल घ्या. त्याचे 'मध्यातून' दोन भाग करा. गोलाच्या बाबतीत काय आढळते?

होय, त्याचे समान दोन भाग झाले आहेत. (आकृती 11.8 पहा). त्या अर्धभागाला काय म्हणतात?

त्याला अर्धगोल(hemisphere) म्हणतात (कारण hemi याचा अर्थ 'अर्ध' असा होतो.)



आकृती 11.8

आता अर्धगोलाच्या पृष्ठफळाबाबत काय? त्याला किती बाजू आहेत?

दोन ! एक वक्र बाजू आणि दुसरी सपाट बाजू (पाया)

अर्धगोलाचे पार्श्वपृष्ठ हे गोलाच्या निम्मे असते जे $4\pi r^2$ च्या, $\frac{1}{2}$ आहे.

म्हणून **अर्धगोलाचे पार्श्वपृष्ठफळ= $2\pi r^2$**

येथे, r ही गोलाची त्रिज्या आहे आणि अर्धगोल हा गोलाचा भाग आहे.

आता अर्धगोलाच्या दोन बाजूं घेऊन त्याचे पृष्ठफळ $2\pi r^2 + \pi r^2$

म्हणून **अर्धगोलाचे संपूर्ण पृष्ठफळ = $3\pi r^2$**

उदाहरण 4 : 7 cm त्रिज्येच्या गोलाचे पृष्ठफळ काढा.

उकळ : (i) त्रिज्या 7 cm त्रिज्येच्या गोलाचे पृष्ठफळ

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$$

$$= 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5 : त्रिज्या 21 cm असलेल्या अर्धगोलाचे (i) पार्श्व पृष्ठफळ आणि (ii) संपूर्ण पृष्ठफळ काढो.

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

उकळ: (i) त्रिज्या 21 cm असलेल्या अर्धगोलाचे पार्श्व पृष्ठफळ

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोलाचे पृष्ठफळ $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

उदाहरण 6 : सर्कसमध्ये साहस दृष्य सादर करणारा दुचाकीस्वार एका पोकळ गोलात दुचाकी चालवितो. 7 m व्यास असलेल्या गोलामध्ये त्याला मोटरसायकल चालविण्यासाठी उपलब्ध असणारे क्षेत्रफळ काढा.

उकळ : गोलाचा आतील व्यास = 7 m. म्हणून त्रिज्या 3.5 m. होईल. मोटर सायकल चालविण्यास मिळणारे क्षेत्रफळ म्हणजेच गोलाचे वक्रपृष्ठफळ दिलेले आहे.

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$$

उदाहरण 7: एका इमारतीवर अर्धगोलाकृती घुमट आहे (आकृती क्र. 11.9 पहा) त्या घुमटाला रंग द्यावयाचा आहे. घुमटाच्या तळाचा परीघ 17.6 m असेल तर ₹ 5 दर 100 cm^2 या दराने रंगवायला खर्च किती येईल ते काढा.

उकळ : आपणाला घुमटाच्या गोलाकार भागाला रंग द्यावयाचा आहे तो अर्धगोलाकृती असून त्याचे पार्श्व पृष्ठफळ काढणे आवश्यक आहे, त्यामुळे रंग द्यावयाचा भाग किती ते स्पष्ट होईल. घुमटाचा परीघ=17.6 m म्हणून, 17.6 m = $2\pi r$

म्हणून घुमटाची त्रिज्या $= r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m}$

घुमटाचे पार्श्वपृष्ठफळ $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

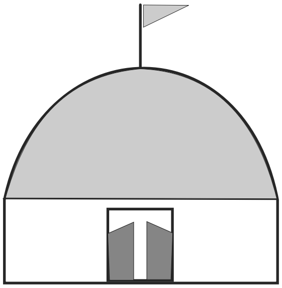
$$= 49.28 \text{ m}^2$$

रंगविण्याचा खर्च ₹ 5 दर 100 cm^2

∴ रंगविण्याचा खर्च 1m^2 = ₹ 500

म्हणून घुमटाला रंगविण्याचा एकूण खर्च = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640



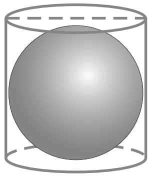
आकृती 11.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.2

(सुचना नसेल तर $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या)

1. खाली दिलेल्या त्रिज्या असणाऱ्या गोलांचे पृष्ठफळ काढा.
   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm
2. खाली दिलेले व्यास असणाऱ्या गोलांचे पृष्ठफळ काढा.
   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m
3. एका अर्धगोलांची त्रिज्या 10 cm आहे तर त्याचे संपूर्ण पृष्ठफळ किती. (π =3.14 घ्या)
4. एका गोलाकार फुग्यामध्ये हवा भरली असता त्याची त्रिज्या 7cm पासून. 14 cm इतकी वाढते तर या दोन घटनेमधील फूग्याच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा. त्यांच्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर काढा.
5. पितळेच्या अर्ध गोलाकार भांड्यांचा आतील व्यास 10.5 cm आहे. त्याच्या आतील बाजूला कल्हई (कथिलाचा मुलामा) करण्यासाठी ₹ 16 दर 100 cm^2 या दराने किती खर्च येईल?
6. पृष्ठफळ 154 cm^2 असलेल्या गोलाची त्रिज्या काढा.
7. चंद्राचा व्यास हा अंदाजे पृथ्वीच्या व्यासाच्या एक चतुर्थांश आहे तर दोन्हीच्या पृष्ठफळाचे गुणोत्तर काढा.
8. जाडी 0.25 cm असलेले स्टीलचे एक अर्धगोलाकार भांडे आहे. त्याची आतील त्रिज्या 5 cm. आहे तर त्या भांड्याच्या बाहेरील भागाचे पार्श्वपृष्ठ काढा.
9. त्रिज्या r ही असलेली एक वृत्तचिती आणि एक गोल आहे (आकृती 11.10 पहा)
   (i) गोलाचे पृष्ठफळ काढा.
   (ii) वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ काढा.
   (iii) (i) आणि (ii) च्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर.

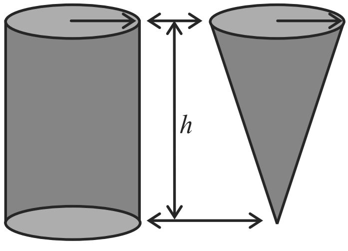


आकृती 11.10

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

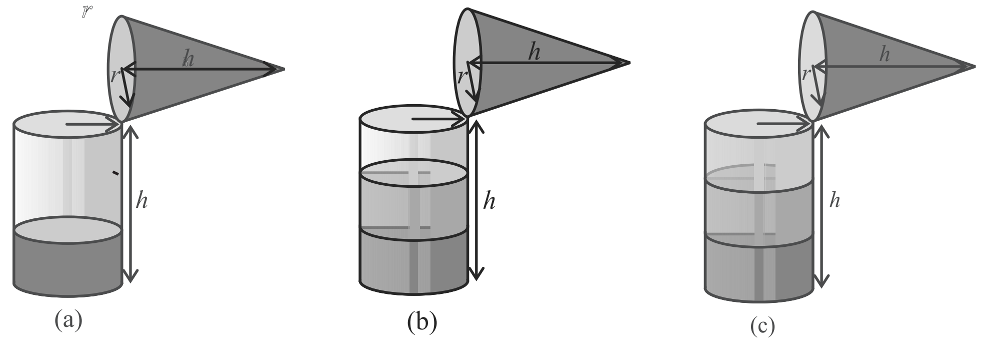
11.3 लंब वर्तुळाकार शंकूचे घनफळ

यापूर्वीच्या वर्गामध्ये आम्ही घन, घनायत आणि वृत्तचितीच्या घनफळांचा अभ्यास केलेला आहे. आकृती 11.11 मध्ये पायाची त्रिज्या समान आणि उंची समान असलेली लंबवर्तुळाकार वृत्तचिती व लंबवर्तुळाकार शंकू दिलेली आहेत.



आकृती 11.11

कृती : पायाची त्रिज्या समान आणि उंची समान असलेले एक रिकामी वृत्तचिती आणि शंकू तयार करा. (आकृति 11.11 पहा). यांच्या सहाय्याने प्रयोग करून आपणाला जाणून घेता येईल की वृत्तचितीचे घनफळ आणि शंकूचे घनपळ किती असेल.



आकृती 11.12

आता आपण कृतीला सुरुवात करू.

प्रथम शंकूमध्ये वाळू भरा आणि ती वृत्तचितीमध्ये ओता. वृत्तचितीचा किती भाग भरला आहे त्याचे निरिक्षण करा. (आकृती 11.12 (a) पहा).

पुन्हा एकदा शंकूमध्ये वाळू काठोकाठ भरा आणि वृत्तचितीमध्ये ओता. आपण पाहू शकतो की वृतचिती अजून भरली नाही. (आकृती 11.12 (b) पहा).

तिसऱ्यावेळी शंकू वाळूने भरून वृत्तचितीत रिकामा करतो तेव्हां वृत्तचिती काठोकाठ भरलेली आढळते. (आकृती 11.12 (c) पहा).

यावरून, आपण निष्कर्ष काढू शकतो की, शंकूच्या घनफळाचे तीनपट हे एका वृत्तचितीच्या घनफळा इतके असते. ज्यांची उंची आणि त्रिज्यामात्र समान असावी लागते. याचाच अर्थ असा की शंकूचे घनफळ हे वृत्तचितींच्या घनफळाच्या एक तृतियांश असते.

म्हणून, **शंकूचे घनफळ** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

येथे r ही शंकूच्या पायाची त्रिज्या आणि h ही उंची आहे.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

उदाहरण 8 : एका शंकूची उंची आणि तिरकस उंची अनुक्रमे 21 cm आणि 28 cm आहे तर त्या शंकूचे घनफळ काढा.

उकल : $l^2 = r^2 + h^2$ वरून

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2}\ \text{cm} = 7\sqrt{7}\ \text{cm}$$

शंकूचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3 = 7546 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 9 : मोनिकाजवळ कॅनव्हासचा तुकडा आहे ज्याचे क्षेत्रफळ 551 m^2 आहे. त्यापासून तिला शंकुच्या आकाराचा तंबू बनवायचा आहे 7 cm त्रिज्येचा कापताना, दुमडतांना आणि शिवतांना 1 m^2 कॅनव्हास न वापरलेल्या तर राहिलेल्या कॅनव्हासपासून बनविलेल्या तंबूचे घनफळ किती ते काढा.

उकल: एकूण कॅनव्हासचे क्षेत्रफळ 551 m^2 न वापरलेल्या कॅनव्हास = 1 m^2

तंबूसाठी उपलब्ध कॅनव्हास = (551 – 1) m^2 = 550 m^2

तंबूचे पार्श्वपृष्ठफळ = 550 m^2 शंकाकृती तंबूची त्रिज्या = 7 m

लक्षात घ्या तंबूचे पार्श्वपृष्ठफळ आहे. (तंबूची जमीन कॅनव्हासने आच्छादली जात नाही).

तंबूचे पार्श्वपृष्ठफळ = 550 m^2

$$\pi rl = 550$$

अथवा $$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

आता $$l^2 = r^2 + h^2$$

म्हणून $$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m$$

$$= 24 \text{ m}$$

शंक्काकृती तंबूचे घनफळ $$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$$

$$= 1232 \text{ m}^3$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.3

[सुचना नसेल तर $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या)

1. खाली दिलेल्या मापाच्या वर्तुळाकार शंकूचे घनफळ काढा.

   (i) त्रिज्या 6 cm, उंची 7 cm (ii)त्रिज्या 3.5 cm उंची 12 cm

2. शंक्वाकृती भांड्याची धारणाशक्ती लीटरमध्ये काढा.
   (i) त्रिज्या 7 cm, तिरकस उंची 25 cm
   (ii) त्रिज्या 12 cm तिरकस उंची 13 cm
3. शंकूची उंची 15 cm आणि त्याचे घनफळ 1570 cm^3 आहे तर शंकूच्या पायाची त्रिज्या किती ते काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या)
4. जर उंची 9 cm, असणाऱ्या एका शंकुचे घनफळ 48π cm^3 आहे तर त्याच्या पायाचा व्यास काढा.
5. वरील व्यास 3.5 m, असलेल्या एक शंकूच्या आकाराचा खड्डा असून त्याची खोली 12 m आहे तर त्याची धारणक्षमता किलो लिटर मध्ये किती असेल?
6. एका शंकूचे घनफळ 9856 cm^3 त्याच्या पायाचा व्यास 28 cm आहे तर पुढील किंमती काढा.
   (i) शंकूची उंची (ii) शंकूची तिरकस उंची
   (iii) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ.
7. एका ABC काटकोन त्रिकोण बाजू 5 cm, 12 cm आणि 13 cm आहेत त्यातील 12 cm बाजू असलेला भाग फिरविल्यास येण्याऱ्या आकृती चे घनफळ काढा.
8. प्रश्न क्र. 7 मधील त्रिकोण ABC हा 5 cm बाजू घेऊन फिरविल्यास येणाऱ्या आकृतीचे घनफळ काढा. प्रश्न क्रमांक 7 व 8 मध्ये उत्तरात येणाऱ्या घनफळांचे गुणोत्तर काढा.
9. गहू ओतून ठेवल्यानंतर त्याची शंकूच्या आकाराची रास तयार झाली आहे त्याचा व्यास 10.5 m आणि उंची 3 m आहे. तर त्याचे घनफळ काढा. पावसापासून रक्षण करण्यासाठी त्या राशीला झाकण्यासाठी लागणाऱ्या कॅनव्हासचे क्षेत्रफळ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

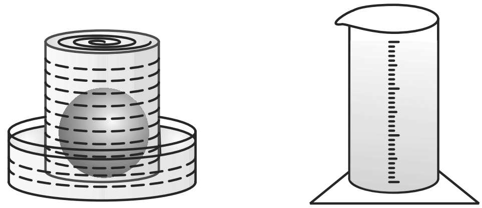
11.4 गोलाचे घनफळ

आता आपण गोलाच्या घनफळाचे कसे मापन करतात ते पाहू. यासाठी प्रथम वेगवेगळ्या त्रिज्या असलेले दोन अथवा तीन गोल घ्या. एक गोल भांड्यात बसेल अशा आकाराचे भांडे घ्या तसेच ते भांडे दुसऱ्या भांड्यात बसेल असे आणखी एक मोठे भांडे घ्या. ते भांडे मावेल अशा आकाराचे आणखी एक मोठे भांडे घ्या. आधी घेतलेल्या भांड्यांची काठोकाठ येईल इतके पाणी भरा (आकृति 11.13 (a) पहा)

(आकृती 13.30 (b)) मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे भांड्याची रचना करून.

पाणी असलेल्या भांड्यात हळूवारपणे एक गोल सोडा. आतील भांड्यातील पाणी बाहेरील भांड्यात सोडेल, बाहेरील भांड्यातील पाणी मोजपात्रात ओता आणि त्याचे मापन करा. (आकृति 13.30 (c))

त्यात बुडविलेल्या गोलाची त्रिज्या r मानल्यास $\frac{4}{3}\pi r^3$ यावरून किंमत काढा. (गोलाच्या व्यासावरून त्रिज्या काढू शकता तुम्हाला असे आढळते की, गणितातून आलेली किंमत आणि मोजपात्रात जमा झालेल्या पाण्याचे घनफळ दोन्ही समान आहेत का?



