Government of Karnataka

गणित प्रकाश

कक्षा 6 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

HINDI TEXT BOOK

6

भाग 1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0675

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bangalore 560 003

आमुख

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.ई.पी.) 2020 एक परिवर्तनकारी पाठ्यचर्या और शैक्षणिक संरचना की अनुशंसा करती है जिसके मूल में भारतीय संस्कृति, सभ्यता और भारतीय ज्ञान परंपरा निहित है। यह नीति विद्यार्थियों को इक्कीसवीं सदी की संभावनाओं और चुनौतियों के साथ रचनात्मक रूप से जुड़ने के लिए तैयार करती है। नई शिक्षा नीति में के अन्तर्गत सन्निहित चुनौतियों और सुझावों के आधार पर विद्यालयी शिक्षा हेतु निर्मित *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा* (एन.सी.एफ.एस.ई.) 2023 में सभी स्तरों के पाठ्यचर्या क्षेत्र तैयार किए गए हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 का उद्देश्य है बुनियादी और प्रारंभिक स्तर पर बच्चों का पंचकोशीय विकास सुनिश्चित करते हुए मध्य स्तर पर उनका विकासात्मक स्वरूप अग्रसर किया जाए। इस प्रकार, मध्य स्तर कक्षा 6 से कक्षा 8 तक तीन वर्षों को समाहित करते हुए आरंभिक और माध्यमिक स्तरों के मध्य एक सेतु के रूप में कार्य करता है।

मध्य स्तर पर इस राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा का उद्देश्य है, विद्यार्थियों को उन आवश्यक कौशलों में दक्ष करना जो बच्चों की विश्लेषणात्मक, वर्णनात्मक और सृजनात्मक क्षमताओं को प्रोत्साहित करें और उन्हें आने वाली चुनौतियों और अवसरों के लिए तैयार करें। मध्य स्तर हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या के आधार पर विकसित बहुआयामी पाठ्यक्रम में ऐसे नौ विषय सम्मिलित किए गए हैं जो बच्चों के समग्र विकास को प्रोत्साहन देते हैं। इनमें तीन भाषाओं (कम से कम दो भारतीय मूल की भाषाएँ) सहित विज्ञान, गणित, सामाजिक विज्ञान, कला शिक्षा, शारीरिक शिक्षा एवं आरोग्य और व्यावसायिक शिक्षा सम्मिलित हैं।

ऐसी परिवर्तनकारी शिक्षण संस्कृति के लिए अनुकूल परिस्थितियों की आवश्यकता होती है। इसे मूर्त रूप देने के लिए विभिन्न विषयों की उपयुक्त पाठ्यपुस्तकें भी होनी चाहिए। पाठ्यसामग्री और पढ़ने-पढ़ाने के उपागमों के मध्य इन पाठ्यपुस्तकों की महत्वपूर्ण भूमिका होगी। ऐसी निर्णायक भूमिका जो बच्चों की जिज्ञासा और खोजी प्रवृत्ति के मध्य एक विवेकपूर्ण संतुलन स्थापित करेगी। कक्षा नियोजन और विषयों की पढ़ाई दोनों में उचित संतुलन बनाने के लिए शिक्षकों की तैयारी भी आवश्यक है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निरंतर गुणवत्तापूर्ण पाठ्यपुस्तकें तैयार करने के लिए एक प्रतिबद्ध संस्था है। पाठ्यपुस्तकों के निर्माण हेतु संबंधित विषय विशेषज्ञों, शिक्षाशास्त्रियों और शिक्षकों को समितियों में सम्मिलित किया जाता है। कक्षा 6 के लिए विकसित गणित की पाठ्यपुस्तक— *गणित प्रकाश*, गणित लोक की एक मनोरम यात्रा है। पुस्तक का आरंभ विद्यार्थियों को अपने आस-पास के पैटर्न देखने एवं तलाशने और गणितीय अवधारणाओं को स्वयं खोजने हेतु प्रोत्साहित करने से होती है। यह पाठ्यपुस्तक संख्याओं के क्षेत्र में व्यापक जानकारी देती है, जहाँ युवा विद्यार्थियों को संख्याओं और आकृतियों के जादू से परिचित कराया जाता है। रंगीन चित्रों, उदाहरणों एवं क्रियात्मक प्रश्नावलियों के द्वारा विद्यार्थी अंकगणित में एक सुदृढ़ आधार विकसित करते हैं, जो अधिक जटिल गणितीय अवधारणाओं के लिए मार्ग प्रशस्त करता है। संपूर्ण पुस्तक में कहानियाँ, वार्तालाप एवं उपाख्यान सम्मिलित किए गए हैं, जिससे युवा विद्यार्थी अमूर्त गणितीय अवधारणाओं को स्वयं से जोड़कर समझ सकें। पुस्तक की विषय-वस्तु पहेलियों एवं अभिनव समस्याओं का उपयोग कर विकसित की गयी है, जो विद्यार्थियों को न केवल गणितीय अवधारणाएं तार्किकता के साथ उनके आस-पास के वातावरण से जोड़ने एवं उनकी गणित की समझ व्यापक बनाने में सहायक होगी, अपितु उन्हें गणनात्मक सोच के उभरते हुए क्षेत्र की अवधारणाओं को समझने के लिए भी तैयार करेगी। भारतीयता की जड़ें एवं भारतीय ज्ञान पद्धति (IKS) से संबंध पाठ्यपुस्तक की सामग्री में अंतर्निहित किया गया है।

इस पाठ्यपुस्तक के साथ ही इस स्तर पर विद्यार्थियों को विविध शिक्षण संसाधनों की जानकारी हेतु भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। ऐसे संसाधन उपलब्ध कराने में विद्यालय के पुस्तकालय महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसके अतिरिक्त विद्यार्थियों का इस दिशा में मार्गदर्शन और प्रोत्साहन देने हेतु अभिभावकों और शिक्षकों की भूमिका भी महत्वपूर्ण होगी।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के विकास में सम्मिलित उन सभी व्यक्तियों का आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने यह उत्कृष्ट प्रयास साकार किया है और आशा करता हूँ कि यह पुस्तक सभी हितधारकों की अपेक्षाएं पूर्ण करेगी। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशन निरंतर परिष्कृत करने के लिए समर्पित है। हम आपकी टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करते हैं जो भावी संशोधनों में सहायक होंगे।

दिनेश प्रसाद सकलानी
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
सितंबर, 2024

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 2 25/09/2024 16:44:03

पुस्तक के विषय में

गणित, विद्यार्थियों को न केवल बुनियादी अंकगणित कौशलों को विकसित करने में सहायता करता है, अपितु तार्किकता, रचनात्मक समस्या निदान एवं स्पष्ट और सटीक संवाद (मौखिक एवं लिखित दोनों) की महत्त्वपूर्ण क्षमताएँ विकसित करने में भी सहयोग प्रदान करता है। गणितीय ज्ञान अन्य विद्यालयी विषयों की अवधारणाओं को समझने में भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है, जैसे— विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान और यहाँ तक कि कला, शारीरिक शिक्षा एवं व्यवसायिक शिक्षा। गणित का अधिगम, सुविचारित विकल्पों एवं निर्णयों के लिए क्षमताओं को विकसित करने में भी योगदान दे सकता है। संख्याओं और मात्रात्मक तर्कों की समझ, प्रभावी एवं सार्थक लोकतांत्रिक और आर्थिक भागीदारी के लिए भी आवश्यक है। इस प्रकार गणित, विद्यालयी शिक्षा के समस्त उद्देश्यों को प्राप्त करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मध्य स्तर (मिडिल स्टेज) पर गणित एक बड़ी चुनौती है जिसे बच्चे के अनुभव और वातावरण के समीप होने एवं अमूर्त रूप में होने, दोनों की दोहरी भूमिका निभानी होती है। गणित को दृढ़ता व परिशुद्धता को बनाए रखने और उस पर बल देने के साथ-साथ अंतर्ज्ञान विकसित करने की दोहरी भूमिका निभानी चाहिए। इसके अतिरिक्त इसे कलात्मकता और रचनात्मकता तथा शिष्टता और सौंदर्यता की भावना विकसित करने के साथ-साथ आलोचनात्मक और तार्किक सोच में वृद्धि की दोहरी भूमिका भी निभानी चाहिए। अंतत: गणित को दोहरी भूमिका निभानी चाहिए— विद्यार्थियों को स्वयं अवधारणाओं की खोज और अन्वेषण के पर्याप्त अवसर प्रदान करना और साथ ही गणित के वैश्विक भंडार में सर्वश्रेष्ठ ज्ञात विधियों को पढ़ाना।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में गणित को सीखने के उपरोक्त लक्ष्यों और चुनौतियों का समाधान करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के लेखकों का लक्ष्य विद्यार्थियों में अंतर्ज्ञान और दृढ़ता दोनों को विकसित करने के लिए औपचारिक एवं अनौपचारिक परिभाषाओं और तरीकों के बीच विवेकपूर्ण संतुलन बनाना है। यह पुस्तक सक्रिय और अनुभवात्मक अधिगम को बढ़ावा देने के लिए कक्षा में विद्यार्थी-विद्यार्थी और विद्यार्थी-शिक्षक के मध्य गणितीय वार्तालाप के कई अवसर भी प्रदान करती है। पुस्तक में अनेक प्रश्न, पहेलियाँ और अभ्यास निरंतर अन्वेषण को प्रोत्साहित करने के लिए दिए गए हैं। कक्षा में चर्चा को प्रोत्साहित करने हेतु कई खुले अंत वाले (ओपन एंडेड) प्रश्न भी दिए गए हैं। इसके अतिरिक्त अंत में कुछ प्रसिद्ध अनसुलझी समस्याओं को भी सम्मिलित किया गया है ताकि विद्यार्थी यह समझ सकें कि गणित अभी भी एक बहुत सक्रिय विषय है, जिसमें बहुत कुछ, जो पहले से ही ज्ञात है व खोजा जा चुका है परंतु कुछ गूढ़ या अज्ञात अवधारणाएँ भी हैं जिन्हें हल करना अभी शेष है। ऐसी अज्ञात अवधारणाओं और अनसुलझे प्रश्नों के लिए नए विचारों और एक साहसी नई पीढ़ी की आवश्यकता होगी ताकि इन रोमांचक समस्याओं को समझा जा सके और हल किया जा सके।

दुनिया के सबसे बड़े समस्या समाधानकर्ताओं और वर्तमान पीढ़ी के सबसे रचनात्मक मस्तिष्कों में से एक विश्व प्रसिद्ध गणितज्ञ मञ्जुल भार्गव हैं। उन्होंने गणित में मौलिक प्रकृति की दशकों पुरानी और कुछ मामलों में सदियों पुरानी समस्याओं का समाधान किया है, विशेष रूप से संख्या सिद्धांत, बीजगणित, प्रतिनिधित्व सिद्धांत (Representation Theory) और अंकगणितीय ज्यामिति के क्षेत्र में। गणित में अपने

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 19 25/09/2024 16:44:08

अग्रणी अन्वेषण के कारण वे वर्ष 2014 में, फील्ड्स मेडल प्राप्त करने वाले भारतीय मूल के पहले व्यक्ति बने। फील्ड्स मेडल गणितज्ञों को दिया जाने वाला सर्वोच्च सम्मान है, यह पुरस्कार प्रत्येक चार वर्ष में एक बार दिया जाता है और इसे 'गणित का नोबेल पुरस्कार' के रूप में जाना जाता है।

हम उत्साहित और सम्मानित महसूस कर रहे हैं कि इस पुस्तक का अध्याय 1, 'गणित में पैटर्न', आचार्य मञ्जुल भार्गव द्वारा रचित एवं योगदान दिया गया है। इस अध्याय में, 'गणित क्या है?' खंड में, आचार्य भार्गव स्पष्ट एवं सशक्त रूप से गणित को एक रचनात्मक कला के रूप में बताते हैं इसके साथ ही आकर्षक पैटर्नों की खोज और उन पैटर्नों की व्याख्या का भी वर्णन करते हैं। अध्याय के बाद के खंड़ों में, वे गणित के कुछ सबसे बुनियादी पैटर्न के नमूनों— संख्याओं के अनुक्रम और आकृतियों के अनुक्रम और उनके उल्लेखनीय और आश्चर्यचकित करने वाले अंतर्संबंधों का वर्णन करते हैं। पुस्तक के बाद के अध्यायों में भी इन पैटर्नों का ध्यान रखा गया है जो गणित की एकरूपता को बनाए रखने पर बल देता है। इन पैटर्नों पर भविष्य में भी विचार किया जाएगा। हम आशा करते हैं कि यह खोजपूर्ण अध्याय नई पीढ़ी को गणित की खोज और अध्ययन के लिए प्रेरित करने में सहायक होगा।

गणित में पैटर्नों की खोज के विचारों का निर्माण कर, पुस्तक पुनः गणित के विभिन्न क्षेत्रों की यात्रा की ओर मुड़ती है। अध्याय 2, 'रेखाएँ और कोण', ज्यामिति के निर्माण खंडों— बिंदु, रेखाखंड, किरणें, रेखाएँ, कोण और कोणों को कैसे मापें, इसका परिचय देता है। अध्याय 3, 'संख्याओं का खेल', गणित में कुछ शिक्षाप्रद लेकिन रोचक खेलों और पहेलियों के माध्यम से एक खोजपूर्ण रोमांचक अध्याय है, जिनमें से कुछ पहेलियाँ अभी तक अनसुलझी हैं। अध्याय 4, 'आँकड़ों का प्रबंधन और प्रस्तुतिकरण', आँकड़े इकट्ठे करने और प्रस्तुत करने की कला का परिचय देता है, जिसमें इसके विश्लेषणात्मक और सौंदर्यात्मक दोनों पहलू सम्मिलित हैं। अध्याय 5, 'अभाज्य समय', अभाज्य संख्याओं और गुणनखंड के माध्यम से एक खेल-खेल में पढ़ा जाने वाला एक रोमांचक अध्याय है। अभाज्य संख्याएँ पूर्ण संख्याओं के विश्व का आधारभूत खंड हैं। अध्याय 6, 'परिमाप और क्षेत्रफल', इन मूलभूत विचारों का एक संशोधन है, जिसमें बच्चों को समस्याओं से निपटने के लिए तैयार करने और उनकी समझ को बढ़ाने के लिए विभिन्न प्रकार की चुनौतीपूर्ण पहेलियाँ हैं। अध्याय 7, 'भिन्न' द्वारा विद्यार्थी भिन्न की अवधारणा को पहली बार समझेंगे। इस अध्याय का उद्देश्य धीरे-धीरे भिन्नों के विषय में अंतर्ज्ञान का निर्माण करना है। शुरुआत में 1/10 जैसी भिन्नात्मक इकाइयाँ इसका आधार हैं, और धीरे-धीरे सामान्य भिन्नों के साथ काम करना शुरू होता है जिसमें उनकी तुलना, जोड़ना और घटाना भी सम्मिलित है। अध्याय 8, 'रचनाओं के साथ खेलना', विद्यार्थियों के ज्यामितीय अंतर्ज्ञान और समझ को बढ़ाने के लिए, परकार (Compass) और रूलर का उपयोग करने सहित, आकृतियाँ बनाने का व्यावहारिक अनुभव है। अध्याय 9, 'सममिति', गणित और उससे आगे की सबसे महत्त्वपूर्ण और सर्वव्यापी अवधारणा का एक कलात्मक और व्यवहारिक अन्वेषण है। अंत में, अध्याय 10, 'शून्य के दूसरी ओर',का उद्देश्य विद्यार्थी को बेला की 'मज़ेदार इमारत' पर जाकर ऋणात्मक संख्याओं के लिए अंतर्ज्ञान प्राप्त करना है, इसके साथ ही धीरे-धीरे ब्रह्मगुप्त द्वारा निर्धारित सभी पूर्णांकों के जोड़ और घटाव के नियमों को समझना है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 6 25/09/2024 16:44:05

गणित की इस पुस्तक में सभी अध्यायों में कला, इतिहास और विज्ञान सहित अन्य विषयों के साथ जोड़ने का प्रयास किया गया है। पैटर्नों, संख्याओं, रचनाओं, सममिति, खेलों, पहेलियों इत्यादि को दर्शाने के लिए अनेक चित्र और रेखाचित्र सम्मिलित किए गए हैं, जिससे गणितीय वस्तुओं और सिद्धांतों के लिए दृश्यात्मक और कलात्मक कल्पना एवं अंर्तज्ञान विकसित किया जा सके। पुस्तक में विभिन्न गणितीय अवधारणाओं के इतिहास का वर्णन किया गया है, जिसमें वर्ष 628 ईस्वी में ब्रह्मगुप्त के भिन्नों को जोड़ने और घटाने के नियमों की, शून्य की और ऋणात्मक संख्याओं की, विश्व परिवर्तनकारी खोजें सम्मिलित हैं। विद्यार्थियों को खोज की खुशी का अनुभव करने और प्रक्रिया की सराहना करने योग्य बनाने और मानवीय बनाने में सहयोग करने के लिए दुनियाभर से अन्य खोजों, जैसे— इकाई भिन्नें, अभाज्य संख्याओं की खोज, कोलाट्ज अनुमान, कापरेकर संख्या आदि उनके इतिहास सहित वर्णन किया गया है। विज्ञान में गणितीय अवधारणाओं के उपयोग के महत्त्व को स्पष्ट करने के लिए विज्ञान से उदाहरण (जैसे समुद्र तल से ऊपर या नीचे तापमान या ऊँचाई मापने के लिए ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग) भी पर्याप्त मात्रा में लिए गए हैं।

हम आशा करते हैं कि कहानी सुनाने और व्यावहारिक क्रियाकलापों को एक साथ क्रियान्वित करके, सीखने को एक गहन अधिगम अनुभव बनाया जाएगा, जो जिज्ञासा को जगाता हो और गणित के प्रति प्रेम को बढ़ावा देता हो। यह आशा की जाती है कि शिक्षक, बच्चों को चर्चा करने, खेलने, परस्पर सामंजस्य बनाने, विभिन्न विचारों के लिए तार्किकता प्रदान करने और प्रस्तुत तर्कों में कमियाँ ढूँढ़ने का अवसर देंगे। विद्यार्थियों के लिए यह भी आवश्यक है कि अंततः वे यह समझने की क्षमता विकसित करें कि किसी तथ्य या अवधारणा को सिद्ध करने का क्या अर्थ होता है और अंतर्निहित अवधारणाओं के विषय में भी आश्वस्त बनें। गणित की कक्षा में एल्गोरिदम के अंधाधुंध अनुप्रयोग की अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए, अपितु बच्चों को प्रश्न हल करने के विभिन्न तरीके ढूँढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के अनुसार गणनात्मक सोच (Computational Thinking) को भी पहेलियों, खेलों और संवादात्मक अभ्यासों के माध्यम से धीरे-धीरे प्रस्तुत किया गया है, यह पुस्तक इस सोच को बढ़ावा देती है। पाठ्यपुस्तक में विभिन्न अवधारणाओं का संदर्भ देते समय उनकी भारतीयता की जड़ों को भी ध्यान में रखा गया है। अध्यायों में भारतीय गणितज्ञों का योगदान एक समस्या-समाधान दृष्टिकोण के एक रूप में दिया गया है ताकि विद्यार्थियों को भारत की समृद्ध गणितीय विरासत और गणित में भारत के वैश्विक योगदान के विषय में जागरूक किया जा सके।

अवधारणाएँ और समस्याएँ दैनिक जीवन की स्थितियों से जुडी हुई हैं। उन संदर्भों और सामग्रियों का उपयोग करने का प्रयास किया गया है जिनसे विद्यार्थी परिचित हैं। पुस्तक के अंत में अधिगम सामग्री पत्रक दिए गए हैं जिनकी फोटोकॉपी करके उपयोग किया जा सकता है। अनेक जगहों पर, सहकर्मी समूह के प्रयासों और चर्चाओं को प्रोत्साहित करने के लिए अभ्यास या क्रियाकलाप दिए गए हैं। पाठ्यपुस्तक, कक्षा में एक विविध समूह के विद्यार्थियों की सीखने की आवश्यकताओं को संबोधित करने का उद्देश्य रखती है।

हमने गणित में निहित प्रकरणों में परस्पर तारतम्यता और सामंजस्यता दर्शाने हेतु प्रारंभिक अध्यायों में सीखी गई अवधारणाओं को बाद के अध्यायों के विचारों से जोड़ने का प्रयास किया है। हम आशा करते हैं कि शिक्षक इन अवधारणाओं को संयुक्त रूप से दोहराने के अवसर के रूप में उपयोग करेंगे ताकि बच्चे

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 7 25/09/2024 16:44:07

गणित की संपूर्ण संकल्पनात्मक संरचना की सराहना कर सकें। इसके साथ-साथ शिक्षक भिन्न, ऋणात्मक संख्याओं के विचारों और अन्य गणितीय विचारों, जो विद्यार्थियों के लिए नए हों, को अधिक समय दें। इनमें से कई अवधारणाएँ भविष्य में गणित को सीखने की आधार हैं।

अंतत: इस पुस्तक का उद्देश्य केवल एक पाठ्यपुस्तक से कहीं अधिक है। यह गणितीय खोज और अन्वेषण की दुनिया का पासपोर्ट है। इसे कक्षा और घर दोनों जगह उपयोग किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि यह विद्यार्थियों को अपने स्वयं के गणितीय साहसिक कार्यों की शुरुआत करने के लिए प्रेरित कर सकती है, जिससे वे अपने आस-पास की सभी वस्तुओं में गणित की सुंदरता और प्रासंगिकता को देख सकें। अपने जुझारू दृष्टिकोण और कक्षा 6 की व्यापक गणितीय अवधारणाओं के साथ यह पुस्तक युवा मस्तिष्कों को लुभाने और उन्हें गणितीय खोज की आजीवन यात्रा के लिए तैयार करती है।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के सभी लेखकों और योगदानकर्ताओं को इस महत्वपूर्ण और मूल्यवान योगदान हेतु और राष्ट्र के गणित शिक्षकों, शिक्षार्थियों और जिज्ञासुओं के लिए की गई सेवा के लिए पुन: धन्यवाद देता हूँ।

हम इस पुस्तक के संबंध में आपकी टिप्पणियों और सुझावों की उम्मीद करते हैं और आशा करते हैं कि शिक्षण और सीखने के दौरान आपने जो रुचिपूर्ण अभ्यास, क्रियाकलाप और कार्य विकसित किए हैं, उन्हें प्रेषित करेंगे। इन सुझावों को आगामी संस्करणों में सम्मिलित किया जाएगा।

आशुतोष वझलवार
प्रोफेसर, शैक्षणिक संयोजक
डी.ई.एस.एम.
रा.शै.अ.प्र.प.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 8 25/09/2024 16:44:07

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम और शिक्षण अधिगम सामग्री समिति (एन.एस.टी.सी.)

1. महेश चंद्र पंत, *कुलाधिपति*, राष्ट्रीय शैक्षिक योजना एवं प्रशासन संस्थान (NIEPA) (***अध्यक्ष***)
2. मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय (***सह-अध्यक्ष***)
3. सुधा मूर्ति, *प्रतिष्ठित लेखिका* एवं *शिक्षाविद्*
4. बिबेक देबरॉय, *अध्यक्ष*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
5. शेखर मांडे, *पूर्व महानिदशेक*, सी.एस.आई.आर., एवं *प्रतिष्ठित आचार्य*, सावित्रीबाई फुले पुणे विश्वविद्यालय, पुणे
6. सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा
7. शंकर महादेवन, *संगीत विशेषज्ञ*, मुंबई
8. यू. विमल कुमार, *निदेशक*, प्रकाश पादुकोण बैडमिंटन अकादमी, बेंगलुरु
9. मिशेल डैनिनो, *अतिथि आचार्य*, आई.आई.टी. गांधीनगर
10. सुरीना राजन, *आई.ए.एस.* (सेवानिवृत्त), पूर्व महानिदशेक, हिपा, हरियाणा
11. चमू कृष्ण शास्त्री, *अध्यक्ष*, भारतीय भाषा समिति, शिक्षा मंत्रालय
12. संजीव सान्याल, *सदस्य*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद (ई.ए.सी.-पी.एम.)
13. एम.डी. श्रीनिवास, *अध्यक्ष*, सेंटर फॉर पॉलिसी स्टडीज़, चेन्नई
14. गजानन लोंढ़े, हेड, प्रोग्राम ऑफिस, एन.एस.टी.सी.
15. रबिन छेत्री, *निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., सिक्किम
16. प्रत्यूष कुमार मंडल, *आचार्य*, सामाजिक विज्ञान शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
17. दिनेश कुमार, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, योजना एवं अनुवीक्षण प्रभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
18. कीर्ति कपूर, *आचार्य*, भाषा शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
19. रंजना अरोड़ा, *आचार्य एवं अध्यक्ष*, पाठ्यचर्या अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली (***सदस्य-सचिव***)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 19 25/09/2024 16:44:08

पाठ्यपुस्तक विकास समूह

अध्यक्ष, पाठ्यचर्या क्षेत्र समूह (सीएजी) (गणित)

माधवन मुकुंद, *निदेशक*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई

योगदानकर्ता

अंजलि गुप्ते, *प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत्त), विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर

अमर्त्य कुमार दत्ता, *आचार्य*, सांख्यिकी-गणित यूनिट, भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (आई.एस.आई.), कोलकाता

अमृतांशु प्रसाद, *आचार्य*, गणितीय विज्ञान संस्थान, चेन्नई

आलोका कान्हेरे, *परियोजना वैज्ञानिक अधिकारी*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, मुंबई

एच.एस. शारदा, *टीजीटी*, शासकीय हाई स्कूल, एच.डी. कोट, कर्नाटक

एस. विश्वनाथ, *आचार्य*, गणितीय विज्ञान संस्थान (आई.एम.एससी.), चेन्नई

के.(रवि) सुब्रमण्यम, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, मुंबई

के.वी.सुब्रमण्यम, *आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई

पंतजलि शर्मा, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), अजमेर

पद्माप्रिया शिराली, पूर्व *प्रधानाचार्य*, सह्याद्रि स्कूल के.एफ.आई., पुणे

मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय और सह-अध्यक्ष, एन.एस.टी.सी.

मधु बी., *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), मैसूरु

राखी बैनर्जी, *सह आचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलुरु

शैलेश ए. शिराली, *निदेशक*, शिक्षक शिक्षा कार्यक्रम वैली स्कूल, के.एफ.आई.

शिवकुमार के.एम., *सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, यूनिवर्सिटी ऑफ ब्रिटिश कोलंबिया, कनाडा,सदस्य एन.एस.टी.सी.

श्रवण एस. के., *सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 2 25/09/2024 16:44:03

समीक्षक

अनुराग बेहर, *सदस्य*, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा निरीक्षण समिति

आर. रामानुजम, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), गणितीय विज्ञान संस्थान (आई.एम.एससी.), चेन्नई

सदस्य-संयोजक, पाठ्यचर्या क्षेत्र समूह (सीएजी) गणित

आशुतोष केदारनाथ वझलवार, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (हिंदी संस्करण)

टी.पी. शर्मा, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

अनुवादक

आशीष कुमार श्रीवास्तव, *गणित प्रवक्ता*, एंग्लो-बंगाली इंटर कालेज, प्रयागराज, उत्तर प्रदेश

उमंग कुमार पाण्डेय, आर.पी., सी.बी.ई.डी., झल्लारा, उदयपुर, राजस्थान

ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

प्रकाश सांगवान, *पी.जी.टी.*, गणित, जी.एस.एस.एस., झोझू कलां, दादरी, हरियाणा

प्रदीप कुमार जैन, *प्रवक्ता* गणित (सेवानिवृत्त) आर.पी.वी.वी., सूरजमल विहार, दिल्ली

महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड), सेवानिवृत्त, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राजेंद्र कुमार पूनीवाला, *पी.जी.टी.*, शासकीय कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, बुरहानपुर, मध्य प्रदेश

रितु तिवारी, *गणित प्रवक्ता*, आर.एस. केंद्रीय विद्यालय नं. 1, भोलानाथ नगर, दिल्ली

रूपल गुप्ता, *सहायक आचार्य*, (अतिथि शिक्षक) सी.आई.सी., दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

सुधा पाटीदार, *संसाधन विशेषज्ञ*, नई दिल्ली

सुनील कुमार तिवारी, ए. आर. पी., प्राथमिक शिक्षा, हरजिंदर नगर, कानपुर

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 19 25/09/2024 16:44:08

आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै.अ.प्र.प.) इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में मिश्रित विषयों (Cross-Cutting Themes) पर दिशा-निर्देशों के लिए पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूह (CAG) और गणित एवं अन्य सम्बद्ध पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूहों (CAGs) के सम्मानित अध्यक्ष एवं सदस्यों का उनके मार्गदर्शन एवं समर्थन के लिए आभार व्यक्त करती है।

इस पाठ्यपुस्तक के विकास के दौरान, विभिन्न कार्यशालाएँ आयोजित की गई थीं जिनमें विभिन्न संस्थानों से गणित के विषय विशेषज्ञ आमंत्रित किए गए थे। रा.शै.अ.प्र.प. इन विषय-विशेषज्ञों द्वारा इस पाठ्यपुस्तक की सामग्री एवं शिक्षणशास्त्र में सुधार के लिए श्री वी. शिवशंकर शास्त्री, *गणित संचारक* (Communicator), कोलार; पी. सत्यनारायण शर्मा, *अथिति प्राध्यापक*, गणित विभाग, के.बी.एन. कॉलेज (स्वायत्त), विजयवाड़ा, आंध्रप्रदेश; सुहास साहा, *प्रमुख*, गणित विभाग, ईशा होम स्कूल, कोयंबटूर; प्रियव्रत देशपांडे, *सह आचार्य*, सी.एम.आई. चेन्नई; सादिक अली शेख, *प्रमुख*, गणित विभाग, मौलाना आज़ाद कॉलेज, कला, विज्ञान एवं वाणिज्य (कॉमर्स), औरंगाबाद, महाराष्ट्र; जसपाल कौर, *टी.जी.टी.* (गणित), स्कूल ऑफ एक्सेलेंस, दिल्ली; बीना प्रकाश, *वरिष्ठ पी.जी.टी.* (गणित), कैम्पियन स्कूल, भोपाल; महेंद्र शंकर, *वरिष्ठ प्रवक्ता* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; राम अवतार, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *सह आचार्य* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प.; आदित्य चंद्रशेखर कर्नाटकी, *सहायक आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई; नागेश मोने, *प्राचार्य* (सेवानिवृत्त), द्रविड़ हाई स्कूल डेक्कन शैक्षिक समिति, वाई, महाराष्ट्र; आर. आत्मारामन, गणितीय शिक्षा *परामर्शदाता*, टी.आई. मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल एवं ए.एम.टी.आई., चेन्नई, तमिलनाडु; उपेंद्र कुलकर्णी, *सह आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई; अनुपमा एस.एम., संकाय, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय; संदीप दिवाकर, गणित *विषय-विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; आशीष गुप्ता, *संसाधन विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; प्रवीण उनियाल, *संसाधन विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; रामचंदर कृष्णमूर्ति, *प्राचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विद्यालय का बहुमूल्य सुझावों एवं जानकारी के लिए आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, श्रीधर श्रीवास्तव, *संयुक्त निदेशक*, रा.शै.अ.प्र.प.; अमरेन्द्र प्रसाद बेहरा, *संयुक्त निदेशक*, केंद्रीय शैक्षिक प्रौद्योगिकी संस्थान, रा.शै.अ.प्र.प. को भी धन्यवाद देती है।

परिषद्, सुनीता फरक्या, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., के शैक्षणिक एवं प्रशासनिक सहयोग के लिए आभार ज्ञापित करती है।

परिषद्, इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में सहयोग प्रदान करने के लिए सुष्मिता जोशी, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; मंजू महार, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; लुबना रहमान, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; शक्ति कुमार भारद्वाज, *गणित प्रयोगशाला सहायक*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., के योगदानों की सराहना करती है।

इसके साथ ही ज्योती बांगड़े, *प्रूफ रीडर* (संविदा); विशाल शर्मा, अतुल, *टंकक हिंदी* (संविदा), डी.ई.एस.एम. का योगदान भी प्रशंसनीय हैं। अंतत: परिषद्, पुस्तक की रूपरेखा तैयार करने एवं पुस्तक को अंतिम रूप देने हेतु पवन कुमार बरियार, *प्रभारी*, डी.टी.पी. प्रकोष्ठ, राजश्री सैनी, विपन कुमार शर्मा, बिट्टू कुमार महतो एवं मनोज कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा), प्रकाशन प्रभाग, रा.शै.अ.प्र.प. का आभार व्यक्त करती है। परिषद्, संपादन कार्य के लिए *सहायक संपादक* (संविदा) पारुल त्यागी एवं राहुल सेमवाल और प्रूफ रीडिंग के लिए *प्रूफ रीडर* (संविदा) श्रीया, प्रियंका, प्रियंका शर्मा एवं अब्दल मजीद का आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 2 25/09/2024 16:44:03

शिक्षक के लिए शब्द

हम आशा करते हैं कि *गणित प्रकाश* पाठ्यपुस्तक, गणित जैसे रोमांचक विषय को सीखने के आनंद को अगली पीढ़ी तक पहुँचाने के महत्वपूर्ण कार्य को पूर्ण करने में मजबूत समर्थक और मार्गदर्शक के रूप में आपकी सहायता करेगी।

इस कार्य के लिए एक अनुकूल वातावरण प्रदान करना आवश्यक है जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में गणितीय सोच को विकसित करने में सहायता करेगा।

अक्सर कक्षाओं में विद्यार्थियों को जो कुछ भी बताया जाता है उसे वे केवल सुनते हैं या बोर्ड पर जो कुछ लिखा जाता है उसे कॉपी में उतारते हैं। इस तरह की कक्षाओं में गणित सीखने के लिए आवश्यक परिस्थितियों का अभाव होता है इसलिए अनुकूल वातावरण की अनुपस्थिति में कोई भी विद्यार्थियों से गणितीय सोच और समझ को ग्रहण करने की उम्मीद नहीं कर सकता। कक्षाएँ ऐसी जगह होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी गणितीय अवधारणाओं के साथ खेलने, पैटर्नों को खोजने, चर्चा करने और समस्याओं को हल करने के लिए रचनात्मक रणनीतियों को अपने मित्रों के साथ मिलकर क्रियान्वित करने में व्यस्त रहे। विद्यार्थियों को समस्याओं को एक दूसरे के समक्ष भी रखना चाहिए और उनके संभव समाधान पर चर्चा करनी चाहिए। निश्चित तौर पर ये वही स्थितियाँ हैं जिनके कारण अब तक गणित के संपूर्ण क्षेत्र का विकास हुआ है।

कक्षा में ऐसा वातावरण तैयार करना जटिल कार्य नहीं है। इसके लिए हमें चाहिए एक रुचिकर प्रश्न, समस्या, पैटर्न या चुनौती जिसे नियमित आधार पर विद्यार्थियों के लिए प्रस्तुत किया जाए। विद्यार्थियों को कक्षा में जोड़े में या समूहों में प्रश्न को समझने, उस पर चर्चा करने एवं उस पर कार्य करने के लिए पर्याप्त समय दिया जाए।

इसके साथ ही एक ऐसा वातावरण विकसित करने की आवश्यकता है, जहाँ विद्यार्थियों की त्रुटियों को समझा जाए और सीखने में उनके महत्व को स्वीकार किया जाए।

यद्यपि कक्षाओं में गणितीय सोच को शुरू करने के लिए उत्साह पैदा करना कठिन कार्य नहीं है हालाँकि इसे बनाए रखना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। यह उत्साह बनाए रखने के लिए इसमें आपकी ओर से प्रयास सम्मिलित हो सकते हैं। इसके लिए गणितीय प्रश्न, समस्या, पैटर्न या चुनौती को प्रस्तुत करने का पहला भाग सप्ताह में कम से कम एक या दो बार किया जाता हो। इसके साथ ही विद्यार्थियों को प्रश्न को समझने, चर्चा करने और उस पर काम करने के लिए आपकी ओर से पर्याप्त प्रतीक्षा समय भी दिया जाता हो। आपके ऐसे प्रयास विद्यार्थियों के गणित को देखने और उसके प्रति दृष्टिकोण पर सकारात्मक प्रभाव डाल सकते हैं।

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि यह सकारात्मक प्रभाव त्वरित नहीं होगा बल्कि यह सीखने की एक धीमी प्रक्रिया है। यह प्रक्रिया विभिन्न कारकों पर निर्भर करती है, जैसे— समस्या समाधान हेतु आप विद्यार्थियों को कितने अवसर देते हैं, आपका धैर्य और प्रोत्साहन जो आप विद्यार्थियों को देते हैं।

NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 15 25/09/2024 16:44:07

समस्या प्रस्तुत करने में आपकी सहायता करने के लिए, इस पुस्तक में सभी समस्याओं या प्रश्नों को चिह्न ⚙ का उपयोग करके चिह्नित किया गया है। यह चिह्न कक्षा में समस्या समाधान और अन्वेषण की प्रक्रिया शुरू करने के संभावित अवसर का संकेतक है। आप देखेंगे कि कुछ समस्याओं को 'गणित चर्चा' नाम दिया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों को विशेष रूप से कक्षा में चर्चा के लिए विषय बनाया जा सकता है।

विद्यार्थियों की गणितीय सोच और अवधारणाओं की समझ को विकसित करने के लिए पर्याप्त समस्याएँ दी गई हैं। उन सभी को हल करने का प्रयास इस कीमत पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को हल करने और उन पर चर्चा करने का पर्याप्त समय ही न मिले।

यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि खोजपूर्ण समस्याएँ केवल समस्याओं को हल करने के कौशल को बढ़ावा देने के लिए नही हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना शुरू करते हैं तो वे प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाने में भी सहायता करती हैं।

विद्यार्थियों को स्वतंत्र शिक्षार्थी बनाने के प्रयास अवश्य होने चाहिए। इसके लिए एक आवश्यक अनिवार्य पहलू गणितीय पाठ को पढ़ने और समझने की क्षमता है। इस कौशल को बढ़ावा देने हेतु विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। वे जो पढ़ते हैं उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने के पर्याप्त अवसर उन्हें प्रदान किए जाने चाहिए। यह उस एक बड़ी समस्या का भी समाधान करेगा जिसका सामना विद्यार्थी गणित को बोलने और शब्द समस्याओं की व्याख्या करने में करते हैं।

पाठ्यपुस्तक में अनेक खुले अंत वाले (open-ended) प्रश्न दिए गए हैं। इसमें कुछ अवधारणाओं को समझने के नए तरीके भी सम्मिलित हैं। यदि आप उन्हें हल करने में सक्षम नहीं हैं या उनमें से कुछ का तुरंत अनुसरण नहीं कर पा रहे हैं, तो यह कोई जटिल समस्या नहीं है। प्रत्येक व्यक्ति को संपूर्ण ज्ञान नहीं होता। ऐसी सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के लिए इसे कक्षा में ले जाना और चर्चा के लिए प्रस्तुत करना बहुत उपयोगी होगा। चर्चा के पश्चात्, जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। यह प्रक्रिया अपने आप ही पाठ्य सामग्री को समझने में सुगम बना सकती है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं और जब विद्यार्थी, शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए ढूँढ़ते एवं उन्हें सोचते हुए देखते हैं, तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।

आशा है कि आप और आपके विद्यार्थी इस पुस्तक का उपयोग करके एक बहुत अच्छा और उपयोगी समय व्यतीत करेंगे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 16 25/09/2024 16:44:07

प्रमुख बिंदुओं का सारांश

अन्वेषण के लिए समय

1. विद्यार्थियों के लिए नियमित रूप से नई समस्याओं, प्रश्नों, पैटर्नों या चुनौतियों को प्रस्तुत करना महत्वपूर्ण है। व्यक्तिगत रूप से और समूहों में उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने और उन पर काम करने के लिए पर्याप्त समय दीजिए।
2. एक ऐसे वातावरण को निर्मित करने की आवश्यकता है, जो त्रुटियों को समझता है और सीखने में उनके महत्व को स्वीकारता है।
3. एक ऐसी पाठ्य संस्कृति होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी एक-दूसरे के लिए समस्याएँ प्रस्तुत करें और समस्याओं को हल करने की विभिन्न विधियों पर एक-दूसरे से चर्चा करें।

पाठ्यपुस्तक में समस्याओं के विषय में

1. पुस्तक में खोजपूर्ण समस्याएँ न केवल समस्याओं के समाधान के स्तर में वृद्धि करती हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना शुरू करते हैं, तो इन समस्याओं का उद्देश्य प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाना भी है।
2. पुस्तक में सभी समस्याओं को हल करने का प्रयास इस कीमत पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने एवं हल करने के लिए पर्याप्त समय ही न मिले।

पढ़ना

1. विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।
2. विद्यार्थी जो पढ़ते हैं, उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने का उन्हें अवसर दें।

न जानने का अधिकार!

1. यदि विद्यार्थी को पढ़ते समय कुछ पाठ्य सामग्री तुरंत समझ में नहीं आती है, तो इसमें कोई जटिल समस्या नहीं है। ऐसी पाठ्य सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के साथ-साथ, इसे कक्षा मे प्रस्तुत किया जा सकता है और उस पर चर्चा की जा सकती है। चर्चा के पश्चात्, जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं। जब विद्यार्थी शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए खोजते एवं सोचते हुए देखते हैं, तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।
2. सीखना एक सतत प्रक्रिया है। वास्तव में, गणित में इतना कुछ है जो अभी भी ज्ञात नहीं है और जिसके लिए और अधिक अन्वेषण की आवश्यकता है!

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 17 25/09/2024 16:44:07

विद्यार्थियों के लिए शब्द!

गणित कला को सराहने के लिए केवल निष्क्रिय दर्शक बने रहना पर्याप्त नहीं है, अपितु इसमें आपकी सक्रिय भागीदारी की भी आवश्यकता है, जैसे— कोई जासूस किसी रहस्य को सुलझाने के लिए प्रक्रिया में अनुरत रहता है।

इस भागीदारी की आवश्यकता विशेषत: तब होती है जब आप कोई नया प्रश्न देखते हैं या कोई प्रश्न आपकी अपनी जिज्ञासा से उत्पन्न होता है या जब आप संख्याओं या आकृतियों के किसी नए आर्कषक पैटर्न को देखते हैं। जब ऐसी अवधारणाओं से आपका सामना हो, तो आप अपने अध्ययन कार्य को विराम दीजिए एवं अपनी रचनात्मकता का उपयोग प्रश्न का परिणाम निकालने या पैटर्न को समझने में कीजिए।

आपको ज्ञात होगा कि इस पाठ्यपुस्तक में अध्यायों के अंतर्गत कुछ प्रश्नों के साथ उनके उत्तर भी दिए गए हैं। उनके उत्तर देखने से पहले प्रश्नों को स्वयं या समूह में हल करना या उन पर चर्चा करना अधिगम के लिए सार्थक सिद्ध होगा। ऐसा करने से आपका अनुभव गणित की पुस्तक को पढ़ने में अत्यंत सहायक सिद्ध होगा जो कि आपके अधिगम प्रक्रिया को सशक्त बनाएगा।

अध्ययन करते समय अध्यायों में आपको यह चिह्न देखने को मिलेगा जो कि दर्शाता है कि अब गणित के तथ्यों एवं अवधारणाओं को समझने का समय है। कभी-कभी आपको शीर्षक 'आइए, पता लगाएँ' के अंतर्गत एक ही स्थान पर कई प्रश्न एक साथ मिलेंगे।

इस पुस्तक में कुछ प्रश्न 

के अंतर्गत सम्मिलित हैं। ये प्रश्न आपको आपके मित्रों के साथ चर्चा करने एवं हल करने के लिए दिए गए हैं।

अंतत: पाठ्य सामग्री को रोचक बनाने हेतु कुछ प्रश्न 

के अंतर्गत सम्मिलित हैं। इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए अधिक रचनात्मक सोच की आवश्यकता है। अंत: इनका उत्तर देना आपके लिए अत्यंत रोचक होगा।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 18 25/09/2024 16:44:08

ಮುನ್ನುಡಿ

2025–26 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ ರಾಜ್ಯದ ಎಲ್ಲಾ 6ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತಿರುವ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಯು 2020 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿ ಹಾಗೂ 2023 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟು (ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ)ಗಳ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ರಚಿಸಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೊಂದಿಗೆ 21 ನೇ ಶತಮಾನದ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವಂತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕಿರುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅವರ ಭವಿಷ್ಯದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿ, ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಸದ್ಬಳಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಿದ್ಧರಿರುವಂತೆ ಅವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ನಿರೂಪಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪೋಷಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಹತ್ತರವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ ತಪ್ಪಾಗಲಾರದು.