(a) (b) (c)

आकृती 11.13

वेगळ्या आकारमानाचा आणखी एक गोल घेऊन वरीलप्रमाणेच पुन्हा एकदा कृती करा. गोलाची त्रिज्या R असेल तर $\frac{4}{3}\pi R^3$ च्या सहाय्याने किंमत काढा. तो गोळा पाण्यात घातल्यानंतर बाहेरील पात्रात जमा झालेल्या पाण्याचे घनफळ आणि गणितातून मिळविलेली किंमत या दोन्ही जवळपास सारख्याच असतात. यातून आम्हाला काय दिसते? गोलाचे घनफळ हे बाहेरील पात्रात जमलेल्या पाण्याच्या घनफळा इतके असते. वेगवेगळ्या त्रिज्या असलेले गोल घेऊन हा प्रयोग करून पाहिल्यास मिळणारे परिणाम सारखेच असतील ते म्हणजे गोलाचे घनफळ हे $\frac{4}{3}\pi$ आणि गोलाच्या त्रिज्येचा घन यांच्या गुणाकाराइतके असते. यावरून आपणाला समजते की

गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

येथे r ही गोलाची त्रिज्या आहे.

पुढील इयते मध्ये हे सिध्द करणे शक्य आहे पण सध्या हे विधान सत्य मानायचे आहे.

अर्धगोल हा गोलाचा अर्धा भाग आहे. मग अर्ध गोलाचे घनफळ किती असेल हे ओळखू शकाल का? होय ते $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

म्हणून, **अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3}\pi r^3$**

येथे r ही अर्धगोलाची त्रिज्या आहे.

या सुत्रांचा वापर काही उदाहरणाच्या सहाय्याने स्पष्ट करु.

उदाहरण 10 : त्रिज्या 11.2 cm असणाऱ्या गोलाचे घनफळ काढा.

उकल:

$$\text{अपेक्षित घनफळ} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3$$

$$= 5887.32 \text{ cm}^3$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 17 : गोळाफेकीसाठी वापरल्या जाणाऱ्या धातूच्या एका गोळ्याची त्रिज्या 4.9 cm आहे. धातूची घनता 7.8 g दर cm^3 इतकी आहे तर त्या गोळ्याचे वस्तुमान काढा.

उकल : गोळाफेकचा गोळा हा धातूपासून बनविलेला आहे. आणि त्याचे वस्तूमान हे गोळ्याचे घनफळ आणि त्याची घनता याच्या गुणाकारा इतके असते. त्यातील प्रथम गोळ्याचे घनफळ काढणे आवश्यक आहे.

गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$

$= 493 \text{ cm}^3$ (जवळपास)

धातूची घनता, 1 cm^3 ला 7.8 ग्रॅम.

गोळ्याचे वस्तुमान $= 7.8 \times 493$ ग्रॅम.

$= 3845.44$ ग्रॅम.

$= 3.85$ किलोग्रॅम.(नजिकची किंमत)

उदाहरण 12 : एका अर्धगोलाकार पसरट भांड्याची त्रिज्या 3.5 cm. आहे. त्यात पाणी भरल्यास त्या पाण्याचे घनफळ किती?

उकल : भांड्यात मावणाऱ्या पाण्याचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3$

$= 89.8 \text{ cm}^3$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.4

[सुचना नसेल तर $\pi = \frac{22}{7}$ ही किंमत घ्या.]

1. खाली दिलेल्या त्रिज्येच्या सहाय्याने गोलाचे घनफळ काढा.

   (i) 7 cm (ii) 0.63 m

2. धातूच्या घनरूप चेंडूचे व्यास दिले आहेत. चेंडू पाण्याने भरलेल्या पात्रात सोडल्यानंतर विस्थापित झालेल्या पाण्याचे घनफळ काढा.

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. व्यास 4.2 cm असलेल्या धातूच्या गोळ्याची घनता 8.9 ग्रॅम दर cm^3 इतकी आहे तर त्या गोळ्याचे वस्तुमान काढा.

4. चंद्राचा व्यास हा पृथ्वीच्या व्यासाच्या सुमारे एक चतुर्थांश इतका आहे तर चंद्राचे घनफळ हे पृथ्वीच्या घनफळाच्या किती प्रमाणात आहे?
5. व्यास 10.5 cm असलेल्या अर्धगोलाकार भांड्यात किती लीटर दुध मावेल?
6. एक अर्धगोलाकार टाकी 1 cm जाडी असलेल्या लोखंडी पत्र्यापासून बनविली आहे. त्याची आतील त्रिज्या 1 m आहे तर ती टाकी बनविण्यासाठी लागलेल्या लोखंडी पत्र्याचे घनफळ काढा.
7. पृष्ठफळ 154 cm^2 असलेल्या गोलाचे घनफळ काढा.
8. एका इमारतीवर अर्ध गोलाकार घुमट आहे. त्याचा आतील भाग रंगविण्यासाठी ₹ 498.96 खर्च आला रंग लावण्याचा दर ₹ 2 दर चौरस मीटर असा आहे. तर
   (i) घुमटाचे आतील पृष्ठफळ किती ते काढा.
   (ii) घुमटामधील हवेचे घनफळ काढा.
9. त्रिज्या r आणि पृष्ठफळ S असलेले लोखंडाचे 27 गोले वितळवून पृष्ठफळ S^1 असलेला एक गोळा तयार केला तर खालील किंमती काढा.
   (i) नविन गोळ्याची त्रिज्या (r^1) ,
   (ii) S आणि S^1 चे गुणोत्तर.
10. औषधाच्या कॅप्सुलचा आकार गोल असून. त्याचा व्यास 3.5 mm आहे. तर तो भरण्यासाठी किती औषध (mm^3 मध्ये) लागेल?

11.10 सारांश

या प्रकरणात तुम्ही खालील मुद्यांचा अभ्यास केला.

1. लंबवर्तुळाकार शंकूचे पार्श्वपृष्ठफळ $= \pi r l$
2. शंकूचे संपूर्ण पृष्ठफळ $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
3. 'r' त्रिज्येच्या गोलाचे पृष्ठफळ $= \pi r^2$
4. अर्धगोलाचे पार्श्वपृष्ठफळ $= 2 \pi r^2$
5. अर्धगोलाचे संपूर्ण पृष्ठफळ $= 3 \pi r^2$
6. शंकूचे घनफळ $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
7. r त्रिज्या असलेल्या गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3} \pi r^3$
8. अर्धगोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3} \pi r^3$

(येथे l, b, h, a, r इत्यादी अक्षरे यांचा वापर संदर्भानुसार येणाऱ्या अर्थासाठी घेतला आहे.)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

H9H2D4

प्रकरण– 12

संख्याशास्त्र (Statistics)

12.1 आलेखाद्वारे माहिती सादर करणे.

या वारंवारता दर्शक, तक्त्याद्वारे माहिती सादर करण्याबद्दल आपण चर्चा केली. यानंतर आपण माहिती सादर करण्याची दुसरी पध्दत ती म्हणजे आलेखाद्वारे सादरीकरण याकडे लक्ष देऊ. असे म्हटले जाते की हजार शब्दांपेक्षा एक चित्र चांगले. नेहमी दोन घटकांची तुलना आलेखाद्वारे दर्शविल्या जातात. त्यामुळे सादरीकरण समजण्यास सोपे जाते. या घटकात आपण आलेखाद्वारे सादरीकरणाची माहिती अभ्यासू.

(A) स्तंभालेख

(B) हिस्टोग्राम, समान रुंदीचे आणि रुंदी बदल असलेले

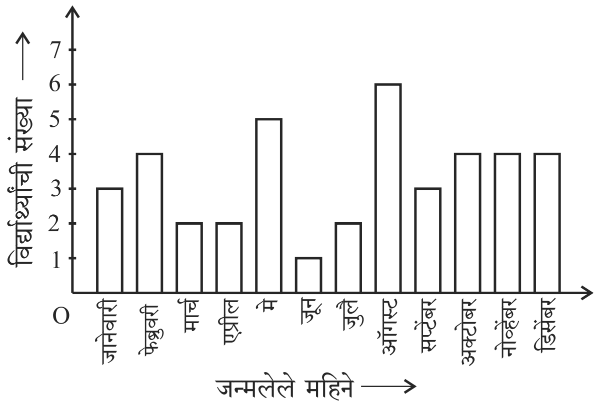
(C) वारंवारता बहुभुजाकृती

(A) स्तंभालेख (Bar graphs)

मागील इयतेमध्ये तुम्ही स्तंभालेखाचा अभ्यास आणि रचना केली आहे. आता आपण आणखी औपचारीक पध्दतीने चर्चा करू. तुम्हाला आठवत असेल की, स्तंभालेख ही चित्राद्वारे संग्रहीत माहितीचे सादरी करण असून स्तंभांची रुंदी समान आणि त्यामधील अंतरदेखील समान असते, जी एका अक्षावर (ज्याला x–अक्ष म्हणतो) आणि वारंवारता ही दुसऱ्या अक्षावर (ज्याला Y–अक्ष म्हणतो,) दर्शविली जाते. स्तंभांची उंची ही वारंवारतेच्या किंमतीवर अवलंबून असते.

उदाहरण 1: इयत्ता 9 वीच्या 40 विद्यार्थ्यांकडून त्यांचा जन्म झालेल्या महिन्याची माहिती संग्रहीत केली त्याच्यापासून खालील आलेख तयार केला.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 12.1

वरील आलेखाचे निरिक्षण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(i) नोव्हेंबर महिन्यात किती विद्यार्थ्यांचा जन्म झाला?

(ii) कोणत्या महिन्यात जास्तीतजास्त विद्यार्थ्यांचा जन्म झाला?

उकल : येथे एक घटक 'जन्माचे महिने' असून दुसरा संख्या स्वरूपातील घटक जन्मलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या आहे. .

(i) नोव्हेंबर महिन्यात जन्मलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या 4 आहे.

(ii) ऑगष्टमध्ये जास्तीतजास्त (6) विद्यार्थ्यांचा जन्म झाला.

आता आपण खालील उदाहरणाच्या सहाय्याने स्तंभालेखाच्या रचना कशी केली जाते ते पाहू.

उदाहरण 2 : ₹ 20,000 मासिक उत्पन्न असलेल्या कुटुंबाने एका महिन्याच्या खर्चाचे नियोजन केले आहे.

तक्ता 12.1

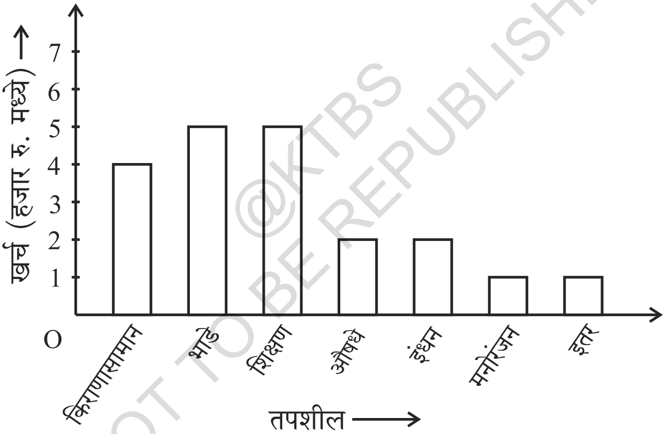
विभागीय तपशील(Heads)	खर्च (हजार रुपयामध्ये)
किराणा सामान	4
भाडे	5
मुलांचे शिक्षण	5
औषध	2
इंधन	2
मनोरंजन	1
इतर	1

वरील माहितीच्या आधारे स्तंभालेख काढा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : आपण खाली दिलेल्या टप्प्यानुसार स्तंभालेख काढतो. लक्षात घ्या की वरील माहितीतील 'किराणा सामान' च्या समोर दिलेली संख्या 4 म्हणजेच ₹ 4000 आहे.

1. आपण नेहमी तपशीलाचा भाग आडव्या अक्षावर कोणतेही प्रमाण घेऊन घेतो. यामध्ये स्तंभाच्या रुंदीला महत्व नाही परंतू स्पष्टतेच्या दृष्टीने प्रत्येक स्तंभाची रुंदी समान ठेवून त्यामधील अंतर देखील समान ठेवले जाते. ते आपण एक एककाच्या स्वरूपात घेऊ.
2. खर्चाची रक्कम आपण उभ्या अक्षावर घेऊ. खर्चाची सर्वात जास्त रक्कम ₹ 5000 आहे म्हणून 1, त्यांचे प्रमाण. 1 एकक = ₹ 1000 आहे.
3. पहिला तपशील 'किराणा सामान' सादर करताना एक आयताकृती स्तंभ काढतो ज्याची रुंदी. एकक आणि उंची 4 एकक आहे.
4. त्याचप्रमाणे पुढील स्तंभांची रचना करताना दोन स्तंभाच्या मध्ये 1 एकक अंतर ठेवले आहे.. स्तंभालेख आकृती 12.2 मध्दे काढली आहे.



आकृती 12.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे तुम्ही एकाच दृष्टीक्षेपात संबंधीत वैशिष्टे पाहू शकता. उदा. शिक्षणासाठी केला जाणारा खर्च हा औषधासाठी केलेल्या खर्चाच्या दुप्पटीपेक्षा जास्त आहे. म्हणून सादरी करणात तक्त्यापेक्षा याचा परिणाम जास्त होतो.

कृती 1 : कृती क्र.1 मधील विद्यार्थ्यांच्या 4 गटाना त्यांनी संग्रहीत केलेली माहिती स्तंभालेखाद्वारे सादर करण्यास सांगा.

आता आपण सातत्य संभाग श्रेणीतील वारंवारता स्तंभालेखात कशी सादर करावी ते जाणून घेऊ.

(B) हिस्टोग्राम. (Histogram)

हे स्तंभालेखाचेच एक स्वरूप आहे परंतू यात सातत्य संभागश्रेणीचा वापर केला जातो. उदाहरणार्थ तक्ता क्र. 12.2 मधील संभागश्रेणी पहा त्यामध्ये एका वर्गातील 36 विद्यार्थ्यांचे वजन दिलेले आहे.

तक्ता 12.2

वजन(kg. मध्ये)	विद्यार्थ्यांची संख्या
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
एकूण	**36**

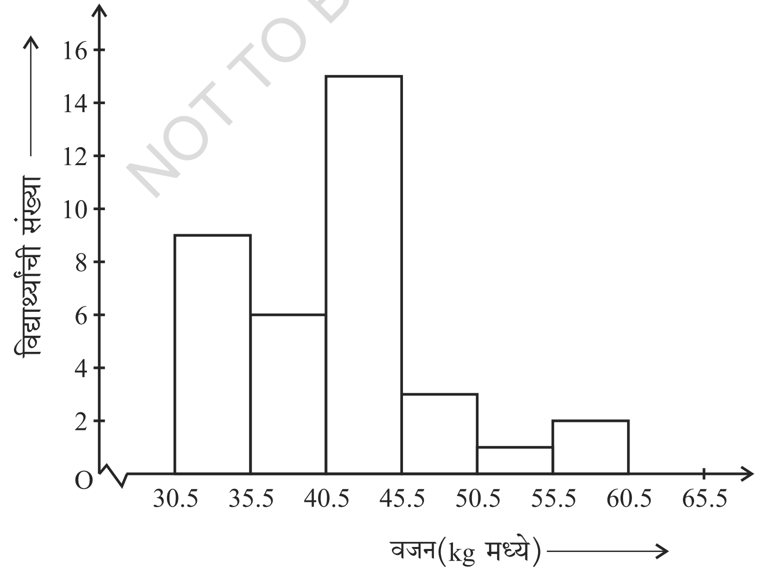
वर दिलेली माहिती आलेखाच्या स्वरूपात सादर करू.

(i) योग्य प्रमाण घेऊन वजन आडव्या अक्षावर घेऊ. यासाठी 1cm = 5kg हे प्रमाण घेऊ. संभाग श्रेणीचा प्रारंभ शुन्यापासून नसून 30.5 पासून आहे. त्यासाठी आलेखावर दर्शविताना अक्षाच्या रेषेवर जरा चढउतार अथवा पिळ दर्शवावा.

(ii) विद्यार्थ्यांची संख्या उभ्या अक्षावर योग्य प्रमाणात दर्शवू. सर्वात जास्त वारंवारता 15 असल्याने ती दर्शविण्यासाठी योग्य प्रमाण घ्यावे लागेल.

(iii) आता आपणाला आयताकार स्तंभ संभागश्रेणीच्या व्याप्तीनुसार समान रुंदीचे असतील आणि उंची वारंवारतेनुसार उदाहरणार्थ 30.5–35.5 च्या गटाला रुंदी 1 cm आणि उंची 4.5 cm

(iv) या पध्दतीने आपणाला आकृती 12.3 मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे आलेख मिळेल.



आकृती 12.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

निरीक्षण केल्यानंतर तुम्हाला दिसून येईल की, स्तंभामध्ये अंतर नाही त्यामुळे हा आलेख घनस्वरूपाचा वाटतो. याला **हिस्टोग्रॅम** म्हणतात. जो आलेखाद्वारे दर्शविताना सातत्य संभागश्रेणीतील संग्रहीत वारंवारता दर्शविण्यासाठी केला जातो. यात स्तंभालेखाप्रमाणेच स्तंभाच्या रुंदीची भूमिका रचनेमध्ये महत्वाची आहे.

प्रत्येक स्तंभाची रुंदी जरी समान असली तरी त्याची उंची अथवा आयताने व्यापलेले क्षेत्र हे वारवारतेच्या प्रमाणावर अवलंबून असते. तत्यासाठी आपण आयताची लांबी (iii) वरील प्रमाणे काढतो.

या पूर्वी दिलेल्या उदाहरणापेक्षा स्थिती वेगळी असल्यास काय करावे याचा विचार करू.

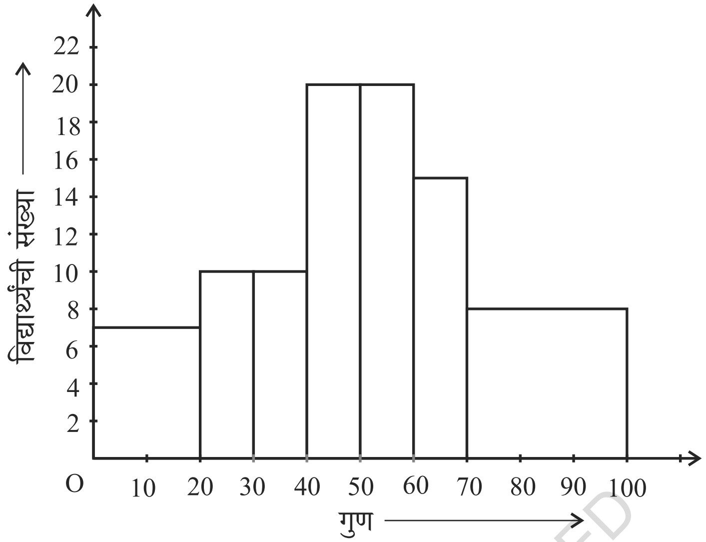
उदाहरण 3: दोन विभागातील विद्यार्थ्यांनी गणिताच्या परिक्षेत 100 पैकी मिळविलेल्या गुणांचे विवरणात्मक पृथःकरण शिक्षिका करू इच्छिते. विद्यार्थ्यांचे गुण पाहून त्यांना दिसून आले की काही विद्यार्थ्यांना 20 पेक्षा कमी गुण मिळालेत तर काहीना 70 अथवा त्यापेक्षा जास्त. त्या करीता त्यांनी संभाग श्रेणीचे गट वेगवेगळ्या व्याप्तीचे केले ते असे 0–20, 20–30, ... 60–70, 70–100 त्यानंतर त्यांनी खालील तक्ता तयार केला.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता 12.3

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70→ पेक्षा जास्त	8
तक्ता	**90**

वरील माहितीवरून विद्यार्थ्यांनी आकृती 12.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे हिस्टोग्रॅम काढला.



आकृती 12.4

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आलेखाद्वारे केलेल्या सादरीकरणाचे काळजीपूर्वक परिक्षण करा. माहितीचे सादरीकरण अचूक आहे का? नाही. आलेख चूकीचे चित्र दर्शवितो. या आधी तुम्हाला सुचविले आहे की हिस्टोग्राममधील आयतांचे क्षेत्र हे वारंवारतेच्या प्रमाणावर अवलंबून असते. या आधी ही समस्या आली नाही कारण प्रत्येक आयताची रुंदी समान होती. परंतू येथे आयताची रुंदी बदलत असल्याने हिस्टोग्राम योग्य स्वरूपात नाही. उदाहरणार्थ 70-100 च्या गटात वारंवारता 60-70 च्या गटापेक्षा जास्त दर्शविते.

त्यासाठी आयताच्या लांबीबाबत काही बदल करणे आवश्यक आहे ज्यामुळे लांबी वारंवारतेच्या प्रमाणात असेल.

यासाठी घ्यावयाच्या पायऱ्या खाली दिल्या आहेत.

1. संभाग श्रेणीची कमीतकमी व्याप्ती असलेला गट निवडा. वरील उदाहरणात कमीतकमी व्याप्ती 10 आहे.

2. आयताची उंची ही वर्गव्याप्ती 10 च्या प्रमाणात बदलून घ्यावी. उदाहरणार्थ, वर्ग व्याप्ती 20 असतांना आयताची उंची 7 आहे जेव्हा वर्गव्याप्ती 10 असेल तर आयतांची उंची $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ येईल. या प्रमाणे आपण पुढे गेल्यास आपल्याला खालील तक्ता मिळतो.

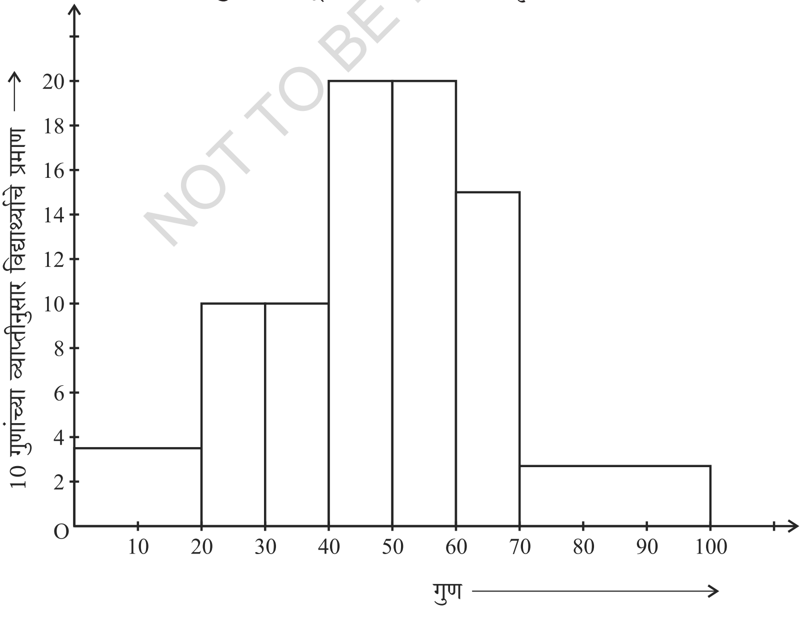
तक्ता 12.4

गुण	वारंवारता	वर्गव्याप्ती	आयताची लांबी
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता आयताच्या लांबीचे प्रमाण 10 गुणांच्या व्याप्तीच्या प्रमाणात घेतले आहे म्हणून या लांबीला ''विद्यार्थ्यांचे प्रमाण 10 गुणांच्या श्रेणीनुसार'' असे म्हणू.

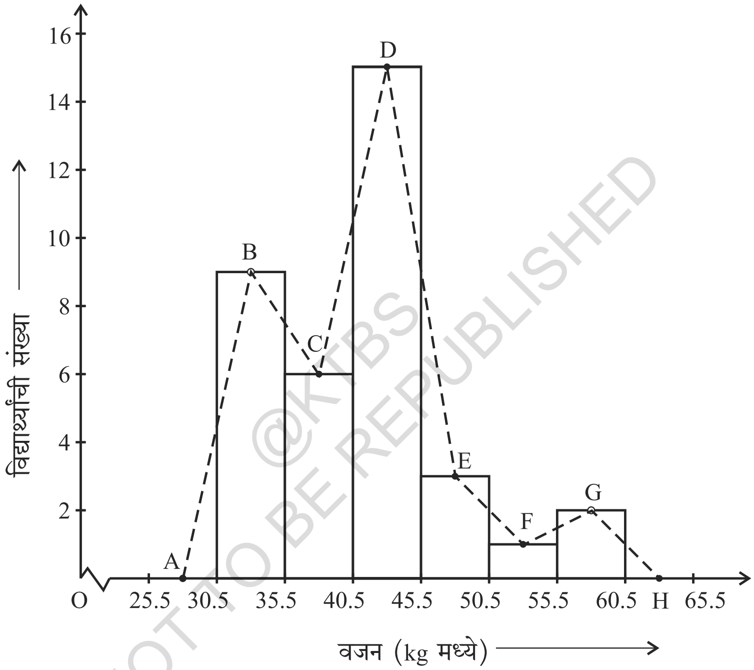
बदललेल्या रुंदीनुसार अचूक हिस्टोग्रामची आकृती 14.5 मध्ये दिली आहे.



आकृती 12.5

(C) वारंवारता बहुभुजाकृती (Frequency Polygon)

वारंवारता आणि संख्या माहिती परिणामकारकरित्या दृक स्वरूपात सादर करण्याची आणखी एक पध्दत आहे. यासाठी आकृती 12.3 मध्ये दिलेली हिस्टोग्रामची रचना पहा. प्रत्येक आयताच्या वरील बाजूचा मध्य बिंदू निश्चित करून एकमेकाशी ते बिंदू जोड़ा. त्या बिंदूना आपण B, C, D, E, F आणि G म्हणू. त्याना रेषांनी जोडल्यानंतर BCDEFG ही आकृती मिळते (आकृती 12.6 पहा) बहुभुजाकृती पूर्ण करण्यासाठी हे नाव देऊ. आकृती 12.3 मधील माहितीवर आधारित ABCDEFGH ही वारंवारता बहुभुजाकृती तयार होते जी आम्ही आकृती 12.6 मध्ये दर्शविली आहे.



आकृती 12.6

संभाग श्रेणीच्या सर्वात लहान वर्गाच्या आधी व सर्वात 'मोठ्या' वर्गाच्या नंतर कोणताही वर्ग नाही त्यामुळे लहान वर्गाच्या आधी आणि मोठ्या वर्गाच्या नंतर शुन्य वारंवारता मिळविली त्यामुळे आधी रचना केलेल्या हिस्टोग्रामच्या जागेवरच वारंवारता बहुभुजाकृतीची रचना करणे शक्य झाले. असे का? (सूचना : त्रिकोणाच्या समरूपते गुणधर्माचा वापर करा).

आता, संभागश्रेणीच्या पहिल्या वर्गाच्या आधी कोणताच वर्ग नसेल तर बहुभुजाकृतीची रचना कशी करावी? हा प्रश्न निर्माण होतो. त्या विषयी विचार करू.

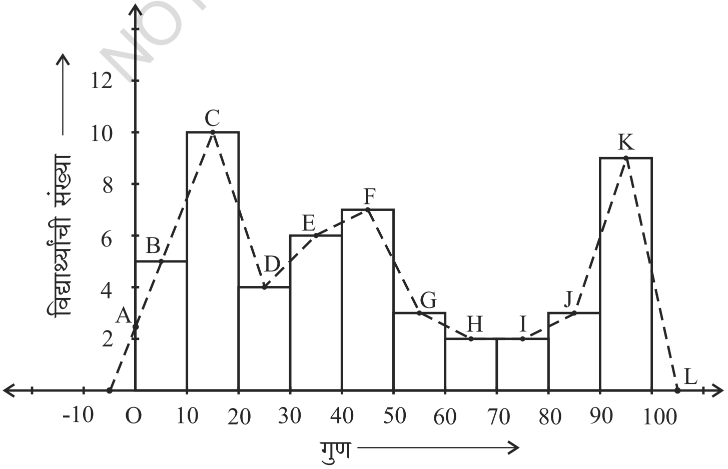
उदाहरण 4: एका वर्गातील 51 विद्यार्थ्यांनी परिक्षेत 100 पैकी मिळविलेले गुण दिले आहेत तक्ता 12.5 पहा.

तक्ता 12.5

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
एकूण	**51**

या वारंवारता दर्शक तक्त्यावरून वारंवारता बहुभुजाकृती काढा.

उकल : दिलेल्या माहितीवरून प्रथम हिस्टोग्राम काढा. त्यातील प्रत्येक आयतावर मध्य बिंदूची खूण करा. त्याना अनुक्रमे B, C, D, E, F, G, H, I, J, K अशी नावे द्या. संभागश्रेणीचा पहिला वर्ग 0–10 आहे. त्याच्या आधीचा वर्ग जाणून घेण्यासाठी आडवा अक्ष ऋणमुल्याकडे वाढवा आणि त्यावर (–10) –0 ही काल्पनिक संभाग श्रेणी घ्या आता हिस्टोग्रामचा पहिला बिंदू B याला ऋण बाजूच्या पहिल्या वर्गात शुन्य वारंवारता मानून त्याच्या मध्यबिंदूला जोड़ा. जोड़णारी रेषा उभ्या अक्षाला जिथे मिळते त्या बिंदूला A हे नाव द्या. सर्वात शेवटच्या वर्गाच्या पुढील वर्गाचा मध्य बिंदू काढून त्याला L मानू आता OABCDEFGHIJKL सर्व बिंदू सांधून वारंवारता बहुभुजाकृतीतयार होते, जी आकृती 12.7 मध्ये दर्शविली आहे.