ಪಠ್ಯವಸ್ತು ಹಾಗೂ ಬೋಧನಾ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಸಮನ್ವಯಗೊಂಡಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕುತೂಹಲಕ್ಕೆ ನೀರೆರೆಯುತ್ತಾ, ಅವರ ವಿಚಾರಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಅನ್ವೇಷಣಾ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನ ಕಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳಲು ಹೇರಳ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ತನ್ನ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಶೋಧಿಸಿ ಅಲ್ಲಿ ಅನುಭವಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿರುವ ವರ್ಣರಂಜಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಸಂವಾದಾತ್ಮಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಬುನಾದಿಯನ್ನು ಬಲಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ ಸಂಕೀರ್ಣ ಗಣತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಪಠ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಕಥೆಗಳು, ಸಂವಾದಗಳು ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳ ಸಹಜ, ಸರಳ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಾವೀನ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳು ಗಮನವನ್ನು ಕಲಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಲು ಹಾಗೂ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಂಡು ಅನ್ವಯಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಮೂಲಕ ತಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಅಲೋಚನಾ (Computational Thinking) ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರೇರಣೆ ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ.

ನೀಡಿರುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹಾಗೂ ಬಳಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅನ್ವಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸರಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲೂ ಕಲೆ, ಇತಿಹಾಸ, ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಳಿತಗೊಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಬಹುಶಿಸ್ತೀಯ ಕಲಿಕೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಥನ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಮಾಡಿ ಕಲಿ ತತ್ತ್ವದಡಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಸಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡಿರುವುದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಪ್ರೀತಿ ಹೆಚ್ಚುವುದರಲ್ಲಿ ಅನುಮಾನವಿಲ್ಲ.

ಇಷ್ಟೆಲ್ಲ ವಿಶೇಷ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಗಮಕಾರರು ತಮ್ಮ ತರಗತಿಯನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಹಾಗೂ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಸಿದ್ಧತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ತರಗತಿ ನಿರ್ವಹಣೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಕುರುಡು ಲೆಕ್ಕಾಚರದ ಬದಲಿಗೆ ಒಗಟು, ಚರ್ಚೆ, ಸಂವಾದ, ಆಟ, ಪರಸ್ಪರ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ, ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸುಗಮಕಾರಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಸುಗಮಕಾರರು ಹುಸಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ನಂಬಿಕೆ ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯದ್ದಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಮಟ್ಟದ ಎಲ್ಲಾ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ತಮ್ಮದಾಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ಆಶಯದೊಂದಿಗೆ 2025–26 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಮತಿ ನೀಡಿದ ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರದ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಬಳಕೆಗೆ ಅವಕಾಶ ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ವಿವಿಧ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುವಾದಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಡಿ.ಟಿ.ಪಿ ಆಪರೇಟರ್‌ಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಮುದ್ರಕರಿಗೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀ ಎಂ.ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ.)
ಬೆಂಗಳೂರು.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 19 25/09/2024 16:44:08

विषय-सूची

आमुख *ii*

पुस्तक के विषय में *iii*

अध्याय 1

गणित में पैटर्न 1

अध्याय 2

रेखाएँ और कोण 13

अध्याय 3

संख्याओं का खेल 55

अध्याय 4

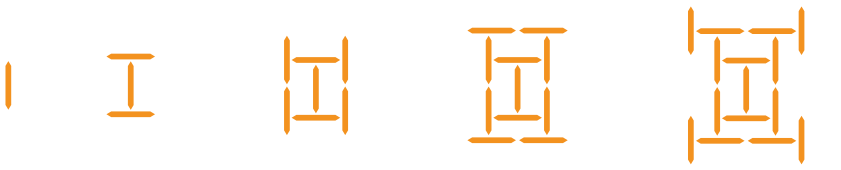
आकँड़ों का प्रबंधन और प्रस्तुतिकरण 74

अध्याय 5

अभाज्य समय 107

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

0 Prelims.indd 2 25/09/2024 16:44:03



1 गणित में पैटर्न

0675CH01

1.1 गणित क्या है?

गणित, पैटर्नों (प्रतिरूपों) की खोज तथा पैटर्नों उनके अस्तित्व के कारण का स्पष्टीकरण है।

पैटर्न सामान्यत: हमारे आस-पास प्रकृति में, हमारे घरों और विद्यालयों में तथा सूर्य, चंद्रमा और तारों की गति में विद्यमान होते हैं। ये पैटर्न हमें खरीदारी से लेकर खाना बनाने में, गेंद फेंकने से लेकर खेल खेलने आदि में दिखाई देते हैं। इसके साथ ही यह मौसम चक्र को समझने एवं प्रौद्योगिकी का उपयोग करने में हमारी सहायता करते हैं।

पैटर्न तथा उन्हें समझना आनंददायक और रचनात्मक कार्य हो सकता है। इसी कारणवश गणितज्ञ, गणित को कला और विज्ञान दोनों के ही रूप में देखते हैं। हमें आशा है कि इस कक्षा में आपको गणितीय पैटर्नों को खोजने और समझने के लिए अनेक रचनात्मक तथा कलात्मक अवसर प्राप्त होंगे।

यह बात ध्यान रखने योग्य कि गणित का लक्ष्य केवल यह ज्ञात करना नहीं है कि कौन-कौन से पैटर्नों का अस्तित्व है, अपितु उनके अस्तित्व के कारणों के स्पष्टीकरणों को भी ज्ञात करना है। तब, ऐसे स्पष्टीकरणों का उपयोग प्राय: ऐसे अनुप्रयोगों में तब किया जा सकता है, जो उन संदर्भों के बाहर हैं जिनमें इनकी खोज की गई थी, और जो मानवता को आगे बढ़ने के लिए प्रेरित करने में सहायता कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, तारों, ग्रहों और उनके उपग्रहों (satellites) की गति के पैटर्नों की समझ ने मानव को गुरूत्वाकर्षण (gravitation) का सिद्धांत विकसित करने तक पहुँचाया। इसी के

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

फलस्वरूप हम चंद्रमा और मंगल पर स्वयं अपने उपग्रह प्रक्षेपित करने और रॉकेट भेजने में सफल हो पाए। इसी प्रकार, जीनोमों (genomes) के पैटर्नों की समझ ने हमें रोगों का पता लगाने और उनका उपचार करने में सहायता की। पैटर्न से संबंधित ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनमें से यह एक हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप अन्य उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं, जहाँ गणित दैनिक जीवन में हमारी सहायता करता है?
2. गणित ने किस प्रकार मानव को आगे बढ़ाने के लिए प्रेरित करने में सहायता की है? (आप उन उदाहरणों के विषय में विचार कर सकते हैं जिनमें वैज्ञानिक प्रयोग करना; अपनी अर्थव्यवस्था और लोकतंत्र को चलाना; पुलों, घरों या अन्य जटिल भवनों को निर्मित करना; टी.वी., मोबाइल फोन, कम्प्यूटरों, साइकिलों, रेलगाड़ियों, कारों, वायुयानों, कैलेंडरों, घड़ियों इत्यादि को बनाना सम्मिलित हैं।)

गणित चर्चा

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 संख्याओं में पैटर्न

गणित में दिखने वाले सबसे अधिक मौलिक पैटर्नों में संख्याओं के पैटर्न हैं, विशेष रूप से पूर्ण संख्याओं के पैटर्न— 0, 1, 2, 3, 4, ...

गणित की वह शाखा जिसमें पूर्ण संख्याओं के पैटर्नों का अध्ययन किया जाता है, **संख्या सिद्धांत** कहलाती है।

संख्या अनुक्रम (sequences) सबसे अधिक मौलिक एवं सबसे अधिक आकर्षित करने वाले पैटर्नों के प्रकारों में हैं, जिनका अध्ययन गणितज्ञ करते हैं।

सारणी 1 कुछ मुख्य संख्या अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

Chapter 1.indd 2 17/09/2024 15:11:11

सारणी 1— संख्या अनुक्रमों के उदाहरण

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,….	(सभी '1')
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….	(गणन संख्याएँ)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ….	(विषम संख्याएँ)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ….	(सम संख्याएँ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ….	(त्रिभुजाकार संख्याएँ)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ….	(वर्ग संख्याएँ)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ….	(घन संख्याएँ)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….	(विरहांक संख्याएँ)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ….	(2 की घातें)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ….	(3 की घातें)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम को उसकी अगली तीन संख्याओं सहित अपनी नोटबुक पर पुन: लिखिए। प्रत्येक अनुक्रम के बाद, उस अनुक्रम में संख्याओं को बनाने वाले नियम को अपने शब्दों में लिखिए।

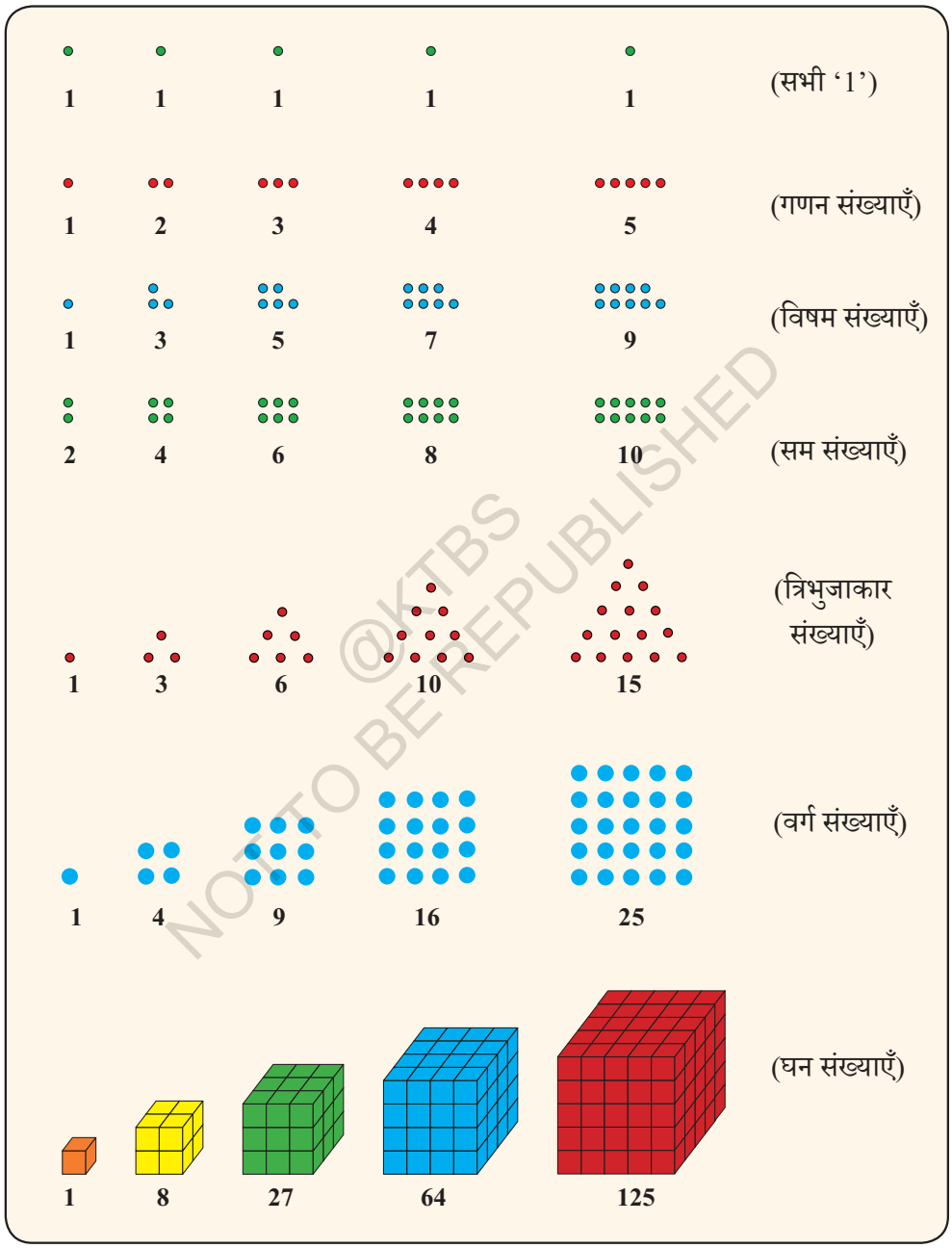
1.3 संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन

चित्रों का उपयोग करते हुए अनेक संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन किया जा सकता है। गणितीय वस्तुओं का चित्रों या आरेखों के माध्यम से दृश्यांकन गणितीय पैटर्नों और संकल्पनाओं को समझने का एक अति लाभप्रद तरीका हो सकता है।

आइए, सारणी 1 के प्रथम सात अनुक्रमों को अग्रलिखित चित्रों के माध्यम से दर्शाइए—

Chapter 1.indd 3 17/09/2024 15:11:11

सारणी 2— कुछ संख्या अनुक्रमों का चित्रीय निरूपण



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

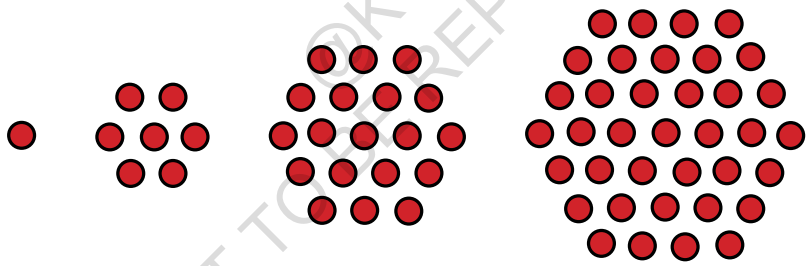
Chapter 1.indd 4 17/09/2024 15:11:11

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. सारणी 2 में दिए संख्या अनुक्रमों को चित्रात्मक रूप से दर्शाने के लिए अपनी नोटबुक में प्रतिलिपि बनाकर प्रत्येक अनुक्रम के लिए अगला चित्र बनाइए।
2. 1, 3, 6, 10, 15, ... **त्रिभुजाकार संख्याएँ** क्यों कहलाती हैं? 1, 4, 9, 16, 25, ... **वर्ग संख्याएँ** या **वर्ग** क्यों कहलाती हैं? 1, 8, 27, 64, 125, ... **घन संख्याएँ** या **घन** क्यों कहलाती हैं?
3. आपने ध्यान दिया होगा कि 36 एक त्रिभुजाकार संख्या और वर्गाकार संख्या दोनों है। अर्थात् 36 बिंदुओं को त्रिभुज और वर्ग दोनों में पूरी तरह व्यवस्थित किया जा सकता है। इसे स्पष्ट करते हुए अपनी नोटबुक में चित्र बनाइए।

   इससे ज्ञात होता है कि एक ही संख्या को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है और संदर्भ के आधार पर अलग-अलग भूमिकाएँ निभाई जा सकती हैं। कुछ अन्य संख्याओं को अलग-अलग तरीकों से चित्रात्मक रूप से दर्शाने का प्रयास कीजिए।
4. आप संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रम को क्या कहेंगे?



1 **7** **19** **37**

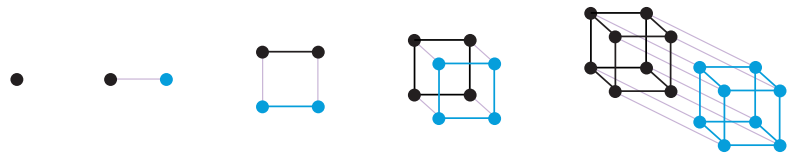
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इन्हें **षड्भुजाकार** (hexagonal) **संख्याएँ** कहते हैं। इन्हें अपनी नोटबुक में बनाइए। अनुक्रम में अगली संख्या क्या होगी?

5. क्या आप '2 की घात' के अनुक्रम का चित्रीय निरूपण कर सकते हैं? '3 की घात' का?

Chapter 1.indd 5 17/09/2024 15:11:11

यहाँ '2 की घात' के चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण का एक संभावित तरीका दिया है—



1.4 संख्या अनुक्रमों के बीच संबंध

कभी-कभी संख्या अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों से एक-दूसरे से संबंधित हो सकते हैं।

उदाहरण— क्या होता है जब हम विषम संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं?

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

⋮

वास्तव में यह एक सुंदर पैटर्न है!

ऐसा क्यों होता है? क्या आपको यह लगता है कि सदैव ऐसा ही होता रहेगा?

इसका उत्तर है कि यह पैटर्न सदैव ही चलता रहेगा। अब आप सोच रहे होंगे कि ऐसा क्यों है? जैसा कि पहले बताया जा चुका है, ऐसा पैटर्न होने का कारण उतना ही महत्वपूर्ण और रोमांचक है, जितना कि वह पैटर्न स्वयं।

एक चित्र इसे स्पष्ट कर सकता है

एक चित्र द्वारा इस तथ्य को समझने में सहायता मिल सकती है। स्मरण कीजिए कि वर्ग संख्याएँ एक वर्ग ग्रिड (grid) में बिंदुओं की गिनती करके बनाई जाती हैं।

एक वर्गाकार बिंदु ग्रिड में विषम संख्याओं 1, 3, 5, 7 के बिंदुओं को कैसे बाँटा जा सकता है?

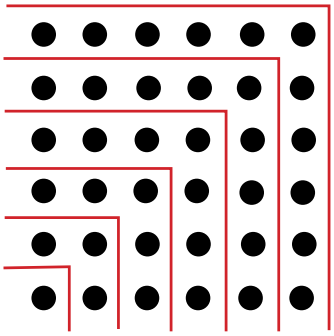
गणित चर्चा

आगे पढ़ने से पहले इसके बारे में एक क्षण के लिए सोचिए!

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 1.indd 6 17/09/2024 15:11:11

नीचे दिए गए पैटर्न में दिखाया गया है कि यह कैसे किया जा सकता है—



यह चित्र दर्शाता है कि

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

क्योंकि इस प्रकार का चित्र किसी भी माप के वर्ग के लिए बनाया जा सकता है, अत: यह स्पष्ट हो जाता है कि विषम संख्याओं को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त हो जाती हैं।

इसी प्रकार एक अन्य चित्र बनाकर, क्या आप यह बता सकते हैं कि प्रथम 10 विषम संख्याओं का योग क्या है?

अब एक ऐसे ही चित्र की कल्पना कीजिए या आवश्यकतानुसार आंशिक चित्र बनाकर क्या आप बता सकते हैं कि प्रथम 100 विषम संख्याओं का योग क्या है? ऐसे चित्र की कल्पना कीजिए और आवश्यकतानुसार छोटे आकार में बनाकर इसे समझाइए।

अनुक्रमों के मध्य ऐसे संबंध का एक अन्य उदाहरण—
ऊपर और नीचे जोड़ना

आइए, निम्नलिखित पैटर्न पर ध्यान दीजिए—

$1 = 1$

$1 + 2 + 1 = 4$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$

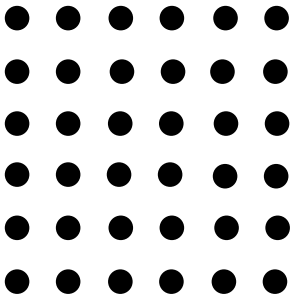
⋮

दिए गए पैटर्न को देखकर यह प्रतीत होता है कि गणन संख्याओं को ऊपर और फिर नीचे जोड़ना वर्ग संख्याएँ प्राप्त करने का एक अन्य तरीका है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 1.indd 7 17/09/2024 15:11:11

क्या आप नीचे दिए गए ग्रिड बिंदु से एक ऐसा ही चित्रात्मक स्पष्टीकरण ज्ञात कर सकते हैं?



आइए, पता लगाएँ

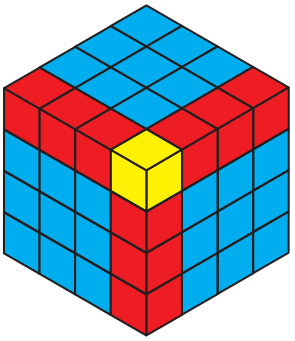
प्रयास करें

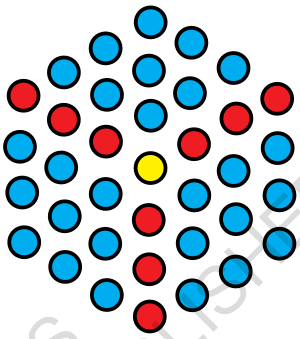
1. गणन संख्याओं को ऊपर और नीचे जोड़ने पर अर्थात् 1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, ..., से वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त होती हैं, क्या आप इसके लिए एक चित्रीय स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
2. इस तस्वीर के बड़े संस्करण की कल्पना करके या आवश्यकतानुसार उसका आंशिक चित्र बनाकर, क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1 का मान क्या होगा?
3. जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर और नीचे जोड़ते हैं, तब कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है?
4. जब आप गणन संख्याओं को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप एक छोटे से चित्र के माध्यम से स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
5. जब आप क्रमागत त्रिभुजाकार संख्याओं के युग्मों को जोड़ते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15, … को लीजिए। आप कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्यों? क्या आप इसे एक चित्र द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं?
6. जब आप 1 से प्रारंभ करते हुए 2 की घातों को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, … लीजिए? अब, इनमें से प्रत्येक संख्या में 1 जोड़ दीजिए— आप कौन-सी संख्याएँ प्राप्त करते हैं? ऐसा क्यों होता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 1.indd 8 17/09/2024 15:11:11

7. जब आप त्रिभुजाकार संख्याओं को 6 से गुणा करते हैं और 1 जोड़ते हैं तो क्या होता है? आपको कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्या आप इसे चित्र के माध्यम से समझा सकते हैं?
8. जब आप षड्भुजाकार संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, … लीजिए? आप कौन-सा अनुक्रम प्राप्त करते हैं? क्या आप इसे एक घन के चित्र का उपयोग करते हुए स्पष्ट कर सकते हैं?





9. सारणी 1 में दिए गए अनुक्रमों में और दो भिन्न अनुक्रमों के उनके बीच स्वयं अपनी ओर से अन्य पैटर्न या संबंध खोजिए। क्या एक चित्र या किसी अन्य माध्यम से आप यह स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

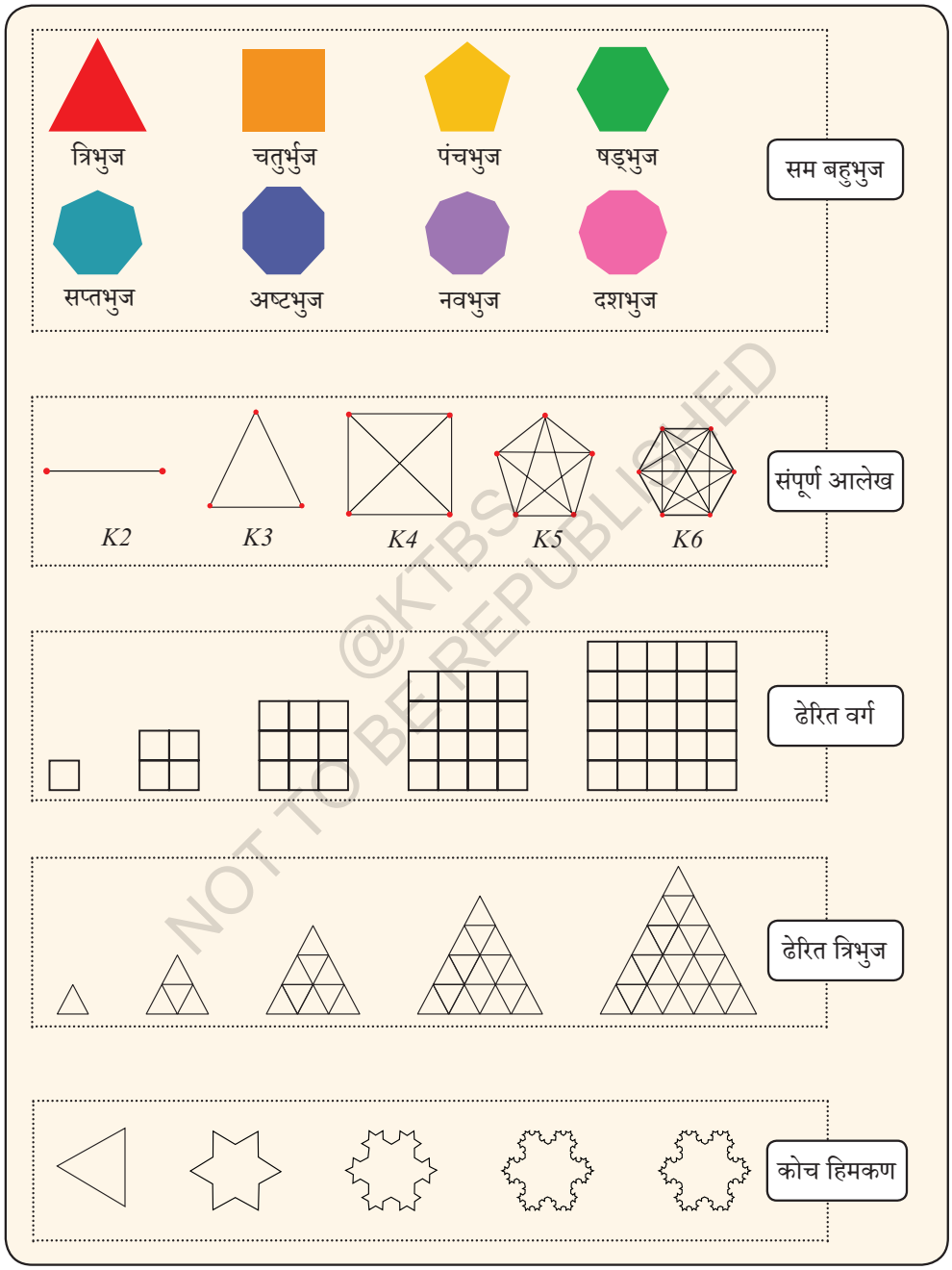
1.5 आकारों में पैटर्न

गणित में पाए जाने वाले अन्य महत्वपूर्ण और बुनियादी पैटर्न आकारों के पैटर्न हैं। ये आकार एक, दो या तीन विमाओं (1D, 2D, 3D) में या यहाँ तक कि इनसे अधिक विमाओं (dimensions) में हो सकते हैं। गणित की वह शाखा जिसमें आकारों में पैटर्न का अध्ययन किया जाता है, ज्यामिति कहलाती है।

आकार अनुक्रम एक महत्वपूर्ण प्रकार के आकार पैटर्न हैं, जिनका गणितज्ञ अध्ययन करते हैं। सारणी 3 कुछ मुख्य आकार अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

Chapter 1.indd 9 17/09/2024 15:11:12

सारणी 3— आकार अनुक्रम के उदाहरण



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 1.indd 10 17/09/2024 15:11:12

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम को अपनी नोटबुक में पुन: बनाने का प्रयास कीजिए। क्या आप प्रत्येक अनुक्रम में अगले आकार को खींच सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं? प्रत्येक अनुक्रम के बाद, अपने शब्दों में उस नियम या पैटर्न की व्याख्या कीजिए, जिसके अनुसार उस अनुक्रम में आकार बन रहे हैं।

गणित चर्चा

1.6 संख्या अनुक्रमों से संबंध

प्राय: आकार अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों द्वारा संख्या अनुक्रमों से संबंधित होते हैं। ऐसे संबंध आकार अनुक्रम और संबंधित संख्या अनुक्रम दोनों के अध्ययन और समझने में सहायक हो सकते हैं।

उदाहरण— सम बहुभुजों (regular polygons) के आकार अनुक्रम में, भुजाओं की संख्याएँ 3 से प्रारंभ करते हुए, अर्थात् 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... गणन संख्याओं द्वारा दी जाती हैं। इसी कारण ये आकार क्रमश:— **सम त्रिभुज, चतुर्भुज** (अर्थात् **वर्ग**), **पंचभुज, षड्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज, नवभुज, दशभुज** इत्यादि कहलाते हैं।

शब्द 'सम' यह इंगित करता है कि इन आकारों में 'भुजाओं' की लंबाइयाँ समान हैं और साथ ही 'कोण' भी एक समान हैं (अर्थात् भुजाएँ बराबर दिखाई देती हैं तथा कोने भी समान दिखाई देते हैं)। कोणों के बारे में हम विस्तृत चर्चा अगले अध्याय में करेंगे।

सारणी 3 के अन्य आकार अनुक्रमों का भी संख्या अनुक्रमों के साथ संबंध हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में आकृतियों के कोनों के विषय में आप क्या कहेंगे? क्या आपको वही संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

प्रयास करें

2. संपूर्ण आलेखों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में रेखाओं की संख्याओं की गणना कीजिए। इससे आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

Chapter 1.indd 11 17/09/2024 15:11:12

3. ढेरित (stacked) वर्गों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे वर्ग हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

4. ढेरित त्रिभुजों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे त्रिभुज हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? (संकेत— अनुक्रम के प्रत्येक आकार में, प्रत्येक पंक्ति में कितने त्रिभुज हैं?)



5. कोच हिमकण (Koch snowflake) वाले अनुक्रम में, एक आकार से अगला आकार प्राप्त करने कि लिए प्रत्येक रेखाखंड '__' को एक 'गति उभार (speed bump)' _/_ से प्रतिस्थापित करना पड़ता है। जैसे-जैसे इसे अधिक से अधिक बार किया जाता है, वैसे-वैसे परिवर्तन अत्यधिक छोटे-छोटे रेखाखंडों के साथ छोटे तथा और अधिक छोटे होते जाते हैं। कोच हिमकण के प्रत्येक आकार में कुल कितने रेखाखंड हैं? इनके संगत संख्या अनुक्रम क्या हैं? (3, 12, 48, ..., अर्थात् 4 की घात का तीन गुना इसका उत्तर हैं, यह अनुक्रम सारणी में नहीं है।)

सारांश

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

- गणित को पैटर्न की खोज और उन पैटर्न के अस्तित्व के स्पष्टीकरण के रूप में देखा जा सकता है।
- गणित में पाए जाने वाले सबसे मौलिक पैटर्न में **संख्या अनुक्रम** हैं।
- संख्या अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में गणन संख्याएँ, विषम संख्याएँ, सम संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ, त्रिभुजाकार संख्याएँ, घन संख्याएँ, विरहांक संख्याएँ और 2 की घातें सम्मिलित हैं।
- कभी-कभी संख्या अनुक्रम एक दूसरे से आकर्षक और उल्लेखनीय तरीकों से संबंधित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, 1 से शुरू होने वाली विषम संख्याओं के अनुक्रम को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ प्राप्त होती हैं।
- चित्रों का उपयोग करके संख्या अनुक्रमों के दृश्यांकन से अनुक्रमों और उनके बीच संबंधों को समझने में सहायता प्राप्त हो सकती है।
- **आकार अनुक्रम** गणित में पैटर्न का एक और मौलिक प्रकार है। आकार अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में सम बहुभुज, संपूर्ण ग्राफ, ढेरित त्रिभुज और वर्ग तथा कोच हिमकण (snowflake) पुनरावृत्तियाँ सम्मिलित होती हैं। आकार अनुक्रम, संख्या अनुक्रमों के साथ अनेक रोचक संबंध भी प्रदर्शित करते हैं।

Chapter 1.indd 12 17/09/2024 15:11:13



2 रेखाएँ और कोण

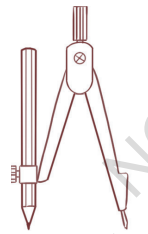
0675CH02

इस अध्याय में हम ज्यामिति की कुछ आधारभूत अवधारणाओं को जानेंगे इनमें बिंदु, रेखाएँ, किरणें, रेखाखंड और कोण सम्मिलित हैं। ये विचार 'समतल ज्यामिति' के मूलभूत अंग हैं और ज्यामिति के अधिक उन्नत विषयों, जैसे— विभिन्न आकृतियों की रचनाओं और उनके विश्लेषण, को समझने में सहायक होंगे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2.1 बिंदु

कागज पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक बिंदु (Dot) अंकित कीजिए। सिरा जितना नुकीला होगा बिंदु उतना ही सूक्ष्म होगा। यह सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिंदु की अवधारणा से अवगत कराएगा। एक बिंदु एक सटीक स्थान निर्धारित करता है, लेकिन इसकी कोई लंबाई, चौड़ाई या ऊँचाई नहीं होती। एक बिंदु के कुछ प्रतिरूप (मॉडल) निम्नलिखित हैं—



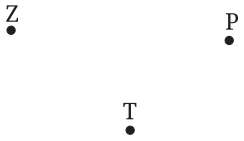
परकार की नोक



पेंसिल का नुकीला सिरा

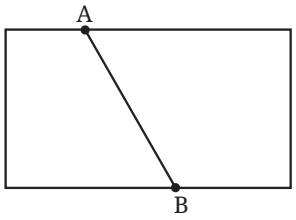
एक सुई का नुकीला सिरा

यदि आप किसी कागज पर तीन बिंदु अंकित करते हैं, तो आपको उनमें अंतर बताने की आवश्यकता होगी। इसके लिए, तीनों बिंदुओं को अंग्रेजी के बड़े अक्षर, जैसे— Z, P और T से व्यक्त किया जा सकता है।



इन बिंदुओं को बिंदु Z, बिंदु P और बिंदु T पढ़ा जाता है। नि:संदेह, ये बिंदु सटीक स्थान निर्धारित करते हैं और इन्हें अदृश्य रूप से बहुत ही छोटा होने की कल्पना करनी चाहिए।

2.2 रेखाखंड



कागज के एक टुकड़े को मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। क्या आपको कागज पर कोई मोड़ (क्रीज) का निशान दिखाई देता है? इस मोड़ से एक रेखाखंड (line-segment) की अवधारणा का आभास होता है। इसके दो अंत्य बिंदु (end points) A और B हैं।

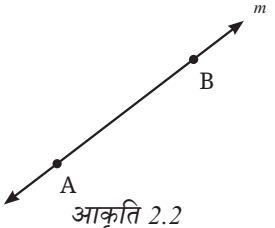
एक कागज पर दो बिंदु A और B अंकित कीजिए। इन दोनों बिंदुओं को सभी संभव मार्गों से जोड़ने का प्रयत्न कीजिए। (आकृति 2.1)



आकृति 2.1

A से B तक का सबसे छोटा मार्ग कौन-सा है? A और B को जोड़ने वाला यह सबसे छोटा मार्ग (जिसमें बिंदु A और B भी सम्मिलित हैं) रेखाखंड कहलाता है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिंदु A और B इस रेखाखंड $\overline{AB}$ के अंत्य बिंदु हैं।

2.3 रेखा



आकृति 2.2

कल्पना कीजिए कि A से B तक के रेखाखंड (अर्थात् $\overline{AB}$) को A से आगे एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तारित किया गया है (आकृति 2.2 देखिए)। यह रेखा का एक प्रतिरूप है। क्या आपको ऐसा लगता है कि आप एक पूरी रेखा की आकृति बना सकते हैं? नहीं? (क्यों?)

दो बिंदुओं A तथा B से होकर जाने वाली रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से दर्शाते हैं। यह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तारित होती है। कभी-कभी एक रेखा को l या m जैसे अक्षरों से भी व्यक्त करते हैं।

ध्यान दीजिए कि कोई भी दो बिंदु एक अद्वितीय रेखा निर्धारित करते हैं जो उन दोनों बिंदुओं से होकर गुजरती है।

© KIET NOT TO BE REPUBLISHED

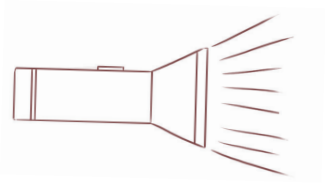
Chapter 2.indd 14 20/09/2024 15:45:46

2.4 किरण

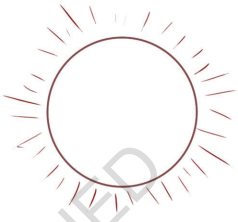
किरण रेखा का एक भाग है जो एक बिंदु से प्रारंभ होती है (जिसे किरण का प्रारंभिक बिंदु या आदि बिंदु कहते हैं)। किरण एक ही दिशा में बिना किसी अंत के विस्तारित होती है।
किरण के कुछ प्रतिरूप निम्नलिखित हैं—



एक लाइट हाउस से निकली प्रकाश की किरणें

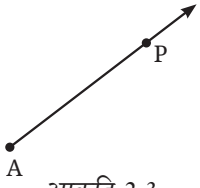


टॉर्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

किरण की दी हुई आकृति (आकृति 2.3) को देखिए। इस किरण पर दो बिंदु अंकित हैं। बिंदु A प्रारंभिक बिंदु है और दूसरा बिंदु P किरण पर स्थित है, तब हम इस किरण को $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।



आकृति 2.3

आइए, पता लगाएँ

1.

रिहान ने एक कागज पर एक बिंदु अंकित किया। वह उस बिंदु से जाने वाली कितनी रेखाएँ बना सकता है?

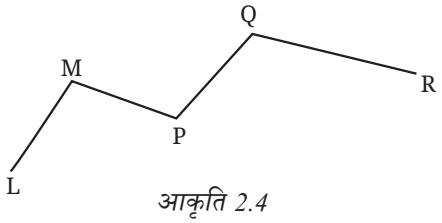
शीतल ने एक कागज पर दो बिंदु अंकित किए। वह उन दोनों बिंदुओं से गुजरती हुई कितनी भिन्न रेखाएँ बना सकती है?

क्या आप रिहान और शीतल को उनके उत्तर ज्ञात करने में मदद कर सकते हैं?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

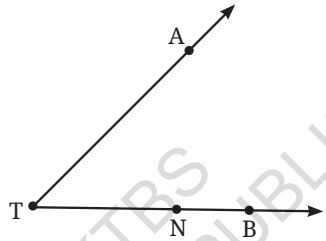
Chapter 2.indd 15 20/09/2024 15:45:46

2. आकृति 2.4 में दिए गए रेखाखंडों के नाम लिखिए। पाँच अंकित बिंदुओं में से कौन-से केवल एक रेखाखंड पर स्थित हैं? कौन-से बिंदु किन्हीं दो रेखाखंडों पर स्थित हैं?



आकृति 2.4

3. आकृति 2.5 में दी गई किरणों के नाम लिखिए। क्या T प्रत्येक किरण का प्रारंभिक बिंदु है?

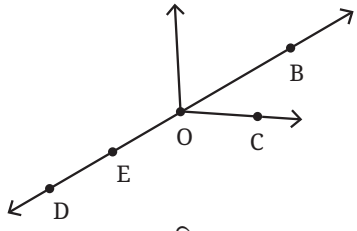


आकृति 2.5

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. एक कच्ची (rough) आकृति बनाइए और नीचे दिए गए प्रत्येक बिंदु का उपयुक्त नामांकन कीजिए—
   a. $\overleftrightarrow{OP}$ और $\overleftrightarrow{OQ}$ बिंदु O पर मिलते हैं।
   b. $\overrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{PQ}$ बिंदु M पर प्रतिच्छेद करते हैं।
   c. रेखा l पर बिंदु E और F स्थित हैं पर बिंदु D स्थित नहीं है।
   d. बिंदु P, AB पर स्थित है।

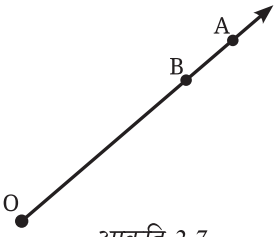
5. आकृति 2.6 में निम्नलिखित के नाम बताइए—
   a. पाँच बिंदु
   b. एक रेखा
   c. चार किरणें
   d. पाँच रेखाखंड



आकृति 2.6

Chapter 2.indd 16 20/09/2024 15:45:46

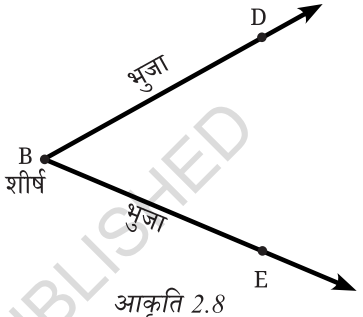
6. आकृति 2.7 में $\overrightarrow{OA}$ एक किरण है। यह O से शुरू होती है और बिंदु A से गुजरती है। यह बिंदु B से भी गुजरती है।
   a. क्या हम इसे $\overrightarrow{OB}$ भी नाम दे सकते हैं? क्यों?
   b. क्या हम $\overrightarrow{OA}$ को $\overrightarrow{AO}$ लिख सकते हैं? क्यों अथवा क्यों नहीं?



आकृति 2.7

2.5 कोण

प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक उभयनिष्ठ कोण बनता है। आकृति 2.8 में किरण $\overrightarrow{BD}$ और किरण $\overrightarrow{BE}$ से एक कोण बना है, जिनमें उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु B है।



आकृति 2.8

B कोण का शीर्ष है और किरणें $\overrightarrow{BD}$ और $\overrightarrow{BE}$ कोण की भुजाएँ हैं। हम इस कोण का नामकरण कैसे कर सकते हैं? साधारण रूप में केवल शीर्ष का प्रयोग करते हुए हम इस कोण को कोण B कह सकते हैं। अधिक स्पष्ट करने के लिए हम शीर्ष के साथ प्रत्येक भुजा पर स्थित एक बिंदु का प्रयोग कर कोण का नाम भी लिख सकते हैं। इस स्थिति में इस कोण को कोण DBE या कोण EBD कहा जा सकता है। शब्द 'कोण' को चिह्न '$\angle$' से भी दर्शाया जा सकता है, जैसे— $\angle$DBE या $\angle$EBD। ध्यान रखिए कि कोण को लिखते समय शीर्ष वाले अक्षर को मध्य में लिखा जाए।

एक कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष पर एक छोटी चाप का प्रयोग किया जाता है (आकृति 2.9 में देखिए)।

विद्या ने अभी अपनी पुस्तक खोली है। आइए, पुस्तक के कवर को खोलते हुए भिन्न स्थितियों का अवलोकन करते हैं।


स्थिति 1 स्थिति 2 स्थिति 3 स्थिति 4 स्थिति 5 स्थिति 6

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 17 20/09/2024 15:45:47

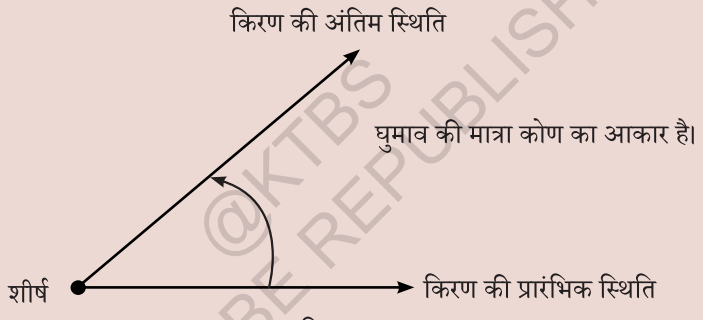
क्या आप प्रत्येक स्थिति में बनते हुए कोण को देख पा रहे हैं? क्या आप कोण को उसकी भुजाओं और शीर्ष के साथ अंकित कर सकते हैं?

कौन-सा कोण बड़ा है— पहली स्थिति का कोण या दूसरी स्थिति का कोण?