आकृती 12.7

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वारंवारता बहुभुजाकृतीची रचना स्वतंत्रपणे हिस्टोग्रामची रचना न करता करू शकतो. त्या साठी संभाग श्रेणीतील दिलेल्या प्रत्येक वर्गाचा मध्य काढावा लागतो. प्रत्येक वर्गाच्या मध्याला वर्गमध्य म्हणतात.

वर्गमध्य काढण्यासाठी संभाग श्रेणीत दिलेल्या वर्गातील उच्चतम मर्यादा आणि निम्न मर्यादा यांची बेरीज करून त्याला 2 ने भागावे

$$\text{वर्गमध्य} = \frac{\text{उच्चतम मर्यादा} + \text{निम्न मर्यादा}}{2}$$

आता याचे एक उदाहरण अभ्यासू.

उदाहरण 5 : एका शहरात काही आठवडे निरिक्षण करून. रहाणीमान मुल्य निर्देशाकाचा अभ्यास केला तो खालील तक्त्यात दिला आहे.

तक्ता 12.6

रहाणीमाण मुख्य निर्देशांक	आठवडयांची संख्या
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
एकूण	**52**

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

वरील माहितीच्या आधारे वारंवारता बहुभुजाकृती काढा. (हिस्टोग्रामची रचना न करता)

उकल : हिस्टोग्रामची रचना न करता आम्हाला वारंवारता बहुभुजाकृती काढावयाची आहे यासाठी 140–150, 150–160 या दिलेल्या वर्गांचे वर्गमध्य काढू.

140–150 च्या वर्गात उच्चतम् मर्यादा = 150 निम्न मर्यादा = 140

म्हणून वर्गमध्य = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

याच पध्दतीने आपण पुढे दिलेल्या वर्गांचा वर्गमध्य काढू.

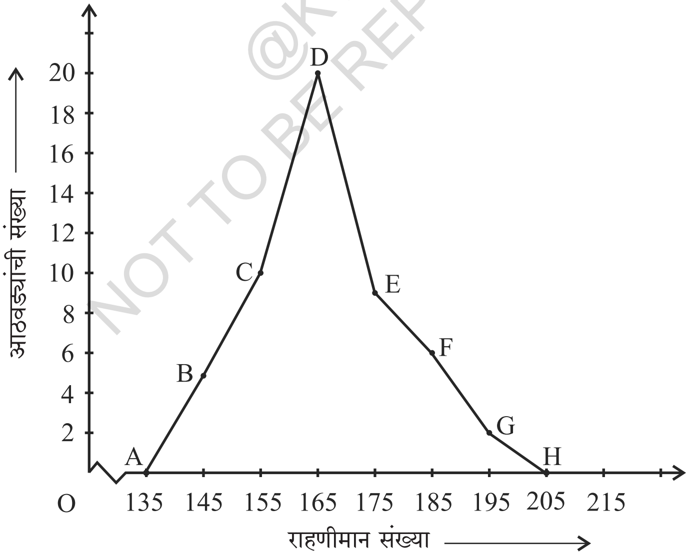
वर्गमध्यांच्या किंमतीनुसार तयार होणारा नविन तक्ता खालील प्रमाणे असेल.

तक्ता 12.7

संभाग श्रेणी	वर्गमध्य	वारंवारता
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
एकूण		**52**

आडव्या अक्षावर वर्गमध्य आणि उभ्या अक्षावर वारंवारता नोंदवून आपण आता वारंवारता बहुभुजाकृतीची रचना करू शकतो. यासाठी बिंदू B (145, 5), C (155, 10), D (165, 20) E (175, 9), F (185,6) आणि G (195,2) हे निश्चित करून रेषाखंडाने जोडावेत हे करताना आपणाला 140–150 च्या आधी येणारा वर्ग 130–140 व त्याची वारंवारता शुन्य घेऊन A (135,0) हा बिंदू आणि शेवटच्या वर्गाच्या वर्गमध्यानंतर येणारा H (205,0) हा बिंदू घ्यावयाचा विसरून चालणार नाही. त्यावरून ABCDEFGH ही वारंवारता बहुभुजाकृती तयार होईल. (आकृती 12.8 पहा)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 12.8

वारंवारता बहुभुजाकृतीचा उपयोग जेव्हा संग्रहीत माहिती मध्ये सातत्य प्रमाण जास्त असेल तेव्हा केला जातो. एकाच स्वरूपाच्या दोन माहितींची तुलना करण्यासाठी याचा जास्त उपयोग होतो. उदा-हरणार्थ, एकाच वर्गाच्या दोन विभागातील विद्यार्थ्यांच्या कार्यकृतीची तुलना.

स्वाध्याय 12.1

1. एका संघटनेने जागतीक स्तरावर गणती करून 15–44 वर्षे वयोमानाच्या स्त्रियांच्या आजाराची आणि मृत्यूची कारणे शोधली. ती खाली (% प्रमाणात) दिली आहेत.

अ. क्र.	कारणे	स्त्री मृत्यू दर (%)
1	प्रसुतीकालानंतरची आरोग्य स्थिति	31.8
2	मानसिक व मज्जासंस्थेचे आजार	25.4
3	जखमी	12.4
4	हृदयाला संबंधीत स्थिती	4.3
5	श्वसन संबंधीत स्थिति	4.1
6	इतर कारणे	22.0

(i) वरील माहिती आलेखाच्या स्वरूपात सादर करा.

(ii) जागतीक स्तरावर स्त्रियांच्या आजाराला आणि मृत्यूला असणारे मुख्य कारण कोणते?

(iii) क्रमांक (ii) मधील आजार होण्यास असलेली दोन मुख्य कारणे तुमच्या शिक्षकाकडून जाणून घ्या.

2. भारतीय समाजातील विविध घटकामध्ये दर हज़ार मुलांच्या प्रमाणात मुलींच्या संख्येचे प्रमाण (दहाच्या नजिक) यांची माहिती खालील प्रमाणे आहे.

विभाग	दर हजार मुलांच्या प्रमाणात मुलींची संख्या
परिशिष्ट जाती	940
परिशिष्ट वर्ग	970
इतर	920
मागासलेले जिल्हे	950
न मागासलेले जिल्हे	920
ग्रामीण	930
शहर	910

(i) वरील माहिती स्तंभालेखाद्वारे सादर करा.

(ii) आलेखावरून येणाऱ्या निष्कर्षांची चर्चा करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. एका राज्याच्या विधान सभा निवडणुकीत विविध राजकीय पक्षांनी जिंकलेल्या जागा खाली दिल्या आहेत.

राजकीय पक्ष	A	B	C	D	E	F
जिंकलेल्या जागा	75	55	37	29	10	37

(i) निवडणूकांचा परिणाम दर्शविणारा स्तंभालेख काढा.

(ii) कोणत्या राजकीय पक्षाने सर्वात जास्त जागा जिंकल्या?

4. एका रोपाची 40 पाने पूर्ण मिलीमीटरच्या प्रमाणात मोजली आणि त्यापासून मिळालेली माहिती खालील प्रमाणे आहे.

लांबी (mm मध्ये)	**पानांची संख्या**
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) माहितीच्या आधारे हिस्टोग्रॅम काढा. (सूचना : संभाग श्रेणी सातत्य वर्गात बदलून घ्या.)

(ii) हीच महिती सादर करण्यासाठी आणखी एखादा उपयुक्त आलेख आहे का?

(iii) 153 mm लांबी असणाऱ्या पानांची संख्या सर्वाधिक आहे हा निष्कर्ष खरा आहे का? कारण काय.

5. खालील तक्त्यात 400 निऑन दिव्यांची आयुमर्यादा (जीवनकाल) दिली आहे.

आयुर्मर्यादा (तासामध्ये)	**दिव्यांची संख्या**
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) दिलेली माहिती हिस्टोग्रॅममध्ये दर्शवा.

(ii) किती दिव्यांची आयुमर्यादा 700 तासापेक्षा जास्त आहे.?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. खालील तक्त्यात एका इयत्तेच्या दोन विभागातील विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण दिले आहेत.

विभाग - A		विभाग - B	
गुण	वारंवारता	गुण	वारंवारता
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

दोन्ही विभागातील विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण एकाच आलेखात दोन वारंवारता बहुभुजाकृती काढून दर्शवा. दोन्ही बहुभुजाकृतीच्या सहाय्याने विद्यार्थ्यांच्या प्रगतीची तुलना करा.

7. एका क्रिकेट सामान्यात संघ A आणि संघ B यांनी पहिल्या 60 चेंडूत केलेल्या धावांची माहिती दिली आहे.

चेंडूची संख्या	संघ A	संघ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

वारंवारता बहुभुजाकृतीच्या सहाय्याने

वरील माहिती एकाच आलेखात दर्शवा.

(**सूचना :** प्रथम संभाग श्रेणी सातत्य वर्गात बदलून घ्या)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. एका उद्यानात खेळत असलेल्या विविध वयोगटातील मुलांच्या संख्येचे यादृच्छिक सर्वेक्षण(random survey) केले. त्यातील माहिती खालील प्रमाणे :

वय (वर्षामध्ये)	मुलांची संख्या
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

वरील माहिती वरून हिस्टोग्रॅम काढा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. एका स्थानिक टेलिफोन नंबर डिरेक्टरीमधून यादृच्छिक पध्दतीने 100 आडनावे घेतली आणि इंग्रजी वर्णमालेप्रमाणे आडनावांचे खालील प्रमाणे वारंवारता वितरण मिळाले.

अक्षरांची संख्या	आडनावांची संख्या
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) दिलेल्या माहितीवरून हिस्टोग्रॅम काढा.

(ii) जास्तीत जास्त आडनावे असणारी संभाग श्रेणी लिहा.

12.2. सारांश :

या प्रकरणात तुम्ही पुढील घटकांचा अभ्यास केलात..

1. संख्यात्मक सामग्रीची आलेख, स्तंभालेख, हिस्टोग्राम आणि वारंवारता बहुभुजाकृतीद्वारे आलेख मांडणी केली जाते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अनुबंध – 2

गणिती नमुन्यांचा परिचय (Introduction to mathematical modelling)

A 2.1 प्रस्तावना

मागील काही इयत्तापासूनच तुम्ही आपल्या दैनंदिन जीवनाशी निगडीत असलेल्या समस्या सोडवत आलेला आहात. उदाहरणार्थ : सरळ व्याजावरील समस्या, त्याच्या सुत्राचा वापर करून सोडविला आहात. ते सुत्र किंवा समीकरण म्हणजे सरळव्याज (SI) आणि इतर घटक जसे की, मुद्दल (P), व्याजाचा दर (R) आणि मुदत (T) यांच्यामधील संबंध दाखविणारे समीकरण. ते सुत्र म्हणजे गणिती नमुन्याचे एक उत्तम उदाहरण आहे. नित्य जीवनातील गोष्टींचे गणिती नमुन्याचे एक उत्तम उदाहरण आहे. नित्य जीवनातील गोष्टींचे गणिती संबंध दाखविणारे समीकरण म्हणजेच गणिती नमुना होय.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

गणिती नमुन्यांचा वापर करून वास्तव जीवनातील अनेक समस्या सोडविता येतात.

- एखादे यान अवकाशात सोडणे.
- मान्सून पाऊस येण्याच्या शक्यता वर्तविणे.
- वाहनापासून होणारे प्रदूषण नियंत्रीत करणे.
- मोठया शहरात निर्माण होणाऱ्या रहदारीच्या समस्या कमी करणे.

या प्रकरणात आपण गणिती नमुने तयार करावयाच्या पध्दतींची ओळख करून घेणार आहोत. गणिती नमुने तयार करावयाच्या कृतीमध्ये आपण वास्तव जिवनातील समस्या घेऊन गणिती समीकरणाच्या स्वरूपात लिहू. त्यानंतर आपण ती समस्या सोडवून वास्तव जीवनातील गोष्टींचा उलगडा करू. त्यानंतर आपण उत्तराची वैधता नित्य जीवनातील समस्येच्या संदर्भात पडताळून पाहू शकतो. अर्थात् गणिती नमुने तयार करावयाच्या कृतीमध्ये येणाऱ्या पायऱ्या म्हणजे सुत्रीकरण (formulation) उकल (solution), अर्थाचा खुलासा (interpretation) आणि वैधता (validation)ह्या होत.

यापुढील भाग –A2.2 मधील समस्येची उकल विचारात घेऊन आपण सुरवात करू. इथे तुम्ही यापुर्वीच्या इयत्तेमध्ये सोडविलेल्या एका समस्येबाबत आपण चर्चा करू. त्यानंतर आपण पाहू की

समस्या सोडविण्यासाठी वापरलेल्या पायऱ्या या गणिती नमुना तयार करताना वापरलेल्या पायऱ्यापैकीच काही असतील.

पुढील विभागात (A2.3) आपण काही सोप्या नमुन्याबाबत चर्चा करू आणि विभाग A2.4 मध्ये आपण नमुने तयार करावयाची समग्र कृती, त्याचे फायदे आणि मर्यादा याबाबत चर्चा करणार आहोत.

A 2.2 शाब्दिक समस्याचे पूनर्परीशीलन

या विभातात आपण काही शाब्दिक समस्यांची चर्चा करूया ज्या तुम्ही मागील इयत्तेमध्ये शिकला आहात. चला तर प्रत्यक्ष विचलानापासून आपण सुरवात करू.

उदाहरण 1 : माझ्या कारमध्ये 48 लीटर पेट्रोल असताना मी 432 कि.मी. प्रवास केला. मला पुढील एका ठिकाणी जावयाचे आहे जे 180 कि. मी. दूर आहे. तर मला किती लिटर पेट्रोल लागेत?

उकल : हे उदाहरण सोडविण्याच्या पायऱ्यांची यादी आपण करू.

पायरी 1 : सुत्रीकरण (formulation)

आपल्याला माहित आहे की पुढील प्रवासासाठी आपल्याला अधिक पेट्रोल लागले. म्हणजेच अंतराच्या प्रमाणात लागणारे पेट्रोल सुध्दा कमी-जास्त होईल.

432 km अंतराच्या प्रवासासाठी लागलेले पेट्रोल = 48 लिटर

180 km अंतराच्या प्रवासासाठी लागणारे पेट्रोल = ?

गणिती विवरण :

जर x = मी प्रवास केलेले अंतर.

y = मला लागलेले पेट्रोल मानले

तर y हे x च्या प्रमाणात बदलेल.

म्हणून $y = kx$ जेथे k हा स्थिरांक आहे.

मी 432. कि.मी. अंतर 48 लि. पेट्रोल वापरून प्रवास करू शकतो.

म्हणून $y = 48, x = 432$.

त्यामुळे $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$.

$y = kx = \frac{1}{9}x$ .... (1)

समीकरण (1) हे प्रवास केलेले अंतर आणि लागलेले पेट्रोल यामधील संबंध दर्शविते.