जिस प्रकार हम एक रेखा की लंबाई के आधार पर उसके आकार के विषय में चर्चा करते हैं, उसी प्रकार हम घुमाव की मात्रा के आधार पर एक कोण के आकार के विषय में भी चर्चा करते हैं।

अत: स्थिति 2 का कोण अपेक्षाकृत बड़ा है, क्योंकि इस स्थिति में उसे कवर को अधिक घुमाने की आवश्यकता है। इसी प्रकार स्थिति 3 में कोण स्थिति 2 से भी बड़ा है, क्योंकि वहाँ और भी अधिक घुमाव है तथा स्थिति 4, 5 और 6 अधिक घुमाव के साथ क्रमिक रूप से बड़े कोण हैं।

एक कोण का माप या आकार घूर्णन या मोड़ की वह मात्रा है जो पहली किरण को दूसरी किरण तक ले जाने के लिए शीर्ष के परित आवश्यक है।



आकृति 2.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, दैनिक जीवन से कुछ उदाहरण लेते हैं, जहाँ घूर्णन या घुमाव से कोण बनते हैं—

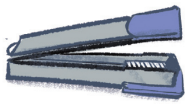
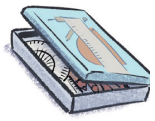
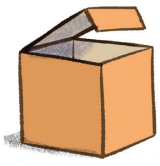


- एक परकार (कम्पास) या डिवाइडर की भुजाओं को घुमाने पर एक कोण बनता है। शीर्ष वह बिंदु है जहाँ दोनों भुजाएँ मिलती या जुड़ती हैं। कोण की भुजाओं और शीर्ष को पहचानिए।
- एक कैंची में दो ब्लेड होते हैं। जब हम उन्हें कुछ काटने के लिए खोलते (या घुमाते) हैं तो एक कोण बनता है। कोण की भुजाओं और शीर्ष को पहचानिए।

Chapter 2.indd 18 20/09/2024 15:45:48

- चश्मा, पर्स और अन्य साधारण वस्तुओं को देखिए। उनकी भुजाओं और शीर्ष को अंकित करते हुए कोण को पहचानिए।



क्या आप देख पा रहे हैं कि कैसे एक भुजा को दूसरी भुजा के संदर्भ में घुमाने पर कोण बन रहे हैं?

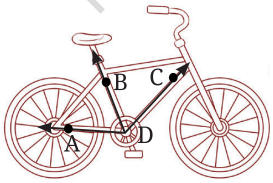
अध्यापक टिप्पणी

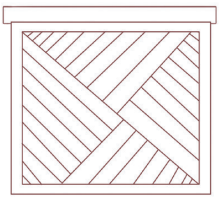
अध्यापक को कुछ ऐसे कार्यकलाप कराने चाहिए, जिससे विद्यार्थी कोण के आकार को घुमाव के माप से पहचान सकें।

@KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप दी गई आकृतियों में कोण ढूँढ़ सकते हैं? किसी भी एक कोण की भुजाएँ बनाइए और शीर्ष का नाम दीजिए।





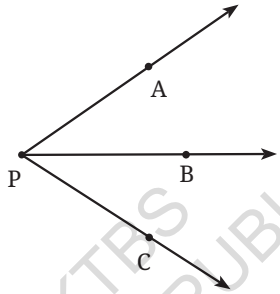
Chapter 2.indd 19 20/09/2024 15:45:49





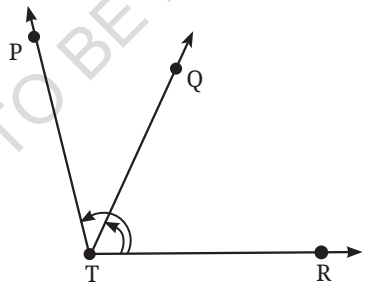
2. भुजा ST और SR को चिह्नित करते हुए कोण बनाइए।

3. व्याख्या कीजिए कि ∠APC को ∠P क्यों लिखा जा सकता?



गणित चर्चा

4. नीचे दी गई आकृति में अंकित कोणों के नाम लिखिए।



5. अपने कागज पर तीन बिंदु इस प्रकार अंकित कीजिए कि वे एक रेखा पर स्थित न हों। उन्हें A, B और C से चिह्नित कीजिए। सभी संभव रेखाएँ खींचिए, जो इन बिंदु-युग्मों से गुजरती हों। इस प्रकार आपको कितनी रेखाएँ प्राप्त होती हैं? उनके नाम भी बताइए। A, B और C का प्रयोग करते हुए आप कितने कोण बना सकते हैं? उन सभी के नाम लिखिए और आकृति 2.9 के अनुसार उनमें से प्रत्येक को एक चाप के साथ चिह्नित कीजिए।

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 20 03/10/2024 15:04:04

6. अपने कागज पर चार बिंदु इस प्रकार अंकित कीजिए कि उनमें से कोई भी तीन बिंदु एक रेखा पर न हों। उन्हें A, B, C और D से चिह्नित कीजिए। सभी संभव रेखाएँ खींचिए, जो इन बिंदु-युग्मों से गुजरती हों। इस प्रकार आपको कितनी रेखाएँ प्राप्त होती हैं? उनके नाम भी बताइए। आप A, B, C और D से कितने कोणों का नामकरण कर सकते हैं? उन्हें लिखिए और उनमें से प्रत्येक को आकृति 2.9 के अनुसार चाप द्वारा अंकित कीजिए।

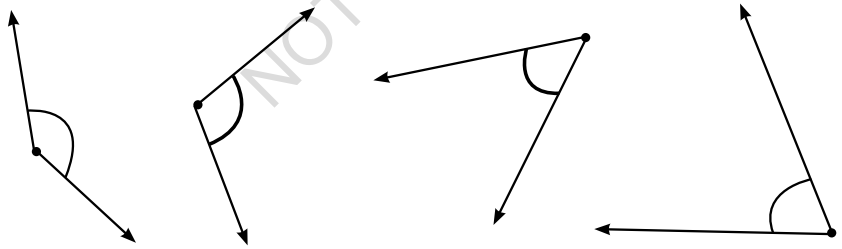
2.6 कोणों की तुलना

नीचे दिए गए जानवरों को देखिए जिनका मुँह खुला है। क्या आप इनमें कोई कोण देख सकते हैं? यदि हाँ, तो उनमें से प्रत्येक की भुजाओं और शीर्ष को अंकित कीजिए। कुछ मुँह अन्य से अधिक खुले हैं। आप यह समझ सकते हैं कि जितना अधिक जबड़ों का घुमाव होगा कोण उतना ही बड़ा होगा। क्या इन चित्रों में दिए गए कोणों को आप छोटे से बड़े के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्या दो कोणों की तुलना हमेशा सरल होती है?



गणित चर्चा

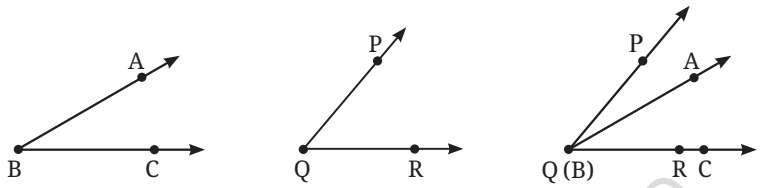
ऊपर कुछ कोण दिए गए हैं। प्रत्येक कोण को चिह्नित कीजिए। आप उनकी तुलना कैसे करेंगे? कुछ और कोण बनाइए, उन्हें चिह्नित कीजिए और उनकी तुलना कीजिए।

Chapter 2.indd 21 20/09/2024 15:45:50

अध्यारोपण (superimposition) द्वारा कोणों की तुलना

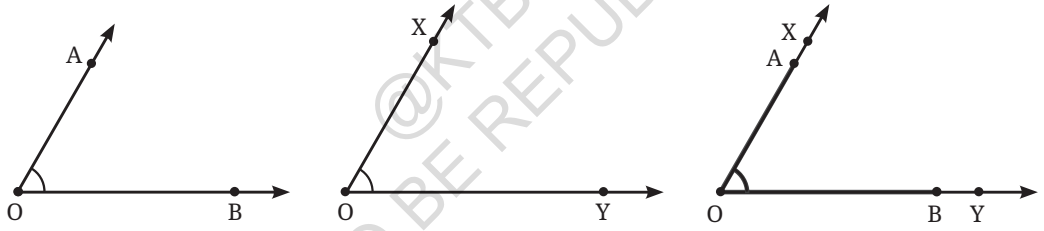
अध्यारोपण द्वारा किन्हीं दो कोणों की तुलना एक कोण को दूसरे पर रखकर की जा सकती है। अध्यारोपण करते हुए कोणों के शीर्ष एक दूसरे पर होने चाहिए।

अध्यारोपण के बाद यह स्पष्ट हो जाता है कि कौन-सा कोण छोटा है और कौन-सा कोण बड़ा है।



आकृति में दो कोणों को अध्यारोपित किया गया है। अत: आकृति से यह स्पष्ट है कि ∠PQR, ∠ABC से बड़ा है।

समान कोण— आकृति में दर्शाए गए ∠AOB और ∠XOY में से कौन-सा बड़ा है?



दोनों कोणों के शीर्ष एक समान हैं और दोनों कोणों की भुजाएँ एक दूसरे को पूरी तरह से अध्यारोपित कर रही हैं, जैसे— OA↔OX और OB↔OY। अतः ये दोनों कोण आकार में एक समान हैं।

इन दोनों कोणों के माप एकसमान हैं क्योंकि ये दोनों कोण समान घूर्णन या घुमाव के कारण बने हैं। अर्थात् $\overrightarrow{OB}$ का $\overrightarrow{OA}$ तक और $\overrightarrow{OY}$ का $\overrightarrow{OX}$ तक का घुमाव समान हैं।

अध्यारोपण की दृष्टि से जब दो कोणों के उभयनिष्ठ शीर्ष और दोनों कोणों की दोनों भुजाएँ एक दूसरे के ऊपर अध्यारोपित हैं, तो दोनों कोणों के माप समान होते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

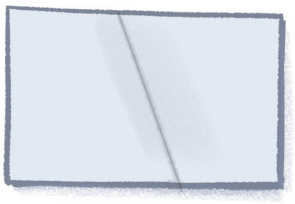
Chapter 2.indd 22 20/09/2024 15:45:50

हम अध्यारोपण द्वारा और कहाँ तुलना करते हैं?

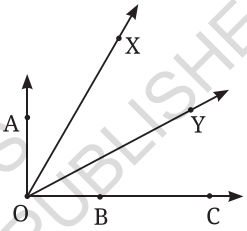
गणित चर्चा

आइए, पता लगाएँ

1. एक आयताकार कागज को मोड़िए। अब घुमाव के निशान पर एक रेखा खींचिए। घुमाव और कागज की भुजाओं के बीच बने कोणों को नाम दीजिए और उन कोणों की तुलना कीजिए। आयताकार कागज को घुमाकर विभिन्न कोण बनाइए एवं उनकी तुलना कीजिए। यह भी बताइए कि इनमें से कौन-सा कोण सबसे बड़ा है और कौन-सा कोण सबसे छोटा है?



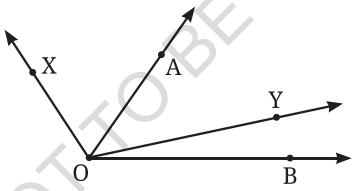
2. प्रत्येक स्थिति में बताइए कि कौन-सा कोण बड़ा है और क्यों?
   a. ∠AOB या ∠XOY
   b. ∠AOB या ∠XOB
   c. ∠XOB या ∠XOC



   अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि आपने यह निर्णय कैसे लिया कि कौन-सा कोण बड़ा है।

गणित चर्चा

3. कौन-सा कोण बड़ा है— ∠XOY या ∠AOB? कारण बताइए।

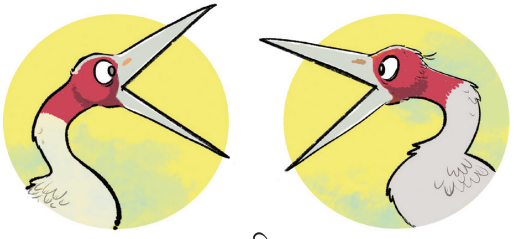


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बिना अध्यारोपण के कोणों की तुलना

दो सारस बहस कर रहे हैं कि वे अपनी चोंच अधिक खोल सकते हैं अर्थात् कौन अधिक बड़ा कोण बनाएगा।

आइए, पहले इनके कोण बनाते हैं। हम यह कैसे पता लगा सकते हैं कि कौन-सा कोण बड़ा है? जैसा हमने पहले देखा कि



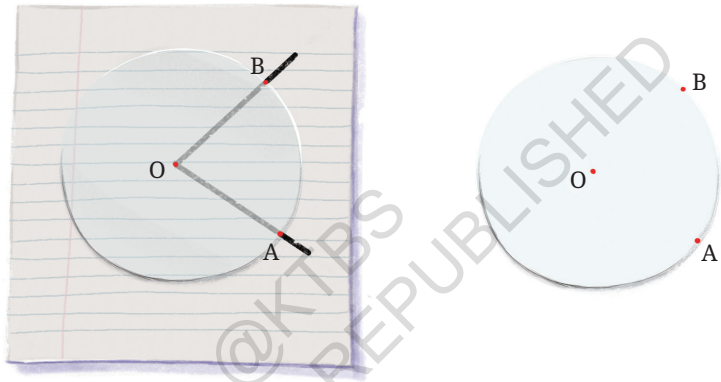
आकृति 2.10

Chapter 2.indd 23 20/09/2024 15:45:51

हम उनका अक्स (trace) लेकर अध्यारोपित करके पता कर सकते हैं कि कौन-सा कोण अधिक बड़ा है पर क्या हम बिना अध्यारोपण के भी यह पता लगा सकते हैं कि कौन-सा कोण अधिक बड़ा है?

माना कि हमारे पास एक पारदर्शी वृत्ताकार कागज है जिसे हम घुमा सकते हैं और आकृतियों के ऊपर भी रख सकते हैं। क्या हम इसे तुलना के लिए प्रयोग कर सकते हैं?

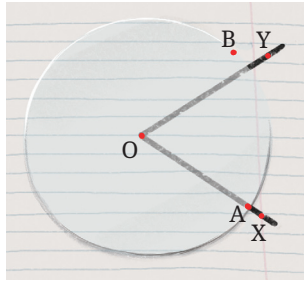
पारदर्शी वृत्तीय कागज को पहले सारस द्वारा बनाए गए कोण पर रखिए। वृत्त को इस प्रकार रखिए कि वृत्त का केंद्र, कोण के शीर्ष पर हो। इसके साथ ही वृत्त के किनारे पर बिंदु A और B अंकित कीजिए, जहाँ से कोण की भुजाएँ गुजर रही हैं।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्या हम इसका प्रयोग यह जानने के लिए कर सकते हैं कि यह कोण, दूसरे सारस द्वारा बनाए गए कोण से बड़ा है या समान है या छोटा है?

आइए, इस पारदर्शी वृत्तीय कागज को दूसरे कोण पर इस प्रकार रखें कि वृत्त का केंद्र, कोण के शीर्ष पर हो और एक भुजा OA से गुजरती हो।



क्या अब आप बता सकते हो
कौन-सा कोण बड़ा है?

Chapter 2.indd 24 20/09/2024 15:45:51

क्या अब आप बता सकते हैं कि किस सारस का कोण बड़ा है?

यदि आप एक पारदर्शी कागज से एक वृत काट सकते हैं, तो इस विधि का प्रयोग करके आकृति 2.10 में दिए गए कोणों की तुलना कीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

अध्यापक को कोण की अवधारणा के विषय में विद्यार्थियों की समझ की जाँच करनी चाहिए। संभवत: विद्यार्थी सोचते हैं कि भुजाओं की लंबाई बढ़ाने पर कोण की माप बढ़ जाती है। इसके लिए विद्यार्थियों के समक्ष कुछ परिस्थितियाँ रखी जानी चाहिए जिससे उनकी समझ को जाँचा जा सके।

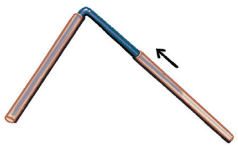
2.7 घूर्णन भुजाएँ बनाना

आइए, कागज के दो पाइप (स्ट्रॉ) और एक क्लिप का उपयोग करते हुए निम्नलिखित चरणों से 'घूर्णन भुजाएँ' बनाएँ—

1. कागज के दो पाइप और एक क्लिप लीजिए।



2. पाइपों को क्लिप की भुजाओं में डालिए।



3. आपकी घूर्णन भुजा तैयार है।



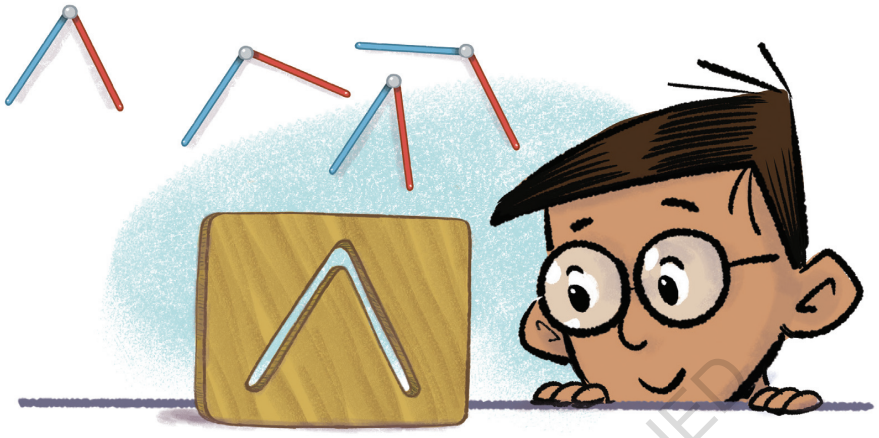
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्लिप की भुजाओं के बीच विभिन्न कोणों की कई घूर्णन भुजाएँ बनाइए। अध्यारोपण के पश्चात् बने हुए कोणों को छोटे से बड़े के क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

एक चाप (झिरी) से गुजरते हुए— कुछ 'घूर्णन भुजाएँ' इकट्ठी कीजिए जिनके कोण भिन्न हों। कार्यकलाप के दौरान घूर्णन भुजा की किसी भी भुजा को न घुमाएँ।

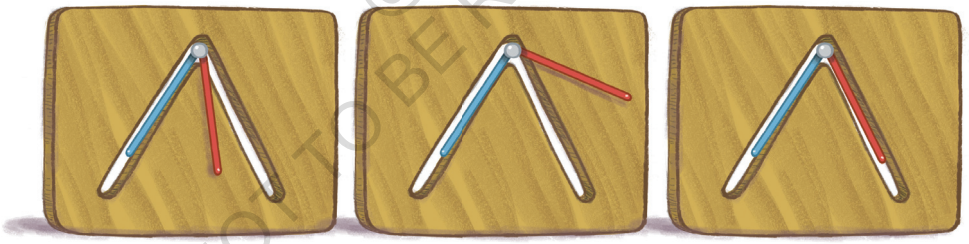
Chapter 2.indd 25 20/09/2024 15:45:51

नीचे दी गई घूर्णन भुजाओं में से किसी एक को गत्ते पर ट्रेस करिए।



अब सभी घूर्णन भुजाओं में परस्पर अदला-बदली कर दीजिए। क्या आप पहचान सकते हैं कि गत्ते पर बनी चाप से कौन-सी घूर्णन भुजा गुजर सकती है?

बारी-बारी से प्रत्येक घूर्णन भुजा को झिरी पर रखने पर सही घूर्णन भुजा को पहचाना जा सकता है। आइए, इस प्रक्रिया को कुछ और घूर्णन भुजाओं के साथ करें।



झिरी कोण, (slit angle) भुजा कोण से बड़ा है। भुजाएँ, झिरी से नहीं गुजर सकतीं।

झिरी कोण, भुजा कोण से छोटा है। भुजाएँ, झिरी से नहीं गुजर सकतीं।

झिरी कोण, भुजा कोण के समान है। भुजाएँ झिरी से गुजर रही हैं।

घूर्णन भुजा का केवल वह युग्म झिरी से गुजरता है, जो झिरी कोण के समान है। ध्यान दीजिए कि झिरी से गुजरने की संभावना केवल घूर्णन भुजाओं के बीच बने कोण पर निर्भर करती है, उनकी लंबाइयों पर नहीं (जब तक वह झिरी की लंबाई से छोटी हो)।

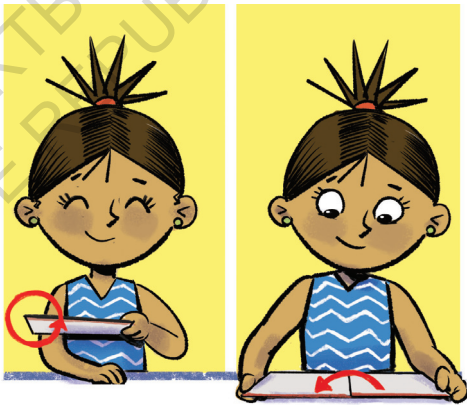
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 26 20/09/2024 15:45:53



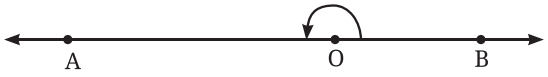
2.8 विशेष प्रकार के कोण

आइए, विद्या की पुस्तक को पुन: देखते हैं। उसे विभिन्न स्थितियों में पुस्तक का कवर खोलते हुए देखिए।



जब उसे हाथ में पकड़कर पुस्तक में लिखना होता है तो वह पूरा आवरण पलट देती है।

यदि उसे पुस्तक को मेज पर रख कर खोलना होता है तो वह आधा घुमाव देती है जो कि एक सरल रेखा पर स्थित है। इस स्थिति में भुजाओं के बीच बने कोण का अवलोकन कीजिए। ऐसे कोण को सरल कोण **(Straight Angle)** कहते हैं।

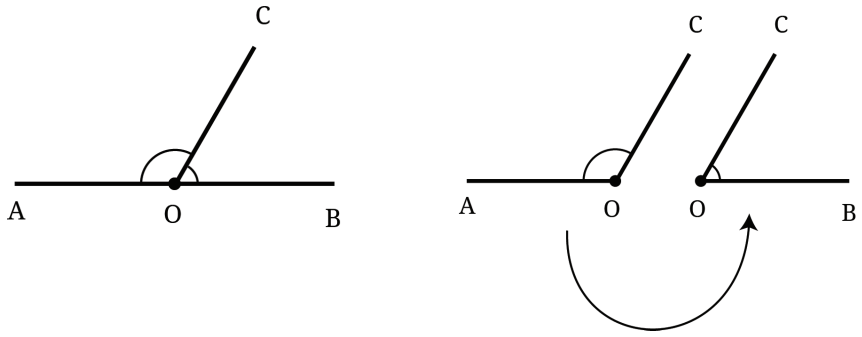


आकृति 2.11

एक सरल कोण ∠AOB लीजिए। अवलोकन कीजिए कि कोई भी किरण $\overrightarrow{OC}$ उस कोण को दो कोणों ∠AOC और ∠COB में विभाजित करती है।

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Chapter 2.indd 27 20/09/2024 15:45:54



जब दोनों कोण समान आकार के हों तो क्या $\overrightarrow{OC}$ को इस तरह बनाना संभव है?

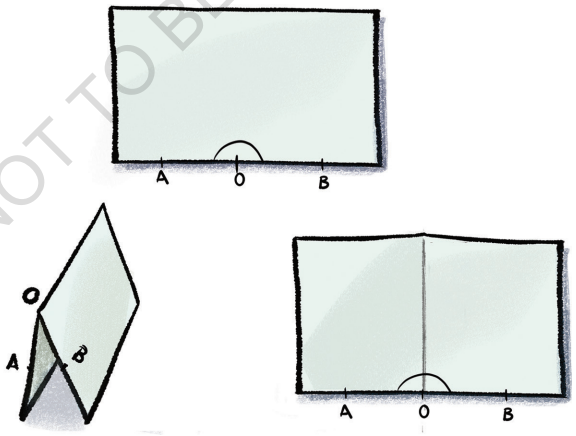
गणित चर्चा

आइए, खोजें!

हम इस समस्या को कागज के एक टुकड़े का प्रयोग कर हल करने की कोशिश करते हैं। याद कीजिए जब कागज पर एक क्रीज बनाई जाती है तो उससे एक सीधे मोड़ का निशान (क्रीज) बनता है।

एक आयताकार कागज लीजिए, इसकी एक भुजा पर सरल कोण ∠AOB अंकित कीजिए। कागज को इस प्रकार मोड़िए कि वह घुमाव बिंदु O से गुजरता हो और ∠AOB को दो समान कोणों में विभाजित करता हो।

यह किस प्रकार कर सकते हैं?



कागज को इस प्रकार मोड़िए कि OB, OA को पूरी तरह आच्छादित करे। बने हुए निशान और दोनों कोणों का अवलोकन कीजिए।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 28 20/09/2024 15:45:54

क्या कोई ऐसा तरीका भी है जिसमें अध्यारोपण करके यह पता लगाया जा सके कि दोनों कोण समान क्यों हैं? क्या अध्यारोपण घुमाव की विधि द्वारा भी कर सकते हैं?

इस प्रकार बने दोनों समान कोणों को **समकोण (Right Angle)** कहते हैं। अतः एक सरल कोण में दो समकोण होते हैं।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यदि एक सरल कोण, एक पूर्ण घुमाव के आधे से बनता है, तो एक समकोण, पूर्ण घुमाव का कितना होगा?

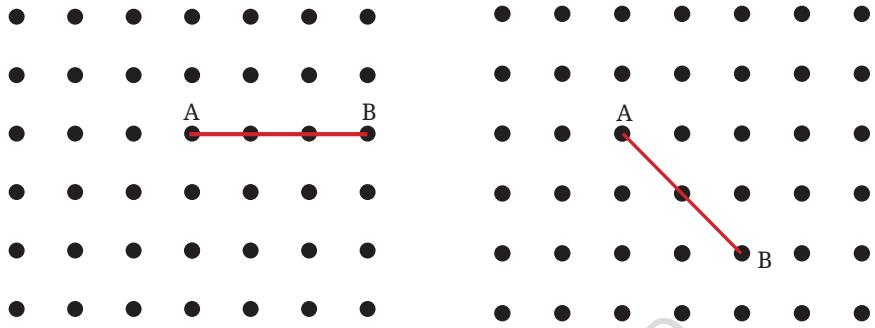
ध्यान दीजिए कि एक समकोण, 'L' की आकृति के समान होता है। यह भी आवश्यक नहीं कि वह सभी कोण जो L के समान आकृति के हैं, समकोण हों। एक कोण समकोण तब होता है, जब वह एक सरल कोण का पूर्णतया आधा होता है। दो रेखाएँ जब समकोण पर मिलती हैं तब वह **लंब रेखाएँ (Perpendicular Lines)** कहलाती हैं।

आइए, पता लगाएँ

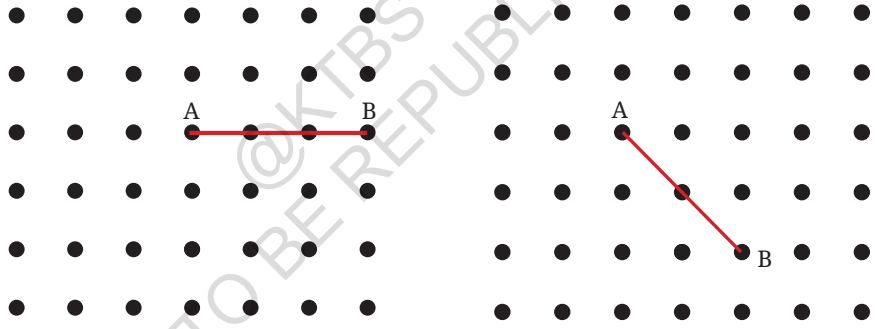
1. आपकी कक्षा की खिड़कियों में कितने समकोण हैं? क्या अपनी कक्षा में आप और समकोण देख सकते हैं?

Chapter 2.indd 29 20/09/2024 15:45:55

2. बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा में इस प्रकार जोड़ें कि एक सरल कोण प्राप्त हो। इसे करने के विभिन्न तरीके क्या हो सकते हैं?

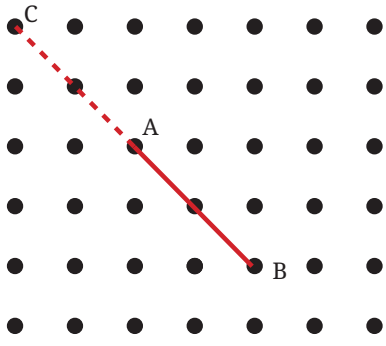


3. अब बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा में इस प्रकार जोड़ें कि एक समकोण प्राप्त हो। इसे करने के विभिन्न तरीके क्या हो सकते हैं?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

संकेत— रेखा को आगे बढ़ाएँ, जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दिखाया गया है। A पर समकोण प्राप्त करने के लिए, हमें इससे गुजरने वाली एक रेखा खींचनी होगी, जो सरल कोण CAB को दो बराबर भागों में विभाजित करती हो।



Chapter 2.indd 30 20/09/2024 15:45:55

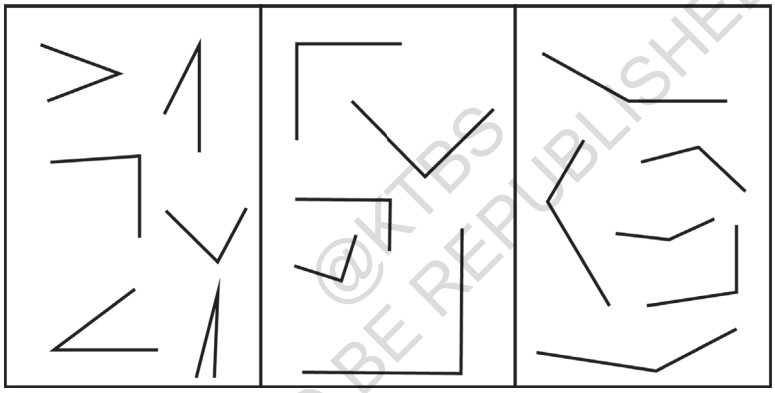
4. कागज को घुमाकर तिरछा निशान बनाइए। अब एक अन्य निशान बनाइए जो पिछले तिरछे निशान पर लंब हो।

   a. अब आपके पास कितने समकोण हैं? तर्क संगत उत्तर दीजिए कि ये कोण पूर्णतया समकोण क्यों हैं?

   b. वर्णन कीजिए कि आपने इसे कैसे मोड़ा ताकि जो व्यक्ति इस प्रक्रिया को करना नहीं जानता वह आपकी प्रक्रिया का अनुसरण करके समकोण बना सके।

कोणों का वर्गीकरण

जैसा कि नीचे दिखाया गया है कि कोणों को तीन समूहों में वर्गीकृत किया जाता है। सभी समकोण दूसरे समूह में हैं। अन्य दोनों समूहों में क्या समान विशेषता है?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पहले समूह में सभी कोण समकोण से कम हैं। अर्थात् दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि एक कोण पूर्ण घुमाव के चर्तुथांश से कम है। इस तरह के कोणों को **न्यून कोण (Acute Angle)** कहते हैं।

तीसरे समूह में सभी कोण समकोण से अधिक हैं किंतु सरल कोण से कम हैं। घुमाव, एक पूर्ण घुमाव के चर्तुथांश से अधिक है और आधे घुमाव से कम है। इस तरह के कोणों को **अधिक कोण (Obtuse Angle)** कहते हैं।

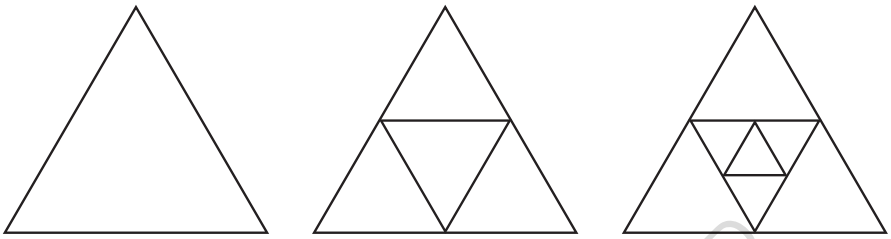
आइए, पता लगाएँ

1. पिछली आकृतियों में न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण और सरल कोण को पहचानिए।
2. कुछ न्यून कोण और अधिक कोण भिन्न दशाओं में बनाइए।

Chapter 2.indd 31 20/09/2024 15:45:55

3. क्या आप जानते हैं कि न्यून और अधिक शब्दों का क्या अर्थ है? न्यून का अर्थ नुकीला और अधिक का अर्थ कुंद होता है। आपको क्या लगता है कि इन शब्दों का चयन क्यों किया गया होगा?

4. ज्ञात कीजिए कि नीचे दी गई आकृतियों में कितने न्यून कोण हैं—



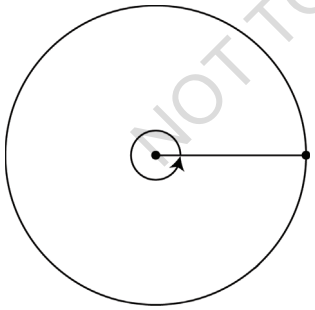
अगली आकृति क्या होगी और उसमें कितने न्यून कोण होंगे? क्या आप संख्याओं में कोई पैटर्न देखते हैं?

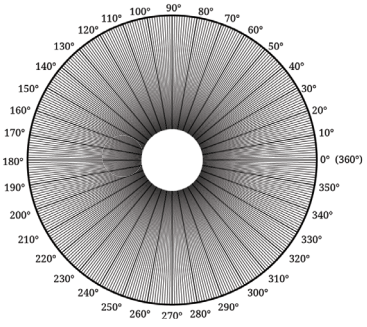
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.9 कोणों को मापना

हमने देखा कि दो कोणों की तुलना कैसे की जाती है। पर क्या हम वास्तव में एक संख्या का प्रयोग करके, बिना दूसरे कोण से तुलना किए यह परिमाणित कर सकते हैं कि कोण कितना बड़ा है।

हमने देखा कि एक वृत्त के द्वारा हम विभिन्न कोणों की तुलना कैसे कर सकते हैं? शायद एक वृत्त को कोणों के माप निर्धारित करने के लिए नियत किया जा सकता है?



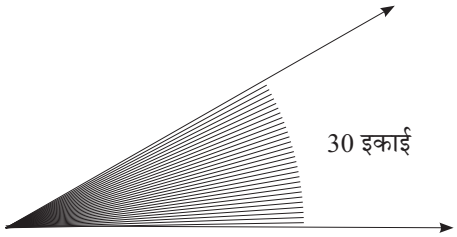


आकृति 2.12

कोणों के यथावत माप नियत करने के लिए गणितज्ञों को एक विचार आया। उन्होंने वृत्त के केंद्र पर बने कोण को 360 बराबर कोणों या भागों में विभाजित किया। इन सभी बराबर इकाई भागों का माप 1 अंश है, जिसे 1° लिखा जाता है।

Chapter 2.indd 32 20/09/2024 15:45:56

इस इकाई भाग का प्रयोग किसी भी कोण को मापने के लिए किया जाता है। किसी कोण का माप इसमें निहित 1° इकाई भागों की संख्या होती है। उदाहरण के लिए, नीचे दिया गया चित्र देखिए—



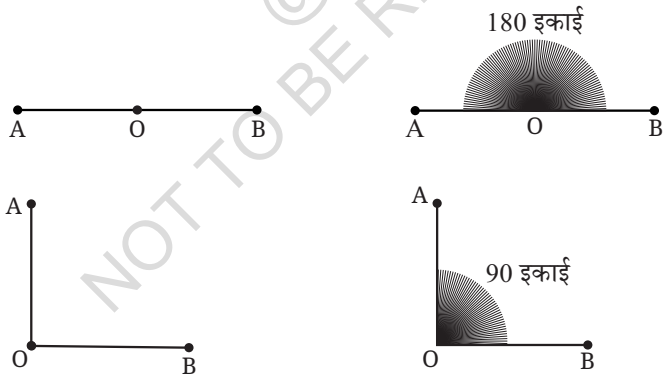
इसमें 1° कोण की 30 इकाइयाँ हैं और इसलिए हम कहते हैं कि इसका माप 30° है।

विभिन्न कोणों के माप— एक पूर्ण घुमाव का डिग्री में कितना माप होगा? जैसा कि ऊपर हमने 360 डिग्री माना तो इसका माप 360° है।

एक सरल कोण का डिग्री माप क्या होगा? एक सरल कोण, पूर्ण घुमाव का आधा होता है। क्योंकि पूर्ण घुमाव 360° है तथा पूर्ण घुमाव का आधा 180° होता है।

एक समकोण का डिग्री माप क्या होगा? दो समकोण मिलकर एक सरल कोण बनाते हैं। चूँकि एक सरल कोण का माप 180° होता है, तो एक समकोण का माप 90° होगा।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



चुटकीभर इतिहास

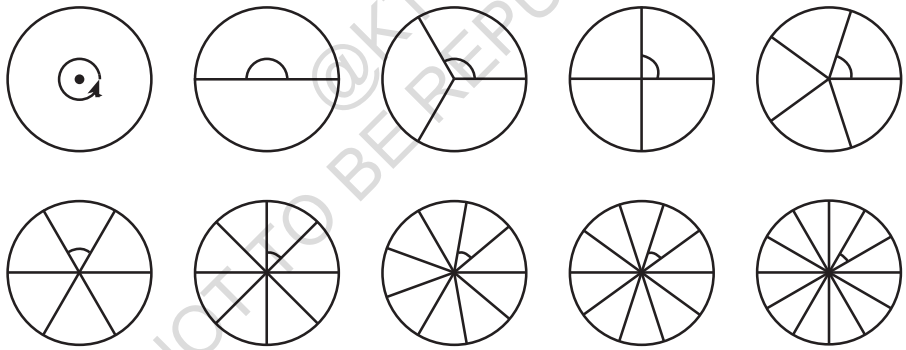
एक पूर्ण घुमाव को 360° में बाँटा गया है। अब विचारणीय बात यह है कि 360 ही क्यों? हमने 360 डिग्री ही क्यों प्रयोग किया, इसका कारण हम पूरी तरह नहीं जानते। वृत्त को 360 भागों में बाँटने का इतिहास पुराने समय की ओर ले जाता है। *ऋग्वेद*, जो हजारों वर्ष पुरानी मानवता की पुस्तक है, वह

Chapter 2.indd 33 20/09/2024 15:45:56

एक पहिये के बारे में बताती है जिसमें 360 तीलियाँ हैं (छंद 1.164.48)। कई प्राचीन कलैंडर, जो लगभग तीन हजार वर्ष पुराने हैं, का प्रयोग भारत, पर्शिया, बेविलोन और मिस्र में होता था। इन कैलेंडरों में एक वर्ष में 360 दिन होते थे। इसके अतिरिक्त बेबिलोन के गणितज्ञ षष्ठांश संख्या (sexagesimal numbers) के प्रयोग के कारण, 60 और 360 के विभाजन का अक्सर प्रयोग करते थे। वह 60 को आधार मानकर गिनती करते थे।

गणितज्ञ द्वारा वर्षों से 360 का प्रयोग करने का सर्वाधिक महत्वपूर्ण और वास्तविक उत्तर यह हो सकता है कि 360 वह सबसे छोटी संख्या है जो 7 को छोड़कर 10 तक की सभी संख्याओं से विभाजित हो जाती है। अत: कोई वृत्त को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 या 10 भागों में बराबर बाँट सकता है, और बाँटने के बाद भी प्रत्येक भाग में पूर्ण संख्या प्राप्त करता है! ध्यान दीजिए 360, संख्या 12 से भी विभाजित होती है जो एक वर्ष के महीने हैं, और 24 से भी विभाजित होती है जो एक दिन में घंटों की संख्या है। ये सभी तथ्य, संख्या 360 को अत्यधिक उपयोगी बनाते हैं।

नीचे दिए गए चित्र में वृत्त को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 और 12 भागों में बाँटा गया है। परिणामत: प्राप्त कोणों के डिग्री माप क्या होंगे? निर्देशित कोणों के समीप उनके डिग्री माप लिखिए।



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

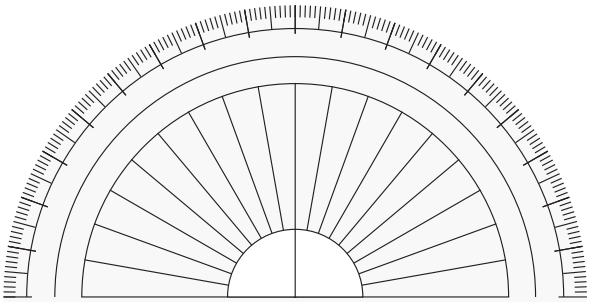
विभिन्न कोणों के डिग्री माप

हम अन्य कोणों को डिग्री में कैसे माप सकते हैं? इसके लिए हमारे पास एक उपकरण है जिसे चाँदा (Protractor) या कोणमापक कहते हैं। चाँदा एक वृत्त भी हो सकता है, जिसे आकृति 2.12 (पृष्ठ 32) के अनुसार 360 समान भागों में बाँटा गया हो। यह एक अर्ध वृत्त भी हो सकता है, जिसे 180 समान भागों में बाँटा गया हो।

Chapter 2.indd 34 20/09/2024 15:45:56

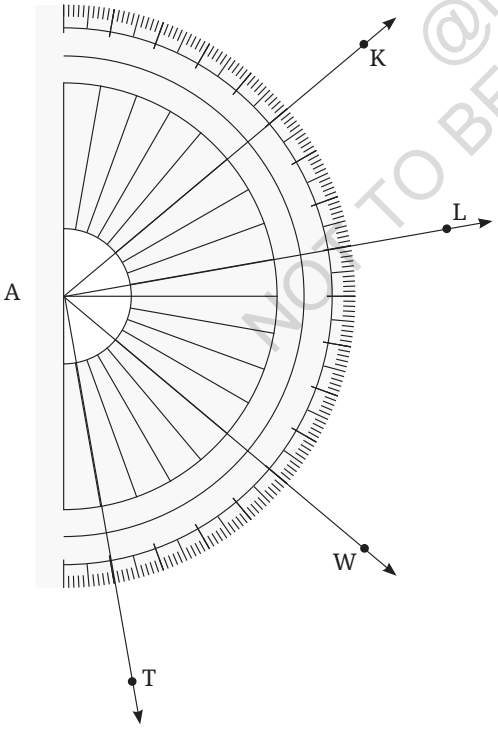
बिना अंकन का कोणमापक

यहाँ एक कोणमापक चाँदा दिया गया है। क्या आप इसके केंद्र में सरल कोण देख रहे हैं, जिसे 1 अंश (डिग्री) के 180 भागों में बाँटा गया है? यद्यपि सरल कोण को बाँटने वाली रेखाओं के कुछ भाग दृश्यमान हैं।



आधार रेखा के सबसे दाएँ भाग से चिह्नांकित करते हुए, प्रत्येक 10° पर एक लंबा चिह्न है। इस प्रकार के प्रत्येक लंबे चिह्न से 5° के बाद एक मध्यम आकार का चिह्न है।

आइए, पता लगाएँ



1. निम्नलिखित कोणों के माप लिखिए

a. $\angle KAL$

ध्यान दीजिए कि इस कोण का शीर्ष बिंदु कोणमापक के केंद्रबिंदु पर संपाती है। अत: KA एवं AL के बीच 1° कोणों की इकाइयों की संख्या से कोण KAL की माप पता चलती है। गिनने पर, हम पाते हैं—

$$\angle KAL = 30^{\circ}$$

क्या मध्यम आकार के चिह्नों एवं बड़े आकार के चिह्नों का उपयोग करते हुए 5 या 10 में इकाईयों की संख्या गिनना संभव है?

b. $\angle WAL$

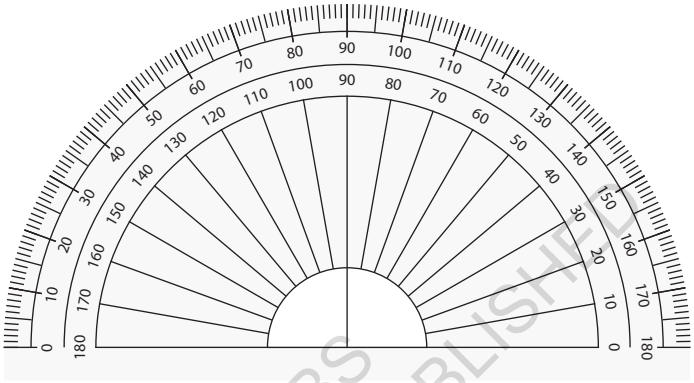
c. $\angle TAK$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 35 20/09/2024 15:45:56

चिह्नित कोणमापक

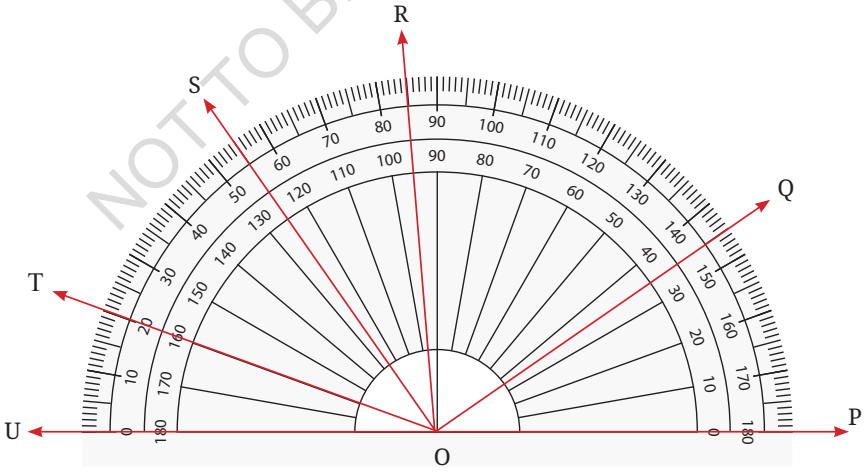
नीचे दिया गया चित्र एक कोणमापक (चाँदा) है, जिसे आप अपने ज्यामिति बॉक्स में देख सकते हो। यह पृष्ठ 35 पर दिए गए कोणमापक के समान ही दिखाई देता है, केवल इस पर संख्याएँ लिखी हैं। क्या इन संख्याओं से कोणों को पढ़ना आसान हो जाएगा?



© TBS NOT TO BE REPUBLISHED

कोणमापक पर संख्याओं के दो सेट हैं— एक दाएँ से बाएँ की ओर बढ़ते हुए एवं दूसरा बाएँ से दाएँ की ओर बढ़ते हुए। इसमें संख्याओं के दो सेट क्यों सम्मिलित हैं?

चित्र में दिए गए विभिन्न कोणों के नाम एवं उनके माप लिखिए।



क्या आपने ∠TOQ जैसे कोण सम्मिलित किए?

Chapter 2.indd 36 20/09/2024 15:45:57

आपने आंतरिक या बाहरी अंकित संख्याओं में से किसका उपयोग किया।

∠TOS की माप क्या है?

क्या आप कोण का पता लगाने के लिए चिह्नों की संख्या गिने बिना, चिह्नित संख्याओं का उपयोग कर सकते हैं?

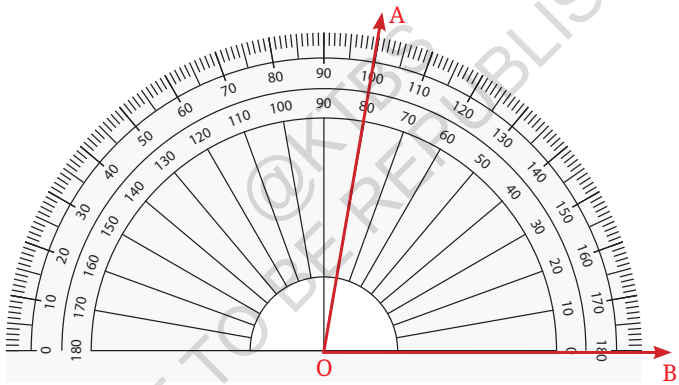
दिए गए चित्र (पृष्ठ 36) में, कोण की भुजाएँ OT एवं OS बाहरी मापक (स्केल) पर संख्याओं 20 एवं 55 से गुजरती हैं। इन दो भुजाओं के बीच 1^o कोण की कितनी इकाइयाँ सम्मिलित हैं?

क्या यहाँ घटाने का उपयोग किया जा सकता है?

हम कैसे बिना घटाए कोणों की माप सीधे ज्ञात कर सकते हैं?

कोणमापक (चाँदा) का केंद्रबिंदु, कोण के शीर्षबिंदु पर रखिए।

कोणमापक को इस तरह से रखिए कि कोण की एक भुजा 0^o कोण के चिह्न से होकर गुजरे, जैसा कि नीचे चित्र में दिखाया गया है।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

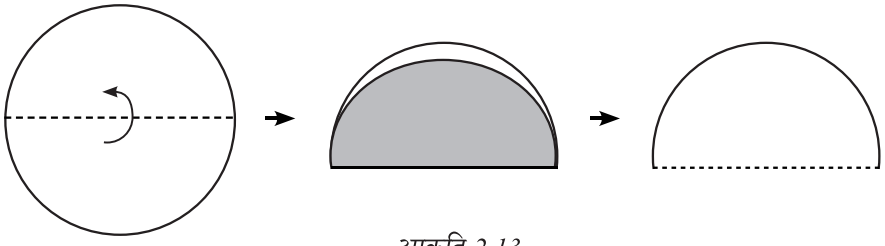
∠AOB कितने अंश (डिग्री) का कोण है?

स्वयं का चाँदा बनाएँ

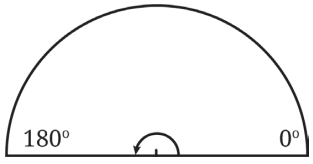
आपने देखा होगा कि एक चाँदे पर समान दूरी पर अलग-अलग निशान कैसे बनाए जाते हैं। अब हम जानेंगे कि हम उनमें से कुछ किस प्रकार बना सकते हैं।

1. एक कागज पर सुविधानुसार त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। वृत्त को काटिए (आकृति 2.13)। एक वृत्त या एक पूरा चक्कर 360^o है।
2. एक वृत्त को इस प्रकार मोड़िए कि दो समान आधे वृत्त प्राप्त हों। इसे मोड़ से इस प्रकार काटिए कि अर्धवृत्त बने। अर्धवृत्त के निचले दाएँ कोने पर '0^o' लिखें।

Chapter 2.indd 37 20/09/2024 15:45:57



आकृति 2.13

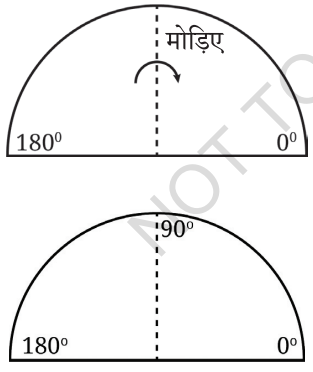


आकृति 2.14

एक वृत्त के आधे का माप एक पूरे चक्कर का $\frac{1}{2}$ होगा। अत: एक पूरे चक्कर के आधे का माप = __ का $\frac{1}{2}$ = 180°
अत: अर्ध वृत्त के निचले बाएँ कोने पर 180° लिखिए।

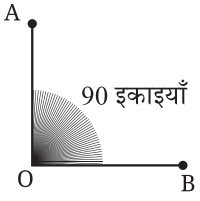


3. आकृति 2.15 के अनुसार, अर्धवृत्त को आधे से मोड़िए जिससे एक वृत्त का चतुर्थांश प्राप्त हो



आकृति 2.15

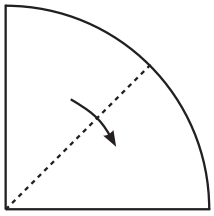
वृत्त के चतुर्थांश का माप, पूरे चक्कर का $\frac{1}{4}$ होता है।
पूरे चक्कर का $\frac{1}{4}$ माप
= 360° का $\frac{1}{4}$ = __
या
$\frac{1}{4}$ घुमाव का माप =
आधे घुमाव का $\frac{1}{4}$ = 180° का $\frac{1}{2}$ = __
अत: अर्ध वृत्त के ऊपरी सिरे पर 90° अंकित कीजिए।



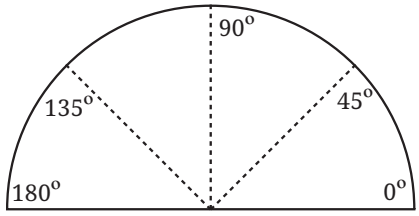
NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

Chapter 2.indd 38 20/09/2024 15:45:58

4. कागज को आकृति 2.16 और 2.17 के अनुसार पुन: मोड़िए—



आकृति 2.16

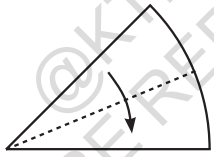


आकृति 2.17

जब कागज को मोड़ा जाता है तो यह एक वृत्त का $\frac{1}{8}$ है या एक चक्कर का $\frac{1}{8}$ है, या 360° का $\frac{1}{8}$, या 180° का $\frac{1}{4}$, या 90° का $\frac{1}{2}$ = …….।

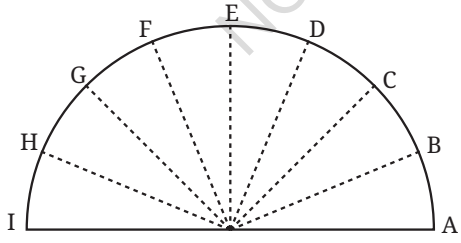
इस नए निशान से हमें 45° और 180°–45° = 135° के माप प्राप्त होते हैं। आकृति में अर्धवृत्त के सिरों पर 45° और 135° सही स्थान पर लिखिए।

5. इसी प्रकार, अगले आधे घुमाव (आकृति 2.18 अनुसार) से हमें _____ माप का कोण प्राप्त होता है।

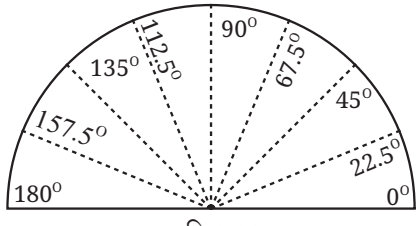


आकृति 2.18

6. मुड़े हुए कागज को खोलकर निशानों पर OB, OC, … आदि अंकित करें जैसा कि आकृति 2.19 और 2.20 में दर्शाया गया है।



आकृति 2.19



आकृति 2.20

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 39 20/09/2024 15:45:58

सोचिए!

आकृति 2.19 में, ∠AOB = ∠BOC =∠COD =∠DOE =∠EOF =∠FOG =∠GOH =∠HOI =_____ क्यों?

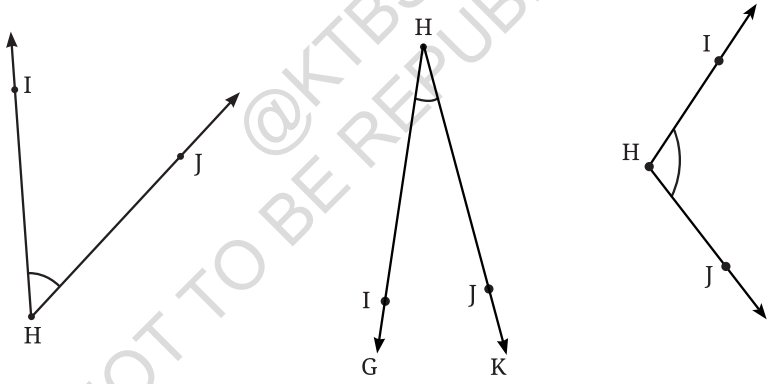
कोण समद्विभाजक

प्रत्येक चरण में, हमने आधे में मोड़ किए हैं। एक दिए हुए कोण से आधे कोण को प्राप्त करने की प्रकिया को '**कोण का समद्विभाजक करना**' कहते हैं। वह रेखा जो एक दिए गए कोण को समद्विभाजित करती है, उसे **कोण समद्विभाजक** कहते है।

स्वयं के बनाएँ हुए चाँदे में कोण समद्विभाजकों की पहचान कीजिए। कोण समद्विभाजक की अवधारणा का प्रयोग करते हुए कागज को मोड़ कर विभिन्न कोणों को बनाने का प्रयास करें।

आइए, पता लगाएँ

1. चाँदे का प्रयोग करते हुए निम्न कोणों के डिग्री माप ज्ञात कीजिए?



2. चाँदे का प्रयोग करते हुए अपनी कक्षा में दिख रहे विभिन्न कोणों के डिग्री माप ज्ञात कीजिए।

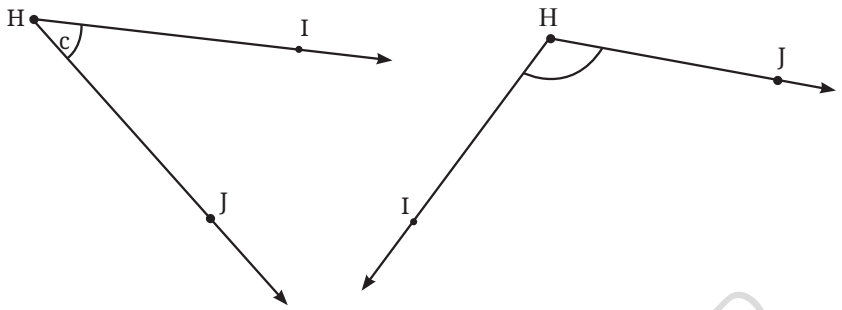
अध्यापक टिप्पणी

यह आवश्यक है कि विद्यार्थी मानक चाँद का प्रयोग करने से पहले स्वयं का बनाया हुआ चाँदा विभिन्न कोणों के माप को निकालने के लिए प्रयोग करें, जिससे वह मानक चाँद के चिह्नित निशानों के पीछे की अवधारणा को समझ सके।

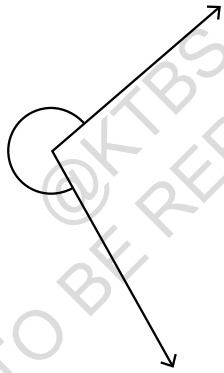
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 40 20/09/2024 15:45:58

3. नीचे दिए गए कोणों के अंश माप ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए की क्या यहाँ कागज के चाँद का प्रयोग कर सकते हैं।



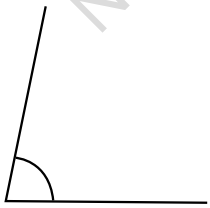
4. नीचे दिए गए कोण का अंश माप चाँद का प्रयोग करके किस प्रकार निकाला जा सकता है?



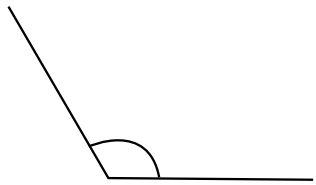
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. निम्न कोणों को मापिए और प्रत्येक का डिग्री माप लिखिए।

a.

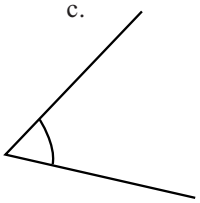


b.

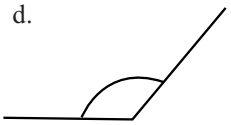


Chapter 2.indd 41 20/09/2024 15:45:58

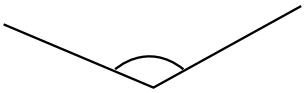
c.



d.



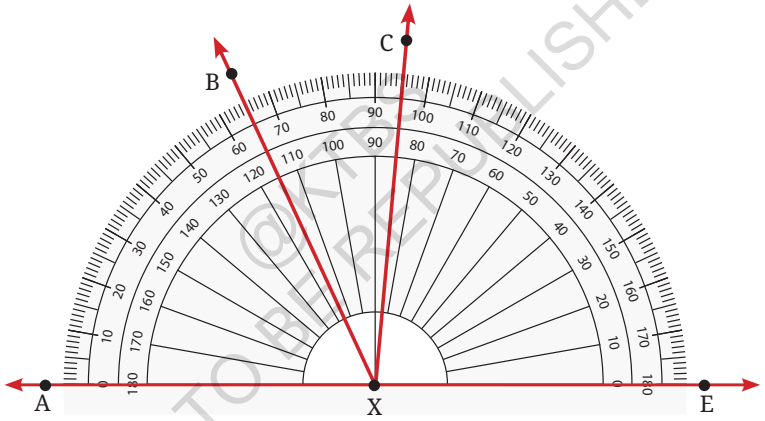
e.



f.

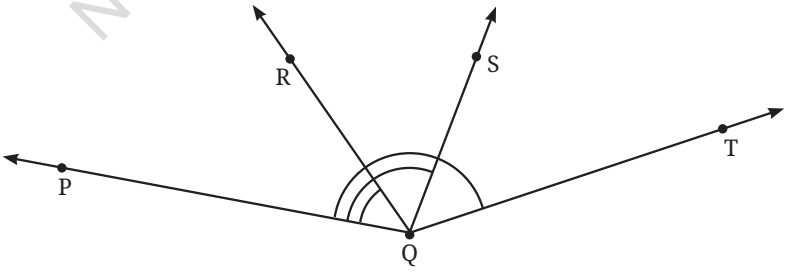


6. ∠BXE , ∠CXE, ∠AXB और ∠BXC के अंश माप ज्ञात कीजिए।



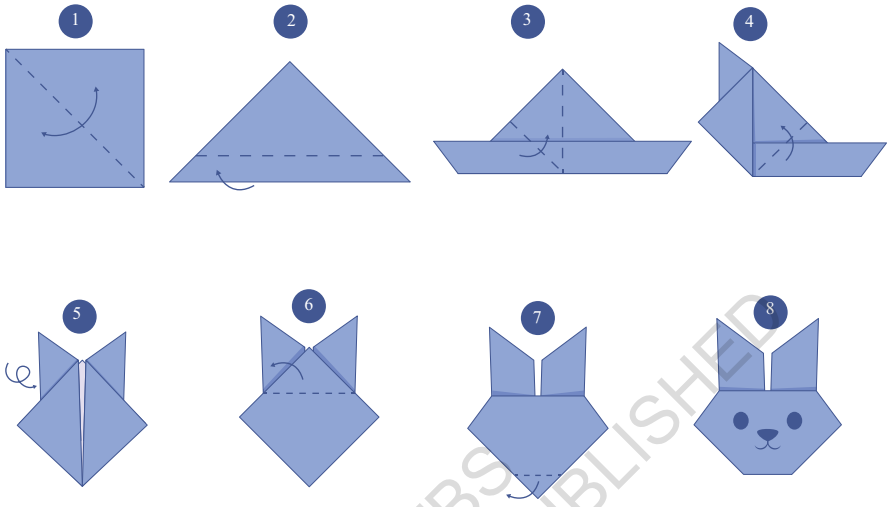
© KRPUBLISHED NOT TO BE REPUBLISHED

7. ∠PQR , ∠PQS और ∠PQT के अंश माप ज्ञात कीजिए।

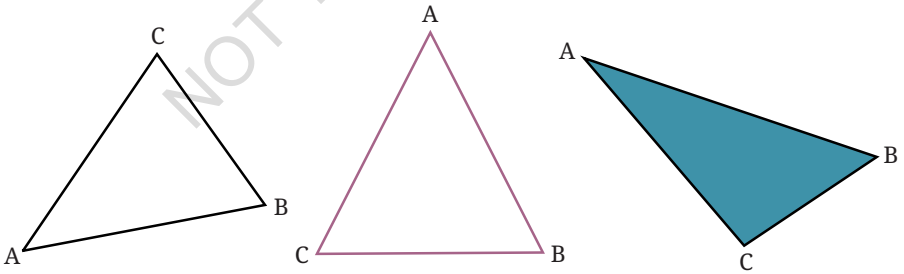


Chapter 2.indd 42 20/09/2024 15:45:58

8. दिए गए निर्देशों के अनुसार पेपर क्राफ्ट बनाइए। अब कागज को पूरा खोलिए। मोड़े जाने पर प्राप्त निशानों पर रेखाएँ खींचिए और इस प्रकार बने कोणों को मापिए।



9. आकृति 2.21 (a) में बने त्रिभुज के तीनों कोणों को मापिए और संबंधित कोण के नीचे उसका माप लिखिए। तीनों मापों को जोड़िए। क्या प्राप्त होता है? इस प्रकिया का आकृति 2.21 (b) और (c) के लिए भी प्रयोग कीजिए। अन्य त्रिभुजों पर भी इस प्रकिया का प्रयोग कीजिए। फिर सामान्य तौर पर क्या होता है इसका अनुमान लगाइए। हम आगे की कक्षाओं में जानेंगे कि ऐसा क्यों हुआ।



(a) (b) (c)

आकृति 2.21

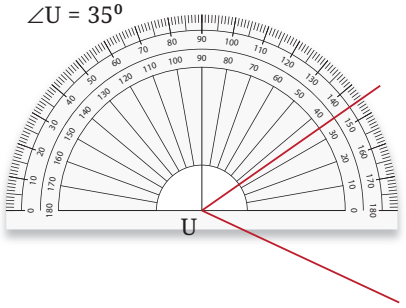
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 43 20/09/2024 15:45:58

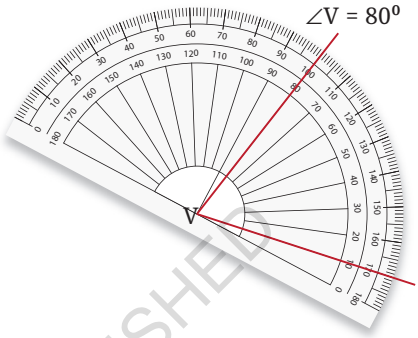
गलतियाँ देखिए, गलतियाँ सुधारिए

एक विद्यार्थी ने नीचे दिखाए गए कोणों की माप एक चाँदे का प्रयोग करके की। प्रत्येक चित्र में चाँद के गलत प्रयोग को पहचानिए और चर्चा कीजिए कि माप कैसे करना चहिए और उन्हें कैसे सुधार सकते हैं।

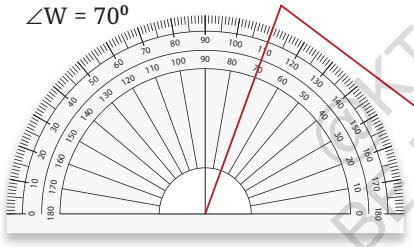
$\angle U = 35^0$



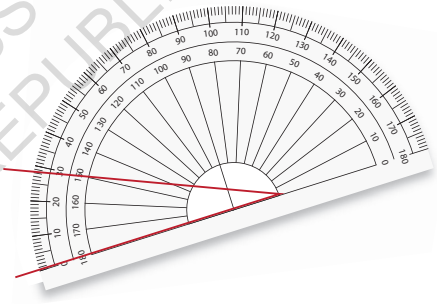
$\angle V = 80^0$



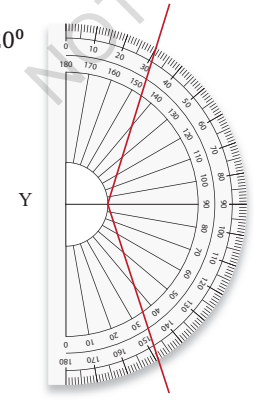
$\angle W = 70^0$



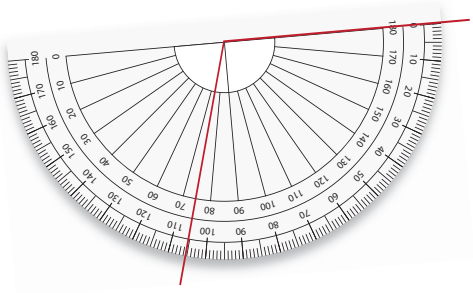
$\angle X = 150^0$



$\angle Y = 120^0$



$\angle Z = 85^0$



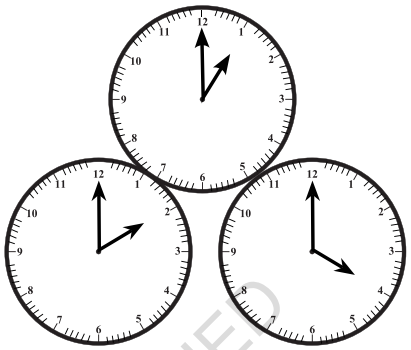
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 44 20/09/2024 15:46:00

आइए, पता लगाएँ

कोण कहाँ हैं?

1. घड़ी में कोण—



   a. घड़ी की सूईयाँ अलग-अलग समय पर भिन्न कोण बनाती हैं। 1 बजे सूईयों के बीच 30° का कोण होता है। क्यों?

   b. 2 बजे कोण कितना होगा? और 4 बजे? 6 बजे?

   c. घड़ी की सूईयों द्वारा बने अन्य कोणों को ढूँढ़िए।

2. एक दरवाजे का कोण—

   क्या ऐसा संभव है कि कोण का प्रयोग कर यह बताया जा सके कि दरवाजा कितना खुला है? कोण का शीर्ष और कोण की भुजाएँ क्या होंगी?



3. विद्या झूले पर अपना समय आनंद से बिता रही है। उसने ध्यान दिया कि जब उसने झूलना शुरू किया तो जितना बड़ा कोण है, उतनी ही अधिक गति वह झूले पर अर्जित कर रही है। लेकिन यहाँ कोण है कहाँ? क्या आप यहाँ पर किसी कोण को देख सकते हैं?



@CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

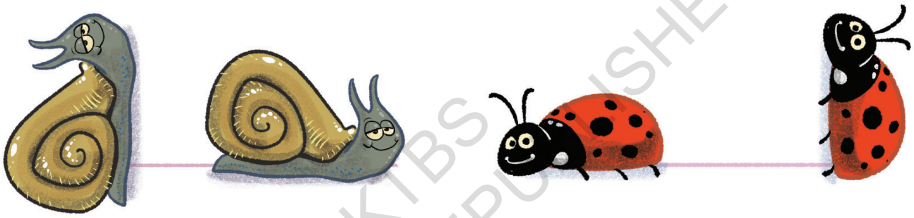
Chapter 2.indd 45 20/09/2024 15:46:01

4. यहाँ, एक खिलौने के दोनों ओर तिरछे तख्ते (slanting slab) लगे हैं, जितना अधिक कोण या तख्ते का झुकाव होगा उतनी ही तेजी से गेंद लुढ़कती है। क्या कोणों का प्रयोग तख्तों के झुकाव के वर्णन में किया जा सकता है? प्रत्येक कोण की भुजाएँ क्या होंगी? कौन-सी भुजा दिखाई देगी और कौन-सी नहीं?



5. नीचे दिए गए चित्रों का अवलोकन कीजिए जिनमें एक कीट एवं उसकी घुमायी गई स्थितियाँ दी गई हैं। क्या घूर्णन (घुमाव) की मात्रा बताने के लिए कोणों का उपयोग किया जा सकता है? यदि हाँ, तो कैसे? कोण का शीर्षबिंदु एवं उसकी भुजाएँ कौन-सी होंगी?

संकेत— कीट को छूकर जाती हुई क्षैतिज रेखा को देखिए।



अध्यापक टिप्पणी

यह आवश्यक है कि विद्यार्थी प्रत्येक गणितीय अवधारणा के अनुप्रयोग को दैनिक जीवन में देख सके। अध्यापक ऐसे कुछ कार्यकलाप करा सकते हैं, जिसे विद्यार्थी कोणों के अनुप्रयोग को व्यावहारिक जीवन से जोड़ सकें। उदाहरण के लिए— घड़ी , दरवाजे, झूले, उतार-चढ़ाव की अवधारणा, सूर्य की स्थिति, दिशाएँ इत्यादि।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.10 कोणों को बनाना

विद्या चाँदे का प्रयोग कर 30° का एक कोण बनाना चाहती है और उसे ∠TIN नाम देना चाहती है।

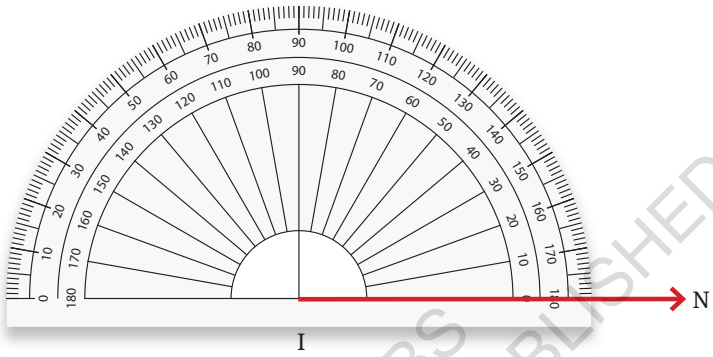
∠TIN में, I शीर्ष होगा और IT तथा IN कोण की भुजाएँ होंगी। भुजा IN को आधार मान लेते हुए, दूसरी भुजा IT को 30° का मोड़ लेना चाहिए।

Chapter 2.indd 46 20/09/2024 15:46:02

चरण 1— हम आधार से शुरू करेंगे और $\overrightarrow{IN}$ बनाएँगे।

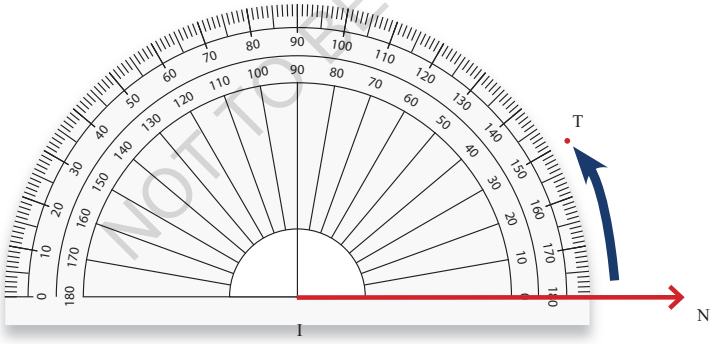


चरण 2— चाँदे के केंद्र को I पर रखते हुए IN को 0 रेखा पर संरेखित (align) कीजिए।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

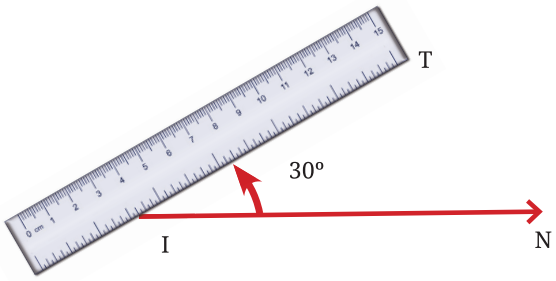
चरण 3— बिंदु 0 से शुरू करते हुए चाँदे पर 0, 10, 20, 30 तक देखिए और 30° पर T बिंदु अंकित कीजिए।



चरण 4— पैमाने (रूलर) का प्रयोग करते हुए I को T से जोड़िए।

$\angle TIN = 30^\circ$ इच्छित कोण है।

Chapter 2.indd 47 20/09/2024 15:46:02



आकृति 2.22

आइए, खेलें खेल #1

यह खेल एक कोण का अनुमान लगाने से संबंधित है। इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ दो टीम, टीम 1 और टीम 2 बनाकर खेलिए। खेल के निर्देश व नियम निम्नलिखित हैं—

- टीम 1, बिना टीम 2 को दिखाए माप के कोण का चयन करती है, उदाहरणत: 49° और चाँदे की सहायता से उसे बनाती है।
- टीम 2, को वह कोण दिखाया जाता है। इसके पश्चात् वे सभी चर्चा करके कोण के डिग्री माप का अनुमान लगाकर बताएँगे। (चाँदे का प्रयोग किए बिना)
- टीम 1, चाँदे की सहायता से कोण के सही माप का प्रमाणीकरण करेंगे।
- टीम 2, अनुमानित और सही माप के निरपेक्ष अंतर का प्राप्तांक प्राप्त करेगी। उदाहरणत: यहाँ यदि टीम 2 का अनुमानित उत्तर 39° है तो प्राप्तांक 10 बिंदु (49° – 39°) होंगे।
- प्रत्येक टीम को पाँच बारी मिलेंगी। सबसे कम प्राप्तांक वाली टीम ही जीतने वाली टीम होगी।

आइए, खेलें खेल #2

अब हम खेल के नियमों में थोड़ा परिवर्तन करते हैं। इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ पुनः दो टीम, टीम 1 और टीम 2 बनाकर खेलिए। खेल के निर्देश व नियम निम्नलिखित हैं—

- टीम 1 सभी के सामने एक कोण के माप की घोषणा करती है, उदाहरणत: 34° माप का कोण।

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 48 20/09/2024 15:46:02

- टीम 2 से एक खिलाड़ी चाँदे का प्रयोग किए बिना इस कोण को बोर्ड पर बनाएगा। टीम 2 के अन्य सदस्य खिलाड़ी 'और बड़ा बनाओं' या 'और छोटा बनाओ!' कहकर सहायता कर सकते हैं
- टीम 1 से एक खिलाड़ी आकर बोर्ड पर बने इस कोण को सभी को दिखाते हुए चाँदे की सहायता से मापेगा।
- टीम 2 के प्राप्तांक, बनाए गए कोण और इच्छित कोण का निरपेक्ष अंतर होंगे। उदाहरण के लिए टीम 2 के खिलाड़ी ने 25° का कोण बनाया तो टीम 2 के प्राप्तांक 9 होंगे। (34°–25°)
- प्रत्येक टीम को पाँच बारी मिलेंगी। पुन: सबसे कम प्राप्तांक वाली टीम ही जीतने वाली टीम होगी।

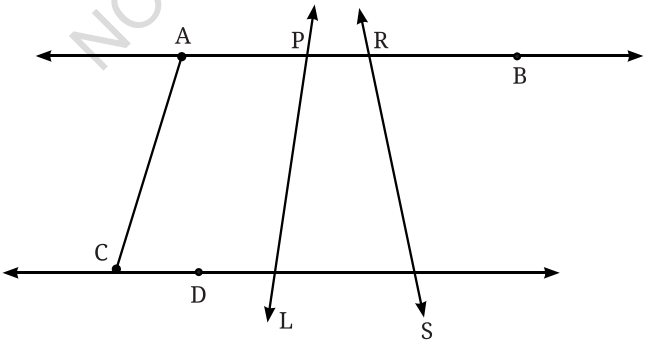
अध्यापक टिप्पणी

इस प्रकार के खेल खेलना इसलिए भी आवश्यक है ताकि कोणों और उनके मापों का सहज ज्ञान हो सके। कोणों के सन्निकटन के अभ्यास को बनाने के लिए इस खेल को अलग-अलग दिन में कम-से-कम एक या दो बार खेलिए। ध्यान दीजिए कि विद्यार्थियों के युग्म बनाकर भी इस खेल गतिविधि को क्रियान्वित कर सकते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. आकृति 2.23 में दर्शाए सभी संभव कोणों की सूची बनाइए। क्या आप उन सभी को ढूँढ़ पाए? अब सभी कोणों के माप का अनुमान लगाइए। इसके पश्चात् चाँदे की सहायता से कोणों का माप देखिए। अपनी सभी संख्याओं (डिग्री माप) को एक सारणी में अंकित कीजिए। देखिए आपके अनुमानित उत्तर सही माप के कितने समीप हैं।



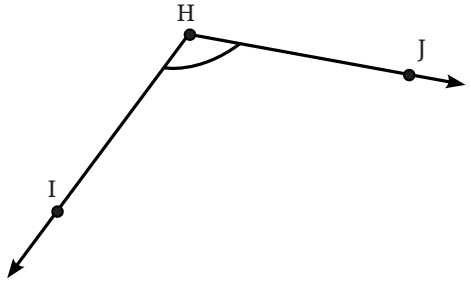
आकृति 2.23

Chapter 2.indd 49 20/09/2024 15:46:03

2. चाँदे की सहायता से निम्न डिग्री माप के कोण बनाइए—

   a. 110 º b. 40 º c. 75 º d. 112 º e. 134º

3. एक कोण बनाइए जिसका डिग्री माप नीचे दिए गए कोण के समान हो।

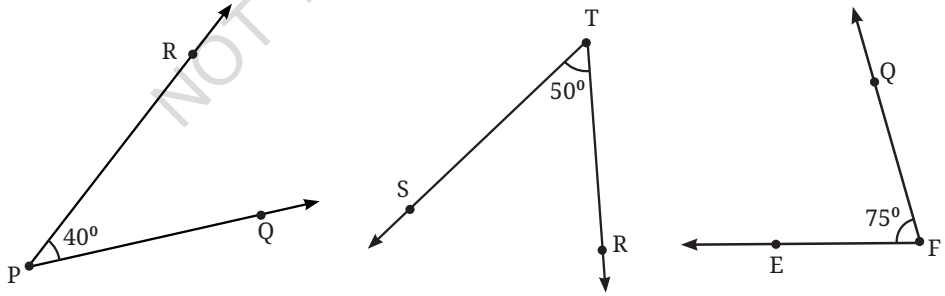


इस कोण को बनाने में प्रयुक्त सभी चरणों को भी लिखिए।

2.11 कोणों के प्रकार और उनके माप

हमने इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के कोणों के विषय में पढ़ा। हमने देखा कि एक सरल कोण 180º तथा समकोण 90º का होता है। अन्य प्रकार के कोण न्यून और अधिक का डिग्री माप में हम किस प्रकार वर्णन करेंगे?

न्यून कोण (Acute Angle)— वे कोण जो समकोण से छोटे हैं, अर्थात् 90º से कम और 0º से अधिक होते हैं न्यून कोण कहलाते हैं।

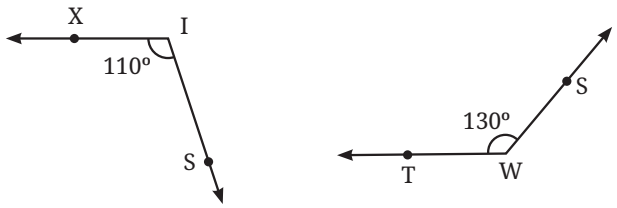


न्यून कोण के उदाहरण

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 50 20/09/2024 15:46:03

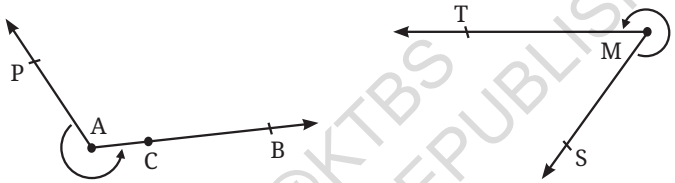
अधिक कोण (Obtuse angle)— वे कोण जो समकोण से बड़े हैं और सरल कोण से छोटे हैं अर्थात् 90° से अधिक और 180° से कम होते हैं, अधिक कोण कहलाते हैं।



अधिक कोण के उदाहरण

क्या हमने कोणों के सभी संभावित मानों का मापन किया? यहाँ एक अन्य प्रकार का कोण दिया है।

प्रतिवर्ती कोण (Reflex angle)— वे कोण जो सरल कोण से बड़े हों और पूर्ण कोण से छोटे हों अर्थात् 180° से बड़े और 360° से छोटे होते हैं, प्रतिवर्ती कोण कहलाते हैं।



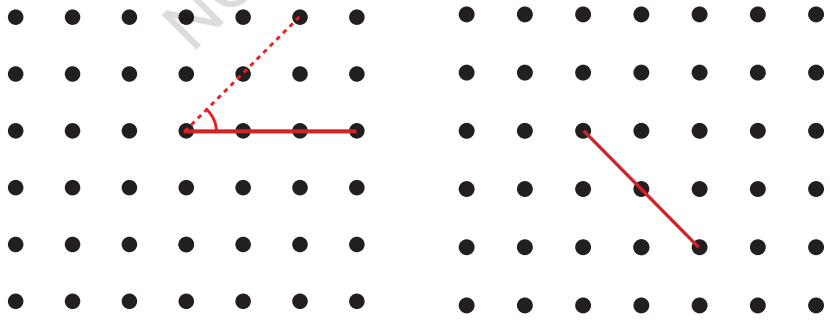
प्रतिवर्ती कोण के उदाहरण

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

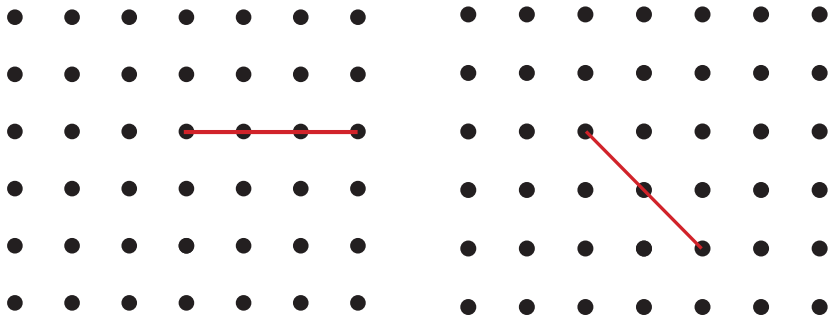
1. नीचे दिए गए प्रत्येक ग्रिड में, बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा से इस प्रकार मिलान कीजिए कि हमें—

   a. एक न्यून कोण प्राप्त हो।

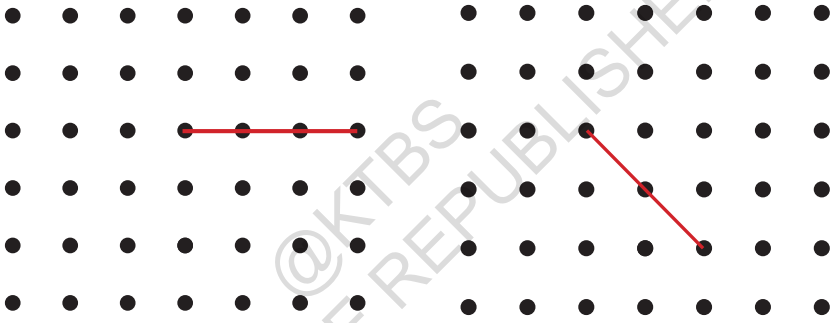


Chapter 2.indd 51 20/09/2024 15:46:03

b. एक अधिक कोण प्राप्त हो।



c. एक प्रतिवर्ती कोण प्राप्त हो।

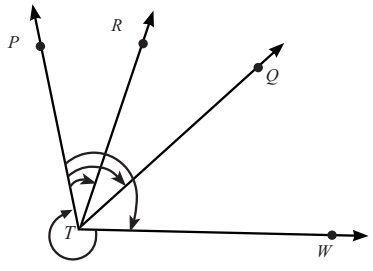


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कोणों को चाप द्वारा अंकित कीजिए जिससे इच्छित कोणों की पहचान हो सके। एक आपके लिए किया गया है।

2. चाँदे की सहायता से प्रत्येक कोण का माप निकालिए। प्रत्येक कोण को न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण या प्रतिवर्ती कोण में वर्गीकृत कीजिए।

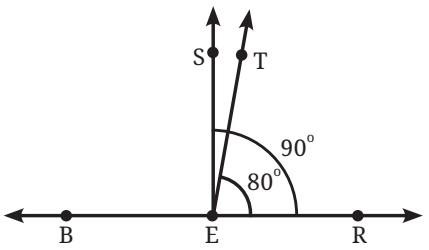
a. ∠PTR b. ∠PTQ c. ∠PTW d. ∠WTP



Chapter 2.indd 52 20/09/2024 15:46:03

आइए खोजें!

इस चित्र में, ∠TER= 80° ∠BET का माप क्या होगा।
∠SET का माप क्या होगा?



संकेत— अवलोकन कीजिए कि ∠REB एक सरल कोण है। अतः ∠REB = 180° जिसमें से 80° का कोण ∠TER से ढका है, इसी प्रकार का तर्क ∠SET का माप निकालने में प्रयुक्त कर सकते हैं।

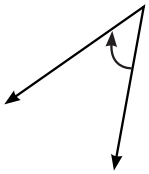
आइए, पता लगाएँ

1. निम्न अंश माप वाले कोणों को बनाए—

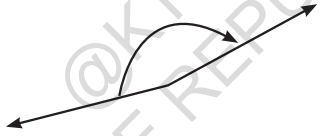
   a. 140° b. 82° c. 195° d. 70° e. 35°

2. प्रत्येक कोण के माप का अनुमान लगाइए और फिर चाँदे से मापिए—

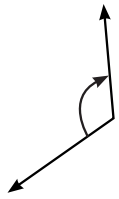
a.



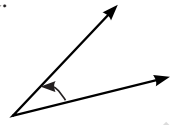
b.



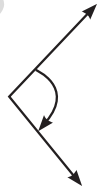
c.



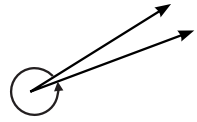
d.



e.



f.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इन कोणों को न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण और प्रतिवर्ती कोणों में वर्गीकृत कीजिए।

3. एक आकृति बनाइए जिसमें तीन न्यून कोण, एक समकोण और दो अधिक कोण हों।
4. अक्षर M को इस प्रकार बनाइए कि दोनों ओर के कोण 40° के हों और मध्य में कोण 60° का हो।
5. अक्षर Y को इस प्रकार बनाइए कि 150°, 60° और 150° के तीन कोण बनें।

Chapter 2.indd 53 20/09/2024 15:46:03



6. अशोक चक्र में 24 तीलियाँ होती हैं। दो संलग्न तीलियों के बीच कितने अंश माप का कोण होगा? दो तीलियों के बीच सबसे बड़ा न्यून कोण क्या होगा?