पायरी 2 : उकल (solution)

आपल्याला 180 कि.मी. अंतर प्रवासासाठी लागणारे पेट्रोल शोधून काढावयाचे आहे. म्हणून आपल्याला $x = 180$ कि.मी. असताना y ची किंमत शोधावयाची आहे.

समीकरण (1) मध्ये $x = 180$ ही किंमत घातल्यास.

$$y = \frac{1}{9}x,\ y = \frac{1}{9} \times 180 = \frac{180}{9} = 20$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 3 : स्पष्टीकरण (खुलासा) (interpretation)

$y = 20$ असल्यामुळे 180 कि.मी. प्रवास करण्यासाठी आपल्याला 20 लिटर पेट्रोल लागेल.

समीकरण (1) हे तुम्ही प्रत्येक बाबतीत वापरू शकता का?

उदाहरणार्थ समजा की 432 कि.मी. चा प्रवास हा घाटातील रस्त्यावरचा असेल आणि 180 कि.मी. चा प्रवास हा सपाट मैदानी प्रदेशातील रस्त्यावर केला तर आपली कार घाटातील रस्त्यावर जास्त पेट्रोल वापरेल त्यामुळे 180 कि.मी रस्त्यावरील प्रवासासाठी आपण तोच दर लावू शकत नाही. म्हणून सुत्र (1) हे आपण दोन्ही ठिकाणी तेव्हाच वापरू शकतो जेव्हा दोन्ही प्रवासाचे रस्ते समान भौगोलिक प्रदेशातील असतील किंवा प्रवासाचे रस्ते वेगवेगळ्या प्रकारचे असतील तर वापरलेल्या पेट्रोल वर ही त्याचा थोड़ाफार परिणाम होईल. रस्त्यांवरून विविध प्रकारच्या प्रवासानुसार दोन्ही वेळेला चे प्रमाण वापरावे लागणारे पेट्रोल वेगवेगळे असेल. समस्येची उकल करताना आपण तसे गृहीत धरावे लागेल.

उदाहरण 2 : जर सुधिरने द.सा.द.शे 8% दराने ₹ 15,000/- बँकेत गुंतविले. त्याला काही मुदतीनंतर मिळाणाऱ्या रकमेतून ₹ 19.000/- किंमतीची एक वाशिंग मशिन घ्यावयाची आहे तर त्याने ₹ 15,000/- किती मुदतीसाठी गुंतवायला हवेत?

उकल :

पायरी 1 : समस्येचे सुत्रीकरण :

येथे आपल्याला मुद्दल(P)माहित आहे. व्याज म्हणजेच सुधिरला त्याच्या मुद्दल (15000) रकमेपेक्षा हवी असलेली जादाची रक्कम. ते व्याजही आपल्याला अप्रत्यक्षपणे दिलेले आहे. आपल्याला मुदत किती ते शोधून काढावयास हवे.

गणिती विवरण (Mathematical description) :

सरळव्याज (SI) काढावयाचे सुत्र $= I = \frac{Pnr}{100}$,

जेथे P = मुद्दल, T = मुदत आणि r = व्याजाचा दर आणि

I = सरळव्याज

येथे, मुद्दल P = ₹ 15,000/-

सुधीरला वॉशींग मशीन खरेदी साठी लागणारी रक्कम = ₹ 19,000/-

∴ त्याला आवश्यक असलेली ज्यादाची रक्कम = व्याज = ₹ (19,000 – 15,000) = ₹ 4,000/-

₹ 15,000/- ज्या मुदतीसाठी गुंतवावे लागतील ती मुदत (term) = n वर्षे

₹ 15,000/- वरील T वर्षाचे 8% दराने झालेले व्याज = I

$$I = \frac{1500 \times n \times 8}{100}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून $I = 1200\,n$ .... (1)

समीकरण (1) हे ₹ 15,000/- द.सा.द.शे 8% दराने गुंतविल्यास मिळणारे व्याज आणि मुदत यामधील संबंध दर्शविते. आता आपल्याला मुदत शोधून काढावयाचे आहे जेथे सरळ व्याज I = ₹ 4,000 आहे

$\therefore$ I = 4000 ही किंमत समी. (1) मध्ये घालून

$4000 = 1200\,n$ .... (2)

पायरी 2

समस्येची उकल (solution of the problem)

समीकरण (2) सोडविल्यास, आपल्याला मिळेल –

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

पायरी 3 : स्पष्टीकरण (interpretation) : $n = 3\frac{1}{3}$, असल्यामुळे 3 आणि $\frac{1}{3}$ वर्ष म्हणजेच 4 महिने, म्हणून सुधीरला वॉशींग मशीन ध्यावयाची असल्यास त्याने ₹ 15,000/- द.सा.द.शे 8% दराने 3 वर्षे 4 महिन्यासाठी गुंतवावे लागतील.

वरील उदाहरणामध्ये तुम्हाला कोणत्या गोष्टी गृहीत धराव्या लागतील ते ओळखता येईल का?

आम्ही काढलेल्या मुदतीसाठी व्याजाचा दर हा तोच (8%) राहील असे आपण गृहीत धरले पाहिजे, नाहीतर

$I = \frac{Pnr}{100}$ हे सुत्र वरील बाबतीत वैध नसेल. त्याचबरोबर वॉशींग मशीनची किंमतही 3 वर्षे 4 महिन्यापर्यंत वाढणार नाही असे गृहीत धरले पाहिजे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : एक बोट नदीच्या दोन किनाऱ्यावरील दोन शहरामधील अंतर जाण्यासाठी प्रवाहाच्या विरुध्द दिशेने जाण्यास 6 तास घेते आणि परतताना प्रवाहाच्या विरुध्द दिशेने जाण्यास 6 तास घेते आणि परत येताना प्रवाहाच्या दिशेने तितकेच अंतर येण्यास 5 तास घेते. जर पाण्याच्या प्रवाहाची गती 2 कि.मी / तास असेल तर बोटीचा संथ पाण्यातील वेग शोधून काढा.

उकल :

पायरी 1: सुत्रीकरण(formulation) : नदीच्या प्रवाहाचा वेग आणि दोन ठिकाणामधील अंतर जाण्यास लागलेला वेळ आपल्याला माहित आहे. आपल्याला संथ पाण्यातील बोटीचा वेग शोधून काढावयाचा आहे.

गणिती विश्लेषण : आपण x हा बोटीचा वेग , **t** लागलेला वेळ आणि y हे आक्रमिलेले अंतर असे मानू. म्हणून

$y = t\,x$ .... (1)

d हे दोन ठिकाणामधील अंतर असे मानल्यास.

प्रवाहाच्या विरुध्द दिशेने जाताना बोटीचा वेग = बोटीचा मुळवेग – प्रवाहाचा वेग

कारण यावेळी बोट प्रवाहाच्या विरुध्द निघालेली आहे.

म्हणून प्रवाहाच्या विरुध्द बोटीचा वेग = $(x-2)$ कि.मी / तास

त्यासाठी लागलेला वेळ = 6 तास

म्हणून समीकरण (1) वरून आपल्याला मिळते :

$d = 6(x-2)$ .... (2)

जेव्हा प्रवाहाच्या दिशेने बोट जाईल त्यावेळी बोटीच्या मुळवेगात प्रवाहाचा वेग मिळवावा लागेल.

म्हणून प्रवाहाच्या दिशेने बोटीचा वेग = $(x+2)$ कि.मी/ तास

पण बोटीला यावेळी प्रवाहासाठी लागलेला वेळ = 5 तास

$d = 5(x+2)$ .... (3)

समीकरण (2) आणि (3) वरून आपल्याला मिळेल.

$5(x+2) = 6(x-2)$ .... (4)

पायरी 2 : उकल (solution)

समीकरण (4) सोडविल्यास $x = 22$ आपल्याला मिळेते.

पायरी 3 : स्पष्टीकरण (interpretation)

$x = 22$ आहे. म्हणून बोटीचा संथ पाण्यातील वेग 22 कि.मी. प्रति तास आहे.

वरील उदाहरणावरून आपल्याला असे समजते की नदीच्या पाण्याच्या प्रवाहाचा वेग हा प्रत्येक ठिकाणी सारखाच नसतो. पाणी किनाऱ्याच्या बाजूंनी हळूवार वाहते तर मधील पाण्याचा वेग तुलने–ने अधिक असतो. त्याचप्रमाणे बोटीचा वेगही सुरवातीला कमी असतो त्यानंतर बोट वेग घेते आणि ज्यावेळी ती दुसऱ्या ठिकाणी पोहोचेल तेव्हाही बोटीचा वेग कमी होत जातो. अशा प्रकारे बोटीचा सुरवातीचा / शेवटचा वेग आणि मधल्या काळातील वेग यामध्ये थोड़ाफार फरक आढळतो. बोट किनाऱ्याजवळ अगदी थोड्या वेळासाठी असल्यामुळे वेगातील हा फरक केवळ थोड़्या वेळासाठीच एकूण वेगावर परिणाम करतो. त्यासाठी वेगातील या फरकाकडे दुर्लक्ष केले तरी चालू सकते. बोटीच्या वेगातील थोड़्याशा फरकाकडेही आपण दुर्लक्ष करू शकतो पाण्याच्या प्रवाहाचा वेग, बोटीचा वेग याबरोबरच पाणी आणि बोटीचा पृष्ठभाग यामधील घर्षण सुध्दा या एकंदर वेगावर परिणाम करते तो परिणामही खूप कमी असल्यामुळे परिणामकारक नाही असे आपण गृहीत धरले पाहिजे.

म्हणून आपण असे गृहीत धरले पाहिजे की

1. बोटीचा आणि प्रवाहाचा वेग हा सर्व ठिकाणी सारखाच आहे.
2. पाणी आणि बोटीच्या पृष्ठभागातील घर्षण आणि हवेमुळे होणारे घर्षणाचा परिणामही दुर्लक्षित करण्यायोग्यच आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील गोष्टी गृहीत धरूनच आपण संथ पाण्यातील बोटीचा वेग शोधून काढला आहे.

अशा प्रकारे वरीलप्रमाणे दिलेल्या शाब्दिक समस्या सोडविताना आपल्याला तीन पायऱ्या अवलंबाव्या लागतात. त्या म्हणजे –

1. सुत्रीकरण. (Formulation)

समस्येचे विश्लेषण करून समस्या सोडविण्यासाठी कोणते मुख्य घटक लागतात ते पहाणे. त्यांना **समर्पक मुख्य घटक म्हणतात.** आपल्या पहिल्या उदाहरणामध्ये आक्रमिलेले अंतर आणि लागलेले पेट्रोल हे मुख्य समर्पक घटक होते. या ठिकाणी आपण प्रवासाचा रस्ता, चालविण्याचा वेग इ. घटक दुर्लक्षित केले. नाहीतर समस्या सोडविणे अधिक अवघड झाले असते. जे घटक आपण दुर्लक्षित केले **त्यांना असमर्पक घटक म्हणतात.**

त्यानंतर आपण समस्येचे गणिती विश्लेषण केले आणि एक अथवा अनेक गणिती समीकरणे मांडली.

2. उकल (solution)

वरीलप्रमाणे मांडलेली समीकरणे योग्य पध्दतीने सोडवून समीकरणांची उकल केली.

3. **स्पष्टीकरण (interpretation) :** वरील पायरीमध्ये शोधलेल्या उत्तराचा अर्थ शाब्दिक समस्येमध्ये दिलेल्या घटकांच्या संदर्भात स्पष्ट केला.

खालील प्रमाणे काही समस्या तुम्हाला सरावासाठी दिलेल्या आहेत तुम्हाला वरील समस्या निराकरणाच्या पायऱ्यांचे कितपत आकलन झाले याची चाचणी खालील उदाहरणांची उकल दिलेल्या तीन पायऱ्यांच्या आधारे करून घेता येईल.

स्वाध्याय A2.1

खालील प्रत्येक समस्येमध्ये पायरी 1, 2 आणि 3 प्रमाणे सोडविण्यास समस्येमधील समर्पक आणि असमर्थक घटक स्पष्ट सांगितलेले आहेत.

1. एका कंपनीला काही काळासाठी एक संगणक हवा आहे. ती कंपनी एकतर संगणक ₹ 2,000 प्रतीमहा दराने भाडयाने घेऊ शकते अथवा ₹ 25,000 ला एक संगणक खरेदी करू शकते. जर कंपनीला संगणक दिर्घकाळासाठी हवा असेल तर कंपनीला संगणक खरेदी करणे स्वस्त पड़ेल आणि जर काही काळपुरताच वापरावयाचा असेल तर खरेदी करण्यापेक्षा भाडेतत्वावर घेणे स्वस्त पड़ेल. तर कंपनीला संगणक खरेदीपेक्षा भाडेतत्त्वावर वापरणे स्वस्त पडण्यासाठी जास्तीत जास्त किती महिन्यांच्या कालावधीसाठी लागेल?

2. एक कार A या ठिकाणावरून 40 कि.मी / तास वेगाने B या ठिकाणी चालली आहे. आणखी एक कार त्याचवेळी B या ठिकाणाहून A कड़े 30 कि.मी /तास वेगाने चालली आहे. जर दोन्ही ठिकाणामधील अंतर 100 कि.मी असल्यास दोन्ही गाडया एकमेकींना किती वेळानंतर भेटतील?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. चंद्र पृथ्वीपासून 3,84,000 कि.मी अंतरावर आहे. त्याचा पृथ्वी प्रदक्षिणेचा मार्ग हा जवळजवळ वर्तुळाकार आहे. 24 तासात एक पृथ्वी प्रदक्षिणा पूर्ण होते असे गृहीत धरून चंद्राचा पृथ्वीभोवती फिरण्याचा वेग किती ते शोधून काढा.

   (π = 3.14 चा वापर करा.)

4. एक कुटुंबाला ज्या महिन्यांमध्ये पाण्याचा हीटर वापरावा लागत नाही तेव्हा सरासरी ₹ 1,000/- वीज बील भरावे लागते. आणि ज्या कालावधीत ते पाण्याचा हीटर वापरतात त्यावेळी महिन्याला सरासरी ₹ 1,240/- बील भरावे लागते. पाण्याचा हीटर वापरण्यासाठी ताशी ₹ 8/- खर्च येत असल्यास हीटर दररोज सरासरी किती तास वापरावा लागत असावा?

A 2.3 काही गणिती नमुने (mathematical models)

आपण आतापर्यंत नविन काहीच चर्चा केलेली नाही. या विभागात आपण तीन पायऱ्यांमध्ये आणखी एका पायरीचा समावेश करणार आहोत जी आम्ही यापूर्वीच अभ्यासलेली आहे ती पायरी म्हणजे वैधता. वैधता (validation) म्हणजे काय? ते आपण पाहू. वास्तव जीवनामध्ये आपण असे गणिती नमुने सहसा स्विकारत नाही जे जीवनाच्या वास्तवाशी निगडीत नसतात. उत्तरांची वास्तविकता तपासणे आणि आवश्यकता भासल्यास गणिती विवरणे सुधारावयाच्या या पध्दतीला **'वैधता'** (validation) असे म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

वैधता ही गणिती नमुन्यामधील फार महत्त्वाची पायरी आहे. आपण या विभागात या पायरीची सविस्तर माहिती मिळवूया.

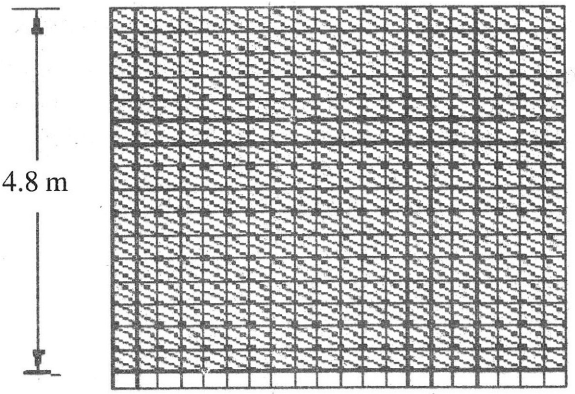
सर्वप्रथम आपण एक उदाहरण पाहू ज्यामध्ये वैधतेनंतर काही बदल करावा लागू नये.

उदाहरण 4 : तुझ्या खोलीची लांबी 6m, आणि रुंदी 5m आहे. तुला तुझ्या खोलीमध्ये 30 cm बाजू असलेल्या चौरसाकृती फरशा बसवावयाच्या आहेत तर तुला किती फरशा लागतील? हे उदाहरण गणिती नमुन्याच्या पायऱ्यानुसार सोडवा.

उकल : सुत्रीकरण (formulation**)**

या ठिकाणी या उदाहरणाची उकल करत असताना सर्वप्रथम आपण खोलीचे क्षेत्रफळ आणि एका फरशीचे क्षेत्रफळ विचारात घेतले पाहिजे. फरशीची एक बाजु 0.3 मी आहे. आणि खोलीची लांबी 6 मी असल्यामुळे $\frac{6m}{0.3m}=20$

फरशा आम्ही लांबीच्या बाजूला एका ओळीत बसवू शकतो. (आकृति A2.1 पहा).



आकृती A : 2.1

खोलीची रुंदी 5m असल्यामुळे $\frac{5m}{0.3m}=16.67$. फरशा आपण रुंदीच्या एका ओळीत बसवू शकतो. पण $16 \times 0.3 = 4.8$m आणि $5 - 4.8 = 0.2$m मी हया रुंदीच्या भागावर पूर्ण फरशी बसवू शकत नाही. त्या भागावर आपल्या फरशा कापून बसवाव्या लागतील. खोलीतील जमिनीचा फरशी न बसविलेला भाग, 0.2 मी हा एक फरशीच्या अर्ध्यापेक्षा जास्त लांबीचा आहे. त्यामुळे आम्ही प्रत्येक फरशीचे समान दोन तुकडे करूनही वापरू शकत नाही.

गणिती विवरण (mathematical description)

आपल्याला माहित आहे की ..

आवश्यक असलेल्या एकूण फरश्यांची संख्या= (खोलीच्या लांबीवर (ओळीत) बसणाऱ्या फरशा × खोलीच्या रुंदीवर (ओळीत) बसणाऱ्या फरशा) + कापून बसवाव्या लागणाऱ्या फरशा...........(1)

उकल(solution) : वरील विवरणात सांगितल्याप्रमाणे

खोलीच्या लांबीवर (ओळीत) बसणाऱ्या फरशा = 20

खोलीच्या रुंदीवर (स्तंभात)बसणाऱ्या फरशा = 16

कापून बसवाव्या लागणाऱ्या फरशा = 20

या किंमती वरील समीकरण (1) मध्ये घातल्यास

आवश्यक असलेल्या एकूण फरशा = $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$.

स्पष्टीकरण (interpretation) : आपल्या एकूण 340 फरशा लागतील.

वैधता (validation) : प्रत्यक्ष व्यवहारात ज्यावेळी आपण फरशी आणायला जातो त्यावेळी आपला फरशी फिटर आपल्याला काही जादाच्या फरशा आणायला सांगतो कारण कापायच्या वेळेला काही फरशा बाद होण्याची शक्यता असते. पण ही संख्या आपल्याका मगाराच्या कौशल्यावर आधारित

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

असते म्हणून आपल्याला समीकरणात सुधारणा करावयाची आवश्यकता नाही. त्या विवरणावरून आपल्याला फरशी विकत घेण्यासाठी आवश्यक असलेली एक ढोबळ संख्या मिळते म्हणून हे विवेचन येथेच थांबवूया.

आता आपण आणखी एका वेगळ्या प्रसंगाचा अभ्यास करू.

उदाहरण 5.

सन 2000 साली संयुक्त राष्ट्रसंघाच्या सदस्य राष्ट्रांनी एक करारपत्रावर सही केली. त्या घोषणापत्रामध्ये त्यांनी 2015 सालापर्यंत एक विशिष्ट विकास स्तर गाठण्याबाबत सहमती दिली. त्याला 'सहस्त्रक विकास लक्ष्य' (millennium development goals). असे म्हटले गेले. या लक्ष्यांपैकी एक लक्ष्य म्हणजे स्त्री-पुरुष समानता. ही समानता आपण संपादन करू शकतो की नाही ते तपासावयाचे एक साधन म्हणजे प्राथमिक, माध्यमिक आणि महाविद्यालयीन शैक्षणिक स्तरावरील मुलांचे आणि मुलींचे प्रमाण. भारत हा सुध्दा हे करारपत्र सही करणारा एक देश आहे. खालील प्रमाणे दिलेल्या तक्त्यात (Table A2.1) प्राथमिक शाळेत दाखल केलेल्या मुलींचे शेकड़ा प्रमाण दिलेले आहे.

तक्ता **A2.1**

वर्ष	दाखल संख्या प्रतिशत (%)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 – 98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6 *
2000 – 2001	43.7 *
2001 – 2002	44.1 *

(Source : Educational Statistics, Webpage of Department of eduation, GOI)

*ही माहिती तात्पूरती तरतूद म्हणून घेतलेली आहे.

वरील संख्यात्मक माहितीच्या आधारे प्राथमिक शाळेत दाखल होणाऱ्या मुलींचे प्रमाण कोणत्या दराने वाढते आहे त्याचे गणिती विवरण करा. त्याचबरोबर कोणत्या वर्षात मुलींचे दाखल प्रमाण 50% वर पोहोचेल ते ठरवा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उकल : सर्वप्रथम आपण ह्या समस्येचे गणिती समस्येमध्ये रूपांतर करूया.

पायरी 1 : सुत्रीकरण (formulation)

तक्ता A2.1 मध्ये 1991–92, 1992–93 इ प्रमाणे दाखल प्रमाण दिलेले आहे. पण शैक्षणिक वर्षाच्या सुरवातीलाच प्रवेश पूर्ण होत असल्यामुळे ते प्रवेशवर्ष आपण 1991, 1992 इ. याप्रमाणे लिहू शकतो. आता आपण असे गृहीत धरू की प्राथमिक शाळेत प्रवेश घेणाच्या मुलींचे प्रमाण एका समान दराने वाढते आहे जसे की तक्ता A2.1 मध्ये दर्शविले आहे म्हणून विशिष्ट वर्ष नाही तर वर्षांची संख्या ही महत्त्वाची आहे. (ज्याप्रमाणे आपण द.सा.द. शे 8% दराने ₹ 15000 चे 3 वर्षाचे सरळ व्याज काढताना कालावधी 1999 ते 2002 आहे किंवा 2001 ते 2004 आहे हे महत्त्वाचे नाही तर कालावधी 3 वर्षाचा आहे हे महत्त्वाचे आहे, याचप्रमाणे) या समस्येमध्येही त्याचप्रमाणे आपण 1991 नंतर वर्षांची संख्या आणि मुलींचे दाखल होण्याचे वाढत गेलेले प्रमाण यांची तुलना करून वाढ कशी होत गेली ते पाहू शकतो. आपण या ठिकाणी 1991 हे 0 वे वर्ष आणि 1991 नंतर 1992 मध्ये 1 वर्ष संपते म्हणून 1992 ला 1 असे लिहू. याप्रमाणेच 1993 ला 2, 1994 ला 3 याप्रमाणे तक्ता A2.2 खालीलप्रमाणे (A2.2) पुन्हा लिहू शकतो तो खालीलप्रमाणे तयार होईल .

तक्ता A2.2

वर्ष	दाखल संख्या %मध्ये
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

खालील तक्त्यात दाखल संख्येतील वाढ दिलेली आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता A2.3

वर्ष	दाखल संख्या % मध्ये	वाढ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1991 पासून 1992 पर्यंत एका वर्षाअखेर दाखल होण्याचे प्रमाण 0.7% ने वाढले आहे. दुसऱ्या वर्ष अखेरला हे प्रमाण 0.1% ने वाढले आहे. वरील आराखडयातील माहितीवरून आपण प्रत्येक वर्षांची संख्या आणि वाढीचे प्रमाण यामधे विशिष्ट असा संबंध दिसून येत नाही पण वाढ ही सुनिश्चितपणे दिसून येते. फक्त पहिल्या वर्षी आणि 10 व्या वर्षी ही वाढ जरा जास्त प्रमाणात झालेली दिसून येते. यावरून

सरासरी म्हणजेच – $= \dfrac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$

$\therefore$ आपण वाढीच्या प्रमाणाचा सरासरी दर 0.22% आहे असे गृहीत धरू.

गणिती विवरण :

आपण दाखल संख्येच्या वाढीचे स्थिर प्रमाण प्रतिवर्षी 0.22% आहे असे गृहित धरले आहे.

म्हणून पहिल्या वर्षात दाखल शेकडेवारी (EP) $= 41.9 + 0.22$

$\therefore$ दुसऱ्या वर्षातील दाखल शेटक्केवारी $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2(0.22)$

तिसऱ्या वर्षातील दाखल शेटक्केवारी $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3(0.22)$

$\therefore$ याचप्रमाणे n व्या वर्षातील शेटक्केवारी = $41.9 + 0.22n$ जेथे $(n \geq 1)$ ....(1)

आता आपल्याला मुलींचे दाखल प्रमाण 50% पर्यंत किती वर्षात पोहोचेल ती संख्या सुध्दा शोधून काढली पाहिजे. त्यासाठी वरील समीकरणामधील (1) n किंमत आम्हाला शोधावी लागेल.

$50 = 41.9 + 0.22\,n$ ....(2)

पायरी 2 : उकल (solution): समीकरण (2) सोडवून आपल्याला मिळेल.

$0.22\,n = 50 - 41.9 = 8.1$

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

$$n = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

पायरी 3 : स्पष्टीकरण (interpretation) :

वर्षांची संख्या ही एक पूर्णांक संख्या असून सांख्यिकीच्या सामान्य नियमानुसार आपण 36.8 ही संख्या 37 अशी लिहू शकतो.

$\therefore$ मुलींचे दाखल प्रमाण 50% वर

1991 + 37 = 2028 या वर्षात पोहोचेल.

शाब्दिक समस्यानिराकरण सामान्यपणे इथेच संपते. पण वास्तविक जिवनाशी निगडीत विचार असताना वास्तविक जीवनात या उत्तराची व्याप्ती कुठपर्यंत असेल हे आपल्याला पहावे लागेल.

पायरी 4 : वैधता (validation) : आता आपण समीकरण (2) वास्तविक जीवनातील सत्यता पडताळून पाहूया. आपल्याला माहित असलेल्या वर्षांची संख्या शोधून काढू. समीकरण (2) वापरून 2 आणि त्यांची माहित असलेल्या संख्यांशी त्यामधील फरकावरून त्यांची तुलना करु. सदर किंमती तक्ता A2.4 मध्ये दिलेल्या आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता A2.4

वर्ष	दाखल संख्या (% मध्ये)	समी (2) प्रमाणे मिळलेल्या किंमती (% मध्ये)	फरक % मध्ये
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील तक्त्यामधील किंमतींच्या निरीक्षणावरून आपल्याला माहित होईल की समी. (2) प्रमाणे मिळालेल्या किंमती प्रत्यक्षात असलेल्या किंमती पेक्षा जवळपास 0.3% ते 0.5% ने कमी आहेत. हा फरक पुढे जाऊन जवळ जवळ 3 ते 5 वर्षापर्यंत गेल्यानंतर प्रत्यक्षात वार्षिक वाढ ही 1% ते 2% इतकी होईल, एवढी वार्षिक तफावत ही स्विकार्य करण्यायोग्य आहे.

या उदाहरणामध्ये समीकरण (2) हे गणिती नमुना

समजा आम्ही असे ठरविले की दिसून आलेली ही तफावत खूप मोठी आहे आणि आम्ही ती सुधारली पाहिजे तर आपल्याला पून्हा पायरी 1 : सुत्रीकरणाकडे जावे लागेल आणि समीकरण (2) मध्ये अपेक्षित बदल करावे लागतील. तसे आपण करून पाहूया.

पायरी 1 : पुनर्सुत्रीकरण (reformulation)

आपण पुन्हा असे गृहीत धरू की तक्त्यामधील किंमती ठराविक 0.22% च्या अंतराने वाढतात. पण यावेळी आपण त्रृटी कमी करण्याच्या दृष्टीने सुधारित गुणकाच्या वापर करणार आहोत. त्यासाठी आपण सर्व किंमतींमधील तफावतीचा मध्य काढूया.

$$\rightarrow \quad \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

आपण ही मध्य (सरासरी) किंमत घेऊन समीकरण (2) पून्हा दुरुस्त करून मांडू शकतो.

सुधारित गणिती विवरण (revised mathematical description) :

समीकरण 2 मध्ये वरीलप्रमाणे काढलेली सरासरी घालू आपल्याला खालीलप्रमाणे सुधारित सुत्र किंवा समीकरण मिळेल.

n व्या वर्षातील दाखल संख्येची शेकडेवारी

$= 41.9 + 0.22\,n + 0.18 = 42.08 + 0.22\,n$ जेथे $(n \geq 1)$ .... (3)

आपण समीकरण (2) सुध्दा सुधारित स्वरूपात मांडू शकतो. ते सुधारित सुत्र असे

$50 = 42.08 + 0.22\,n$ .... (4)

पायरी 2: सुधारित उकल (altered solution): समीकरण (4) सोडविल्यास आपल्याला मिळेल.

$$0.22\,n = \frac{50-42.08}{0.22}$$

$$= 7.92$$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

पायरी 3 : स्पष्टीकरण (interpretation) :

n = 36 असल्यामुळे मुलींचे दाखलप्रमाण 50% पोहोचण्यासाठी 36 वर्षे लागतील. म्हणून 1991 + 36 = 2027 या वर्षी शेकडा प्रमाण 50% वर पोहोचेत.