7. **पहेली**— मैं एक न्यून कोण हूँ। यदि आप मेरे माप को दोगुना करते हो तो आपको न्यून कोण ही प्राप्त होता है। यदि आप मेरे माप को तीन गुना करते हो तो पुनः न्यून कोण प्राप्त होगा। यदि आप मेरे माप को चार गुना करते हो तो भी पुनः न्यून कोण ही प्राप्त होगा। पर यदि आप मेरे माप को पाँच से गुना करते हो तो एक अधिक कोण प्राप्त होगा। मेरे कोणों के संभावित माप क्या होंगे?

सारांश

- एक **बिंदु** एक स्थिति निर्धारण करती है। उसे अंग्रेजी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
- दो बिंदुओं को जोड़ने वाली सबसे छोटी दूरी एक **रेखाखंड** को दर्शाती है। बिंदु S और T का मिलान करने वाले रेखाखंड को $\overline{ST}$ से दर्शाते हैं।
- एक रेखाखंड $\overline{ST}$ को दोनों तरफ बिना किसी अंत के विस्तृत करने पर एक **रेखा** प्राप्त होती है। इसे $\overleftrightarrow{ST}$ से व्यक्त किया जाता है और कभी-कभी अंग्रेजी के छोटे अक्षर जैसे m से भी व्यक्त किया जाता है।
- **किरण**, रेखा का एक भाग है जो रेखा पर स्थित कोई एक बिंदु माना D से प्रारंभ होकर एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होता है इसे $\overrightarrow{DP}$ से व्यक्त किया जाता है, जहाँ P, किरण पर स्थित अन्य बिंदु है।
- एक **उभयनिष्ठ** प्रारंभिक बिंदु से जब दो किरणें निकलती प्रतीत हैं तो एक कोण बनता है। दो किरणों $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OM}$ से कोण ∠POM बनता है (इसे ∠MOP भी कह सकते हैं)। यहाँ O कोण का शीर्ष है और किरणें $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OM}$ कोण की **भुजाएँ** हैं।
- घुमाव की मात्रा या कोण की एक भुजा को शीर्ष से परित, दूसरी भुजा तक लाने के लिए जितना घुमाव आवश्यक होता है, वही कोण का आकार (size) होता है।
- कोणों के आकार को **अंशों** (डिग्री) में मापा जाता है। एक पूर्ण घुमाव या मोड 360 डिग्री माना जाता है जिसे '360°' से व्यक्त किया जाता है।
- किसी कोण के डिग्री माप को **चाँद** की सहायता से माप सकते हैं।
- कोण, **सरल कोण** (180°), **समकोण** (90°), **न्यून कोण** (0° से अधिक और 90° से कम), **अधिक कोण** (90° से अधिक और 180° से कम) और **प्रतिवर्ती कोण** (180° से अधिक और 360° से कम), हो सकते हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 2.indd 54 20/09/2024 15:46:07



3 संख्याओं का खेल

0675CH03

हम संख्याओं का प्रयोग विभिन्न संदर्भों और विभिन्न तरीकों से अपने जीवन को व्यवस्थित करने में करते हैं। हमने संख्याओं का प्रयोग गिनने में किया तथा उन संख्याओं पर आधारभूत संक्रियाओं जैसे जोड़ना, घटाना, गुणा तथा भाग का उपयोग करते हुए दैनिक जीवन की संख्याओं से संबंधित समस्याओं को हल करने में किया।

इस अध्याय में, हम आगे की यात्रा संख्याओं के संग खेलने, अपने आस-पास संख्याओं को देखने, पैटर्नों पर ध्यान देने और नए तरीकों से संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं का उपयोग करते हुए जारी रखेंगे।

- विभिन्न परिस्थितियों के विषय में सोचिए, जहाँ हम संख्याओं का उपयोग करते हैं। पाँच विभिन्न परिस्थितियों की सूची बनाइए, जहाँ हम संख्याओं का उपयोग करते हैं। अपने सहपाठियों द्वारा बनाई गई सूची को देखिए, उसे साझा कीजिए तथा उस पर चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा

3.1 संख्याएँ हमें कुछ बता सकती हैं

संख्याएँ हमें क्या बताती हैं?

उद्यान (पार्क) में कुछ बच्चे एक पंक्ति में खड़े हैं। प्रत्येक बच्चा एक संख्या बोलता है।



- आपके विचार से इन संख्याओं का क्या अर्थ होगा?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बच्चे अब अपने आप को पुनः व्यवस्थित करते हैं तथा प्रत्येक बच्चा अपनी व्यवस्था के आधार पर पुन: एक संख्या बोलता है।



क्या आप समझ पाए कि ये संख्याएँ क्या दर्शाती हैं?

संकेत— क्या उनकी ऊँचाइयों का यहाँ कोई योगदान है?

एक बच्चा '1' तब कहता है जब उसके बगल में उससे लंबा केवल एक ही बच्चा खड़ा है। एक बच्चा '2' तब कहता है जब उसके बगल में खड़े दोनों बच्चे उससे लंबे हैं। एक बच्चा '0' तब कहता है जब उसके बगल में खड़े बच्चों में से कोई भी उससे लंबा नहीं है। प्रत्येक बच्चा अपने आस-पास उससे लंबे पड़ोसियों की संख्या बताता है।

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए और अपने तर्क को साझा कीजिए—

गणित चर्चा

1. क्या बच्चे अपने आपको इस प्रकार पुन: व्यवस्थित कर सकते हैं कि अंत में खड़े बच्चे '2' कह सकें?
2. क्या हम बच्चों को एक पंक्ति में इस प्रकार खड़ा कर सकते हैं कि सभी '0' कह सकें?
3. क्या दो साथ खड़े बच्चे समान संख्या कह सकते हैं?
4. एक समूह में भिन्न ऊँचाइयों वाले 5 बच्चे हैं। क्या वे इस प्रकार खड़े हो सकते हैं कि उनमें से चार '1' कहें तथा आखिरी '0' कहें? क्यों या क्यों नहीं?
5. क्या 5 बच्चों के इस समूह में 1, 1, 1, 1, 1 का अनुक्रम संभव है?
6. क्या अनुक्रम 0, 1, 2, 1, 0 संभव है? क्यों या क्यों नहीं?
7. आप 5 बच्चों को किस प्रकार व्यवस्थित करेंगे कि अधिक से अधिक बच्चे '2' कह सकें?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 56 17/09/2024 15:29:14

3.2 महाकोष्ठ (Supercells)

नीचे दी गई सारणी में लिखी गई संख्याओं का अवलोकन कीजिए। कुछ संख्याओं को रंगीन क्यों किया गया है? चर्चा कीजिए।

43	79	75	63	10	29	28	34
200	577	626	345	790	694	109	198

यदि कोष्ठ (cell) में संख्या, संलग्न कोष्ठों की संख्याओं से बड़ी है, तो उसे रंगीन किया गया है। 626 को रंगीन किया गया है, क्योंकि यह 577 और 345 से बड़ी है, जबकि 200 को रंगीन नहीं किया गया है क्योंकि वह 577 से छोटी है। संख्या 198 को रंगीन किया गया है, क्योंकि इसका केवल एक संलग्न कोष्ठ है जिसमें संख्या 109 लिखी है और संख्या 198, संख्या 109 से बड़ी है।

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई सारणी में महाकोष्ठ को रंगीन या चिह्नित कीजिए।

6828	670	9435	3780	3708	7308	8000	5583	52

2. नीचे दी गई सारणी को चार अंकों वाली संख्याओं से इस प्रकार भरिए कि प्रत्येक रंगीन कोष्ठ ही महाकोष्ठ हो।

5346			1258				9635	

3. नीचे दी गई सारणी को इस प्रकार भरिए कि हमें अधिक से अधिक महाकोष्ठ प्राप्त हों। बिना दोहराए 100 से 1000 के बीच की संख्याओं का उपयोग कीजिए।

4. उपरोक्त सारणी में 9 संख्याओं में से कितने महाकोष्ठ हैं?
5. भिन्न संख्याओं के कोष्ठों में कितने महाकोष्ठ संभव हैं?

गणित चर्चा

क्या आपको इनमें कोई पैटर्न दिखाई देता है? दी गई सारणी को भरने का वह कौन-सा तरीका होगा जिससे हमें अधिक से अधिक महाकोष्ठ प्राप्त हों? ढूँढ़िए और अपनी योजना को साझा कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 57 17/09/2024 15:29:14

प्रयास करें

6. क्या आप संख्याओं को बिना दोहराए एक रिक्त महाकोष्ठ सारणी को इस प्रकार भर सकते हैं कि उसमें कोई महाकोष्ठ न हो? क्यों या क्यों नहीं?
7. क्या एक सारणी में सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, हमेशा महाकोष्ठ होगा? क्या एक सारणी में सबसे छोटी संख्या वाला कोष्ठ एक महाकोष्ठ हो सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
8. एक सारणी को इस प्रकार से भरिए कि दूसरी सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, महाकोष्ठ न हो।
9. एक सारणी को इस प्रकार से भरिए कि दूसरी सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, महाकोष्ठ न हो, लेकिन दूसरी सबसे छोटी संख्या वाला कोष्ठ एक महाकोष्ठ हो? क्या यह संभव है?
10. इस पहेली के अन्य रूप बनाइए और अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

आइए, इस महाकोष्ठ वाले क्रियाकलाप को और अधिक पंक्तियों के साथ करते हैं।

दी गई सारणियों में समीपवर्ती कोष्ठ वे हैं, जो एकदम बाएँ, दाएँ, ऊपर और नीचे हैं।

नियम वही रहेंगे— एक कोष्ठ महाकोष्ठ होगा, यदि उसमें अंकित संख्या उसके समीपवर्ती कोष्ठों में अंकित संख्या से बड़ी हो। सारणी 1 में संख्या 8632 उसकी सभी समीपवर्ती संख्याओं 4580, 8280, 4795, 1944 से बड़ी है।

सारणी 1

2430	7500	7350	9870
3115	4795	9124	9230
4580	8632	8280	3446
5785	1944	5805	6034

1, 0, 6, 3 और 9 अंकों का किसी भी क्रम में प्रयोग करके पाँच अंकों की संख्याएँ बनाइए और सारणी 2 को पूरा कीजिए। केवल रंगीन कोष्ठ में समीपवर्ती कोष्ठों की संख्याओं से बड़ी होनी चाहिए।

सारणी में सबसे बड़ी संख्या _____ है।

सारणी में सबसे छोटी सम संख्या _____ है।

सारणी 2

	96,301	36,109	
	13,609	60,319	19,306
		60,193	
	10,963		

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

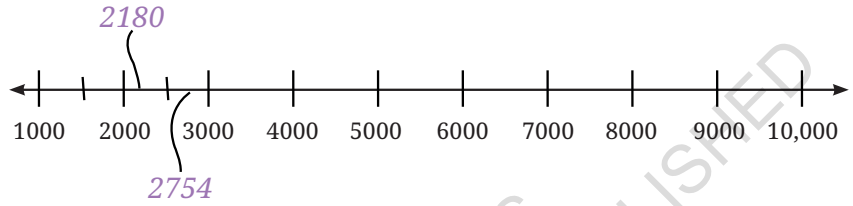
Chapter 3.indd 58 17/09/2024 15:29:14

सारणी में 50,000 से बड़ी, सबसे छोटी संख्या _____ है।

दी गई सारणी को पूरा भरकर, हजार के अंक के बाद उपयुक्त स्थान पर अल्प-विराम (,) लगाइए।

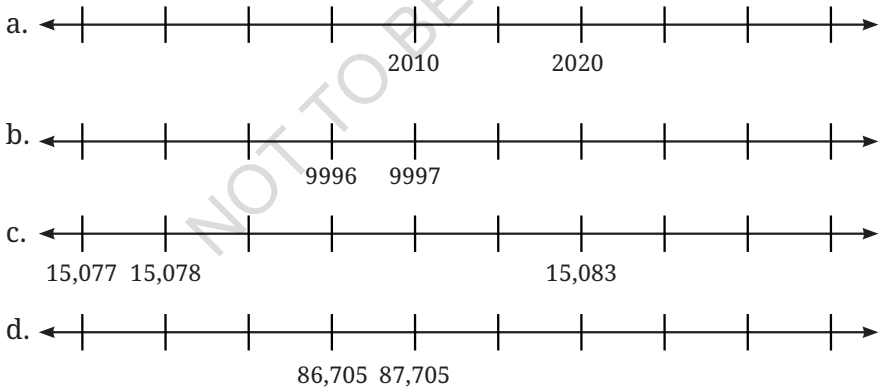
3.3 संख्या रेखा पर संख्याओं के पैटर्न

अब हम संख्या रेखा से भली-भाँति परिचित हैं। आइए, देखते हैं कि क्या हम कुछ संख्याओं को संख्या रेखा पर उनके उपयुक्त स्थान पर रख सकते हैं। यहाँ संख्याएँ 2180, 2754, 1500, 3600, 9950, 9590, 1050, 3050, 5030, 5300 और 8400 हैं।



आइए, पता लगाएँ

नीचे दी गई संख्या रेखा पर चिह्नित संख्या को पहचानकर, नीचे दिए गए संख्या अनुक्रमों को पूरा कीजिए।



उपरोक्त अनुक्रमों में सबसे छोटी संख्या पर गोला लगाइए तथा सबसे बड़ी संख्या पर बॉक्स बनाइए।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 59 17/09/2024 15:29:14

3.4 अंकों के साथ खेल

हम संख्याओं को 1, 2, 3, … से लिखना शुरू करते हैं। 1 अंक वाली 9 संख्याएँ हैं।

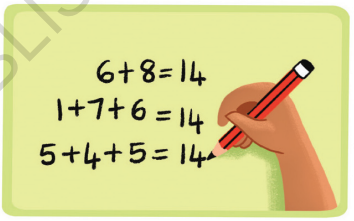
2 अंक, 3 अंक, 4 अंक और 5 अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ होगी ज्ञात कीजिए।

1 अंक वाली संख्याएँ 1 से 9 तक _ _ _ _ _ _ _	2 अंकों वाली संख्याएँ _ _ _ _ _ _ _	3 अंकों वाली संख्याएँ _ _ _ _ _ _ _	4 अंकों वाली संख्याएँ _ _ _ _ _ _ _	5 अंकों वाली संख्याएँ _ _ _ _ _ _ _
9				

संख्याओं के अंकों के योग

कोमल जब कुछ संख्याओं के अंकों का योग करती है, तो देखती है कि इन सभी का योगफल समान है।

उदाहरण के लिए, संख्या 68 के अंकों का योगफल वही है, जो संख्या 176 या 545 के अंकों का योग है।



आइए, पता लगाएँ

1. अंकों का योग 14
   a. अन्य संख्याएँ लिखिए जिनके अंकों का योगफल 14 है।
   b. वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है, जिसके अंकों का योगफल 14 है?
   c. 5 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जिसके अंकों का योगफल 14 है?
   d. वह बड़ी से बड़ी कौन-सी संख्या बनाई जा सकती है, जिसके अंकों का योगफल 14 है? क्या आप इससे भी बड़ी संख्या बता सकते हैं?

गणित चर्चा

2. 40 से 70 तक की सभी संख्याओं के अंकों का योगफल ज्ञात कीजिए। अपने अवलोकन को कक्षा के साथ साझा कीजिए।
3. 3 अंकों की उन संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनके अंक क्रमागत (जैसे– 345) हों। क्या आप उनमें एक पैटर्न देखते हैं? क्या यह पैटर्न जारी रहेगा?

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 60 17/09/2024 15:29:15

अंक जासूस

1 से 100 तक संख्याएँ लिखने के पश्चात् दिनेश को आश्चर्य होता है कि उसने कितनी बार अंक '7' लिखा।



1 से 100 तक की संख्याओं में, अंक '7' कितनी बार आएगा? 1 से 1000 तक की संख्याओं में, अंक '7' कितनी बार आएगा?

3.5 आकर्षक विलोमाक्षर पैटर्न (Palendromic Patterns)

आप दी गई संख्याओं में क्या पैटर्न देखते हैं— 66, 848, 575, 797, 1111

इन संख्याओं को बाएँ से दाएँ तथा दाएँ से बाएँ एक जैसा पढ़ा जाता है, देखिए एवं प्रयास कीजिए। ऐसी संख्याओं को **पैलिंड्रोम** या **पैलिंड्रोमिक** संख्याएँ कहते हैं।

1, 2, 3 अंकों का प्रयोग करते हुए सभी पैलिंड्रोमिक संख्याएँ

संख्याएँ 1, 2, 3 अंकों का प्रयोग करके बनी कुछ पैलिंड्रोम संख्याएँ 121, 313 और 222 हैं।

इन अंकों की सहायता से बनने वाली सभी तीन अंकों की पैलिंड्रोमिक संख्याएँ लिखिए।

पैलिंड्रोम संख्याओं को पलटें व जोड़ें

अब इन योगफलों को देखिए और पता लगाइए कि क्या हो रहा है?

इन चरणों का अनुसरण कीजिए— दो अंकों वाली संख्या से शुरू कीजिए। इस संख्या को पलटकर, इसी संख्या में जोडिए। यदि प्राप्त संख्या पैलिंड्रोम है, तो रुक जाइए अन्यथा प्राप्त संख्या को उसके अंकों को पलटने से प्राप्त संख्या (प्रतिलोम) के साथ जोड़कर इन चरणों को दोहराइए।

34	29	48	76
43	92	84	67
77	121	132	143
		231	341
		363	484

इसी प्रक्रिया को कुछ अन्य संख्याओं के साथ भी कीजिए तथा इन्हीं चरणों को दोहराइए। यदि प्राप्त संख्या पैलिंड्रोम है, तो रुक जाइए। ऐसी कुछ संख्याएँ होंगी, जिनमें पैलिंड्रोम संख्या प्राप्त करने के लिए इस प्रक्रिया को कई बार दोहराना पड़ेगा।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 61 17/09/2024 15:29:16

क्या आपको ऐसी संख्याएँ भी प्राप्त हुईं जहाँ आप पैलिंड्रोम तक नहीं पहुँच पाएँ?

खोजिए

2 अंकों की संख्या से शुरू करके, क्या संख्या और उसके अंकों को पलटने से प्राप्त संख्या (प्रतिलोम) का पुन: योग करके हमेशा पैलिंड्रोम ही प्राप्त होता है? खोजिए और ज्ञात कीजिए।*

गणित चर्चा

पहेली

tth	th	h	t	u

अंको को शब्दों में लिखिए—

मैं 5 अंकों का एक पैलिंड्रोम हूँ।
मैं एक विषम संख्या हूँ।
मेरा दहाई का अंक, इकाई के अंक से दो गुना है।
मेरा सैकड़े का अंक, दहाई के अंक से दो गुना है।
मैं कौन हूँ? _____

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.6 कापरेकर की जादुई संख्या



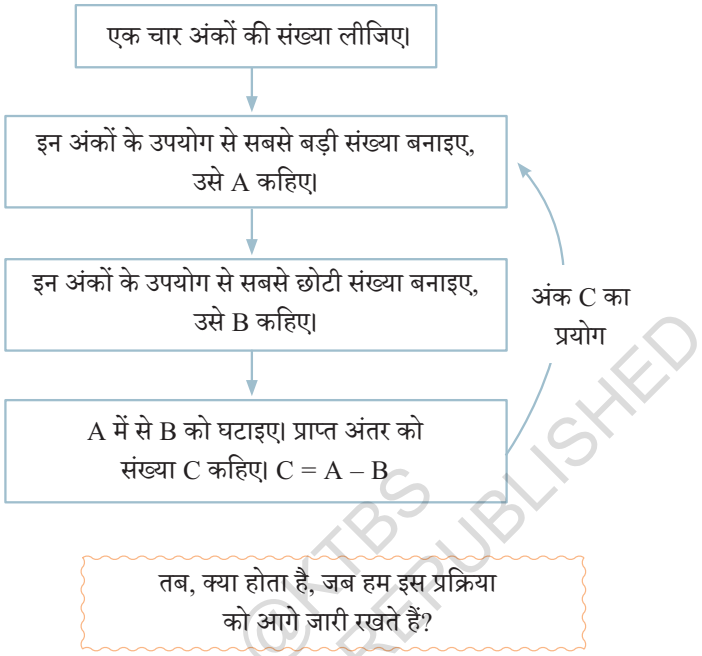
डी.आर. कापरेकर, महाराष्ट्र के देवलाली में एक सरकारी स्कूल में गणित के अध्यापक थे। उन्हें संख्याओं के साथ खेलना बहुत पसंद था। उन्होंने संख्याओं के बहुत से आकर्षक पैटर्न खोजें, जो पहले ज्ञात नहीं थे।

1949 में जब वह 4 अंकों की संख्याओं के साथ खेल रहे थे, तो खेल-खेल में उन्होंने एक जादुई तथ्य खोजा।

(उत्तर हाँ है, 3 अंकों की संख्या के लिए उत्तर अज्ञात है। ऐसा ज्ञात हुआ है कि 196 से शुरू करने पर हमें कभी भी पैलिंड्रोम प्राप्त नहीं होगा)

Chapter 3.indd 62 17/09/2024 15:29:16

निम्नलिखित चरणों का उपयोग करते हुए, स्वयं इस जादू का अनुभव कीजिए। एक चार अंकों की संख्या माना, 6382 लीजिए।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

A = 8632
B = 2368
C = 8632–2368
= 6264

A = 6642
B = 2466
C = 6642–2466
= 4176

A = 7641
B = 1467
C = 7641–1467
= 6174

A =
B =
C =

खोजिए

4 अंकों की कोई अन्य संख्या लेकर इन चरणों का अनुसरण करके प्रयास कीजिए। पता लगाइए कि क्या होता है? अपने मित्रों के साथ जाँच कीजिए कि उन्हें क्या संख्या प्राप्त हुई?

आप सदैव एक जादुई संख्या '6174' प्राप्त करेंगे। इस संख्या 6174 को कापरेकर स्थिरांक कहा जाता है।

इन्हीं चरणों को कुछ 3 अंकों वाली संख्याओं के साथ दोहराइए। कौन-सी संख्या दोहराना शुरू होगी?

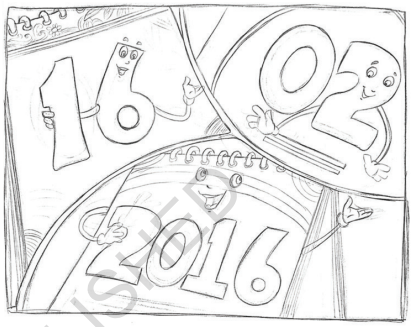
Chapter 3.indd 63 17/09/2024 15:29:16

3.7 घड़ी और कैलेंडर की संख्याएँ

सामान्य 12 घंटे वाली घड़ी में कुछ समयों में पैटर्न दिखाई देता है। उदाहरण के लिए— 4:44, 10:10 और 12:21।

- 12 घंटे की घड़ी में इस प्रकार के सभी संभव समयों को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

मनीष का जन्मदिन 20/12/2012 को है, जहाँ अंक '2', '0', '1' और '2' उसी क्रम में दोहराए जाते हैं।



- बीते समय में इस प्रकार की कुछ अन्य तिथियों को ज्ञात कीजिए।

उसकी बहन मेघना का जन्मदिन 11/02/2011 को है, इसमें बाएँ से दाएँ तथा दाएँ से बाएँ अंकों को एक जैसा ही पढ़ा जाता है।

- बीते हुए समय से इसी प्रकार की सभी संभावित तिथियों को ज्ञात कीजिए।

जीवन इस वर्ष के कैलेंडर को देख रहा था। उसे देखकर वह आश्चर्यचकित हो गया कि 'हम कैलेंडर को प्रत्येक वर्ष क्यों बदलते हैं? क्या हम कैलेंडर का पुन: प्रयोग नहीं कर सकते?' इस विषय में आप क्या सोचते हैं?

आपने ध्यान दिया होगा कि पिछले वर्ष का कैलेंडर इस वर्ष के कैलेंडर से अलग था। इस प्रकार अगले वर्ष का कैलेंडर भी पिछले वर्षों के कैलेंडर से अलग है।

- लेकिन, क्या किसी वर्ष का कैलेंडर कुछ वर्षों बाद दोहराया जाएगा? क्या किसी वर्ष की सभी तिथियाँ और दिन, ठीक किसी दूसरे वर्ष के कैलेंडर के साथ पूर्णतया मेल करेंगी?

प्रयास करें

आइए, पता लगाएँ

1. प्रतिभा अंकों '4','7','3' और '2' का उपयोग करके 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या 7432 तथा सबसे छोटी संख्या 2347 बनाती है। इन दोनों संख्याओं का अंतर 7432 – 2347 = 5085 है। इन दोनों संख्याओं का योगफल 9779 है। निम्नलिखित कथन को हल करने के लिए 4 अंकों को चुनिए—
   a. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का अंतर 5085 से अधिक हो।
   b. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का अंतर 5085 से कम हो।

© CTRS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 64 17/09/2024 15:29:21

c. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का योगफल 9779 से अधिक हो।

d. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का योगफल 9779 से कम हो।

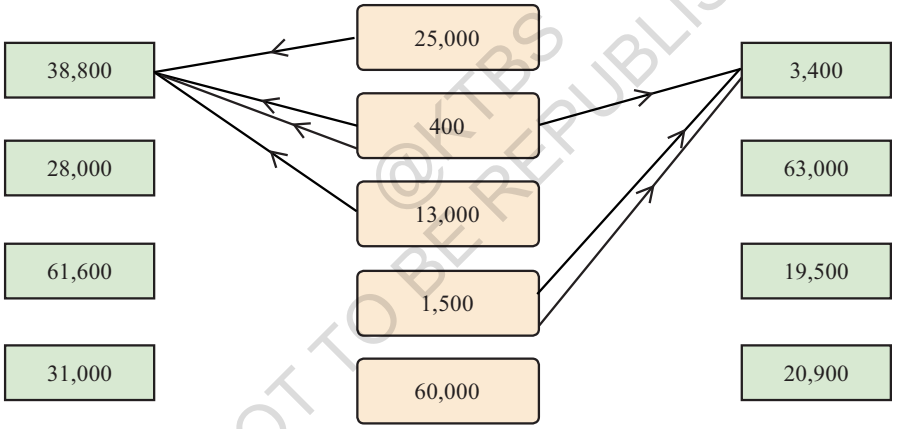
2. 5 अंकों के सबसे बड़े तथा सबसे छोटे पैलिंड्रोम (विलोमाक्षर) का योगफल क्या होगा? उनका अंतर क्या होगा?

3. घड़ी में इस समय 10:01 बजे हैं। कितने मिनट लगेंगे जब तक की घड़ी अगला पैलिंड्रोम दिखाती है? इस पैलिंड्रोम के बाद आप अगले के बारे में क्या कहेंगे?

4. संख्या 5683 को कापरेकर स्थिरांक तक पहुँचने की प्रक्रिया में कितने चरण लगेंगे?

3.8 मानसिक गणित

नीचे दी गई आकृति का अवलोकन कीजिए। आप खींची गई रेखाओं और संख्याओं के विषय में क्या सोचते हैं?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

मध्य स्तंभ (कॉलम) की संख्याओं को विभिन्न तरीकों से जोड़कर, साथ वाले स्तंभों की संख्याओं को प्राप्त किया जा सकता है (1500 + 1500 + 400 = 3400)। वांछित योगफल को प्राप्त करने के लिए मध्य स्तंभ की संख्याओं का आवश्यकता अनुसार कई बार प्रयोग किया जा सकता है। वांछित योगफल को प्राप्त करने के लिए मध्य स्तंभ की संख्या और साथ वाले स्तंभ की संख्या को तीर के निशान लगाकर दर्शाइए।

नीचे दो उदाहरण दिए गए हैं, जिन्हें मानसिक रूप से हल करना अधिक सरल है।

$38{,}800 = 25{,}000 + 400 \times 2 + 13{,}000$

$3400 = 1500 + 1500 + 400$

Chapter 3.indd 65 17/09/2024 15:29:21

क्या हम मध्य स्तंभ की संख्याओं का प्रयोग करके 1000 बना सकते हैं? क्यों नहीं? 14000, 15000 और 16000 के विषय में आपका क्या विचार है? हाँ, यह संभव है। खोज करके देखिए कैसे? कौन-सा हजार नहीं बनाया जा सकता है?

गणित चर्चा

जोड़ना और घटाना

नीचे बॉक्स में दी गई संख्याओं का प्रयोग करके वांछित संख्या को प्राप्त करने के लिए हमें जोड़ने और घटाने की अनुमति है। स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण दिया गया है—

40,000	7,000
300	1,500
12,000	800

39,800 = 40,000 – 800 + 300 + 300

45,000 =

5,900 =

17,500 =

21,400 =

अंक और संक्रियाएँ

5 अंकों की दो संख्याओं को जोड़कर 5 अंकों की अन्य संख्या को प्राप्त करने का एक उदाहरण है—

12,350 +24,545 = 36,895

5 अंकों की दो संख्याओं को घटाकर 5 अंकों की संख्या को प्राप्त करने का एक उदाहरण है—

48,952 – 24,547 = 24,405

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति के लिए जहाँ भी संभव हो, वहाँ एक उदाहरण लिखिए।

5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से प्राप्त 5 अंकों की संख्या जो 90,250 से अधिक हो।	5 अंकों की संख्या + 3 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	4 अंकों की संख्या + 4 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से संख्या 18,500 प्राप्त करना।
5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से 56,503 से छोटी संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 3 अंकों की संख्या से 4 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 4 अंकों की संख्या से 4 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से 3 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से संख्या 91,500 प्राप्त करना।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 66 17/09/2024 15:29:21

क्या आप दी गई सभी स्थितियों के लिए उपयुक्त उदाहरण खोज पाए? यदि नहीं, तो सोचिए और चर्चा कीजिए कि इसका क्या कारण हो सकता है? ऐसे ही कुछ और प्रश्न तैयार कीजिए एवं अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

गणित चर्चा

2. हमेशा, कभी-कभी, कभी नहीं?

नीचे कुछ कथन दिए गए हैं। सोचिए, खोजिए और ज्ञात कीजिए कि क्या प्रत्येक कथन 'हमेशा सत्य है', 'केवल कभी-कभी सत्य है' 'या कभी सत्य नहीं है'। आप ऐसा क्यों सोचते हैं? अपने तर्क लिखिए और कक्षा में चर्चा कीजिए।

a. 5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 5 अंकों की संख्या।

b. 4 अंकों की संख्या + 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 4 अंकों की संख्या।

c. 4 अंकों की संख्या + 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 6 अंकों की संख्या।

d. 5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 5 अंकों की संख्या।

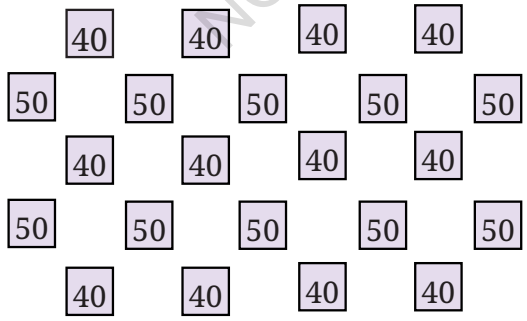
e. 5 अंकों की संख्या – 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 3 अंकों की संख्या।

3.9 संख्या पैटर्न के साथ खेलना

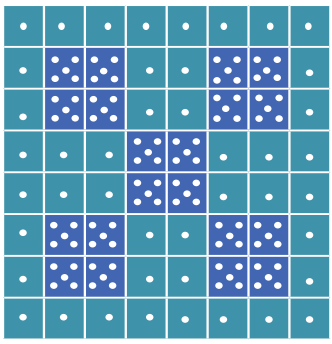
नीचे कुछ संख्याओं को कुछ पैटर्नों में व्यवस्थित किया गया है। नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए। क्या हमें उन्हें एक-एक करके जोड़ना चाहिए या इसके लिए हम किसी शीघ्र विधि का उपयोग कर हल कर सकते हैं?

इन प्रश्नों को हल करने के लिए आपने जिन अलग-अलग विधियों का प्रयोग किया है, उसे कक्षा में साझा कीजिए और चर्चा कीजिए।

a.



b.



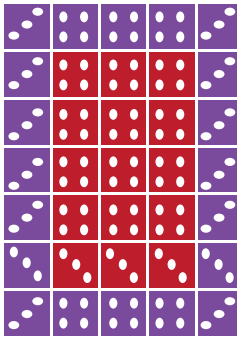
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 67 17/09/2024 15:29:21

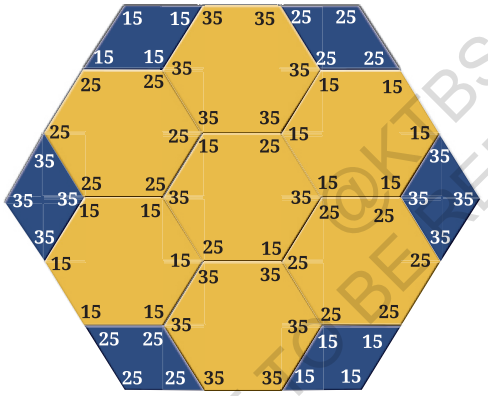
c.

32	32	32	32	32	32	32	32
32	32	32	32	32	32	32	32
32	32	32	32	32	32	32	32
32	32	32	32	32	32	32	32
64	64	64					64
64	64	64					64
64	64	64					64
64	64	64					64

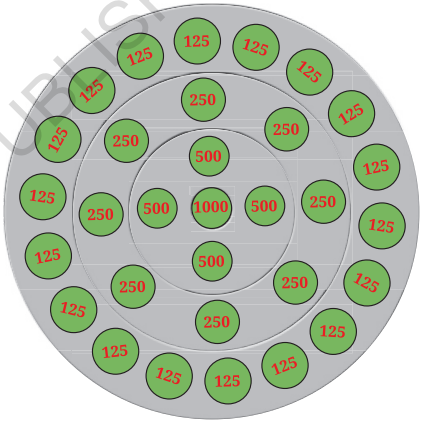
d.



e.



f.



NOT TO BE REPUBLISHED © NCERT

3.10 एक अनसुलझा रहस्य—कोलाट्ज़ अनुमान (Collatz Conjecture)

नीचे दिए गए अनुक्रमों को देखिए—सभी अनुक्रमों में एक ही नियम लागू होता है—

a. 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

b. 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

c. 21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

d. 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

क्या आप बता सकते हैं कि इन अनुक्रमों को किस प्रकार बनाया गया है?

Chapter 3.indd 68 17/09/2024 15:29:22

नियम— किसी भी एक संख्या से शुरू करते हैं; यदि संख्या सम संख्या है तो उसका आधा करेंगे और यदि संख्या विषम संख्या है तो उसे 3 से गुणा करके उसमें 1 जोड़ेंगे। इस प्रक्रिया को दोहराइए।

ध्यान दीजिए कि पृष्ठ संख्या 68 पर दिए गए चारों अनुक्रमों में हम अंत में 1 पर पहुँचते हैं। सन् 1937 में, जर्मन के गणितज्ञ लोथर कोलाट्ज़ (Lothar Collatz) ने अनुमान लगाया कि उपरोक्त जैसा प्रत्येक अनुक्रम हमेशा 1 पर पहुँचेगा, चाहे हमने किसी भी पूर्ण संख्या से शुरुआत की हो।

आज भी बहुत से गणितज्ञ इस पर कार्य कर रहे हैं। यह हमेशा एक अनसुलझी समस्या है कि क्या कोलाट्ज़ अनुमान सत्य है? गणित में कोलाट्ज़ अनुमान अत्यधिक विख्यात अनसुलझी समस्याओं में से एक है।

प्रत्येक अनुक्रम को अपने पसंद की पूर्ण संख्या से शुरू करके ऊपर जैसे कुछ और कोलाट्ज अनुक्रम बनाइए। क्या आप हमेशा 1 पर पहुँचते हैं?

क्या आपको लगता है कि कोलाट्ज़ के अनुमान में इस प्रकार का प्रत्येक अनुक्रम 1 पर पहुँचेगा? क्यों और क्यों नहीं?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.11 सरल आकलन

कई बार हम वस्तुओं की सही संख्या को नहीं जानते और न ही उनकी आवश्यकता होती है और एक अनुमान ही उद्देश्य के लिए पर्याप्त होता है। उदाहरण के लिए, आपके विद्यालय के मुख्य अध्यापक, आपके विद्यालय में नामांकित विद्यार्थियों की सही संख्या जानते हों, संभवत: आप केवल अनुमानित संख्या ही जानते होंगे। आपके विद्यालय में कुल कितने विद्यार्थी हैं? लगभग 150?, 400?, 1000?

परोमिता की एक कक्षा में 32 बच्चे हैं। उनकी कक्षा के दो अन्य विभागों (सेक्शन) में 29 और 35 बच्चे हैं। इसलिए उन्होंने अनुमान लगाया कि उसकी कक्षा में लगभग 100 बच्चे हैं। कक्षा 6 के साथ उसके स्कूल में कक्षाएँ 7–10 भी हैं तथा प्रत्येक कक्षा में 3 भाग (सेक्शन) हैं। उन्होंने माना कि प्रत्येक कक्षा में बच्चों की संख्या समान है और आकलन किया कि उनके विद्यालय में विद्यार्थियों की अनुमानित संख्या लगभग 500 है।

आइए, पता लगाएँ

अब हम कुछ सरल आकलन करेंगे। यह एक मनोरंजक अभ्यास है और इसके द्वारा आप अपने आस-पास की विभिन्न संख्याओं को जानकर प्रसन्न होंगे। याद रखिए, दिए गए प्रश्नों के लिए सही संख्या जानने में हमारी रूचि नहीं है। अपने आकलन के तरीके को कक्षा के साथ साझा कीजिए।

Chapter 3.indd 69 17/09/2024 15:29:22

1. आपके द्वारा चलने के लिए उठाए गए कदम—
   a. जिस स्थान पर आप बैठे हैं से लेकर कक्षा के दरवाजे तक
   b. विद्यालय के मैदान के चारों ओर सिरे से सिरे तक
   c. कक्षा के दरवाजे से विद्यालय के दरवाजे तक
   d. आपके विद्यालय से आपके घर तक
2. आपके द्वारा आँखों को झपकने की संख्या या आपके द्वारा ली गई साँसों की संख्या—
   a. एक मिनट में
   b. एक घंटे में
   c. एक दिन में
3. अपने आसपास ऐसी वस्तुएँ ज्ञात कीजिए जिनकी संख्या—
   a. कुछ हजार है b. दस हजार से अधिक है

उत्तर का आकलन कीजिए

30 सेकेंड के अंदर अनुमान लगाने का प्रयास कीजिए। अपने अनुमान को अपने दोस्तों के साथ जाँचिए।

1. आप की गणित की पाठ्यपुस्तक में शब्दों की संख्या—
   a. 5000 से अधिक b. 5000 से कम
2. आपके विद्यालय में बस द्वारा आने वाले विद्यार्थियों की संख्या—
   a. 200 से अधिक b. 200 से कम
3. रोशन 5 व्यक्तियों के लिए फ्रूट कस्टर्ड बनाने के लिए दूध और 3 प्रकार के फल खरीदना चाहता है। उसका अनुमान है कि फ्रूट कस्टर्ड बनाने की लागत ₹100 है। क्या आप उससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?
4. गांधीनगर (गुजरात में) और कोहिमा (नागालैंड में) के बीच की दूरी का आकलन कीजिए।
   संकेत— इन शहरों का पता लगाने के लिए भारत के मानचित्र को देखिए
5. शीतल कक्षा 6 में है और कहती है कि उसने विद्यालय में आज तक लगभग 13000 घंटे व्यतीत किए हैं? क्या आप उससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 70 17/09/2024 15:29:22

6. पुराने समय में यातायात के साधन उपलब्ध नहीं होने के कारण लोग लंबी दूरी पैदल चलकर तय करते थे। माना आप अपनी सामान्य गति से चलते हैं। आपको निम्न स्थानों से जाने में लगभग कितना समय लगेगा?
   a. आपके वर्तमान स्थान से आपके आसपास के एक पसंदीदा स्थान तक
   b. आपके वर्तमान स्थान से किसी पड़ोसी राज्य की राजधानी तक
   c. भारत के सुदूर दक्षिणी बिंदु से भारत के सुदूर उत्तरी बिंदु तक
7. आकलन के कुछ प्रश्न बनाइए और अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

3.12 खेल और जीतने की युक्तियाँ

संख्याओं का उपयोग खेल खेलने और जीतने की युक्तियों को बनाने में भी किया जा सकता है।

यहाँ एक प्रसिद्ध खेल दिया जा रहा है, जिसे 21 कहा जाता है। इसे एक सहपाठी के साथ खेलें। इसे घर में भी खेलने का प्रयास करें।

खेल 1 के लिए नियम— पहला खिलाड़ी 1 और 3 के बीच एक संख्या बोलता है। अब दोनों खिलाड़ी बारी-बारी से पहले बोली गई संख्या में 1, 2 या 3 जोड़ते हैं। जो पहले 21 पर पहुँचेगा, वह जीतेगा!

इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ कई बार खेलिए। क्या आपको जीतने की युक्ति दिखने लगी है?

कौन-सा खिलाड़ी हमेशा जीत सकता है, यदि वह सही पैटर्न से खेलता है? जीतने वाले खिलाड़ी को कौन-सी संख्या का पैटर्न आना चाहिए?

इस खेल में बहुत से परिवर्तन किए जा सकते हैं। यहाँ एक और अन्य परिवर्तन देखिए।

खेल 2 के लिए नियम— पहला खिलाड़ी 1 से 10 तक के बीच कोई संख्या बोलता है। अब दोनों खिलाड़ी बारी-बारी से पहली बोली गई संख्या में 1, 2 या 3 जोडते हैं। जो खिलाड़ी पहले 99 पर पहुँचेगा वह जीतेगा।

इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ कई बार खेलिए। देखिए क्या आप जीतने की संगत रणनीति को समझ पा रहे हैं? कौन-सा खिलाड़ी हमेशा जीत सकता है। इस बार जीतने वाले खिलाड़ी की संख्या का पैटर्न क्या होगा?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 71 17/09/2024 15:29:22

इस खेल में अपने आप से परिवर्तन कीजिए। स्वयं निर्धारित कीजिए कि प्रत्येक बार में कितना जोड़ा जा सकता है और कौन-सी संख्या जीतने वाली संख्या है। अब इस खेल को कई बार खेलिए और जीतने की रणनीति को जानिए कि कौन-सा खिलाड़ी हमेशा खेल जीत सकता है।

आइए, पता लगाएँ

1. यहाँ इस ग्रिड में, केवल एक महाकोष्ठ है (अपने पड़ोस की सभी संख्याओं में बड़ी संख्या)। यदि आप इनमें से किसी एक संख्या के दो अंकों की अदला-बदली करते हैं, तो यहाँ 4 महाकोष्ठ बन जाते हैं। जानिए कि कौन-से अंकों की अदला-बदली की जानी चाहिए।

16,200	39,344	29,765
23,609	62,871	45,306
19,381	50,319	38,408



2. अपने जन्म वर्ष से शुरू करके आप कितने चरण में कापरेकर स्थिरांक पर पहुँच जाएँगे?
3. हम 35,000 और 75,000 के बीच पाँच अंकों की संख्याओं का वह समूह है, जिसके सभी अंक विषम हैं। हमारे समूह की सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है? हमारे समूह की सबसे छोटी संख्या कौन-सी है? हम में से कौन-सी संख्या 50,000 के अत्यधिक निकट है?
4. आकलन कीजिए कि आपको वर्ष में सप्ताहांतों (Weakends), त्योहारों और छुट्टियों को मिलाकर कुल कितनी छुट्टियाँ मिलती हैं। अब अपनी छुट्टियों की सही संख्या का पता लगाइए और देखिए कि सही संख्या आपके आकलन के कितना समीप है।
5. एक जग, एक बाल्टी और एक छत पर रखी टंकी की क्षमता का लीटर में आकलन कीजिए।
6. एक 5 अंकों की संख्या तथा दो 3 अंकों की संख्याएँ इस प्रकार लिखिए कि उनका योगफल 18,670 हो।
7. 210 और 390 के बीच एक संख्या चुनिए। अनुच्छेद 3.9 में दिए गए संख्या पैटर्न के समान एक पैटर्न निर्मित कीजिए, जिसमें यह चुनी गई संख्या योगफल हो।
8. अध्याय 1 की सारणी 1 से, 2 की घात का अनुक्रम याद कीजिए। इस अनुक्रम में शुरू की सभी संख्याओं के लिए कोलाट्ज अनुमान सही क्यों है?
9. यदि कोई व्यक्ति संख्या 100 से शुरू करता है, तो क्या कोलाट्ज अनुमान लागू होगा, इस विषय की जाँच कीजिए।
10. शून्य से प्रारंभ करते हुए खिलाड़ी बारी-बारी से 1 और 3 के बीच संख्या को जोड़ता है, जो व्यक्ति 22 पर पहले पहुँचेगा, वह विजयी होगा। अब जीतने की युक्ति क्या होगी?

© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 72 17/09/2024 15:29:22

सारांश

- संख्याओं का उपयोग सूचना को पहुँचाने, पैटर्न बनाने और खोजने, महत्वपूर्ण आकलन, पहेलियाँ बनाने एवं हल करने, खेलने और खेल में जीतने जैसे कई अलग-अलग उद्देश्यों के लिए किया जा सकता है।
- संख्याओं को सूत्रबद्ध व सही विधि से उपयोग करने के बारे में सोचने का उद्देश्य एक लाभदायक कौशल और क्षमता है (इसे अभिकलनात्मक सोच कहते हैं)।
- संख्याओं के बारे में बहुत-सी समस्याओं को उठाना तो बहुत सरल है, लेकिन उन्हें हल करना बहुत कठिन होता है। वास्तव में ऐसी बहुत-सी समस्याएँ हैं जो अभी भी अनसुलझी हैं (उदाहरण के लिए, कोलाट्ज अनुमान)।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 3.indd 73 17/09/2024 15:29:26

4

आँकड़ों का प्रबंधन और प्रस्तुतिकरण

0675CH04

यदि आप अपने कक्षा-सहपाठियों से उनकी पसंद के रंगों के बारे में पूछेंगे, तो आपको रंगों की एक सूची प्राप्त हो जाएगी। यह सूची आँकड़ों का एक उदाहरण है। इसी प्रकार, यदि आप अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी का वजन मापेंगे, तो आपको भार के मापकों का एक संग्रह प्राप्त हो जाएगा— जो पुन: **आँकड़े** ही हैं।

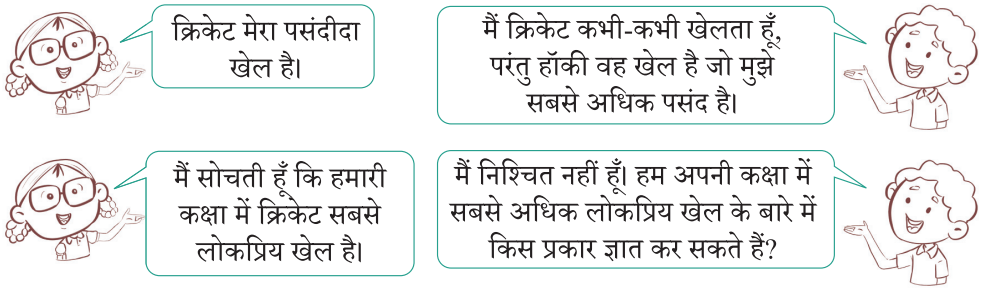
तथ्यों, संख्याओं, मापनों, प्रेक्षणों या वस्तुओं के अन्य विवरणों के संग्रह, जो हमें उन वस्तुओं के विषय में सूचना प्रदान करते हैं, आँकड़े कहलाते हैं।

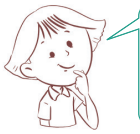
हम सूचनाओं के युग में रह रहे हैं। हम निरंतर अपने सम्मुख नई और रोचक विधियों से प्रस्तुत किए गए आँकड़ों को बड़ी मात्रा में देखते हैं। इस अध्याय में हम ऐसी कुछ विधियों को जानेंगे, जिनसे आँकड़ों को प्रस्तुत किया जाता है। साथ ही हम यह भी ज्ञात करेंगे कि इनमें से कुछ विधियों का प्रयोग किस प्रकार आँकड़ों को सही रूप से प्रदर्शित करने, उनकी व्याख्या करने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने के लिए किया जा सकता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

4.1 आँकड़ों का संग्रहण और संगठन

नव्या और नरेश अपने-अपने प्रिय खेल के विषय में चर्चा कर रहे हैं—





अपनी कक्षा में सबसे अधिक लोकप्रिय खेल का पता लगाने के लिए, नव्या और नरेश को क्या करना चाहिए? क्या आप उनकी सहायता कर सकते हैं?

नरेश और नव्या ने कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी के पास जाकर यह पूछने का निर्णय किया कि उनका पसंदीदा खेल क्या है। फिर उन्होंने एक सूची तैयार की।

नव्या एक सूची दर्शा रही है—



मेहनूर – कबड्डी	पुष्कल – सतोलिया (पिट्ठू)	अनाया – कबड्डी
जुबिमोन – हॉकी	डेंसी – बैडमिंटन	जिविशा – सतोलिया (पिट्ठू)
सिमरन – कबड्डी	जीविका – सतोलिया (पिट्ठू)	राजेश – फुटबॉल
नंद – सतोलिया (पिट्ठू)	लीला – हॉकी	थारा – फुटबॉल
अंकिता – कबड्डी	अफशां – हॉकी	सौम्या – क्रिकेट
इमोन – हॉकी	कीरत – क्रिकेट	नवजोत – हॉकी
युवराज – क्रिकेट	गुरप्रीत – हॉकी	हेमल – सतोलिया (पिट्ठू)
रेहाना – हॉकी	अर्श – कबड्डी	देबब्रत – फुटबॉल
आर्ना – बैडमिंटन	भव्या – क्रिकेट	अनन्या – हॉकी
कोम्पाल – फुटबॉल	साराह – कबड्डी	हार्दिक – क्रिकेट
ताहिरा – क्रिकेट		

@KRBS NOT TO BE REPUBLISHED

वह प्रसन्नतापूर्वक कहती है, "मैंने आँकड़े संग्रहित कर लिए हैं। अब मैं सबसे अधिक लोकप्रिय खेल बता सकती हूँ।"

कुछ अन्य बच्चे उस सूची को देख रहे हैं और आश्चर्य कर रहे हैं। उन्होंने कहा, "हम अभी भी सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को नहीं देख पा रहे हैं। इस सूची से हम इसे कैसे प्राप्त कर सकते हैं?"

आइए, पता लगाएँ

1. नरेश और नव्या के कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को आप कैसे ज्ञात करेंगे?
2. उनकी कक्षा में सबसे अधिक लोकप्रिय खेल कौन-सा है?
3. अपने कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।
4. परी आगे दिए प्रश्नों के उत्तर देना चाहती है। जिन प्रश्नों के उत्तरों के लिए उसे आँकड़ों को संग्रहित करने की आवश्यकता है, उनके सम्मुख सही का चिह्न ☑ लगाइए तथा जिन प्रश्नों के उत्तरों के

Chapter 4.indd 75 20/09/2024 15:49:34

लिए उसे आँकड़ों को संग्रहित नहीं करना पड़ेगा, उनके सम्मुख एक क्रॉस का चिह्न ☒ लगाइए। अपने उत्तरों की कक्षा में चर्चा कीजिए।

a. उसके कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय टी.वी. शो कौन-सा है? ☐

b. भारत ने स्वतंत्रता कब प्राप्त की थी? ☐

c. उसके मोहल्ले या बस्ती में कितना पानी नष्ट हो रहा है? ☐

d. भारत की राजधानी क्या है? ☐

श्री नीलेश एक अध्यापक हैं। उन्होंने नववर्ष मनाने के लिए कक्षा में मिठाइयाँ लाने का निश्चय किया। पास की मिठाई की दुकान में जलेबी, गुलाब जामुन, गुजियाँ, बर्फी और रसगुल्ले उपलब्ध हैं। वे विद्यार्थियों की पसंद जानना चाहते थे। उन्होंने बोर्ड पर मिठाइयों के नाम लिखे तथा प्रत्येक विद्यार्थी से अपनी-अपनी प्राथमिकता बताने के लिए कहा। उन्होंने प्रत्येक विद्यार्थी के लिए एक मिलान चिह्न (tally mark) 'I' लगाया और जब गिनती 5 पर पहुँची, तब उन्होंने पिछले चार चिह्नों को तिरछी काटती एक रेखा खींच कर इसे '𝍸' के रूप में अंकित किया।

मिठाई	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
जलेबी	𝍸 I	6
गुलाब जामुन	𝍸 IIII	9
गुजियाँ	𝍸 𝍸 III	_____
बर्फी	III	_____
रसगुल्ला	𝍸 II	_____

© KIRBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. मिठाइयों को सही संख्याओं में खरीदने में श्री नीलेश की सहायता करने के लिए, उपरोक्त सारणी को पूरा कीजिए—

a. कितने विद्यार्थियों ने जलेबी का चयन किया है? ☐

b. बर्फी को ☐ विद्यार्थियों द्वारा चुना गया।

c. गुजियाँ को कितने विद्यार्थियों ने चुना है? ☐

d. रसगुल्ले को ☐ विद्यार्थियों द्वारा चुना गया।

e. कितने विद्यार्थियों ने गुलाब जामुन का चयन किया है? ☐

Chapter 4.indd 76 20/09/2024 15:49:34

श्री नीलेश ने अपने एक कर्मचारी को सारणी में दिए गए विवरण अनुसार मिठाईयाँ खरीद कर लाने का अनुरोध किया। दी गई सारणी से उन्हें सही संख्या में मिठाइयाँ खरीदने में सहायता मिली।

2. क्या दी गई सारणी प्रत्येक बच्चे को सही प्रकार की मिठाई वितरित करने के लिए पर्याप्त है? व्याख्या कीजिए। यदि यह पर्याप्त नहीं है, तो इसका विकल्प क्या है?

आँकड़ों को संगठित (organize) करने के लिए, हम एक स्तंभ में प्रत्येक मिठाई का नाम लिख सकते हैं तथा अन्य स्तंभों में उन मिठाइयों को चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या लिख सकते हैं। इसके साथ ही मिलान चिह्नों का उपयोग कर सकते हैं। संख्याएँ 6, 9, ... चुनी गई मिठाइयों जलेबी, गुलाब जामुन, ... की क्रमश: **बारंबारताएँ (frequencies)** हैं।

सुश्री संध्या ने अपने विद्यार्थियों से उनके जूतों के साइज के विषय में पूछा। उन्होंने प्राप्त आँकड़ों को बोर्ड पर लिखा—

4	5	3	4	3	4	5	5	4
5	5	4	5	6	4	3	5	6
4	6	4	5	7	5	6	4	5

फिर उन्होंने विद्यार्थियों के जूतों के साइज को आरोही (ascending) क्रम में व्यवस्थित किया—

3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने में सुश्री संध्या की सहायता कीजिए—
   a. कक्षा में जूतों का अधिकतम साइज _____ है।
   b. कक्षा में जूतों का न्यूनतम साइज _____ है।
   c. _____ विद्यार्थी हैं, जो 5 के साइज का जूता पहनते हैं।
   d. _____ विद्यार्थी हैं, जो 4 से बड़े साइज का जूता पहनते हैं।
2. आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने से उक्त प्रश्नों का उत्तर देने में किस प्रकार की सहायता प्राप्त हुई?
3. क्या आँकड़ों को व्यवस्थित करने की अन्य विधियाँ भी हैं?

गणित चर्चा

Chapter 4.indd 77 20/09/2024 15:49:34

4. कुछ ऐसे पेड़ों के नाम लिखिए जो आप अपने आस-पास वातावरण में देखते हैं। जब आप अपने घर से विद्यालय की ओर जाते हुए कोई पेड़ देखते हैं (या एक स्थान से दूसरे स्थान तक पैदल चलते हुए), तब प्राप्त हुए आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी में भरिए—

पेड़	पेड़ों की संख्या
पीपल	
नीम	
…	
….	

a. कौन-सा पेड़ अधिकतम संख्या में मिला?

b. कौन-सा पेड़ न्यूनतम संख्या में मिला?

c. क्या ऐसे दो पेड़ पाए गए, जिनकी संख्याएँ समान थीं?

5. एक कोरा कागज लीजिए तथा उस पर एक समाचार पत्र से लिया हुआ कोई एक छोटा समाचार चिपकाइए। प्रत्येक विद्यार्थी एक भिन्न लेख का उपयोग कर सकता है। अब कागज पर नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी तैयार कीजिए। प्रत्येक ऐसे छोटे समाचार के शब्दों में अक्षरों 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' की संख्याएँ गिनिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए।

अक्षर	c	e	i	r	x	स्वयं के द्वारा चयनित किया हुआ कोई अक्षर
छोटे समाचार में प्राप्त हुए अक्षरों की संख्या						

a. सबसे अधिक बार प्राप्त हुआ अक्षर ..... है।

b. सबसे कम बार प्राप्त हुआ अक्षर ..... है।

c. इन पाँचों अक्षरों 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' को उनकी बारंबारता के आरोही क्रम में लिखकर सूची बनाइए। अब अपनी सूची के क्रम की कक्षा-सहपाठियों की सूचियों के क्रमों से तुलना कीजिए। क्या आपका क्रम अन्य सहपाठियों के क्रमों के समान है या लगभग समान है? (लगभग प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा क्रम 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' प्राप्त होने की संभावना है!) आपके विचार से ऐसा क्यों है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 78 20/09/2024 15:49:34

d. वह प्रक्रिया लिखिए जिसे आपने इस कार्य को पूरा करने में अपनाया है।

e. अपने मित्रों के साथ उनके द्वारा अपनाई गई प्रक्रियाओं के बारे में चर्चा कीजिए।

f. यदि आप यही कार्य एक अन्य समाचार के साथ करते हैं, तो आप किस प्रक्रिया को अपनाएँगे?

अध्यापक टिप्पणी

विद्यार्थियों को आँकड़ों को संग्रहित और संगठित करने के और अधिक अवसर प्रदान कीजिए। विद्यार्थियों से यह अनुमान लगाने के लिए कहिए कि उनकी कक्षा में विद्यार्थियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय रंग, खेल, खिलौना, विद्यालयी विषय इत्यादि कौन-सा है। इसके साथ ही इस विषय में आँकड़े एकत्रित (संग्रहित) करना एक ऐसा आनंददायक क्रियाकलाप हो सकता है जिससे वे अपने कक्षा-सहपाठियों के बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त कर पाएँगे। चर्चा कीजिए कि वे आँकड़ों को किस प्रकार विभिन्न विधियों से एकत्रित कर सकते हैं। प्रत्येक विधि के लाभ और सीमाएँ हैं। आइए, इन सभी कार्यों का पता लगाएँ एवं विद्यार्थियों के साथ इन कार्यों की चर्चा करें। इसके साथ ही उन्हें इन कार्यों को समझने दें। इसके पश्चात् विद्यार्थियों को योजना बनाने दीजिए तथा कक्षा के सम्मुख अपनी प्रक्रियाओं को प्रस्तुत करने दीजिए।

4.2 चित्रालेख

चित्रालेख (pictographs) बिना कोई संख्या लिखे आँकड़ों को दर्शाने की चित्रीय और सुझावित विधि है। नीचे दिए गए चित्र को देखिए, आपने पिछली कक्षाओं में इस तरह के चित्र देखें होंगे।

यात्रा के साधन	विद्यार्थियों की संख्या	☺=1 विद्यार्थी
निजी कार	☺☺☺☺	
सार्वजनिक बस	☺☺☺☺☺	
विद्यालयी बस	☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺	
साइकिल	☺☺☺	
पैदल	☺☺☺☺☺☺☺	

यह चित्र आपको विद्यार्थियों द्वारा यात्रा के लिए प्रयोग किए जाने विभिन्न साधनों को एक ही दृष्टि में समझने में सहायता करेगा। इस चित्र के आधार पर अग्रलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 79 20/09/2024 15:49:34

- यात्रा का कौन-सा साधन सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा प्रयोग किया जाता है?
- यात्रा का कौन-सा साधन सबसे कम विद्यार्थियों द्वारा प्रयोग किया जाता है?

चित्रालेख, आँकड़ों को वस्तुओं के चित्रों द्वारा दर्शाता है। इससे आँकड़ों के विषय में दिए गए प्रश्नों के उत्तर एक ही दृष्टि में देने में सहायता मिलती है।

दिए गए चित्रालेख में, एक इकाई या प्रतीक (symbol) ☺ का प्रयोग एक विद्यार्थी को दर्शाने के लिए किया गया है। ऐसे चित्रालेख भी होते हैं, जहाँ एक इकाई या प्रतीक अनेक व्यक्तियों या वस्तुओं को दर्शाते हैं।

उदाहरण— नंदकिशोर ने बेरसिया में अपने मिडिल स्कूल के बच्चों से 'वे कितनी बार रात्रि में न्यूनतम व घंटे सोते हैं?' प्रश्न के उत्तर एकत्रित किए। उसने इन आँकड़ों का एक चित्रालेख तैयार किया।

प्रतिक्रिया	बच्चों की संख्या (= 10 बच्चे)
सदैव	
कभी-कभी	
कभी नहीं	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उपरोक्त चित्रालेख के माध्यम से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

1. उन बच्चों की संख्या क्या है, जो सदैव रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे सोते हैं?
2. कितने विद्यार्थी कभी-कभी ही रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे सोते हैं?
3. कितने बच्चे सदैव रात्रि में 9 घंटे से कम सोते हैं? स्पष्ट कीजिए कि आपने किस प्रकार उत्तर प्राप्त किया।

हल—

1. सारणी में, 'सदैव' के सम्मुख 5 चित्र हैं। प्रत्येक चित्र 10 बच्चों को दर्शाता है। अतः 5 चित्र प्रदर्शित करते हैं 5×10=50 बच्चे।
2. 'कभी-कभी' के सम्मुख 2 पूर्ण चित्र (2×10=20) और 1 आधा चित्र (10 का आधा=5) है। अतः, केवल कभी-कभी न्यूनतम 9 घंटे सोने वाले विद्यार्थियों की संख्या 20+5=25 है।

Chapter 4.indd 80 20/09/2024 15:49:34

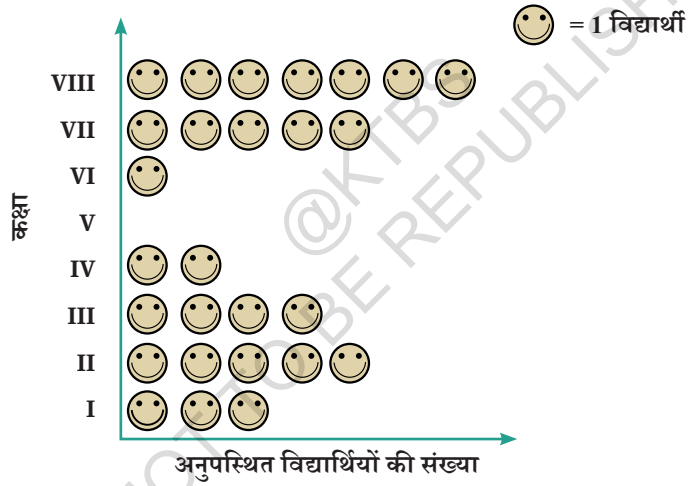
3. 'कभी नहीं' के सम्मुख 4 पूर्ण चित्र हैं। अत: $4 \times 10 = 40$ विद्यार्थी कभी भी रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे नही सोते हैं, अर्थात वे सदैव 9 घंटे से कम सोते हैं।

एक चित्रालेख खींचना

एक दिन, लखनपाल ने इन आँकड़ों को संग्रहित किया कि प्रत्येक कक्षा में कितने विद्यार्थी अनुपस्थित थे—

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	4	2	0	1	5	7

उसने इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए, एक चित्रालेख बनाया और उसमें 1 विद्यार्थी को ☺ से दर्शाने का निर्णय लिया—



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

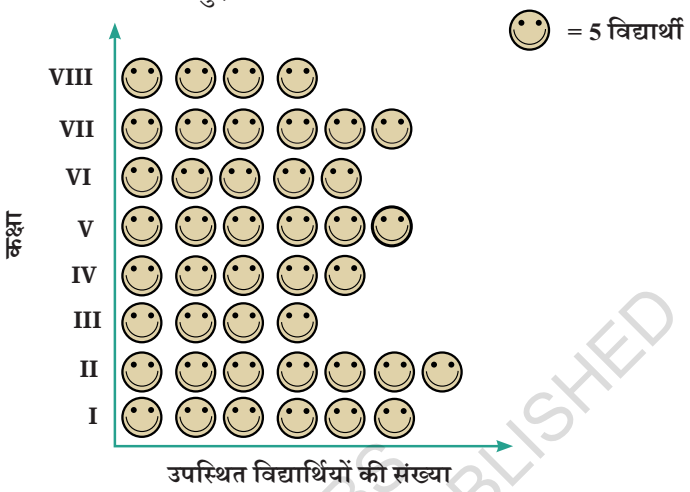
इसी समय, उसके मित्रों जरीना और संगीता ने उन विद्यार्थियों के आँकड़े संग्रहित किए, जो प्रत्येक कक्षा में उपस्थित थे—

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	30	35	20	25	30	25	30	20

यदि वे इन आँकड़ों को चित्रालेख के माध्यम से दर्शाना चाहते हैं, तो क्या वे प्रत्येक विद्यार्थी के लिए अब भी एक प्रतीक ☺ का प्रयोग करेंगे, जैसा कि लखनपाल ने किया था। यदि हाँ, तो उन्हें किन चुनौतियों का सामना करना पड़ सकता है?

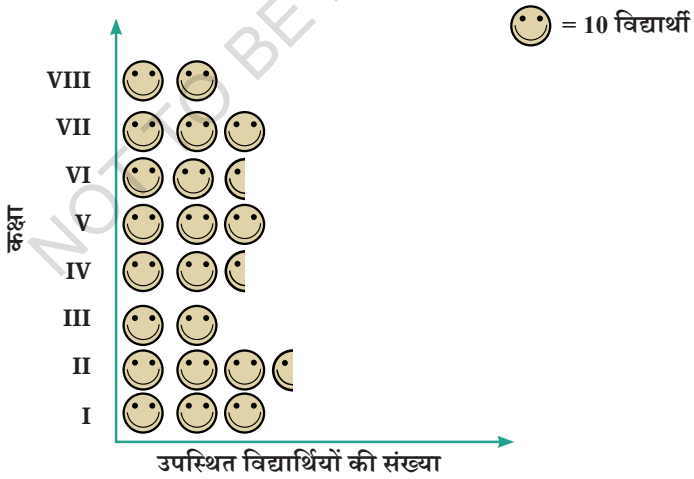
Chapter 4.indd 81 20/09/2024 15:49:34

जरीना ने इस समस्या से निपटने के लिए एक योजना बनाई— क्योंकि यहाँ अनेक विद्यार्थी हैं, इसलिए उसने ☺ को 5 विद्यार्थियों को दर्शाने का निर्णय लिया। उसने इसकी आकृति बनाई, जिससे समय और स्थान दोनों की बचत हुई।



संगीता ने एक ☺ से 10 विद्यार्थियों को दर्शाने का निर्णय लिया।

इसलिए उसे चित्रालेख में 25 विद्यार्थियों और 35 विद्यार्थियों को दर्शाने में समस्या हुई। तब उसने सोचा कि वह 5 विद्यार्थियों को दर्शाने के लिए ☺ का उपयोग कर सकती है।



यदि कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या 33 या 27 हो, तो एक ऐसा चित्रालेखा तैयार करते समय क्या चुनौतियाँ हो सकती हैं?

गणित चर्चा

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 82 20/09/2024 15:49:35

- **चित्रालेख** आँकड़ों को दर्शाने की सुंदर चित्रीय और सुझावित विधि है। ये आँकड़ों को वस्तुओं के चित्रों द्वारा दर्शाते हैं।
- चित्रालेख प्रश्नों के उत्तर देने और आँकड़ों के विषय में तुरंत निष्कर्ष निकलने में सहायता करते हैं। (दिए गए उदाहरणों में— मनपसंद खेलों, मनपसंद रंगों, परिवहन के सबसे आम साधनों, अनुपस्थित छात्रों इत्यादि के विषय में जानकारी प्राप्त कर पाए।)
- चित्रालेखों को पढ़कर हम विभिन्न वर्गों की बारंबारता और उनकी तुलना को तुरंत समझ सकते हैं (उदाहरण के लिए— क्रिकेट, हॉकी आदि)
- चित्रालेख में वर्गों को क्षैतिज अक्ष अथवा उर्ध्वाधर। अक्ष पर रख सकते हैं। प्रत्येक वर्ग के लिए, उस वर्ग की बारंबारता के अनुसार निर्दिष्ट स्तंभों या पंक्तियों में सरल चित्र और प्रतीक बनाए जाते हैं।
- एक **पैमाना** या **कुंजी** (उदाहरण के लिए, ☺ — एक विद्यार्थी अथवा ☺ — 5 विद्यार्थी) को यह दर्शाने के लिए जोड़ते हैं कि प्रत्येक चिह्न या चित्र क्या प्रदर्शित करता है। प्रत्येक चिह्न या चित्र एक या अधिक इकाई को प्रदर्शित कर सकता है।
- एक ऐसे चित्रालेख को बनाना चुनौतीपूर्ण हो सकता है जिसके आँकड़ों की मात्रा अधिक है या उसकी बारंबारता पैमाने के ठीक गुणज न हों।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. दिया गया चित्रालेख मिडिल स्कूल, गिन्नोरी के पुस्तकालय से एक सप्ताह में विद्यार्थियों द्वारा ऋण ली गई पुस्तकों की संख्याओं को दर्शाता है—

दिन	पुस्तकों की संख्या (📖 =1 पुस्तक)
सोमवार	📖 📖 📖 📖 📖
मंगलवार	📖 📖 📖 📖
बुधवार	📖 📖
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	📖 📖 📖 📖 📖
शनिवार	📖 📖 📖 📖 📖 📖 📖 📖

Chapter 4.indd 83 20/09/2024 15:49:36

a. किस दिन न्यूनतम संख्या में पुस्तकें ऋण ली गईं?

b. सप्ताह के दौरान कुल कितनी पुस्तकें ऋण ली गईं?

c. किस दिन अधिकतम संख्या में पुस्तकें ऋण ली गईं, इसका संभव कारण क्या हो सकता है?

2. मगन भाई जामनगर में पतंगें बेचते हैं। निकटवर्ती गाँवों से 6 दुकानदार उनसे पतंगें खरीदने आते हैं। इन 6 दुकानदारों को उनके द्वारा बेची गई पतंगों की संख्याएँ नीचे दी हुई है—

दुकानदार	बेची गई पतंगों की संख्या
चमन	250
रानी	300
रूखसाना	100
जसमीत	450
जेठा लाल	250
पूनम बेन	700

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक चित्रालेख तैयार कीजिए, जिसमें प्रतीक पतंग  से 100 पतंगों को दर्शाया गया हो।

निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए—

a. रानी द्वारा खरीदी गई पतंगों को कितने प्रतीक दर्शाएँगे?

b. किसने अधिकतम संख्या में पतंगें खरीदीं?

c. जसमीत और चमन में से किसने अधिक पतंगें खरीदीं?

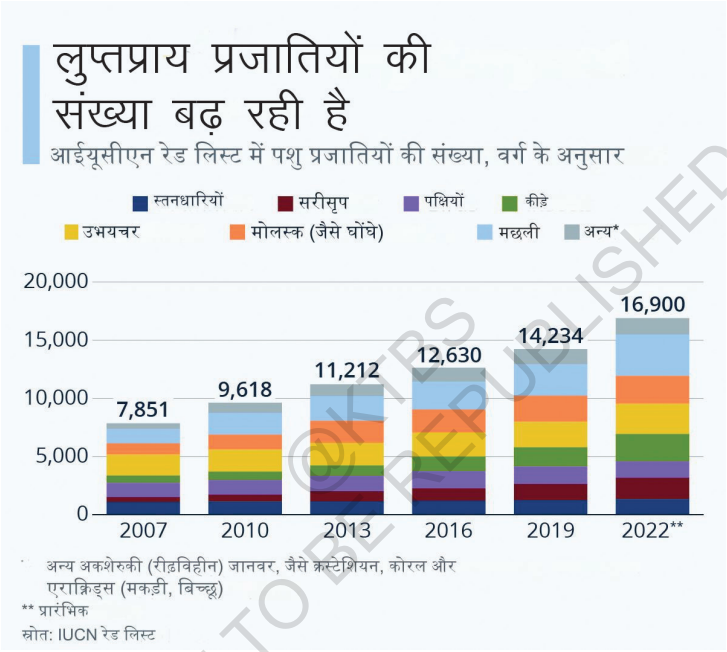
d. रुखसाना कहती है कि पूनम बेन ने रानी द्वारा खरीदी गई पतंगों की संख्या के दुगुने से अधिक पतंगें खरीदीं। क्या वह सही है? क्यों?

4.3 दंड आलेख

क्या आपने टी.वी. या समाचार पत्र में इस प्रकार के आलेख देखे हैं?

Chapter 4.indd 84 20/09/2024 15:49:36

चित्रालेखों की तरह ही **दंड आलेख** भी हमें उच्चतम मान, विभिन्न श्रेणियों के मानों की तुलना करने इत्यादि जैसी सूचनाओं को तुरंत समझने और उनकी व्याख्या करने में सहायता कर सकते हैं। यद्यपि, जब आँकड़ों की मात्रा अधिक होती है तब उन्हें चित्रालेख द्वारा प्रस्तुत करने में न केवल समय अधिक लगता है, बल्कि कभी-कभी कठिन भी हो जाता है। आइए, देखें किस प्रकार इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के माध्यम से प्रस्तुत किया जा सकता है।



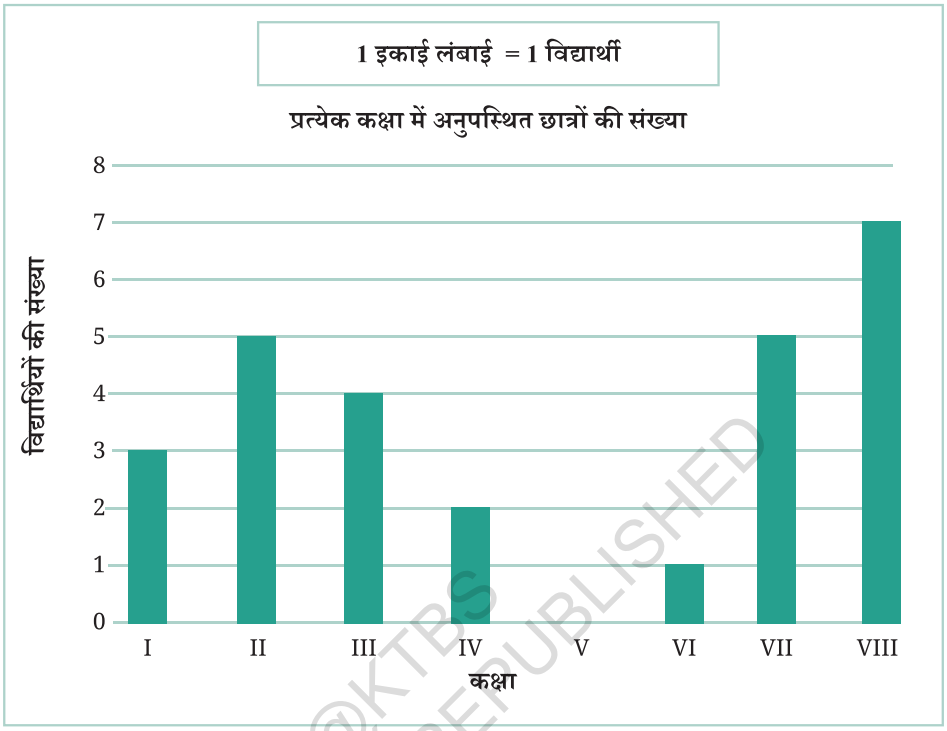
स्रोत— *https://www.statista.com/chart/17122/number-of-threatened-species-red-list/*

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTRS

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	4	2	0	1	5	7

उसने इन्हीं आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा प्रस्तुत किया— आइए, लखनपाल द्वारा सग्रंहित आँकड़ों को लेते हैं, जो किसी एक दिन प्रत्येक कक्षा में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या से संबंधित हैं।

Chapter 4.indd 85 20/09/2024 15:49:36



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अध्यापक टिप्पणी

यदि विद्यार्थियों ने इस ओर ध्यान नहीं दिया है, तो उन्हें समदूरस्थ क्षैतिज रेखाओं के बारे में बताइए। स्पष्ट कीजिए कि बाईं ओर क्रमागत संख्याओं के प्रत्येक युग्म के बीच में समान रिक्त स्थान है।

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दंड आलेख का उपयोग करते हुए दीजिए—

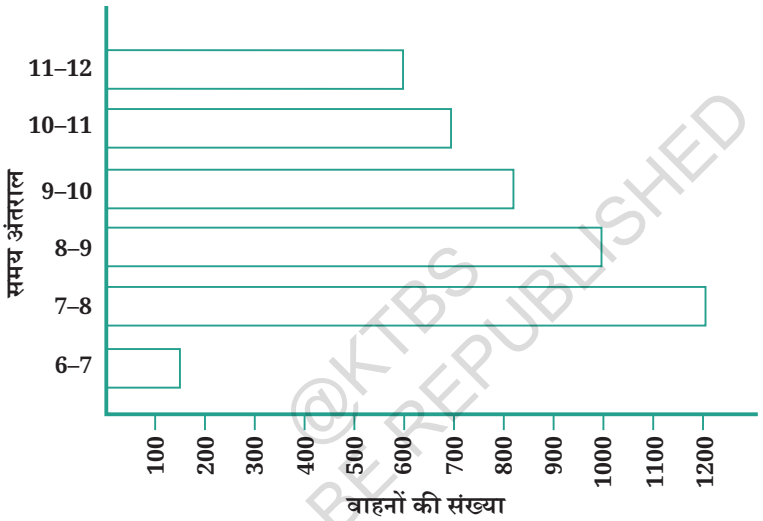
1. कक्षा 2 में उस दिन _____ विद्यार्थी अनुपस्थित थे।
2. किस कक्षा में अधिकतम संख्या में विद्यार्थी अनुपस्थित थे? _____
3. उस दिन किस कक्षा में पूर्ण उपस्थिति थी? _____

दंड आलेखों को बनाते समय, समान चौड़ाई के दंड जिनके बीच दूरी समान हो, क्षैतिज रूप में या ऊर्ध्वाधर रूप में खींचे जा सकते हैं। ऐसे में प्रत्येक दंड की लंबाई या ऊँचाई दी गई संख्या को दर्शाती है।

Chapter 4.indd 86 20/09/2024 15:49:36

जैसा कि हमने चित्रालेखों में देखा था, बारंबारताएँ बड़े होने पर एक पैमाना (स्केल) या कुंजी का उपयोग कर सकते हैं।

आइए, यातायात पुलिस द्वारा एकत्रित किए गए दिल्ली की एक व्यस्त सड़क के चौराहे से होकर गुजरने वाले वाहनों के आँकड़ों पर एक दृष्टि डालें। सुबह 6 बजे से दोपहर 12 बजे तक प्रत्येक घंटे इस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या नीचे दंड आलेख में दर्शाई गई है। लंबाई की 1 इकाई 100 वाहनों को दर्शाती है।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हम देख सकते हैं कि इस चौराहे पर, अधिकतम यातायात सबसे लंबे दंड द्वारा दर्शाया गया है, जिसका समय अंतराल प्रात: 7–8 है। दंड आलेख दर्शाता है कि इस समय चौराहे से होकर 1200 वाहन गए हैं। दूसरा लंबा दंड प्रात: 8–9 के लिए है। इस दौरान इस चौराहे से होकर 1000 वाहन गए हैं। इसी प्रकार, न्यूनतम यातायात सबसे छोटे दंड द्वारा दर्शाया गया है, जिसका समय अंतराल प्रात: 6–7 है। इस दौरान केवल लगभग 150 वाहन ही इस चौराहे से होकर गए हैं। दूसरा छोटा दंड समय अंतराल प्रात: 11 से दोपहर 12 बजे का है, जब चौराहे से 600 वाहन गुजरे हैं।

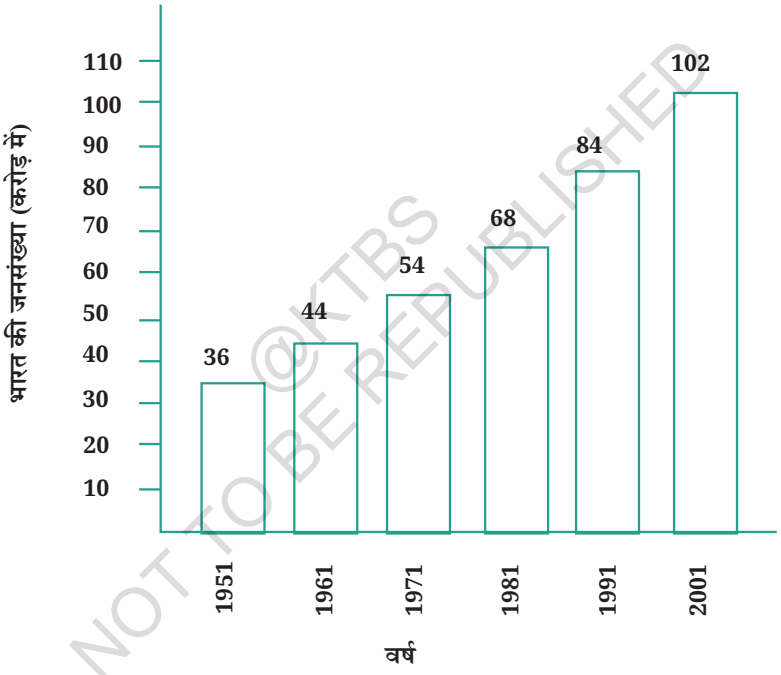
दो घंटे के अंतराल प्रात: 8 से 10 के दौरान इस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या लगभग 1000 + 800 = 1800 वाहन हैं, जो इस दंड आलेख द्वारा दर्शाई गई है।

Chapter 4.indd 87 20/09/2024 15:49:36

आइए, पता लगाएँ

1. प्रात: 6 और दोपहर 12 के बीच उस चौराहे से कुल कितने वाहन गुजरे?
2. आपके विचार से समय प्रात: 6–7 के दौरान और 7–12 बजे दोपहर के बीच अन्य घंटे में, इतना कम यातायात क्यों रहा?
3. आपके विचार से प्रात: 7 और 8 के बीच यातायात अधिकतम क्यों रहा?
4. आपके विचार से प्रात: 8 के बाद 12 बजे दोपहर तक प्रत्येक घंटे में यातायात कम क्यों होता रहा?

उदाहरण—



भारत की जनसंख्या (करोड़ में)

उपरोक्त दंड आलेख 50 वर्षों के अंतराल में प्रत्येक दशक में भारत की जनसंख्या वृद्धि को दर्शाता है। प्रदर्शित की गई संख्याएँ करोड़ों में हैं। यदि आपको एक व्यक्ति को दर्शाने के लिए 1 इकाई लेनी पड़े, तब दंड बनाना संभव नहीं है। अत: हमने एक इकाई का पैमाना 10 करोड़ लिया है। यह दंड आरेख उक्त चित्र में प्रदर्शित है। अत: 5 इकाई का दंड 50 करोड़ तथा 8 इकाई का दंड़ 80 करोड़ प्रदर्शित करता है।

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Chapter 4.indd 88 20/09/2024 15:49:36

- इस दंड आरेख के आधार पर आप अपने मित्रों से कौन से प्रश्न पूछना चाहेंगे?
- 50 वर्षों में भारत की जनसंख्या में कितनी वृद्धि हुई, प्रत्येक दशक में जनसंख्या वृद्धि कितनी थी?