पायरी 4 (वैधता) (validation) :

आपण पुन्हा एकदा समीकरण (4) वापरून मिललेल्या किंमतींची तुलना मूळ किंमतीशी करून पाहू. खालील तक्ता A2.5 मध्ये तुलना केलेली आपल्याला पाहायला मिळेल.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तक्ता A2.5

वर्ष	दाखल संख्या (% मध्य)	समीकरण 2 प्रमाणे मिळालेल्या किंमती	दोन्ही किंमती मधील फरक	समीकरण (4) प्रमाणे मिळालेल्या किंमती	किंमतीमधीले फरक
0	41.90	41.90	00	41.90	00
1	42.60	42.12	0.48	42.30	0.3
2	42.70	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.90	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.10	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.20	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.50	43.22	0.28	43.40	0.10
7	43.50	43.44	0.06	43.62	–0.12
8	43.60	43.66	–0.06	43.84	–0.24
9	43.70	43.88	–0.18	44.06	–0.36
10	44.10	44.10	00	44.28	–0.18

येथे आपण निरीक्षणाने एक गोष्ट सांगू शकतो की, समीकरण 4 ने मिळालेल्या किंमती या समीकरण 2 ने मिळालेल्या किंमतीपेक्षा मूळ किंमतींच्या जवळच्या आहेत. येथे चुकांची सरासरी 0 आहे.

आपण या ठिकाणी हा भाग थांबवू. कारण समीकरण 4 हे आपले योग्य गणिती विवरण आहे जे वर्ष आणि दाखल संख्या या शेकडेवारीचा संबंध दर्शविते. आपण एक असा गणिती नमुना येथे तयार केलेला आहे जो दाखल संख्या वाढीचे प्रमाण दर्शवितो.

आपल्याकडे असलेली गणिती साधने व माहिती वापरून गणिताचे एक विशिष्ट रूप तयार करतो त्याला गणिती नमुना (mathematical modelling) म्हणतात.

आपल्याकडे असलेल्या गणिती साधनाचा वापर करून आम्ही एक गणिती नमुना तयार करण्याचा प्रयत्न केला. आपल्याकडे असलेल्या माहितीच्या आधारे अजून चांगले अंदाज बांधता येतील अशी गणिती साधने आहेत. परंतू ती एका ठराविक मर्यादे पलीकडची आहेत. या स्तरावर आमचा हेतू इतकाच आहे की तुम्हाला गणिती नमुना कसा तयार करावा याची माहिती अवगत करून देणे. या पलीकडे जाऊन तुम्ही अचूक निदान केलेच पाहिजे असे काही नाही.

आपण आत्तापर्यंत केलेल्या चर्चेनंतर आपल्याला वास्तव जिवनातील प्रसंगावर आधारित गणिती नमुना तयार करणे आपल्याला आवडेल. खाली सरावांसाठी दिलेला समस्येच्या संदर्भात तुमचे आकलन तपासनण्याचा प्रयत्न करा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A2.2

1. 400 मीटर धावण्याची स्पर्धा ऑलिंपीकमध्ये समाविष्ट केल्यापासून त्या स्पर्धेत सुवर्णपदक मिळविण्यासाठी लागलेला कालावधी खालील तक्त्यात दिलेला आहे. त्यावरून वर्षे आणि लागलेला वेळ यामधील संबंध दर्शक गणिती नमुना (सुत्र) तयार करा. त्याचबरोबर पुढील काळातील ऑलिंपीक स्पर्धेमधील वेळेचा अंदाज करण्यासाठी त्याचा वापर करा.

तक्ता A2.6

वर्ष	कालावधी (सेकंदामध्ये)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A 2.4 गणिती नमुना रचना करण्याची पध्दत, तिचे फायदे आणि मर्यादा.

आता आपण गणिती नमुना तयार करण्याच्या पायऱ्या क्रमवार विचारात घेऊन या चर्चेचा समारोप करूया. वरील उदाहरणाच्या पार्श्वभूमीवर आता आपण गणिती नमुना तयार करण्याच्या पायऱ्यांचा थोड़क्यात ऊहापोह करूया.

पायरी 1 : सुत्रीकरण (formulation) :

A2.2 विभागातील उदाहरणात केलेले. सुत्रीकरण A2.3 मध्ये घेतलेल्या उदाहरणातील सुत्रीकरण यामधील फरक तुमच्या लक्षात आला असलेच. उदाहरण – 1 मधील दिलेली माहिती ही आपल्याला जशास तशी वापरण्यास तयार होती पण. A2.3 मध्ये दिलेल्या उदाहरणात तसे नव्हते.

त्यामध्ये आपल्याला थोड़े गणिती विवरण करावयास थोड़ा अधिक वेळ लागेल. आम्ही केलेले सुत्र आम्ही तपासून पाहिले आणि त्यापेक्षा सुधारित सुत्र आम्हाला पुन्हा काढून घ्यावे लागले. कारण प्रथम काढलेल्या सुत्रापेक्षा नंतर मिळालेले सुत्र अचूकतेच्या दृष्टीने जरा जवळचे आणि योग्य होते. सर्वसामान्यपणे हे योग्यच आहे. की, वास्तव जिवनातील प्रसंगामध्ये आपण पहिल्यांदा करत असलेल्या सामान्यीकरण किंवा सुत्रीकरणापेक्षा दुसऱ्यावेळी केलेले सुत्रीकरण हे अधिक रास्त असते. जेव्हा आपण वास्तव जिवनातील समस्या सोडवितो तेव्हा सामान्यीकरणालाच जास्त वेळ लागतो. उदाहरणार्थ न्यूटनचे गतीविषयक नियम हे एक गणिती विवरणाचे उत्तम उदाहरण आहे. ते विधानार्थी लिहीणे सोपे आहे पण ते शोधून काढण्यासाठी न्यूटननी केलेल्या गणिती विवरणाला खूप माहितीचे प्रक्रियाकरण करावे लागते आहे. त्याला खूप काम ही करावे लागले आणि वेळ ही खूप लागला. त्याचे ते प्रयत्न निश्चितपणे त्यासाठी याआधी केलेल्या वैज्ञानिकांच्या तुलनेत खूप मोठे आहेत.

सुत्रीकरणामध्ये खालील तीन पायाऱ्यांचा समावेश होतो

(i) समस्येची व्याख्या करणे (stating the problem):

समस्या नेहमीच अस्पष्टपणे किंवा संदिग्धपणे मांडली जाते. उदाहरणार्थ : मुलांचे आणि मुलींचे दाखल प्रमाण हे सारखेच असावे असे एक उदात्त ध्येय आपल्याला गाठावयाचे असते. याचा अर्थ असा होते की शाळेला जाण्याऱ्या वयोगटातील एकूण मुलापैकी 50% मुले आणि 50% मुली शाळेत दाखव व्हायला हव्यात दुसरा मार्ग असा की मुलींचे शाळेत दाखल होण्याचे प्रमाण 50% होईल याची खात्री करणे. आम्ही त्या समस्येमध्ये या दुसऱ्या विधानाचा वापर केला आहे.

(ii) समस्येशी संबंधित घटक ओळखणे (identifying relevant factors):

या टप्प्यावर आपण कोणकोणत्या घटकामधील कोणकोणते सहसंबंध महत्त्वाचे आहेत आणि कोणते घटक महत्त्वाचे नाहीत ते ठरविले पाहिजे. उदा. प्राथमिक शाळेत मुलींच्या नोंदणी संदर्भातील समस्यामध्ये मागील वर्षातील मुलींचे दाखल प्रमाण हे यावर्षीच्या दाखल संख्येवर प्रभाव पाडू शकते. काही पालकांनी जेव्हा मुलींना शाळेत दाखल केले त्याचा परिणाम इतरांच्यावर होतो आणि त्यांनाही वाटू लागते की आपण पण मुलींना शाळेत पाठवांव पण ही बाब आपण पूर्णपणे दुर्लक्षीत ठेवली. ही बाब पण महत्वाची तेव्हा वाटली असती जेव्हा नोंदणीचे शेकड़ा प्रमाण ठराविक अंकांनी पुढे गेले असते आणि सदर बाब आपण विचारात घेतली असती तर समस्येतील गुंतागुंत पुन्हा वाढली असती.

(iii) गणिती विवरण (mathematical description) :

समजा आपल्याला समस्या स्पष्टपणे समजली आणि त्यामधील कोणते घटक अधिकाधिक महत्त्वाचे आणि समर्पक आहेत हे आपल्याला समजल्यानंतर महत्त्वाच्या घटकांमधील संबंध आपण समीकरणाच्या स्वरूपात, आलेखाच्या स्वरूपात अथवा अन्य गोष्टींच्या स्वरूपात असल्यास प्रत्येक महत्त्वाचा घटक एका चलपदाच्या स्वरूपात समीकरणात आला पाहिजे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 2 : उकल (solution)

गणिती विवरण किंवा गणिती समीकरण आपल्याला समस्या उलगडून देत नाही. गणिती पायऱ्यांच्या साहाय्याने आपण समीकरण सोडविले पाहिजे. या पायरीवर आपल्या गणिती उकल करावयाच्या कौशल्यांचा किंवा जाणिवांचा पूर्ण वापर होतो.

पायरी 3 : उकलीचे अर्थस्पष्टीकरण (interpreting the solution)

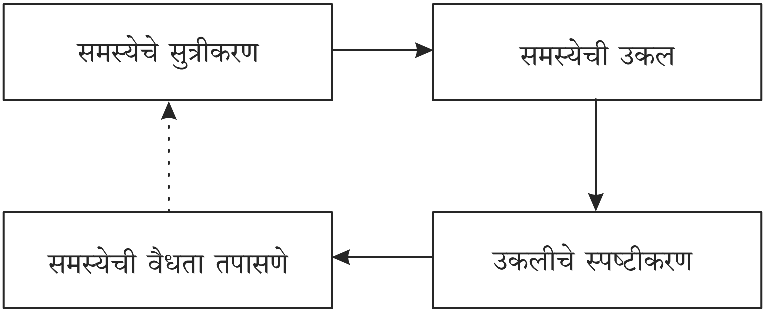
गणिती उकल म्हणजेच समीकरणातील चलपदाची किंमत शोधून काढणे. आपल्याला या किमतीचा अर्थ काय तो पहाण्यासाठी पुन्हा एकदा समस्येकडे जाऊन आपण समस्येच्या संदर्भात शोधून काढलेल्या किमतीचा अर्ध स्पष्ट करायला हवा.

पायरी 4 : उकलीची वैधता (validating the solution)

उकलीमधून मिळालेली किंमत आपल्याला वास्तवाशी त्याची तुलना करून पहावी जर आपण शोधलेले उत्तर वास्तवांशी निगडीत असेल तर आपण तयार केलेले गणिती सुत्र समर्पक आहे असे समजावे. अगर तसे नसल्यास आम्ही उदा A.2.3 मध्ये पाहिल्याप्रमाणे पुन्हा सुत्रीकरणाकडे जाऊन सुधारित गणिती नमुना तयार करावा.

गणिती नमुना तयार करण्याचा पध्दतीमध्ये ही पायरी म्हणजे समस्या निराकरण करणे आणि गणिती नमुना तयार करणे यामधील प्रमुख फरक आहे ही पायरी गणिती नमूना तयार करण्याच्या पध्दती मधील मुख्य पायरी असून बऱ्याचवेळा शाब्दिक समस्या सोडविताना ती सहसा आढळून येत नाही. काही सोप्या शाब्दिक समस्या निराकरणात आपल्याला उत्तराची वैधता तपासून पहाण्याची गरज निश्चितपणे नसते. कारण त्यावेळी आपल्याला अचूक उत्तर सहजपणे मिळते. पण A2.3 या विभागात दिलेल्या समस्येच्या निराकरणासंदर्भात आपल्याला प्रथमच या पायरीची गरज प्रामुख्याने पहावयास मिळाली.

आम्ही खालीलप्रमाणे आकृति A2.2 मध्ये गणिती नमुना तयार करावयाच्या पायऱ्यांचा क्रम सारांशरूपाने दिलेला आहे. तुटक रेषेच्या बाणाने वैधता या पायरीपासून सुत्रीकरण पायरीकडे जाण्याचा मार्ग दाखविलेला आहे. याचे कारण म्हणजे वैधता तपासून पाहिल्यानंतर आवश्यकता नसल्यास वैधतेकडून सुत्रीकरणाकडे पुन्हा जाण्याची गरज नसेल.



©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

आता तुम्ही गणिती नमुना तयार करावयाच्या सर्व पायऱ्यांचा सविस्तर अभ्यास केलेला आहे. आता त्याच्या काही दृष्टीकोनांबाबत चर्चा करुया.

गणिती नमुना तयार करावयाचा मुख्य उद्देश म्हणजे वास्तविक जीवनातील समस्या गणिती समस्येत रूपांतरीत करून त्याबद्दल उपयुक्त माहिती मिळेविणे हा होय, प्रामुख्याने जेव्हा आपण प्रत्यक्ष जीवनातील समस्यांची खर्चिक प्रयोग करून अथवा प्रत्यक्ष निरीक्षण करून माहिती मिळवू शकत नाही तेव्हा ही गणिती पध्दत फारच उपयोगी आहे.

तुम्हाला गणिती नमुना पध्दतीच का? असा विचार करायला लावणारा, प्रश्नही पडू शकेल त्यासाठी त्याचे आणखी काही फायदे / उपयोग आपण पाहूया. समजा आपल्याला मथुरेतील तेल शुध्दीकरण कारखान्यामुळे ताजमहलवर होणारे दुष्परिणाम अभ्यासायचे असल्यास आम्ही ताजमहलवरीच त्या बाबींचे परिणाम तपासून पहावयाचे प्रयोग करू शकणार नाही, आणि ते रास्त / सुरक्षित देखील नाही। पण एक प्रमाणबध्द नमुना वापरून आपण निश्चितपणे करू शकतो. पण त्यासाठी आपल्याला काही विशिष्ट सोई सवलती करून घ्याव्या लागतील ज्या खूप खर्चिक असतील. अशा वेळी गणिती नमुना पध्दत ही फारच उपयोगी पडते.

समजा, आपल्यला 5 वर्षानंतर किती प्राथमिक शाळांची गरज आहे. ते समजून घ्यायचे असल्यास, या बाबत केवळ गणिती नमुना पध्दती वापरूनच आपल्याला समाधानकारक उत्तर मिळेत. त्याचप्रमाणे याच पध्दतीचा वापर करून शास्त्रज्ञांनी आपल्याला माहित नसलेल्या अनेक गोष्टींचे अस्तित्व सिध्द केले आहे.

A2.3 या विभागात तुम्ही पाहीले आहे की, आपण दुसऱ्या उदाहरणामधील उत्तर अधिक अचूकपणे मिळवू शकलो असतो पण आपल्याकडे समर्पक गणिती साधने नव्हती म्हणून आपण त्याच ठिकाणी समाधान मानले. वास्तविक जीवनातही अशी परिस्थिती अनुभवावयास मिळण्याची शक्यता असते. बऱ्याचवेळा आपल्याला हाती आलेल्या उत्तरावर समाधान मानावे लागते कारण त्या ठिकाणी आपल्याकड़े अधिक समर्पक गणिती साधने किंवा माहिती उपलब्ध नसते. उदा. हवामानासंदर्भात अचूक माहिती काढावयास आपल्याकडे क्लीष्ट संकल्पना आहेत आणि त्याबाबत अचूक अंदाज वर्तविण्यास आवश्यक असलेली साधने किंवा माहिती अस्तित्वातच नाही.