4.4 दंड आलेख खींचना

पिछले एक उदाहरण में, श्री नीलेश ने अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की पसंद की मिठाइयों के लिए, एक बारंबारता सारणी तैयार की थी। आइए, इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख तैयार करें—

1. सर्वप्रथम, हम एक क्षैतिज रेखा और एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं। क्षैतिज रेखा के अनुदिश हम प्रत्येक मिठाई का नाम लिखेंगे, तथा रखेंगे जिन पर दंड उनकी संगत बारंबारताओं के अनुसार खींचे जाएँगे। ऊर्ध्वाधर रेखा पर हम विद्यार्थियों की संख्या दर्शाने वाली बारंबारताएँ लिखेंगे।

मिठाई	विद्यार्थियों की संख्या
जलेबी	6
गुलाब जामुन	9
गुजियाँ	13
बर्फी	3
रसगुल्ला	7

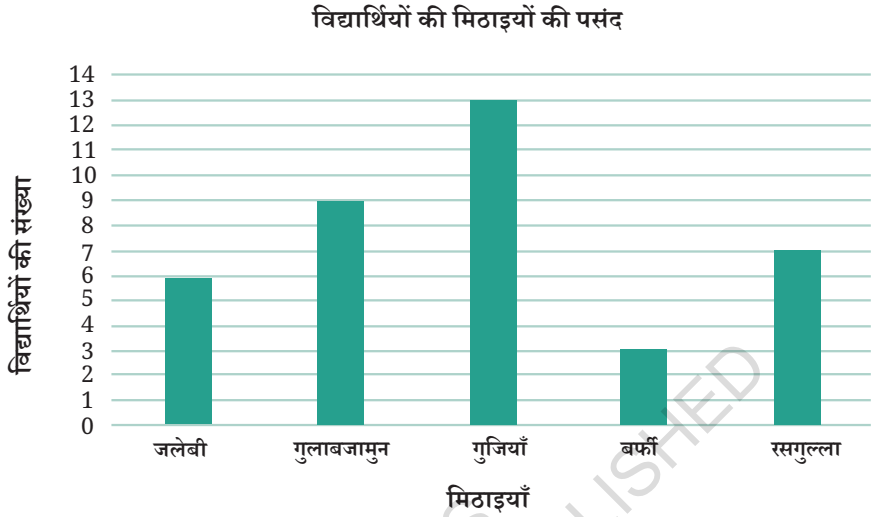
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. हमें एक पैमाना अवश्य चुनना चाहिए। इसका अर्थ है कि हमें यह निर्णय लेना चाहिए कि एक दंड की, एक इकाई लंबाई से कितने विद्यार्थी दर्शाए जाएँ ताकि आलेख हमारे कागज पर अच्छे प्रकार से खींचा जा सके। यहाँ, हम 1 इकाई लंबाई द्वारा 1 विद्यार्थी को दर्शाएँगे।

3. जलेबी के लिए, हम 6 इकाई की ऊँचाई (जो मिठाई जलेबी की बारंबारता है) का एक दंड खींचेंगे। इसी प्रकार, अन्य मिठाइयों के लिए भी हम उन्हीं ऊँचाइयों के दंड खींचेंगे, जितनी उनकी बारंबारताएँ हैं।

Chapter 4.indd 89 03/10/2024 15:06:28

4. इस प्रकार, हमें नीचे दर्शाए अनुसार दंड आलेख प्राप्त होता है—



जब बारंबारताएँ बड़ी होती हैं, तो हम 1 इकाई लंबाई = 1 संख्या (बारंबारता) का उपयोग नहीं कर सकते हैं, तब हमें एक भिन्न पैमाने को चुनने की आवश्यकता होती है, जैसा कि हमने चित्रालेखों की स्थिति में किया था।

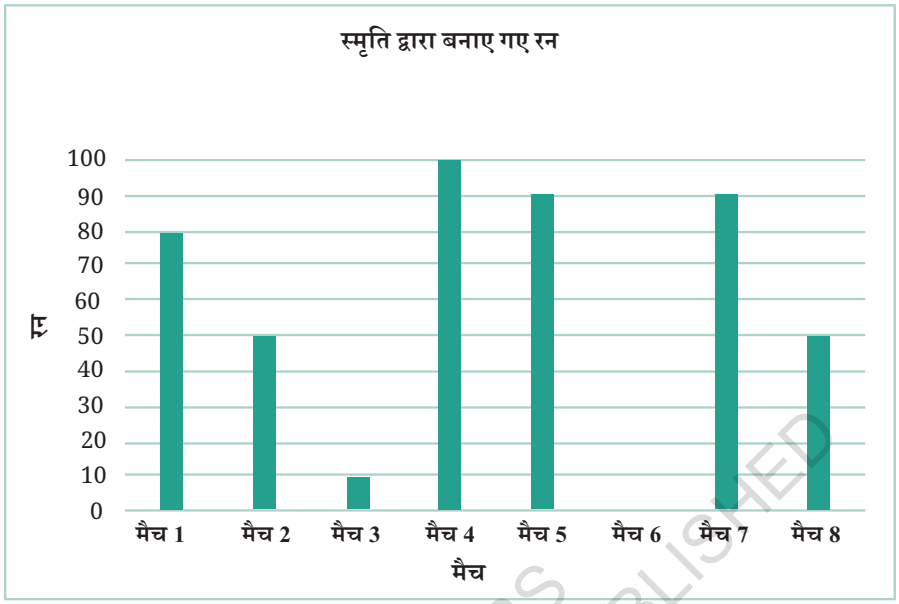
उदाहरण— स्मृति द्वारा 8 मैचों में बनाए गए रनों की संख्या नीचे सारणी में दी गई है—

मैच	मैच 1	मैच 2	मैच 3	मैच 4	मैच 5	मैच 6	मैच 7	मैच 8
रन	80	50	10	100	90	0	90	50

इस उदाहरण में, न्यूनतम स्कोर 0 है तथा अधिकतम स्कोर 100 है। 1 इकाई लंबाई = 1 रन का पैमाना लेने का अर्थ यह होगा कि हमें 1 के कदमों (steps) में 0 से 100 रनों को लेना होगा। यह अनावश्यक रूप से जटिल होगा। आइए, इसके स्थान पर हम 1 इकाई लंबाई = 10 रन लेते हैं। हम इस पैमाने को ऊर्ध्वाधर रेखा पर अंकित करते हैं तथा प्रत्येक मैच के स्कोर के अनुसार दंडों को खींचते हैं। उपर्युक्त आँकड़ों को दर्शाने वाला दंड आलेख हमें अगले पृष्ठ पर प्राप्त होता है—

@KIRS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 90 20/09/2024 15:49:36



उदाहरण— निम्नलिखित सारणी इमरान के परिवार की विभिन्न मदों में मासिक व्यय दर्शाती है—

मद	व्यय (₹ में)
मकान किराया	3000
भोजन	3400
शिक्षा	800
बिजली	400
परिवहन	600
विविध	1200

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इन आँकड़ों को दंड आलेख के रूप में दर्शाने के निम्नलिखित चरण हैं—

- दो लंब रेखाएँ खींचिए— एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर।
- क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'मद' अंकित कीजिए और उनके बीच में समान दूरी रखिए। ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय अंकित कीजिए।

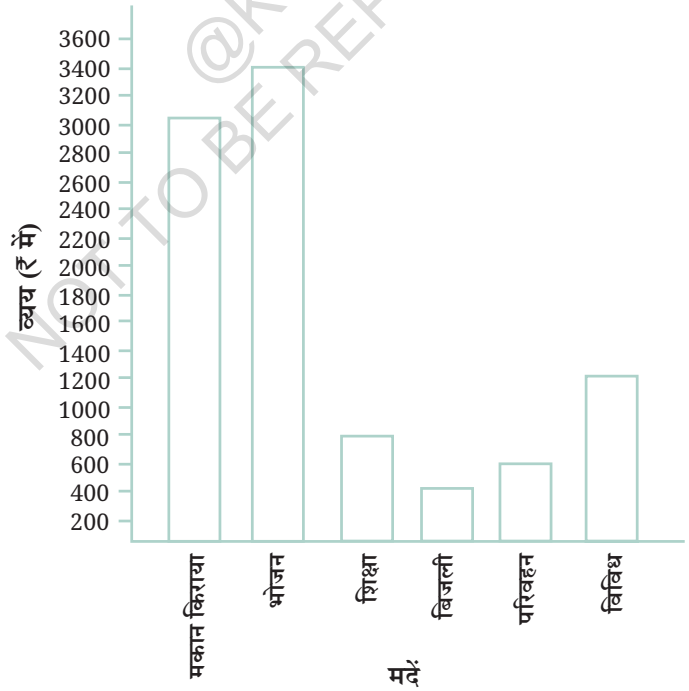
Chapter 4.indd 91 20/09/2024 15:49:37

- समान चौड़ाई के दंड इस प्रकार बनाइए कि उनके बीच में समान (रिक्त स्थान) दूरी रहे।
- ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक उपयुक्त पैमाना चुनिए। मान लीजिए कि 1 इकाई लंबाई = ₹200 है तथा फिर संगत मानों (₹200, ₹400) इत्यादि को ऊर्ध्वाधर रेखा पर अंकित करके लिख दीजिए।

अंतत: विभिन्न मदों के लिए दंडों की ऊँचाईयाँ नीचे दर्शाए अनुसार परिकलित कीजिए—

मकान किराया	3000÷200	15 इकाई
भोजन	3400÷200	17 इकाई
शिक्षा	800÷200	4 इकाई
बिजली	400÷200	2 इकाई
परिवहन	600÷200	3 इकाई
विविध	1200÷200	6 इकाई

उपरोक्त चरणों के आधार पर नीचे दिया गया दंड आलेख प्राप्त होगा—



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

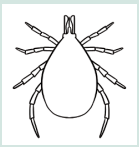
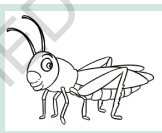
Chapter 4.indd 92 20/09/2024 15:49:37

दंड आलेख का प्रयोग निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर देने में कीजिए—

1. किस मद में इमरान का परिवार सबसे अधिक और उससे कम व्यय करता है?
2. क्या बिजली पर व्यय, शिक्षा पर व्यय का आधा है?
3. क्या शिक्षा पर व्यय, भोजन पर व्यय का एक-चौथाई से कम है?

आइए, पता लगाएँ

1. सामंथा ने एक चाय बागान का भ्रमण किया तथा वहाँ देखे गए कीट पतंगों के आँकड़े संग्रहित किए—

				
घुन	झांझा (सूंड)	भृंग (झींगुर)	तितलियाँ	टिड्डा
6	10	5	3	2

इन आँकड़ों को दर्शाने के लिए एक दंड आलेख बनाने में उसकी सहायता कीजिए।

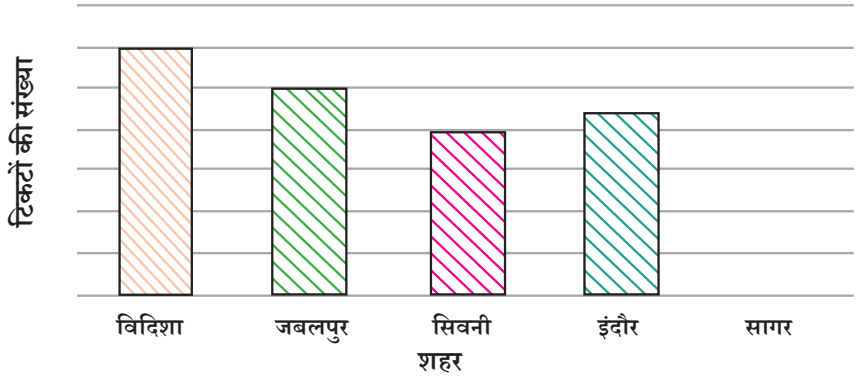
2. पूजा ने 2 घंटे की अवधि के दौरान भोपाल रेलवे स्टेशन पर, मध्य प्रदेश के कुछ भिन्न शहरों के लिए बेचे गए टिकटों की संख्याओं के आँकड़े संग्रहित किए—

शहर	विदिशा	जबलपुर	सिवनी	इंदौर	सागर
टिकटों की संख्या	24	20	16	28	16

उन्होंने अपने विद्यार्थियों से चर्चा करने के लिए इन आँकड़ों का बोर्ड पर एक दंड आलेख तैयार किया, परंतु इस आलेख का कुछ भाग किसी ने मिटा दिया।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 93 20/09/2024 15:49:37



a. दंड के ऊपर विदिशा के लिए बेचे गए टिकटों की संख्या लिखिए।

b. दंड के ऊपर जबलपुर के लिए बेचे गए टिकटों की संख्या को लिखिए।

c. विदिशा का दंड 6 इकाई लंबाइयों तक है तथा जबलपुर का दंड 5 इकाई लंबाइयों तक है। इस आलेख के लिए पैमाना (स्केल) क्या है?

d. सागर के लिए सही दंड खींचिए।

e. स्केल (पैमाने) को सम्मिलित करते हुए ऊर्ध्वाधर रेखा पर सही संख्या अंकित कीजिए।

f. क्या आलेख में सिवनी और इंदौर के लिए खींचे गए दंड सही हैं? यदि नहीं तो सही दंड खींचिए।

3. चीनू ने प्रात: 9 से 10 तक अपने घर के सामने सड़क पर जाने वाले परिवहन के विभिन्न साधनों की सूची बनाई—

मोटरसाइकिल	कार	मोटरसाइकिल	बस	मोटरसाइकिल	मोटरसाइकिल
मोटरसाइकिल	ऑटो	साइकिल	बैल गाड़ी	साइकिल	ऑटो
कार	स्कूटर	कार	ऑटो	साइकिल	मोटरसाइकिल
कार	ऑटो	मोटरसाइकिल	स्कूटर	मोटरसाइकिल	कार
साइकिल	स्कूटर	साइकिल	स्कूटर	मोटरसाइकिल	बस
ऑटो	ऑटो	मोटरसाइकिल	साइकिल	बस	मोटरसाइकिल
साइकिल	स्कूटर	बस	स्कूटर	ऑटो	मोटरसाइकिल
स्कूटर	साइकिल	मोटरसाइकिल	बैल गाड़ी	ऑटो	स्कूटर
कार	स्कूटर				

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 94 20/09/2024 15:49:37

a. दिए गए आँकड़ों के लिए एक बारंबारता वितरण सारणी तैयार कीजिए।

b. परिवहन के कौन-से साधन का सबसे अधिक प्रयोग किया गया?

c. यदि आप इन आँकड़ों को एकत्रित करने के लिए वहाँ होते, तो आप यह कार्य किस प्रकार करते? संबंधित चरणों या प्रक्रिया को लिखिए।

4. एक पासे को 30 बार फेंकिये तथा प्रत्येक बार प्राप्त की गई संख्या को अंकित कीजिए। मिलान चिह्नों का उपयोग करते हुए, इनके लिए एक बारंबारता वितरण सारणी तैयार कीजिए। अब वह संख्या ज्ञात कीजिए—

a. जो न्यूनतम बार आई है।

b. जो अधिकतम बार आई है।

c. जो समान बार आई हैं।

5. जसप्रीत बुमराह द्वारा उसके पिछले 30 मैचों में लिए गए विकेटों के आँकड़ों की एक बारंबारता वितरण सारणी फैज ने तैयार की।

लिए गए विकेट	मैचों की संख्या
0	2
1	4
2	6
3	8
4	3
5	5
6	1
7	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

a. यह सारणी क्या सूचना प्रदान करती है?

b. इस सारणी का शीर्षक क्या हो सकता है?

c. इस सारणी में किसने आपका ध्यान आकर्षित किया?

Chapter 4.indd 95 20/09/2024 15:49:38

d. कितने मैचों में बुमराह ने 4 विकेट लिए?

e. मयंक कहता है कि "यदि हम उसके द्वारा पिछले 30 मैचों में लिए गए कुल विकेटों की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं, तो हमें संख्याओं 0, 1, 2, 3, …., 7 तक को जोड़ना पड़ेगा।" क्या इस प्रक्रिया में मयंक लिए गए कुल विकटों की संख्या ज्ञात कर पाएगा? क्यों?

f. अपने पिछले 30 मैचों में जसप्रीत बुमराह ने कुल कितने विकेट लिए हैं? इनकी सही संख्या सारणी से आप कैसे ज्ञात करेंगे?

6. निम्नलिखित चित्रालेख पाँच विभिन्न गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या को दर्शाता है—

गाँव	ट्रैक्टरों की संख्या (= 1 ट्रैक्टर)
गाँव A	
गाँव B	
गाँव C	
गाँव D	
गाँव E	

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इस चित्रालेख को देखिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

a. किस गाँव में न्यूनतम संख्या में ट्रैक्टर हैं?

b. किस गाँव में अधिकतम संख्या में ट्रैक्टर हैं?

c. गाँव B की तुलना में गाँव C में कितने ट्रैक्टर अधिक हैं?

d. कोमल कहती है, "गाँव D में ट्रैक्टरों की संख्या गाँव E के ट्रैक्टरों की संख्या की आधी है।" क्या वह सही है?

Chapter 4.indd 96 20/09/2024 15:49:38

7. किसी विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में छात्राओं की संख्या एक चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है—

कक्षा	छात्राओं की संख्या (= 4 छात्राएँ)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इस चित्रालेख को देखिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

a. किस कक्षा में छात्राओं की संख्या न्यूनतम है?

b. कक्षा 5 और 6 की छात्राओं की संख्याओं के बीच का अंतर कितना है?

c. यदि कक्षा 2 में, दो और छात्राओं को प्रवेश मिला, तो आलेख में किस प्रकार का परिवर्तन होगा?

d. कक्षा 7 में कितनी छात्राएँ हैं?

Chapter 4.indd 97 20/09/2024 15:49:48

8. मुधोल हाउंड (भारतीय कुत्तों की नस्ल का एक प्रकार) अधिकतर उत्तरी कर्नाटक के बागलकोट और विजयपुरा जिलों में पाए जाते हैं। सरकार ने इस नस्ल को बचाने के लिए एक पहल की है, जिसमें उन लोगों को सहायता प्रदान की जा रही है, जो इस प्रकार के कुत्तों को पालते हैं। इसी पहल के कारण, ऐसे कुत्तों की संख्या में वृद्धि हुई। कर्नाटक के 6 गाँवों में मुधोल कुत्तों की संख्याएँ इस प्रकार है—

   गाँव A–18, गाँव B–36, गाँव C–12, गाँव D–48, गाँव E–18, गाँव F–24

   उपरोक्त के लिए, एक चित्रालेख तैयार कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

   a. इस चित्रालेख को बनाने के लिए, कौन-सा पैमाना या कुंजी उपयुक्त रहेगा?

   b. गाँव B के कुत्तों की संख्या को दर्शाने के लिए, आप कितने प्रतीकों का उपयोग करेंगे?

   c. कामिनी ने कहा कि गाँव B और गाँव D के कुत्तों की कुल संख्या अन्य 4 गाँवों की कुल संख्या से अधिक होगी। क्या वह सही है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

9. 120 विद्यालयी विद्यार्थियों का यह ज्ञात करने के लिए एक सर्वेक्षण किया गया कि अपने खाली समय में वे कौन-सा क्रियाकलाप करना पसंद करते हैं—

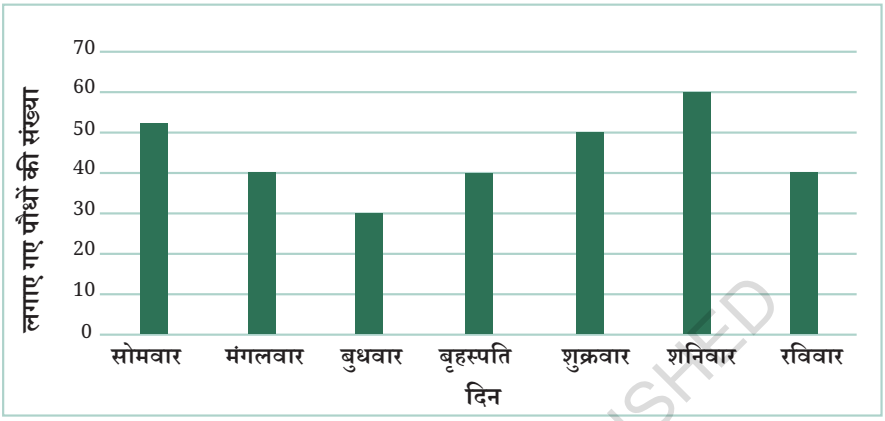
पसंदीदा क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की पुस्तकें पढ़ना	30
टीवी देखना	20
संगीत सुनना	10
पेंटिंग करना	15

   एक इकाई लंबाई = 5 विद्यार्थियों का स्केल (पैमाना) लेकर उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया गया है?

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

Chapter 4.indd 98 20/09/2024 15:49:49

10. एक प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थियों और अध्यापकों ने अपने विद्यालय के प्रांगण तथा अपने पास के एक गाँव में जुलाई के प्रथम सप्ताह में पौधे लगाने का निर्णय लिया। उनके द्वारा लगाए गए पौधों का विवरण नीचे दिए गए दंड आरेख में वर्णित है—



a. बुधवार और बृहस्पतिवार को लगाए गए पौधों की कुल संख्या _____ है।

b. पूरे सप्ताह के दौरान लगाए गए पौधों की कुल संख्या _____ है।

c. अधिकतम संख्या में पौधे_____ को लगाए गए तथा न्यूनतम संख्या में पौधे _____ को लगाए गए।

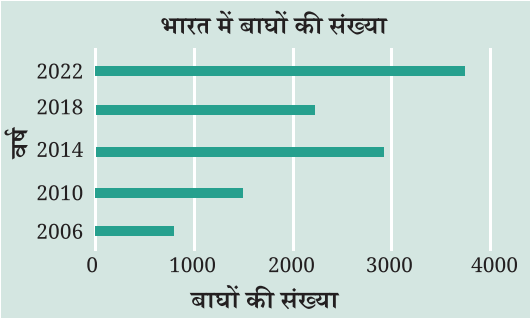
आपके अनुसार इस स्थिति का क्या कारण हो सकता है? सप्ताह के कुछ विशेष दिनों में अधिक पौधे क्यों लगाए गए तथा अन्य दिनों में कम पौधे क्यों लगाए गए? क्या आप इसके संभावित कारणों या उनके स्पष्टीकरण के विषय में कुछ सोच सकते हैं? आप किस प्रकार यह प्रयास करेंगे और पता लगाएँगे कि आपके स्पष्टीकरण सही हैं?

11. भारत में बाघों (टाइगर्स) की संख्या 1900 से 1970 के बीच काफी कम हो गई। भारत में बाघों के बचाव के लिए 1973 में 'प्रोजेक्ट टाइगर' प्रारंभ किया गया। 2006 से प्रारंभ करते हुए, भारत में बाघों की यथार्थ संख्याएँ ज्ञात होना प्रारंभ हो गया। शगुफ्ता और दिव्या ने भारत में 2006 और 2022 के बीच बाघों की संख्याओं के विषय में उपलब्ध सूचनाओं की जानकारी प्राप्त की। सूचनाओं को प्रत्येक चार वर्ष के अंतराल के बाद अंकित किया। उन्होंने इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता वितरण सारणी बनाई तथा इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए एक दंड आलेख बनाया, परंतु इस आलेख में कुछ गलतियाँ हो गई हैं। क्या आप इन गलतियों का पता लगा सकते हैं तथा इन्हें ठीक कर सकते हैं?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 99 20/09/2024 15:49:49

वर्ष	बाघों की संख्या (लगभग)
2006	1400
2010	1700
2014	2200
2018	3000
2022	3700



- चित्रालेख की ही तरह, दंड आलेख भी आँकड़ों को दर्शाने की सुंदर चित्रीय विधि है। ये समान दूरस्थ दंडों के माध्यम से आँकड़ों को दर्शाते हैं, जिनकी चौड़ाई एक समान होती है। इन दंडों की लंबाइयाँ या ऊँचाइयाँ विभिन्न श्रेणियों की बारंबारताएँ होती हैं।
- प्रत्येक श्रेणी को एक दंड द्वारा दर्शाया जाता है, जिसकी लंबाई या ऊँचाई संगत बारंबारता (उदाहरणत: व्यय) या राशि (उदाहरणत: रन) को प्रदर्शित करती है।
- दंडों के बीच में समान दूरी यह इंगित करती है कि वे स्वतंत्र खड़े हैं तथा ये समान श्रेणियों को दर्शाते हैं।
- बारंबारता सारणी की तुलना में, दंड आलेख अधिक तेजी से आँकड़ों की व्याख्या करने में सहायक होते हैं। एक दंड आलेख को पढ़ने से, हम विभिन्न श्रेणियों (वर्गों) के आँकड़ों की एक ही दृष्टि में तुलना कर सकते हैं।
- दंड आलेख के लिए, उसके आँकड़ों में सम्मिलित न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों को देखते हुए पैमाने का चयन करना चाहिए (उदाहरणत:— 1 इकाई लंबाई = 1 विद्यार्थी अथवा 1 इकाई लंबाई = ₹ 200) जिससे परिणामत: प्राप्त दंड आलेख कागज या पोस्टर पर ठीक से प्रदर्शित हो सके और देखने योग्य हो। पैमाने के अनुसार इकाई लंबाइयों का चिह्नकरण शून्य से प्रारंभ होना चाहिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अध्यापक टिप्पणी

आँकड़ा प्रबंधन के अधिगम (learning) का मुख्य बिंदु यह है कि आँकड़ों का प्रबंधन कैसे किया जाए, जिससे विद्यार्थी किसी परिकल्पना की जाँच करने या विशिष्ट निर्णय लेने के लिए, एक विशिष्ट प्रश्न या जाँच के उत्तरों को ज्ञात करने में समर्थ हो जाएँ। इसी बिंदु को आँकड़ों के संग्रह, संगठन और विश्लेषण के अभ्यास अवसरों को प्रदान करते समय ध्यान रखा जाना चाहिए।

Chapter 4.indd 100 20/09/2024 15:49:49

4.5 कलात्मक और सौंदर्यात्मक विचार

पिछले अनुच्छेद में वर्णन किए गए चरणों के अतिरिक्त, आँकड़ों को चित्रीय रूप में दर्शाने के लिए कुछ अन्य अधिक कलात्मक और सौंदर्यात्मक पहलुओं पर विचार किया जा सकता है, जिससे वे अधिक प्रभावशाली बन जाएँ। जब आँकड़ों को दृश्य के रूप में प्रदर्शित करने के लिए दंड आलेख, चित्रालेख आदि का प्रयोग किया जाता है तब यह ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि इन आँकड़ों को इच्छित स्थान पर उचित प्रकार से रखा जाए। उदाहरणार्थ, जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि यह कार्य उपयुक्त पैमाना चुनकर किया जा सकता है। यह भी वाँछनीय है कि आँकड़े दिखने में आकर्षक और सरलता से समझने योग्य हो, जिससे उसे देखने वाला उससे दी जाने वाली सूचना को आसानी से समझ सके।

आइए, एक उदाहरण पर विचार करें। यहाँ एक सारणी दी जा रही है, जिसमें प्रत्येक महाद्वीप के सबसे ऊँचे पर्वत के नाम के साथ उसकी संगत ऊँचाई मीटर में दी गई हैं—

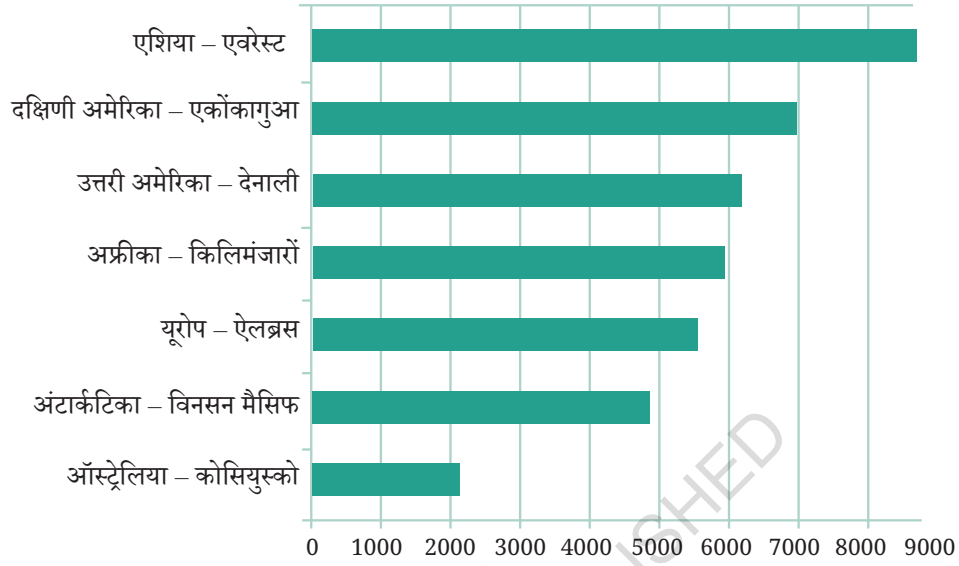
महाद्वीप	एशिया	दक्षिणी अमेरिका	उत्तरी अमेरिका	अफ्रीका	यूरोप	अंटार्कटिका	ऑस्ट्रेलिया
सबसे ऊँचे पर्वत	एवरेस्ट	एकोंकागुआ	देनाली	किलिमंजारो	ऐलब्रस	विनसन मैसिफ	कोसियुस्को
ऊँचाई	8848 मी	6962 मी	6194 मी	5895 मी	5642 मी	4892 मी	2228 मी

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

माउंट एवरेस्ट, माउंट कोसियुस्को से कितना ऊँचा है? क्या माउंट देनाली और माउंट किलिमंजारों की ऊँचाइयों में बहुत अधिक अंतर है? इन तथ्यों को संख्याओं की सारणी से देखना इतना सरल नहीं है।

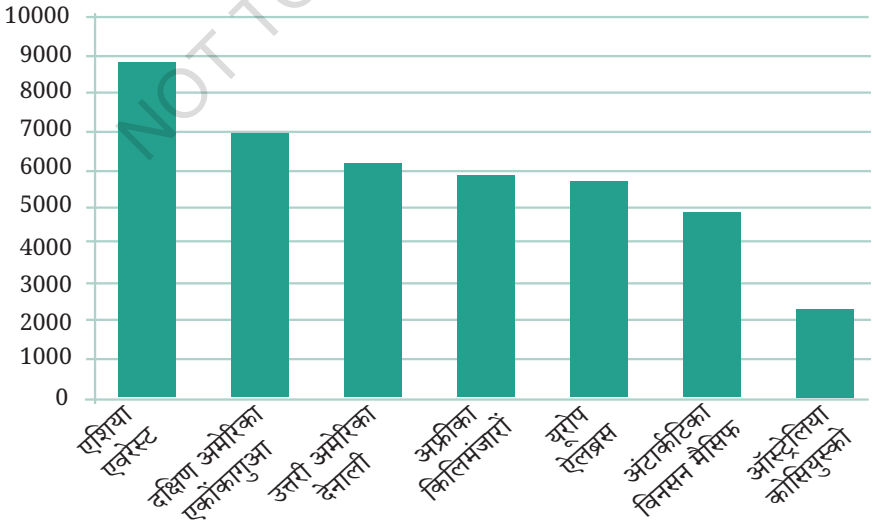
जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, हम संख्याओं की इस सारणी को एक दंड आलेख के रूप में भी दर्शा सकते हैं, जैसा कि पृष्ठ संख्या 102 पर दर्शाया गया है। यहाँ प्रत्येक मान को एक क्षैतिज दंड के रूप प्रदर्शित किया गया है। ये स्वयं के द्वारा निरूपित संख्याओं के अनुसार लंबे या छोटे हैं। इनसे एक ही दृष्टि में इन पर्वतों की ऊँचाइयों की तुलना करना सरल हो जाता है।

Chapter 4.indd 101 20/09/2024 15:49:49



ये दंड ऊचाइयाँ दर्शाते हैं। अत: इस चित्र को इस प्रकार घुमाया जाए कि ये दंड पर्वत ऊर्ध्वाधर हो जाएँ। इस तरह ये दंड पर्वत अधिक ध्यानर्किषत एवं समझने में सरल होंगे। ऊर्ध्वाधर दंडों वाला दंड आलेख, स्तंभ आलेख (कॉलम ग्राफ) भी कहलाता है। स्तंभ में खंभे (पिर्लस) हैं जिन्हें आप किसी भवन में छत को टिकाए रखते हुए देख सकते हैं।

नीचे इन ऊँचे पर्वतों की सारणी के लिए एक स्तंभ आलेख दिया गया है। इस स्तंभ आलेख से, इन पर्वतों की ऊँचाइयों की तुलना करना तथा इनका चित्रण करना सरल हो जाता है।



© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 102 20/09/2024 15:49:49

सामान्यत: आँकड़ों को चित्रीय रूप में दर्शाना अधिक सहज एवं विचारोत्तेजक है, जिन ऊँचाइयों को भूमि तल से ऊपर की ओर मापा जाता है उन्हें ऊर्ध्वाधर दंडों या स्तंभों द्वारा दर्शाना अधिक उपयुक्त है। इसी प्रकार, वे लंबाइयाँ जो भूमि के समांतर हैं (उदाहरण— पृथ्वी पर किन्हीं स्थानों के मध्य दूरियाँ), उन्हें प्राय: क्षैतिज दंडों वाले दंड आलेखों से दर्शाना अधिक उपयुक्त है।

आइए, पता लगाएँ

1. यदि आप अपने विद्यालय की प्रत्येक कक्षा के सबसे लंबे बच्चों की लंबाइयों के आँकड़ों को चित्रीय रूप से दर्शाना चाहते हैं, तो क्या आप क्षैतिज दंडों वाले आलेख का उपयोग करना चाहेंगे या ऊर्ध्वाधर दंडों वाले आलेख का? क्यों?
2. यदि आप प्रत्येक महाद्वीप में सबसे लंबी नदियों और उनकी लंबाइयों की एक सारणी बना रहे हैं, तो आप ऊर्ध्वाधर दंडों वाले या क्षैतिज दंडों वाले दंड आलेख में से किस को प्राथमिकता देंगे? क्यों? इस सूचना को प्राप्त करने का प्रयास कीजिए तथा फिर संगत सारणी और दंड आलेख बनाइए। किस महाद्वीप में सबसे लंबी नदियाँ हैं?

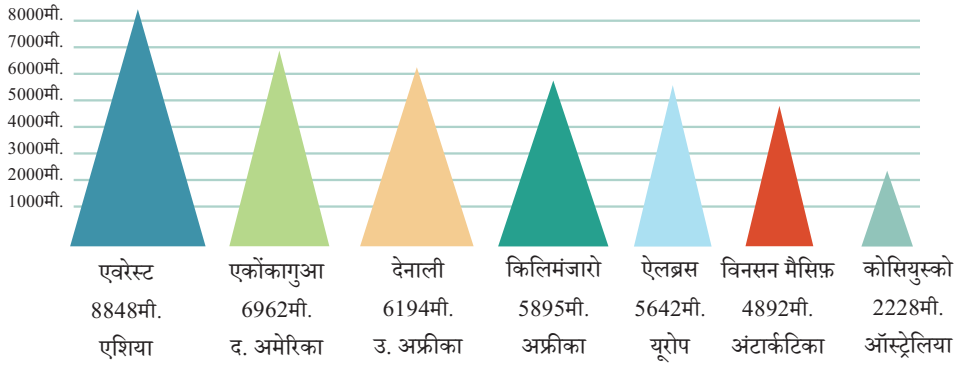
इन्फोग्राफिक्स

जब दंड आलेखों जैसे आँकड़ों के चित्रीयकरणों को अधिक विस्तृत कलात्मक और चित्रीयकल्पना के साथ और अधिक सुंदर बना दिया जाता है, तो ये सूचना ग्राफिक्स **(Information graphics)** या संक्षेप में **इन्फोग्राफिक्स (Infographics)** कहलाती है। इन्फोग्राफिक्स का उद्देश्य आकर्षक दृश्यों का उपयोग करके सूचना को और अधिक स्पष्ट और शीघ्रता से, आकर्षक तरीके से संप्रेषित करना है।

उदाहरण के रूप में उपर्युक्त उल्लेखित प्रत्येक महाद्वीप के सबसे ऊँचे पर्वतों की सूची को देखते हैं। हमने पर्वतों को और अधिक सूचनीय बनाने के लिए क्षैतिज के स्थान पर ऊर्ध्वाधर दंडों का प्रयोग किया। परंतु हम आयत के स्थान पर त्रिभुज का प्रयोग कर सकते हैं, जो कि पर्वत के समान दिखाई देते है। साथ ही हम इसमें रंगों का भी संयोजन कर सकते हैं। उदाहरणार्थ—

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 103 20/09/2024 15:49:49



यह इन्फोग्राफिक प्रथम दृष्टि में अधिक आकर्षक और सुझावित दिखाई देता प्रतीत हो सकता है, वहीं इसमें कुछ कठिनाइयाँ भी होती हैं। पहले दंड आलेख का हमारा लक्ष्य विभिन्न पर्वतों की ऊँचाइयों को उपयुक्त ऊँचाइयों के दंडों के माध्यम से दर्शाया है, परंतु इन दंडों की चौड़ाइयाँ समान होनी चाहिए। समान चौड़ाईयों का उपयोग करने का उद्देश्य केवल यह स्पष्ट करना था कि हम केवल ऊँचाइयों की तुलना कर रहे है। परंतु इस इन्फोग्राफिक में ऊँचे त्रिभुज चौड़े भी अधिक हैं। क्या ऊँचे पर्वत सदैव चौड़े होते हैं? यह इन्फोग्राफिक एक अतिरिक्त सूचना भी दे रहा है, जो भ्रामक हो सकती है या गलत भी हो सकती है। अकस्मात् कभी-कभी अधिक आकर्षक चित्र सूचना के स्तर पर भ्रामक भी कर सकते हैं।

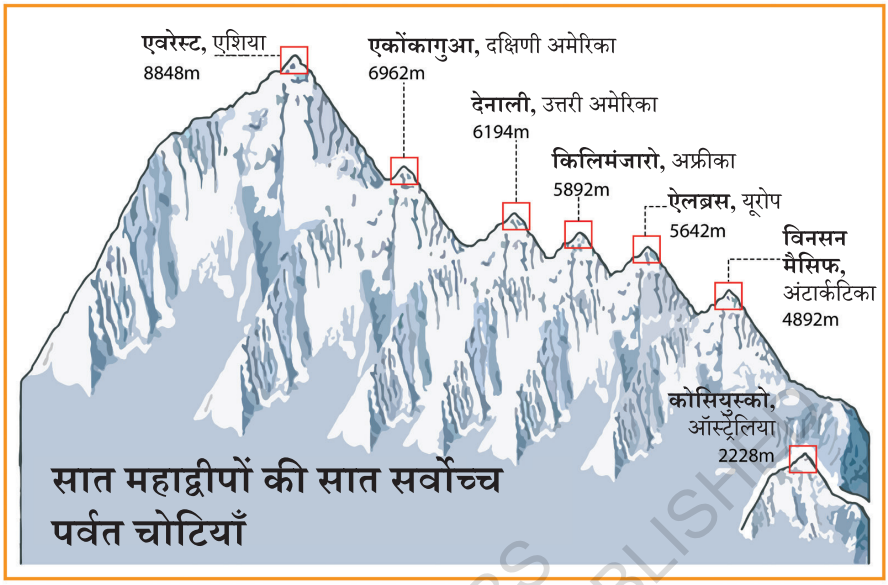
इस विचार को और आगे बढ़ाते हुए तथा आलेख को चित्रीय रूप से और अधिक उत्प्रेरक और सांकेतिक बनाने के लिए, हम इन पर्वतों के आकारों में और अधिक परिवर्तन कर सकते हैं, ताकि वे और पर्वतों जैसे दिखें इसके साथ ही ऊँचाइयों को वही रखते हुए अन्य विवरण भी जोड़ सकते हैं। उदाहरणत: हम एक काल्पनिक पर्वत-शृंखला की रचना कर सकते हैं, जिसमें ये सभी पर्वत सम्मिलित हों।

क्या अगले पृष्ठ पर दिया गया इन्फोग्राफिक समान चौड़ाई वाले आयताकार स्तंभों वाले दंड आलेख से उत्तम है? ये पर्वत अधिक वास्तविक प्रतीत होते हैं, परंतु क्या यह चित्र सही है?

उदाहरणार्थ— एवरेस्ट, ऐलब्रस की तुलना में दुगुना लंबा प्रतीत होता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 104 20/09/2024 15:49:49



5642×2 क्या है?

आँकड़ों को दृश्य रूप से आकर्षक रूप में प्रस्तुत करते हुए, हमें सावधान रहना चाहिए कि जो चित्र हम प्रदर्शित कर रहे हैं, कहीं वे हमें तथ्यों के विषय में गलत जानकारी तो प्रदान नहीं कर रहे हैं।

सामान्यत:, इन्फोग्राफिक्स को बनाते या पढ़ते समय सावधानी रखना महत्वपूर्ण है, ताकि हम अपने वाँछित श्रोताओं को भ्रमित नहीं करें और न ही स्वयं भ्रमित हों।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- तथ्यों, संख्याओं, मापनों, प्रेक्षणों या वस्तुओं के अन्य विवरण जो उन वस्तुओं के बारे में सूचना प्रदान करते हैं, **आँकड़े** कहलाते हैं।
- सरलतम रूप से विश्लेषण और व्याख्या करने के लिए, आँकड़ों को मिलान चिह्नों का उपयोग करके एक सारणीबद्ध रूप में संगठित किया जा सकता है।
- विशिष्ट मान, मापन अथवा प्रेक्षण जितनी बार प्रकट होते हैं, वह संख्या उनकी **बारंबारता** कहलाती है।

Chapter 4.indd 105 20/09/2024 15:49:52

- **चित्रालेख** आँकडों को चित्रों/वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में दर्शाते हैं। प्रत्येक चित्र एक बारंबारता को दर्शाता है, जो 1 या 1 से अधिक हो सकती है। इसी को चित्रालेख का **पैमाना** या **स्केल** कहा जाता है तथा इसे अवश्य ही निर्दिष्ट किया जाना चाहिए।
- **दंड आलेखों** में समान चौड़ाई के दंड होते हैं, जिनमें लंबाई या ऊँचाई उनके प्रकट होने की बारंबारता सूचित की जाती है। लंबाई या ऊँचाई को बारंबारता में बदलने वाले **स्केल** को पुनः निर्दिष्ट किया जाना चाहिए।
- आँकड़ों के विषय में सही और प्रभावी वाँछित सूचनाएँ देने के लिए तथा आलेख को चित्रीय रूप से आकर्षक बनाने के लिए, चित्रालेख या दंड आलेख के लिए एक उपयुक्त पैमाना चुनना महत्वपूर्ण है।
- एक आलेख के अन्य पहलू भी उसके प्रभावीकरण और चित्रीय आकर्षण में योगदान प्रदान करते हैं, जैसे कि किस प्रकार रंगों का उपयोग किया गया है, साथ में कौन-कौन से चित्र खींचे गए हैं तथा यह कि क्या दंड क्षैतिज हैं या उर्ध्वाधर है। ये पहलू आँकड़ा प्रबंधन प्रस्तुतिकरण के कलात्मक और सौंदर्यात्मक पक्षों के संगत हैं।
- यद्यपि, आँकडों के चित्रीय प्रस्तुतिकरण को अधिक आकर्षक या फैंसी (fancy) बनाना कभी-कभी भ्रामक होकर गलत धारणा पर पहुँचा सकता है।
- चित्रालेखों और दंड आलेखों को सही पढ़ने से, हम प्रस्तुत आँकड़ों को तुरंत ही समझ सकते हैं तथा उनके विषय में निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 4.indd 106 20/09/2024 15:49:52

5 अभाज्य समय

0675CH05

5.1 सार्व गुणज और सार्व गुणनखंड



इडली-वड़ा खेल

बच्चे वृत्ताकार बैठे हैं और संख्या का खेल, खेल रहे हैं।

एक बच्चा '1' बोलकर खेल शुरू करता है। दूसरा खिलाड़ी '2' बोलता है और यह क्रम आगे बढ़ता रहता है, लेकिन जब 3, 6, 9... (3 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने के स्थान पर 'इडली' कहेगा। इसके साथ ही जब 5, 10, 15... (5 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने की जगह 'वड़ा' कहेगा। जब संख्या 3 और 5 दोनों का गुणज हो तो खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' कहेगा। यदि कोई खिलाड़ी गलती करता है तो उसे खेल से बाहर कर दिया जाएगा।

खेल तब तक, कई चरणों में चलता रहेगा, जब तक कि केवल एक खिलाड़ी शेष बच जाए।

किन संख्याओं के बदले खिलाड़ी 'इडली' कहेगा? ये संख्याएँ 3, 6, 9, 12, 15, 18... और आगे इसी क्रम में होंगी।

किन संख्याओं के लिए खिलाड़ी 'वड़ा' कहेगा? ये संख्याएँ 5, 10, 15, 20 .... और आगे इसी क्रम में होंगी।

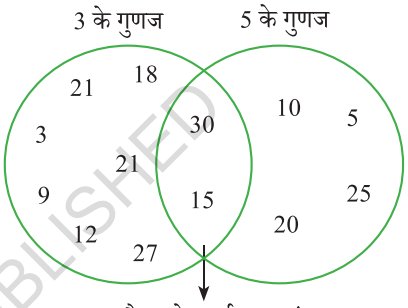
वह कौन-सी पहली संख्या होगी जिसके लिए खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' बोलेगा? यह संख्या 15 है, जो 3 और 5 दोनों का गुणज है। ऐसी और संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 3 और 5 की गुणज हैं। ये संख्याएँ _____ कहलाती हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. किस संख्या पर दसवीं बार 'इडली-वड़ा' कहा जाएगा?
2. यदि खेल 1 से 90 तक की संख्याओं के लिए खेला जा रहा हो तो ज्ञात कीजिए—
   a. बच्चा कितनी बार 'इडली' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   b. बच्चा कितनी बार 'वड़ा' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   c. बच्चा कितनी बार 'इडली-वड़ा' कहेगा?
3. क्या होगा यदि खेल 900 तक खेला जाएगा? इसके आधार पर आपके उत्तर में क्या परिवर्तन होंगे?
4. क्या यह आकृति 'इडली-वड़ा' खेल से किसी रूप में संबंधित हैं?

संकेत— कल्पना कीजिए कि आप यह खेल 30 तक खेलते हैं। अगर आप 60 तक खेल खेलते हैं, तो ऐसी ही आकृति बनाइए।



आकृति 5.1

आइए, अब 'इडली-वड़ा' खेल कुछ अलग संख्या युग्मों के साथ खेलें—

a. 2 और 5
b. 3 और 7
c. 4 और 6

हम 'इडली' छोटी संख्या के गुणज के लिए, 'वड़ा' बड़ी संख्या के गुणज के लिए और 'इडली-वड़ा' सार्व गुणज के लिए कहेंगे। यदि खेल संख्या 60 तक खेला जा रहा हो तो आकृति 5.1 के समान आकृति बनाइए।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 108 17/09/2024 16:17:57

निम्नलिखित संख्या में से कौन-सी अन्य संख्या हो सकती है—

2, 3, 5, 8, 10?

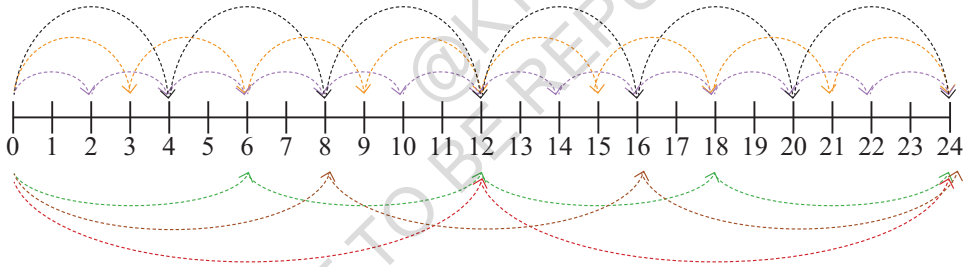
जैकपॉट के लिए छलाँग

जम्पी और ग्रम्पी एक खेल खेलते हैं।

- ग्रम्पी ने किसी संख्या पर एक खजाना रखा। उदाहरण के लिए, उसने इसे 24 पर रखा।
- जम्पी ने एक छलाँग के आकार का चयन किया। यदि उसने 4 का चयन किया, तो 0 से शुरू करते हुए उसे 4 के गुणज पर छलाँग लगानी होगी।
- जम्पी को खजाना मिल जाएगा, यदि वह उस संख्या पर पहुँच जाए जहाँ ग्रम्पी ने खजाना रखा है।

कौन-सा छलाँग का आकार जम्पी को '24' पर पहुँचाएगा?

यदि वह 4 का चयन करता है तो जम्पी पहुँचता है— 4 → 8 → 12 → 16 → 20 → 24 → 28 → ... पर अन्य सफल छलाँग के आकार— 2, 3, 6, 8 और 12 होंगे।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आप छलाँग का आकार 1 और 24 के विषय में क्या कहेंगे? हाँ, वे भी 24 पर पहुँचेंगे।

संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 सभी 24 को पूर्णतया विभाजित करती हैं। ऐसी संख्याओं को याद कीजिए जिन्हें 24 के **गुणनखंड** या **भाजक** कहा जाता है।

ग्रम्पी ने खेल के स्तर को थोड़ा कठिन किया। उसने दो अलग-अलग संख्याओं पर दो खजाने रखे। जम्पी को एक छलाँग के आकार का चयन करना है और इसी पर टिके या स्थिर रहना है। जम्पी को खजाना तभी मिलेगा, जब वह चयनित छलाँग के आकार से दोनों संख्याओं पर पहुँचेगा। पहले की तरह जम्पी 0 से प्रारंभ करता है।

ग्रम्पी ने खजाने को 14 और 36 पर रखा। जम्पी छलाँग का आकार 7 चुनता है।

Chapter 5.indd 109 17/09/2024 16:17:57

क्या जम्पी दोनों खजानों पर पहुँचेगा? 0 से शुरू करते हुए वह 7 → 14 → 21 → 28 → 35→ 42... पर पहुँचेगा। हम देखते हैं कि वह 14 पर तो पहुँचता है, लेकिन 36 पर नहीं पहुँचता। अत: उसे खजाना नहीं मिलता। उसे कौन-से छलाँग के आकार का चयन करना चाहिए था?

14 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 7, 14 तो, इन छलाँग के आकार से वह 14 पर अवश्य पहुँचेगा।

36 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, इन छलाँग के आकर से वह 36 पर अवश्य पहुँचेगा।

अत: 1 या 2 के छलाँग के आकार से वह 14 और 36 दोनों पर अवश्य पहुँचेगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि संख्या 1 और 2, संख्याओं 14 और 36 के सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखंड हैं।

वे संभव छलाँग के आकार जिनसे दोनों खजानों तक पहुँचा जा सके, उन दोनों संख्याओं के **उभयनिष्ठ गुणनखंड** हैं जिन पर खजाना रखा हुआ है।

- कौन-सा छलाँग का आकार 15 और 30 दोनों तक पहुँच सकता है? यहाँ बहुत सारे छलाँग के आकार संभव हैं। उन सभी को ढूँढ़ने का प्रयास कीजिए।
- नीचे दी गई तालिका का अवलोकन कीजिए। इस तालिका से आपने क्या समझा?

31	(32)	33	34	35	(36)	37	38	39	(40)
41	42	43	(44)	45	46	47	(48)	49	50
51	(52)	53	54	55	(56)	57	58	59	(60)
61	62	63	(64)	65	66	67	(68)	69	70

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तालिका में—

1. क्या छायांकित बॉक्स संख्याओं के मध्य कुछ समानता है?
2. क्या वृत्त में अंकित संख्याओं के बीच कुछ समानता है?
3. ऐसी कौन-सी संख्याएँ हैं, जो छायांकित बॉक्स और वृत्त, दोनों में हैं। इन संख्याओं को क्या कहते हैं?

गणित चर्चा

आइए, पता लगाएँ

1. 310 और 410 के बीच आने वाले 40 के सभी गुणज ज्ञात कीजिए।

Chapter 5.indd 110 17/09/2024 16:17:57

2. मैं कौन हूँ?

   a. मैं 40 से कम एक संख्या हूँ, मेरा एक गुणनखंड 7 है। मेरे अंकों का जोड़ 8 है।

   b. मैं 100 से छोटी एक संख्या हूँ। मेरे दो गुणनखंड 3 और 5 हैं। मेरा एक अंक, दूसरे से 1 अधिक है।

3. एक संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योग उस संख्या से दुगना हो, **संपूर्ण संख्या (Perfect Number)** कहलाती है। संख्या 28 एक संपूर्ण संख्या है। इसके गुणनखंड 1, 2, 4, 7, 14 और 28 है, इनका योग 56 है जो कि 28 का दुगना है। 1 से 10 तक के बीच एक संपूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए।

4. उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात कीजिए—

   a. 20 और 28 b. 35 और 50

   c. 4, 8 और 12 d. 5, 15 और 25

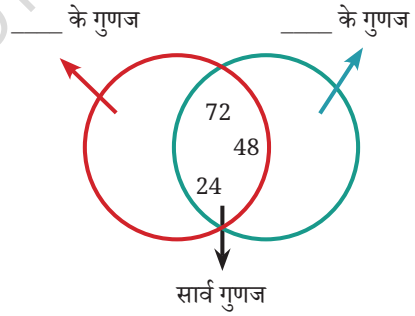
5. तीन ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जो 25 की गुणज हैं लेकिन 50 की नहीं।

6. अंशु और उसके मित्र दो संख्याएँ लेकर 'इडली-वड़ा' खेल, खेल रहे हैं। दोनों संख्याएँ 10 से छोटी हैं। पहली बार यदि कोई 'इडली-वड़ा' कहता है, तो वह संख्या 50 के पश्चात् आती है। वे दोनों संख्याएँ क्या होंगी, जिन्हें 'इडली' और 'वड़ा' कहा गया है।

7. खजाने की खोज खेल में ग्रम्पी ने खजाने को 28 और 70 पर रखा है। दोनों संख्याओं पर पहुँचने के लिए छलाँग का आकार क्या होना चाहिए।

8. नीचे दिए गए चित्र से गुणा ने उभयनिष्ठ गुणज को छोड़कर सभी संख्याओं को मिटा दिया है। पता लगाइए कि वे संख्याएँ कौन-सी हो सकती हैं? और उन लुप्त संख्याओं को खाली स्थान में लिखिए।

गणित चर्चा



9. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 7 को छोड़कर 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

प्रयास करें

10. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

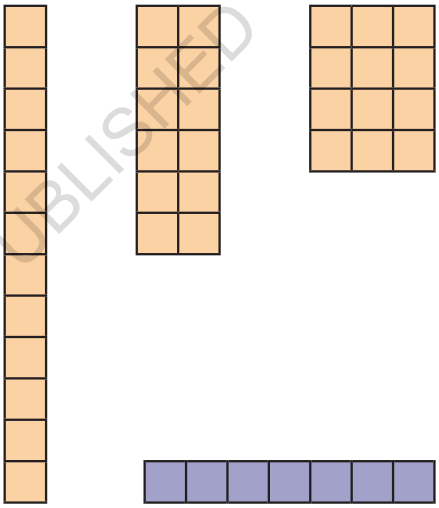
Chapter 5.indd 111 17/09/2024 16:17:58

5.2 अभाज्य संख्याएँ

गुणा और अंशु अपने फार्म में उगने वाले अंजीरों को बाँधकर पैक करना चाहते हैं। गुणा प्रत्येक बॉक्स में 12 अंजीर रखना चाहता है और अंशु प्रत्येक बॉक्स में 7 अंजीर रखना चाहता है।
ऐसी कितनी व्यवस्थाएँ संभव हैं?

ऐसे विभिन्न तरीके सोचिए और ज्ञात कीजिए, जिनमें—

1. गुणा 12 अंजीर आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है।
2. अंशु 7 अंजीरों को आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है। गुणा ने व्यवस्थाओं की एक सूची बनाई है।



प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों और स्तंभों (कॉलम) की संख्याओं को देखिए। ये 12 से किस प्रकार से संबंधित हैं?

उदाहरण के लिए, दूसरी व्यवस्था में 12 अंजीरों को दो स्तंभों, जिनमें प्रत्येक में 6 अंजीरों को व्यवस्थित किया गया है। या $12 = 2 \times 6$

अंशु केवल एक व्यवस्था बना सकता है— 7×1 या 1×7। यहाँ अन्य कोई आयताकार व्यवस्था संभव नहीं है।

गुणा की प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों की संख्या को स्तंभों की संख्याओं से गुणन कर 12 प्राप्त होता है। अतः पंक्ति या स्तंभों की संख्या, 12 के गुणनखंड हैं।

यह दृष्टिगत होता है कि संख्या 12 को हम एक से अधिक आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं, क्योंकि 12 के दो से अधिक गुणनखंड हैं। संख्या 7 केवल एक ही तरह से व्यवस्थित हो सकती है क्योंकि इसके केवल दो गुणनखंड हैं— 1 और 7।

ऐसी संख्याएँ जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, **अभाज्य संख्याएँ (Prime numbers) या अभाज्य (Primes)** कहलाती हैं। कुछ प्रारंभिक अभाज्य संख्याएँ हैं— 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19। ध्यान दीजिए, किसी भी अभाज्य संख्या के गुणनखंड 1 और वह संख्या स्वयं होती है।

ऐसी संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणज होते हैं? उन्हें **भाज्य संख्याएँ (Composite numbers)** कहते हैं। पहली कुछ भाज्य संख्याएँ हैं— 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 112 17/09/2024 16:17:58

संख्या 1 के विषय में क्या कहेंगे, जिसका केवल 1 गुणनखंड है? 1 न ही अभाज्य संख्या है न ही भाज्य संख्या है।

21 से 30 के बीच कितनी अभाज्य संख्याएँ हैं? 21 से 30 के बीच कितनी भाज्य संख्याएँ हैं?

क्या हम 1 से 100 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना सकते हैं?

अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने के लिए एक रोचक तरीका दिया गया है। नीचे दिए गए चरणों का प्रयोग करते हुए देखिए कि क्या परिणाम निकलता है?

चरण 1— 1 को काट दीजिए क्योंकि यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य है।

चरण 2— 2 पर गोल घेरा बनाइए और 2 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 4, 6, 8.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3— आप देखेंगे कि अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर गोल घेरा बना दीजिए। 3 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 6, 9, 12.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 4— अगली बिना कटी संख्या 5 है। 5 पर घेरा बनाइए। इसको छोड़ कर 5 के अन्य सभी गुणजों 10, 15, 20.... इत्यादि को काट दीजिए।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 5— इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक उपरोक्त सूची की सभी संख्याओं पर या तो घेरा न लग जाए या उन्हें काट न दिया जाए।

घेरा लगी हुई सभी संख्याएँ, अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 के अतिरिक्त सभी काटी गई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं। यह विधि इराटोस्थेनीस की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है।

इस विधि को 100 से बड़ी संख्याओं के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है। इराटोस्थेनीस 2200 वर्ष पूर्व एक ग्रीक गणितज्ञ थे, जिन्होंने अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध करने की यह विधि विकसित की थी।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 113 17/09/2024 16:17:58

गुणा और अंशु आश्चर्यचकित हैं कि इस सरल विधि द्वारा अभाज्य संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं। सोचिए कि यह विधि किस प्रकार कार्य करती है। दिए गए चरणों को पुन: पढ़िए और देखिए कि प्रत्येक चरण के पश्चात् क्या-क्या होता है?

आइए, पता लगाएँ

1. हम देखते हैं कि 2 एक अभाज्य संख्या है और यह सम संख्या भी है। क्या कोई अन्य सम अभाज्य संख्या है?
2. 100 तक की अभाज्य संख्याओं की सूची देखिए। दो क्रमागत अभाज्य संख्याओं में न्यूनतम एवं अधिकतम अंतर क्या है?
3. क्या प्रत्येक पंक्ति में एक समान संख्या में अभाज्य संख्याएँ थीं? किन दहाइयों में न्यूनतम अभाज्य संख्याएँ हैं? यह भी बताइए कि पिछले पृष्ठ पर दी गई सारणी में किनमें अधिकतम अभाज्य संख्याएँ हैं?

युगों-युगों से अभाज्य संख्याएँ

अभाज्य संख्याएँ, सभी पूर्ण संख्याओं के निर्माण खंड (Building Blocks) हैं। ग्रीक सभ्यता (2000 वर्षों से भी पहले) से शुरू करते हुए, आज तक गणितज्ञ उनके रहस्यों को सुलझाने के लिए संघर्ष कर रहे हैं।

सोच के लिए खुराक— क्या कोई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या होती है? या अभाज्य संख्याओं की सूची बिना किसी अंत के बढ़ती रहेगी? युक्लिड (Euclid) नाम के गणितज्ञ ने इसका उत्तर दिया, आप भी आगे की कक्षा में यह जान पाएँगे।

मनोरंजक तथ्य— किसी के द्वारा लिखी गई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या इतनी बड़ी है कि वह 6500 पृष्ठों पर लिखी गई है। अतः हम उसे केवल एक कम्प्यूटर पर ही लिख सकते हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

4. इनमें से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य हैं— 23, 51, 37, 26?
5. अभाज्य संख्याओं के तीन युग्म लिखिए, जो 20 से कम हों और उनका योग 5 का गुणज हो।
6. संख्या 13 और 31 अभाज्य संख्याएँ हैं। इन दोनों संख्याओं में अंक 1 और 3 समान हैं। 100 तक की संख्याओं में से ऐसे अन्य सभी अभाज्य संख्याओं के युग्म ज्ञात कीजिए।
7. 1 से 100 के बीच 7 क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए।
8. अभाज्य संख्याओं के युग्म जिनका अंतर 2 हो जुडवाँ **अभाज्य युग्म (Twin Primes)** कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, 3 और 5 जुड़वाँ अभाज्य युग्म हैं, इसी प्रकार 17 और 19 हैं। 1 से 100 के बीच अन्य जुड़वाँ अभाज्य युग्म ज्ञात कीजिए?

Chapter 5.indd 114 17/09/2024 16:17:58

9. प्रत्येक कथन को सही या गलत के रूप में पहचानिए एवं स्पष्ट कीजिए—
   a. ऐसी कोई अभाज्य संख्या नहीं है जिसका इकाई का अंक 4 हो।
   b. अभाज्य संख्याओं का गुणनफल भी अभाज्य हो सकता है।
   c. अभाज्य संख्याओं के कोई गुणनखंड नहीं होते हैं।
   d. सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
   e. संख्याएँ 2 तथा 3 अभाज्य हैं। अन्य प्रत्येक अभाज्य संख्या के लिए अगली संख्या भाज्य है।
10. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या को तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?
    45, 60, 91, 105, 330.
11. अंक 2, 4 और 5 का एक बार प्रयोग करके आप तीन अंकों की कितनी अभाज्य संख्याएँ बना सकते हैं?
12. ध्यान दीजिए कि 3 एक अभाज्य संख्या है और $2 \times 3 + 1 = 7$ भी एक अभाज्य संख्या है। क्या और भी ऐसी अभाज्य संख्याएँ हैं, जिन्हें 2 से गुणन करके एक जोड़ने पर अन्य अभाज्य संख्या प्राप्त होती है? ऐसे कम से कम पाँच उदाहरण ज्ञात कीजिए।

5.3 खजानों को सुरक्षित रखने के लिए सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-prime numbers)

कौन-से जोड़े सुरक्षित हैं?

खजाना ढूँढ़ने वाले खेल को पुन: देखते हैं। इस बार, खजाने दो संख्याओं पर रखे हैं। जम्पी को खजाना केवल तभी मिलेगा जब वह दोनों संख्याओं पर समान छलाँग आकार के द्वारा पहुँचेगा। यहाँ एक नया नियम भी है— 1 को छलाँग आकार लेने की अनुमति नहीं है।

ग्रम्पी खजाने को कहाँ रखे कि जम्पी दोनों संख्याओं तक न पहुँच सके।

क्या खजानों को 12 और 26 पर रखने से काम हो जाएगा? नहीं! छलाँग का आकार 2 लेने पर जम्पी 12 और 26 दोनों तक पहुँच सकता है।

4 और 9 के बारे में आप क्या कहेंगे? 1 छलाँग आकार का प्रयोग किए बिना जम्पी दोनों युग्मों तक नहीं पहुँच सकता। अत: ग्रम्पी जानता है कि युग्म 4 और 9 उसके लिए सुरक्षित है।

जाँचिए क्या ये युग्म सुरक्षित हैं—

a. 15 और 39　　b. 4 और 15

c. 18 और 29　　d. 20 और 55

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 115 17/09/2024 16:17:59

सुरक्षित युग्मों के विषय में क्या विशेष है? उनमें 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। दो संख्याएँ जिनमें 1 के अतिरिक्त कोई सार्वगुणनखंड नहीं होता, **सह-अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं।

उदाहरण— चूँकि 15 और 39 में 3 एक सार्व गुणनखंड है, अत: ये सह-अभाज्य नहीं है। लेकिन 4 और 9 सह-अभाज्य हैं।

निम्नलिखित में से कौन-सा संख्या युग्म सह-अभाज्य है?

a. 18 और 35 b. 15 और 37 c. 30 और 415

d. 17 और 69 e. 81 और 18

भिन्न संख्या युग्म लेकर 'इडली-वड़ा' खेल खेलते हुए, अंशु ने एक रोचक बात देखी!

1. कभी-कभी, प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल के समान था।
2. अन्य स्थितियों में प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल से छोटा था।

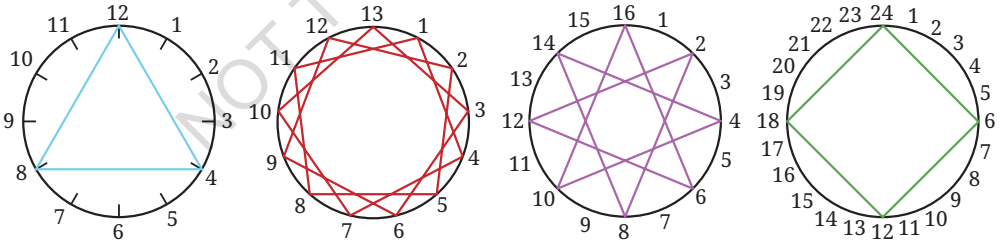
उपरोक्त प्रत्येक कथन के लिए उदाहरण खोजिए। यह संख्या युग्म के सह-अभाज्य होने से किस प्रकार संबंधित है?

गणित चर्चा

सह-अभाज्य कला

नीचे दर्शाई गई धागे की कला को देखिए। पहली आकृति में 12 खूँटियाँ हैं। धागा हर चौथी खूँटी से बंधा है (हम कह सकते हैं कि धागे का अंतर 4 है)। दूसरी आकृति में 13 खूँटियाँ हैं और धागे का अंतर 3 है। अन्य आकृतियों के विषय में आप क्या सोचते हैं? इन आकृतियों को देखिए, अपनी जानकारी को कक्षा में साझा कीजिए और चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा



कुछ आकृतियों में धागा प्रत्येक खूँटी से बँधा है एवं कुछ में नहीं बँधा है। क्या यह दो संख्याओं (खूटियों की संख्या और धागे के अंतर) के सह-अभाज्य होने से संबंधित है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 116 17/09/2024 16:17:59

निम्नलिखित के लिए ऐसी ही आकृतियाँ बनाइए—

a. 15 खूँटी, धागे का अतंर 10 b. 10 खूँटी, धागे का अंतर 7

b. 14 खूँटी, धागे का अंतर 6 d. 8 खूँटी, धागे का अंतर 7

5.4 अभाज्य गुणनखंडन

दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

शिक्षक— क्या 56 और 63 सह-अभाज्य हैं?

अंशु और गुणा— यदि उनका सार्व गुणनखंड संख्या 1 से अलग है, तो वे सह-अभाज्य नहीं होंगी। आइए, जाँच करते हैं।

अंशु— मैं लिख सकता हूँ कि $56=14\times4$ और $63=21\times3$। इस प्रकार 14 और 4 संख्या 56 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार, 21 और 3 संख्या 63 के गुणनखंड हैं। अतः इनके कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हैं, और ये संख्याएँ सह-अभाज्य हैं।

गुणा— रुको, मैं $56=7\times8$ और $63=9\times7$ भी लिख सकता हूँ। हम देख सकते हैं कि 7 दोनों संख्याओं का गुणनखंड है। अतः ये दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य नहीं हैं।

स्पष्ट रूप से गुणा सही है क्योंकि 7 एक सार्व गुणनखंड है।

लेकिन अंशु ने गलती कहाँ की?

$56 = 14 \times 4$ हमें बताता है कि 14 और 4 दोनों 56 के गुणनखंड हैं, लेकिन इससे 56 के सभी गुणनखंडों का पता नहीं चलता। क्या 63 के गुणनखंड के लिए भी ऐसा ही है?

एक अन्य उदाहरण 80 और 63 का लेते हैं। दोनों संख्याओं का गुणनखंड निकालने के अनेक तरीके हैं।

$80 = 40 \times 2 = 20 \times 4 = 10 \times 8 = 16 \times 5 = ???$

$63 = 9 \times 7 = 3 \times 21 = ???$

हमने ??? लिखा है क्योंकि इन संख्याओं के गुणनखंड करने के और भी तरीके हैं। लेकिन यदि हम उनमें से कोई एक गुणनखंड लें, उदाहरण के लिए, $80 = 16 \times 5$ और $63 = 9 \times 7$ तो इनमें कोई सार्व गुणनखंड नहीं हैं। क्या हम यहाँ यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 80 और 63 सह-अभाज्य हैं। चूँकि ऊपर अंशु की गलती दर्शाती है अत: हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। क्योंकि गुणनखंडन के अन्य तरीके भी हैं।

इसका अर्थ है कि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए हमें और अधिक व्यवस्थित दृष्टिकोण की आवश्यकता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 117 17/09/2024 16:17:59

अभाज्य गुणनखंडन

एक संख्या 56 को उदाहरण के रूप में लेते हैं जो कि भाज्य संख्या है, जैसा कि हमने देखा कि **56 = 4 × 14** लिखा जा सकता है। अतः 4 और 14 दोनों 56 के गुणनखंड हैं। अब इनमें से एक लेते हैं मान लीजिए, 14 यह भाज्य संख्या है और हम इसे 14 = 2 × 7 लिख सकते हैं। अत: **56 = 4 × 2 × 7** यहाँ 4 एक भाज्य संख्या है और 4 = 2 × 2. अत: **56 = 2 × 2 × 2 × 7**। गुणनखंड 2 और 7 जो यहाँ उल्लेखित हैं, अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: हम इन्हें और आगे विभाजित नहीं कर सकते।

निष्कर्ष में, हमने 56 को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा है। यह 56 का **अभाज्य गुणनखंडन** (Prime Factorization) कहलाता है। एकक गुणनखंड, अभाज्य गुणनखंड (Prime factors) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, 2 और 7 संख्या 56 के अभाज्य गुणनखंड हैं।

1 से बड़ी प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन होता है। यहाँ अवधारणा है— भाज्य संख्या को गुणनखंडों के रूप में तब तक लिखिए जब तक केवल अभाज्य संख्या न रह जाए।

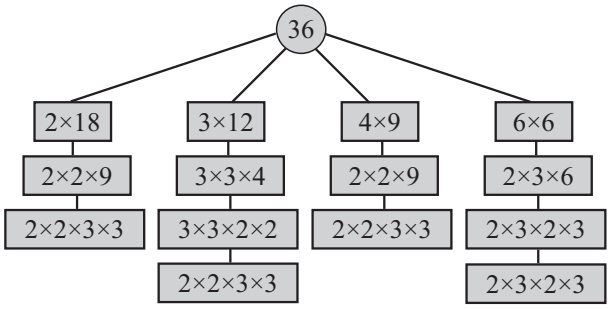
संख्या 1 का कोई अभाज्य गुणनखंडन नहीं है। यह किसी भी अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं होता।

अभाज्य संख्या, जैसे 7 का अभाज्य गुणनखंडन क्या होगा? यह केवल 7 है (हम इसे और अधिक विभाजित नहीं कर सकते)।

आइए कुछ और उदाहरण देखें—

अलग-अलग तरीकों से विभाजित करते हुए हमने 63 को लिखा 3 × 3 × 7 और 3 × 7 × 3। क्या ये अलग-अलग हैं? वास्तव में नहीं! वही अभाज्य संख्याएँ 3 और 7 दोनों स्थितियों में दिखाई दे रही हैं। दोनों स्थितियों में संख्या 3, दो बार और संख्या 7, एक बार दिखाई दे रही है।

आकृति में, 36 के अभाज्य गुणनखंडन को चार विभिन्न तरीकों से दिखाया गया है। देखिए इन सभी चारों स्थितियों में दो बार 2 और दो बार 3 प्राप्त हो रहा है। उन्हें पुन: गुणन करके देखिए। हमें चारों स्थितियों में 36 प्राप्त होता है।

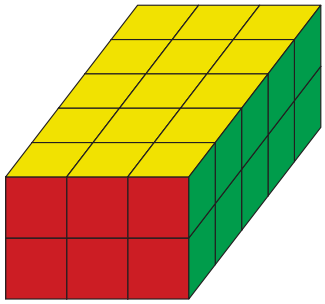


© @KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 118 17/09/2024 16:17:59

यदि अभाज्य गुणनखंडन के क्रम को छोड़ दिया जाए, तो किसी भी संख्या के लिए केवल एक अभाज्य गुणनखंडन होता है। हम नीचे बता रहे हैं कि क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। फिर भी जैसा कि हमने इन उदाहरणों में देखा कि हम परिणाम तक विभिन्न तरीकों से पहुँच सकते हैं।

क्या क्रम महत्वपूर्ण है?



इस चित्र की मदद से क्या आप समझा सकते हैं कि **30 = 2 × 3× 5** क्यों होता है, चाहे आप 2, 3 और 5 को किसी भी तरह से गुणन करें?

जब हम संख्याओं का गुणन करते हैं, तो हम यह किसी भी क्रम में कर सकते हैं। परिणाम एक समान होगा। इसीलिए, जब दो बार 2 और दो बार 3 को किसी भी क्रम में गुणन किया जाता है तो हमें 36 प्राप्त होता है। आगे की कक्षा में, हम इसका **गुणन की क्रमविनिमेयता और साहचर्यता** के नाम से अध्ययन करेंगे।

अतः क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। साधारणतया अभाज्य संख्याओं को हम बढ़ते क्रम में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ और $30 = 2 \times 3 \times 5$।

दो संख्याओं के गुणनफल का अभाज्य गुणनखंडन

जब हम किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं, तो सबसे पहले हम इसे दो गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, $72 = 12 \times 6$, इसके पश्चात् हम दोनों प्राप्त गुणनखंडों वाली प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में $12 = 2 \times 2 \times 3$ और $6 = 2 \times 3$। क्या अब, आप 72 का अभाज्य गुणनखंडन बता सकते हैं?

वास्तविक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए दोनों के गुणनखंडों को एक साथ लिखना होगा।

$$72 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 119 17/09/2024 16:17:59

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं— $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$। गुणन करके जाँचिए कि हमें फिर से 72 प्राप्त होता है।

अवलोकन कीजिए कि 72 के गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड कितनी बार आया।

इसकी तुलना इस तथ्य से कीजिए कि जब 12 और 6 के गुणनखंडों को एक साथ लिखते हैं तो ये संख्याएँ कितनी बार आती हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित संख्याओं का अभाज्य-गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—
   64, 105, 243, 320, 141, 1728, 729, 1024, 1331, 1000
2. किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में एक बार 2, दो बार 3 और एक बार 11 हो, तो वह संख्या क्या होगी?
3. 30 से छोटी ऐसी तीन अभाज्य संख्याएँ बताइए, जिनका गुणनफल 1955 हो?
4. बिना गुणा किए निम्न संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—
   a. 56×25 b. 108×75 c. 1000×81
5. वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसके अभाज्य गुणनखण्डन में
   a. तीन अलग अभाज्य संख्याएँ हों।
   b. चार अलग अभाज्य संख्याएँ हों।

अभाज्य गुणनखंडन, संख्याओं के अध्ययन के लिए एक मौलिक आवश्यकता है। आइए, दो उपयोगी विधियों पर चर्चा करें।

अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

आइए पुन: संख्याएँ 56 और 63 लें। कैसे जाँचें कि ये सह-अभाज्य हैं? आइए, हम दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं—

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

हम देखते हैं कि संख्या 7, 56 का अभाज्य गुणनखंड है और 63 का भी। अतः 56 और 63 सह-अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।

80 और 63 के बारे में आप क्या कहेंगे? उनके अभाज्य गुणनखंड इस प्रकार हैं—

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 120 17/09/2024 16:17:59

इसमें कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। क्या इस आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वे सह-अभाज्य हैं। माना कि उनका एक भाज्य सार्व गुणनखंड है। तो क्या इस भाज्य सार्व गुणनखंड के अभाज्य गुणनखंड 80 और 63 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हैं?

अत: हम कह सकते हैं कि यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

आइए, हम कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण— 40 और 231 लीजिए। इनके अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं—

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 231 = 3 \times 7 \times 11$$

हम देख सकते हैं कि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है जो 40 और 231 को विभाजित करता हो। संख्या 40 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 हैं जबकि 231 के अभाज्य गुणनखंड 3, 7 और 11 हैं। अत: 40 और 231 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

उदाहरण— 242 और 195 लीजिए। इनका अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार है—

$$242 = 2 \times 11 \times 11 \text{ और } 195 = 3 \times 5 \times 13$$

242 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 11 हैं। 195 के अभाज्य गुणनखंड 3, 5 और 13 हैं। इनके कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अतः 242 और 195 सह-अभाज्य हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग करके एक संख्या का दूसरी संख्या से विभाजन की जाँच करना

हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या, दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होगा।

हम कहते हैं कि 48, संख्या 12 से विभाजित होती है क्योंकि जब हम 48 को 12 से भाग देते हैं तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है। बिना लंबी विभाजन विधि के हम कैसे जाँचें कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है?

उदाहरण— क्या 168 संख्या 12 से विभाजित होगी? दोनों के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

क्योंकि हम किसी भी क्रम में गुणन कर सकते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि

$$168 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 12 \times 14$$

अतः 168 संख्या 12 से विभाजित होती है।

Chapter 5.indd 121 17/09/2024 16:17:59

उदाहरण— क्या 75 संख्या 21 से विभाजित होती है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$75 = 3 \times 5 \times 5 \text{ और } 21 = 3 \times 7$$

जैसा कि हमने पिछले उदाहरण की चर्चा में देखा यदि 75, संख्या 21 का गुणज है तो 21 के सभी अभाज्य गुणनखंड, 75 के भी अभाज्य गुणनखंड होंगे। लेकिन 7, संख्या 21 का अभाज्य गुणनखंड है पर 75 का अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अत: 75, संख्या 21 से विभाजित नहीं होती।

उदाहरण— क्या 42 संख्या 12 से विभाजित होता है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

12 के सभी अभाज्य गुणनखंड, संख्या 42 के गुणनखंडों में सम्मिलित हैं। लेकिन 12 का अभाज्य गुणनखंडन, 42 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित नहीं है। यह इसलिए होता है जब हम 12 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं, तो 2 दो बार आता है परंतु जब हम 42 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं तो 2 एक बार आता है। इसका अर्थ है 42, संख्या 12 से विभाजित नहीं होता।

अत: हम कह सकते हैं कि जब एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है तो दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या निम्नलिखित संख्या युग्म सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? पहले अनुमान लगाइए फिर अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

   a. 30 और 45 b. 57 और 85

   c. 121 और 1331 d. 343 और 216

2. क्या पहली संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है? अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग कीजिए।

   a. 225 और 27 b. 96 और 24

   c. 343 और 17 d. 999 और 99

3. पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 3 \times 7$ है और दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $3 \times 7 \times 11$ है। क्या ये दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? क्या इनमें से एक संख्या दूसरी संख्या को विभाजित करती है?

4. गुणा कहता है, "कोई भी दो अभाज्य संख्याएँ सह-अभाज्य होती हैं।" क्या वह सही है?

5.5 संख्याओं की विभाज्यता की जाँच

अभी तक, हमने विभिन्न संदर्भों में संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात किए हैं, यह पता लगाने के लिए कि वह अभाज्य संख्या है या नहीं, अथवा संख्या युग्म सह-अभाज्य है या नहीं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 122 17/09/2024 16:18:00

छोटी संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात करना सरल है। बड़ी संख्याओं के गुणनखंड हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, एक संख्या 8560 लेते हैं। क्या इसके 2 से 10 तक (2, 3, 4, 5,...,9,10) कोई गुणनखंड हैं?

ये संख्याएँ गुणनखंड हैं या नहीं, यह बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। क्या आप उन्हें ज्ञात कर सकते हो?

10 से विभाज्यता

आइए, 10 को उदाहरण के रूप में लेते हैं। क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है? दूसरे तरीके से हम पूछ सकते हैं कि क्या 10 संख्या 8560 का एक गुणनखंड है?

इसके लिए, हम 10 के गुणजों के पैटर्न को देखते हैं।

10 के कुछ प्रारंभिक गुणज इस प्रकार है— 10, 20, 30, 40... इस क्रम को जारी रखिए और पैटर्न का अवलोकन कीजिए।

क्या संख्या 125 संख्या 10 का गुणज है? क्या पिछले अनुक्रम में यह संख्या दिखाई देती है? क्यों या क्यों नहीं?

क्या अब आप बता सकते हैं कि 8560 संख्या 10 से विभाजित है?

इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 10 से विभाजित होती हैं वे '0' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं?

गणित चर्चा

5 से विभाज्यता

5 एक अन्य संख्या है, जिसकी विभाज्यता को सरलता से जाँचा जा सकता है। हम इसे कैसे करेंगे?

5 के गुणजों, जैसे— 5, 10, 15, 20, 25, ––– की सूची बनाकर इसकी खोज कीजिए। इन संख्याओं में आप क्या देखते हैं? क्या आप इनके अंतिम अंक में कोई पैटर्न देखते हैं?

399 से छोटी सबसे बड़ी संख्या क्या है जो 5 से विभाजित होती है? क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है?

कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 5 से विभाजित होती हैं वे या तो '0' पर समाप्त होती हैं या '5' पर समाप्त होती हैं। क्या आप सहमत हैं?

गणित चर्चा

2 से विभाज्यता

2 के कुछ प्रारंभिक गुणज 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, … हैं। आप यहाँ क्या देखते हैं? क्या इनके अंतिम अंक में आपको कोई पैटर्न दिखता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 123 17/09/2024 16:18:00

क्या संख्या 682, 2 से विभाजित होती है? क्या हम इसका उत्तर बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के दे सकते हैं?

क्या संख्या 8560, 2 से विभाजित होती है? क्यों या क्यों नही?

इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं वे '0', '2', '4', '6' या '8' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं? 399 और 411 के बीच 2 के सभी गुणज क्या हैं?



4 से विभाज्यता

कोई संख्या 4 से विभाजित होती है, इसकी जाँच भी आसानी से की जा सकती है।

इसके गुणजों— 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32... को देखिए।

क्या आप इनमें किसी पैटर्न को देखते हैं, जिसका उपयोग किया जा सके? 10, 5 और 2 के गुणजों के अंतिम अंकों में पैटर्न रहे हैं, जिसका उपयोग हमने इनकी विभाज्यता की जाँच करने के लिए किया। इसी प्रकार से, क्या हम अंतिम अंक देखकर बता सकते हैं कि कोई संख्या 4 से विभाजित होगी?

यह पैटर्न यहाँ लागू नहीं होता। अब 12 और 22 को देखिए इनका अंतिम अंक समान है, परंतु 12 तो 4 का गुणज है जबकि 22 नहीं है। इसी प्रकार से 14 और 24 में अंतिम अंक समान हैं, परंतु 14, संख्या 4 का गुणज नहीं है जबकि 24 है। इसी प्रकार 16 और 26 या 18 और 28 हैं। इसका अर्थ यह है कि संख्या के अंतिम अंक को देखकर हम नहीं बता सकते कि वह संख्या 4 का गुणज है या नहीं।

क्या हम इस प्रश्न का उत्तर संख्या के अंतिम के अधिक अंक देखकर दे सकते हैं? 1 से 200 के बीच 4 के गुणजों की सूची बनाइए और पैटर्न खोजिए।

330 और 340 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। साथ ही, 1730 और 1740, तथा 2030 और 2040 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?

क्या 8536 संख्या 4 से विभाज्य है?

इन कथनों पर विचार कीजिए—

1. किसी संख्या की 4 से विभाज्यता का निर्धारण करते समय उस संख्या के केवल अंतिम दो अंक महत्व रखते हैं।
2. यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है तो वह मूल संख्या भी 4 से विभाजित होती है।
3. यदि कोई संख्या 4 से विभाजित होती है तो उसके अंतिम दो अंकों से बनी संख्या भी 4 से विभाजित होती है।

क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 124 17/09/2024 16:18:00

8 से विभाज्यता

यह जानना रोचक है कि 8 से विभाज्यता की जाँच भी सरलता से की जा सकती है। क्या इसके लिए अंतिम दो अंकों का उपयोग किया जा सकता है?

- 120 और 140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। साथ ही 1120 और 1140 तथा 3120 और 3140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?
- 8560 के अंतिम दो अंक इस प्रकार बदलिए ताकि परिणामी संख्या 8 का गुणज हो।
- इन कथनों पर विचार करें—

गणित चर्चा

1. दी गई संख्या 8 से विभाज्य है, यह पता करने के लिए केवल अंतिम 3 अंक ही महत्व रखते हैं।
2. यदि अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य है तो वह मूल संख्या भी 8 से विभाज्य होगी।
3. यदि मूल संख्या 8 से विभाज्य है, तो उसके अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य होगी।

क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

हमने देखा है कि कोई संख्या गुणनखंड है या नहीं, यह जाँचने के लिए हमेशा लंबी विभाजन विधि की आवश्यकता नहीं होती है। हमने कुछ अवलोकनों के उपयोग से 10, 5, 2, 4, 8 के लिए सरल विधियाँ निकाली। क्या हमारे पास अन्य संख्याओं के लिए भी ऐसी सरल विधियाँ हैं? हम अगली कक्षाओं में 3, 6, 7 और 9 से विभाज्यता के परीक्षण करने के सरल तरीकों पर विचार करेंगे।

आइए, पता लगाएँ

1. 2024 एक अधिवर्ष है (अर्थात फरवरी में 29 दिन होते हैं)। अधिवर्ष हर उस वर्ष में होता है जो 4 के गुणज होते हैं, सिवाय उन वर्षों के जो 100 से तो विभाजित हैं लेकिन 400 से नहीं।
   a. आपके जन्म के वर्ष से लेकर अब तक कौन-से वर्ष अधिवर्ष थे?
   b. वर्ष 2024 से 2099 तक कितने अधिवर्ष होंगे?
2. सबसे बड़ी और सबसे छोटी 4 अंकों की संख्याओं का पता लगाइए, जो 4 से विभाज्य हों और पैलिंड्रोम भी हों?
3. खोजिए और ज्ञात कीजिए कि क्या प्रत्येक कथन सदैव सत्य है, कभी-कभी सत्य है या कभी भी सत्य नहीं हैं। आप अपने तर्क के समर्थन में उदाहरण दे सकते हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 125 17/09/2024 16:18:00

a. दो सम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।

b. दो विषम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को (a) 10, (b) 5, (c) 2 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

78, 99, 173, 572, 980, 1111, 2345

5. शिक्षक ने पूछा कि क्या 14560, संख्याओं 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य है। गुणा ने इनमें से केवल दो संख्याओं से 14560 की विभाज्यता की जाँच की और कहा कि 14560 उन सभी संख्याओं से भी विभाज्य है। वे दो संख्याएँ क्या हो सकती हैं?

6. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य हैं?

572, 2352, 5600, 6000, 77622160

7. दो संख्याएँ लिखिए जिनका गुणनफल 10000 हो। दोनों संख्याओं का इकाई का अंक शून्य नहीं होना चाहिए।

5.6 संख्याओं के साथ मनोरंजन

विशेष संख्याएँ

इस बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। आपको कौन-सी संख्या विशेष लगती है? आपको ऐसा क्यों लगता है?

9	16
25	43

देखिए गुणा के सहपाठियों ने क्या साझा किया—

- कर्णावती कहती है, "9 विशेष है क्योंकि यह एक अंकीय संख्या है जबकि अन्य संख्याएँ दो अंकीय हैं।"
- गुरप्रीत कहता है, "9 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र संख्या है जो 3 का गुणज है।"
- मुरुगन कहता है, "16 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र सम संख्या है और 4 का एकमात्र गुणज भी।"
- गोपिका कहती है, "25 विशेष है क्योंकि यह 5 का एकमात्र गुणज है।"

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 126 17/09/2024 16:18:00

- याज्ञीकी कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र अभाज्य संख्या है।"
- राधा कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र ऐसी संख्या है जो वर्ग नहीं है।"

नीचे कुछ बॉक्स हैं, जिनमे प्रत्येक बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। प्रत्येक बॉक्स के लिए यह कहने का प्रयास कीजिए की प्रत्येक संख्या अन्य की तुलना में किस प्रकार विशेष है। अपने सहपाठियों के साथ साझा कीजिए और पता लगाइए कि किसने वही कारण बताए जो आपने दिए। क्या किसी ने अलग कारण बताए जो शायद आपने न सोचे हों?

गणित चर्चा

5	7
12	35

3	8
11	24

27	3
123	31

17	27
44	65

एक अभाज्य पहेली

बाईं ओर का चित्र एक पहेली दर्शाता है। दाहिनी ओर का चित्र उस पहेली का हल है। सोचिए पहेली सुलझाने के क्या नियम हो सकते हैं?

गणित चर्चा

			75
			42
			102
170	30	63	

5	5	3	75
2	3	7	42
17	2	3	102
170	30	63	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

नियम

ग्रिड को केवल अभाज्य संख्याओं से भरिए ताकि प्रत्येक पंक्ति का गुणनफल पंक्ति के दाईं ओर की संख्या हो और प्रत्येक स्तंभ का गुणनफल स्तंभ के नीचे की संख्या हो।

			105
			20
			30
28	125	18	

			8
			105
			70
30	70	28	

Chapter 5.indd 127 17/09/2024 16:18:00

			63
			27
			190
45	42	171	

			343
			66
			44
28	154	231	

सारांश

- यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या पहली संख्या का **गुणनखंड** होगा। उदाहरण के लिए, संख्या 4, 12 का गुणनखंड है क्योंकि 12 संख्या 4 से विभाजित होती है $(12 \div 4 = 3)$।
- 2, 3, 5, 7, 11,... जैसी संख्याएँ **अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, संख्या 1 और वह संख्या स्वयं।
- **भाज्य संख्याएँ** 4, 6, 8, 9, ... ऐसी संख्याएँ होती हैं जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं संख्या 1 और स्वयं के अतिरिक्त कम से कम एक और गुणनखंड। उदाहरण के लिए, 8 का एक गुणनखंड 4 है, 9 का गुणनखंड 3 है। इसलिए 8 और 9 दोनों भाज्य संख्याएँ हैं।
- प्रत्येक संख्या जो 1 से बड़ी है अभाज्य गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखी जा सकती है। इसे संख्या का **अभाज्य गुणनखंडन** कहते हैं। उदाहरण के लिए, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- किसी संख्या का अभाज्य संख्या के रूप में गुणनखंडन करने का केवल एक ही तरीका है जिसमें क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।
- दो संख्याएँ जिनका **सार्व गुणनखंड** 1 के अतिरिक्त कोई और सार्व गुणनखंड न हो सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं, यह जाँचने के लिए उन दोनों का अभाज्य गुणनखंडन करेंगे और जाँच करेंगे की क्या दोनों का कोई सार्व गुणनखंड है। यदि नहीं, तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। यदि हाँ, तो वे सह-अभाज्य नहीं हैं।
- यदि पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हो तो पहली संख्या दूसरी संख्या का गुणनखंड है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Chapter 5.indd 128 17/09/2024 16:18:04