आपले गणिती सुत्र सुधारण्याची व्याप्ती काय असावी याबद्दल तुम्ही उत्सुक असाल तर अचुकपणे उत्तर काढवयाचे असल्यास आपल्याला त्या समस्येमधील जास्तीत जास्त घटक लक्षात घ्यावे लागतील. जेव्हा आपण असे करतो त्यावेळी आपल्यावरल गणिती समीकरणात एकापेक्षा जास्त चलपदांचा वापर करावा लागेल. पण असे गणिती सुत्र किंवा समीकरण वापरेणेही तितकेच अवघड आहे. त्यासाठी आपण तयार केलेले समीकरण हे सोपे असावे. चांगल्या गणिती समीकरणात अथवा नमुन्यात प्रामुख्याने दोन गोष्टी असाव्यात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1. अचुकता – म्हणजेच ते वास्तवाशी किती निगडीत आहे.

2. वापरण्यास सुलभ

उदाहरणार्थ : न्यूटनच्या गतीविषयक नियमांची समीकरणे / सुत्रे अतिशय सोपी आहेत आणि अनेक प्रकारच्या समस्या सोडविण्यासाठी तितकीच प्रभावी पण आहेत.

म्हणजेच गणिती नमुना/समिकरण हे सर्व समस्ये वरील उत्तर आहे का? मुळीच नाही. तर त्याच्या काही मर्यादाही आहेत.

अर्थात, आपण एक गोष्ट लक्षात ठेवली पाहिजे की. गणिती नमुना हा वास्तव जीवनातील समस्येचे एक सरळरूप आहे जे सोप्या रितीने मांडलेले असते पण वास्तविकपणे गणिती नमुना आणि समस्या प्रत्यक्षात दोन्ही वेगवेगळ्या गोष्टी आहेत. जसे भौतिक व भौगोलिक वैशिष्ट्ये दाखविणारा – देशाचा नकाशा आणि प्रत्यक्ष देश या दोहोमधील फरकाप्रमाणेच, एखाद्या ठिकाणची समुद्रसपाटीपासूनची उंची आपण नकाशात शोधून काढू शकतो पण एखाद्या ठिकाणाच्या लोकांची वैशिष्टये त्यात सापडत नाहीत. म्हणून गणिती नमुना आपण केवळ समस्या निरसन करण्यापुरता वापरला पाहिजे आणि हे करत असताना आपण त्यामध्ये येणारे दुर्लक्षीत घटक लक्षात ठेवले पाहिजेत. त्याचबरोबर जे समीकरण आपण तयार करतो ते त्याच्या मर्यादेपलीकडे वापरु नये. ज्या ठिकाणी आवश्यक आहे त्याच ठिकाणी वापरावेत पुढील इयत्तेत याबद्धल आपण सविस्तर माहिती घेऊ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A2.3

1. पुस्तकामधील इतर शाब्दिक समस्या सोडविणे हे गणिती नमुन्याच्या पध्दतीपेक्षा वेगळे कसे आहे?

2. अनेकदा चौकामध्ये रहदारी जास्त होते आणि वाहनांना खूप वेळ ताटकळत त्याठिकाणी थांबाबे लागते. वाहनांचे हे ताटकळत थांबणे कमी करावयाच्या दृष्टीने खालीलपैकी कोणते घटक महत्त्वाचे आहेत आणि कोणते महत्त्वाचे नाहीत असे तुम्हाला वाटते.

   (i) पेट्रोलचा दर

   (ii) वाहने चौकात येवून थांबण्याचा दर

   (iii) सायकल, रिक्षा यासारखी हळू चालणारी वाहने आणि कार, दुचाकी गाड्या यासारखी वेगाने जाणारी वाहने यांचे प्रमाण.

A.2.5. सारांश (summary)

अनुबंधातील या प्रकरणात आपण खालील मुद्दे अभ्यासले.

1. शाब्दिक समस्या सोडविण्याच्या प्रक्रियेतील सामाविष्ट पायऱ्या.

2. काही गणिती नमुन्यांची (समीकरणांची /सुत्रांची) रचना.

3. गणिती नमुन्याची रचना करावयाच्या पायऱ्या खालील चौकटीत दिलेल्या आहेत.

1. सुत्रीकरण (formulation):
   (i) समस्या वैधानिक स्वरूपात मांडणे.
   (ii) संबंधीत घटक ओळखणे
   (iii) गणिती विवरण
2. समस्येची उकल (solution of a problem)
3. वास्तव जीवनाच्या संदर्भात उत्तराचे अर्थ स्पष्टीकरण करणे.
4. समस्येया संदर्भात उकलीची वैधता पडताळणे.

4. गणिती नमुन्यांचे मुख्य उद्देश, फायदे आणि त्याच्या मर्यादा

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उत्तर सूची

स्वाध्याय 7.1

1. ते समान आहेत. 6. $\angle BAC = \angle DAE$

स्वाध्याय 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ 7. 45° प्रत्येकी

स्वाध्याय 7.3

3. (ii) (i) पासून $\angle ABM = \angle PQN$

स्वाध्याय 8.1

6. (i) Δ DAC आणि Δ BCA पासून दाखवा $\angle DAC = \angle BCA$ व $\angle ACD = \angle CAB$ इ.

(ii) प्रमेय 8.4 वापरून दाखवा $\angle BAC = \angle BCA$

स्वाध्याय 8.2

2. PQRS हा समांतरभूज चौकोन आहे हे दाखवा. तसेच PQ||AC आणि PS||BD म्हणून $\angle P = 90°$

5. AECF हा समांतरभूज चौकोन आहे म्हणून AF||CE इ.

स्वाध्याय 9.1

1. प्रमेय 10.1 प्रमाणे सिध्द करा. एकरूप वर्तुळाच्या जीवांचा विचार करून.

2. SAS (बा.को.बा) एकरूप कसोरी वापरून दोन Δची एकरूपता दाखवा.

स्वाध्याय 9.2

1. 6 cm प्रथम केंद्राना जोडणारी रेषा लहान वर्तुळाच्या त्रिजेवरील लंब आहे. आणि समाईक जीवा लहान वर्तुळाचा व्यास आहे हे दाखवा.

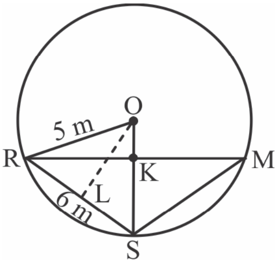
2. O मध्य असलेल्या वर्तुळाच्या दोन समान जीवा AB आणि CD या E बिंदूत छेदतात. तर $OM \perp AB$ आणि $ON \perp CD$ काढा. OE जोडा. काटकोन ΔOME आणि ΔONE एकरूप आहेत असे दाखवा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. उदाहरण 2 प्रमाणे सोडवा .

4. OM $\perp$ AD काढा

5. रेशमा, सलमा, मनदीप यांना क्रमशः R,S आणि M बिंदूद्वारे दाखवा समता $KR = x\ m$ (आकृती पहा).



Δ ORS चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} x \times 5$ तसेच

Δ ORS चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ RS $\times$ OL = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4$

6. समभुज त्रिकोणाचे गुणधर्म आणि पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचा वापर करा.

स्वाध्याय 9.3

1. 45°
2. 150°, 30°
3. 10°
4. 80°
5. 110°
6. $\angle BCD = 80°$ व $\angle ECD = 50°$

8. CD व लंब AM आणि BN काढा. (AB $\parallel$ CD) आणि AB < CD) दाखवा या द्वारे . Δ AMD $\perp$ Δ BMC दाखवा $\angle C = \angle D$ असल्याचे समजले म्हणून $\angle A + \angle C = 180°$.

स्वाध्याय 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2

2. ₹ 1650000

3. $20\sqrt{2}\ m^2$

4. $21\sqrt{11}\ cm^2$

5. 9000 cm^2

6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.1

1. 165 cm^2 2. 1244.57 m^2
3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2
4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280
5. 63 m 6. ₹ 1155
7. 5500 cm^2 8. ₹ 384.34 (अंदाजे)

स्वाध्याय 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2
2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2
3. 942 cm^2 4. 1:4 5. ₹ 27.72
6. 3.5 cm 7. 1:16 8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\ \pi r^2$ (iii) 1 : 1

स्वाध्याय 11.3

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 लिटर (ii) $\frac{11}{35}$ लिटर
3. 10 cm
4. 8 cm 5. 38.5 कि.लि.
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3 8. 240 π cm^3; 5: 12
9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}\ cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (अंदाजे)
2. (i) $11498\ \frac{2}{3}\ cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g ग्रॅम (अंदाजे)
4. $\frac{1}{64}$

5. 0.303 लि. (अंदाजे)
6. 0.06348 m^3 (अंदाजे)
7. 179 $\frac{2}{3}$ cm^3
8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (अंदाजे)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (अंदाजे)

स्वाध्याय 12.1

1. (ii) प्रसुतिविषयक आरोग्य समस्या.
3. (ii) पक्ष A
4. (ii) होय, वारंवारता बहूभूज (iii) नाही
5. (ii) 184

वय (वर्षामध्ये)	वारंवारता	रुंदी	आयताची लांबी
1 – 2	5	1	$\frac{5}{1}\times1=5$
2 – 3	3	1	$\frac{3}{1}\times1=3$
3 – 5	6	2	$\frac{6}{2}\times1=3$
5 – 7	12	2	$\frac{12}{2}\times1=6$
7 – 10	9	3	$\frac{9}{3}\times1=3$
10 – 15	10	5	$\frac{10}{5}\times1=2$
15 – 17	4	2	$\frac{4}{2}\times1=2$

आता या लांबीच्या सहाय्याने तुम्ही आयतचित्र काढू शकता.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. (i)

अक्षरांची संख्या	वारंवारता	अक्काशांची रुंदी	आयताची लांबी
1 – 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2=4$
4 – 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2=30$
6 – 8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2=44$
8 – 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2=8$
12 – 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2=1$

आता आयतचित्र (histogram) काढा.

(ii) 6–8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 2.1

1. **पायरी 1 :** सुत्रीकरण :

संगणक भाडे तत्वावर घेण्याचा कालावधी आणि आपल्याला दिलेल्या मूळ किंमती हे प्रसंगानिष्ठ घटक आहेत. संगणक विकत घेतल्याबर किंवा भाडे तत्वावर घेतल्यावर मूळ किंमतीत कोणताही बदल होत नाही. म्हणून आपण कोणत्याही बदलास अप्रासंगिक मानुया. आपण असे मानू की, चांगल्या दर्शकचिन्हाचे संगणक आणि पिढी समान आहेत अर्थात हे अंतर अप्रासंगिक आहे.

x महिन्यासाठी संगणक भाउयाने घेतल्यावर $2000\,x$ रूपये खर्च होतो. जर ही रक्कम संगणकाच्या मूळ किंमती पेक्षा अधिक असेल तर संगणक विकत घेणे उत्तम ठरेल. म्हणून समीकरण,

$2000\,x = 25000$

पायरी 2 : उकल करताना, $x=\frac{25,000}{2000}=12.5$

पायरी 3 : स्पष्टीकरण : 12.5 महिन्यानंतर संगणक भासे तत्वावर घेण्यासाठी जास्त किंमत मोजावी लागते. म्हणून संगणक खरेदी करणेच स्वस्त ठरेल कारण याचा उपयोग तुम्ही 12 महिन्यापेक्षा जास्त कालावधीसाठी करू इच्छित आहात.

2. **पायरी 1 :** सुत्रीकरण : कार एका समान वेगाने जान जात आहेत. असे समजा म्हणून गतीतील कोणत्याही बदलांस विसंगत मानले जाईल. जर मोटारगाडया x तासानंतर एकमेकींस भेटल्या तर पहिली मोटार कार A पेक्षा 40 x किं.मी. चे अंतर कापेल आणि दुसरी मोटार कार 30 x किं.मी. चे अंतर कापते. म्हणून A पासून $(100 - 30x)$ km चे अंतर कापेल 40 $x = (100 - 30x)$km अर्थात $7x = 100$.

   पायरी 2 : उकल : समीकरण सोडवून $x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ मिळेल.

   पायरी 3 : स्पष्टीकरण $\frac{100}{70}$ म्हणजे 1.4 तास आहे म्हणून मोटार कार 1.4 तासानंतर भेटतील.

3. **पायरी 1 :** सुत्रीकरण : एका कक्षेत पृथ्वीला प्रदक्षिणा घालण्याऱ्या चंद्राची गती अशी आहे.

   $$\frac{\text{कक्षेची लांबी}}{\text{लागलेला वेळ}}$$

   पायरी 2 : कक्षा जवळजवळ वर्तुळाकार असते म्हणून लांबी

   $= 2 \times \pi \times 38400 km = 2411520\ km/hr$

   चंद्राला एक फेरी पूर्ण करण्यास 24 तास लागतात.

   म्हणून वेग $= \frac{2411520}{24} = 100480$km/hr

   पायरी 3 : स्पष्टीकरण : वेग 100480 km/ hr आहे.

4. सुत्रीकरण : पाण्याच्या हिटरच्या वापरामुळे केवळ बीज बिलात फरक असण्याची कल्पना केली आहे असे समजा की पाण्याचा हिटर वापरण्याचा सरासरी वेळ = x तास

   पाण्याचा हिटर वापरल्यामूळे दरमहा फरक = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240
   एक तास पाण्याचा हिटर वापरण्यासाठी होणारा खर्च = $8 \times 30 \times x$

   म्हणून पाण्याचा हिटर 30 दिवस वापरण्यासाठी होणारा खर्च = विजबिलातील फरक

   म्हणून $240\,x = 240$ ....

   उकल : या समीकरणाकरून $x = 1$ मिळतो.

   स्पष्टीकरण : कारण $x = 1$ म्हणून पाण्याचा हिटर सरासरी एक तास दर दिवशी वापरला आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

स्वाध्याय A 2.2

1. येथे आपण विशेष अशा कोणत्याही उकलवर चर्चा करणार नाही. तुम्ही मागील उदाहरणामध्ये वापरलेल्या कृतीचा किंवा अन्य कोणत्याही सोयीस्कर पध्दतीचा वापर करू शकता.

स्वाध्याय A 2.3

1. आपण पूर्वी पाहीले आहे की, जीवनाशी संबंधीत घटनांचा संपूर्ण भाग हा तपशीलवार असू शकतो. आपण शाब्दीक समस्यामध्ये उत्तर व्यक्त करीत नाही. याशिवाय शाब्दीक समस्यांचे अचूक उत्तर आहे. वास्तव जीवनामध्ये यांची आवश्यकता नाही.

2. महत्वपूर्ण घटक (ii) आणि (iii) आहेत. यामध्ये (i) हा महत्वपूर्ण घटक नाही. तरीही विक्री झालेल्या वाहनांच्या संख्येवर त्याचा परिणाम होऊ शकतो.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED