కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

MATHEMATICS

10

పదవ తరగతి

TENTH STANDARD

తెలుగు మాధ్యమం

TELUGU MEDIUM

భాగం 1

PART - 1

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

जातीय विद्या परिशोधन मरियु शिक्षणा संस्थ

జాతీయ విద్యా పరిశోధన మరియు శిక్షణా సంస్థ
శ్రీ అరబిందో మార్గ్, న్యూఢిల్లీ 110016

కర్నాటక పాఠ్య పుస్తక సంఘం (రి)
6వ క్రాస్, మల్లేశ్వరం, బెంగళూరు – 560003

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
15 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

© KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, Professor of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, Professor and Head (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, PGT, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, Professor and Head, DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, Professor, RIE, Mysore

Jayanti Datta, PGT, Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, Lecturer (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, Professor (Retd.) & Consultant, DESM, NCERT

Rama Balaji, TGT, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, Teacher and Member, Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, Professor (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, TGT, Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, TGT, Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, TGT, Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, TGT, Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, TGT, D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, TGT, Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, TGT, Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, TGT, Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, TGT, Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, Lecturer, Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, Emeritus Professor, IIT, New Delhi; Monika Singh, Lecturer, Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar,

New Delhi; G. Sri Hari Babu, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, TGT, Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, TGT, S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head (Retd.), DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Purnendu Kumar Barik, Copy Editor; Naresh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators; Yogita Sharma, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

© KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ 10ನೇ ತರಗತಿ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತೆಲುಗು ಭಾಷೆಗೆ ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಅನುವಾದಿಸಿ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 2018–19 ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಆಂಗ್ಲ ಮಾಧ್ಯಮದ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷ್, ಹಿಂದಿ ಮತ್ತು ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆದು ಭಾಗ–1 ಮತ್ತು ಭಾಗ–2 ಎಂಬುದಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು 2005 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲಾ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಚಿಂತನಾಶೀಲರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯ ವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005 ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸುಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ ಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅನುಮತಿ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ ಹಾಗೂ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ಎಲ್ಲ ಅಧಿಕಾರಿ, ಸಿಬ್ಬಂದಿಗಳಿಗೆ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗೆ, ಸುಂದರವಾಗಿ ಡಿಟಿಪಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿರುವ ಡಿಟಿಪಿ ಆಪರೇಟರ್ ಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ವಿತರಿಸಿರುವ ಮುದ್ರಕರುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಎನ್. ಮಂಜುಶ್ರೀ ಭಾ.ಆ.ಸೇ.
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

Telugu Translation Committee

Smt. B. Subhashini, A.M, Govt. Telugu High School, Tasker Town, Shivajinagar, Bengaluru - 52

Smt. C. Vijaya Hema Malini, A.M, Govt. Telugu High School, Vivek Nagar, Bengaluru - 45

Smt. R.S. Usharani, H.M, Govt. Telugu & Kannada H.P.S., OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01

Sri G. Ravindra Reddy, AM, Govt. Telugu & Kannada H.P.S., OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01

Smt. V. Jyothirmayi, A.M, Govt. Telugu H.P.S., Yelahanka, Bengaluru - 64

Smt. B. Sharmila Reddy, A.M, Govt. Telugu H.P.S., Vivek Nagar, Bengaluru - 45

Scrutinizer

Smt. R.S. Usharani, H.M, Govt. Telugu & Kannada H.P.S., OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01

Sri G. Ravindra Reddy, AM, Govt. Telugu & Kannada H.P.S., OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01

Advise and Guidance

Sri M. P. Madegowda, Managing Director, KTBS Bengaluru.

Smt M. D.Usha, Deputy Director, KTBS Bengaluru.

Programme Co-Ordinator

Smt. Bhagyalakshmi, Assistant Director, KTBS, Bengaluru.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

విషయసూచిక

V2U6H9

భాగం 1

క్ర.సం	శీర్షిక	పుట సంఖ్య
1.	వాస్తవ సంఖ్యలు	1 - 9
2.	బహుపదులు	10 - 23
3.	రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాల జత	24 - 39
4.	వర్గ సమీకరణాలు	40 - 50
5.	సమాంతర శ్రేఢులు	51 - 75
6.	త్రిభుజాలు	76 - 102
7.	నిరూపక రేఖాగణితం	103 - 117
A1.	గణితంలోని నిరూపణలు	118 - 141
	జవాబులు / సూచనలు	142 - 152

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

వాస్తవ సంఖ్యలు

I6H7U1

1

1.1 పరిచయం

9వ తరగతిలో మీరు వాస్తవ సంఖ్యల ప్రపంచము యొక్క అన్వేషణ మొదలు పెట్టి కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొన్నారు. ఈ అధ్యాయంలో మనం వాస్తవసంఖ్యల మీద చర్చను కొనసాగిద్దాం. 1.2 మరియు 1.3 విభాగాలైన యూక్లిడ్ భాగహార తార్కిక క్రమము (algorithm) మరియు అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాం తములలో ధనపూర్ణసంఖ్యల రెండు ముఖ్యమైన ధర్మాలతో ప్రారంభిద్దాం.

యూక్లిడ్ భాగహార తార్కిక క్రమమును దాని పేరు కనుగుణంగా పూర్ణసంఖ్యల భాగహారంతో చేయాలి. దీనిని సూక్ష్మంగా చెబితే ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య 'a' ని మరొక ధన పూర్ణసంఖ్య b తో భాగిస్తే, b కంటే తక్కువ విలువ గల శేషం r వస్తుంది. బహుశ మీరంతా దీనిని దీర్ఘభాగహార పద్ధతిగా గుర్తిస్తారు. ఈ విధానము చెప్పడానికి, అర్థం చేసుకోవటానికి చాలా సులభంగా ఉన్నప్పటికీ పూర్ణ సంఖ్యల భాజనీయత ధర్మాలకు సంబంధించి, దీని అన్వయాలు చాలా ఉన్నాయి. మనమువాటిలో కొన్నింటిని చూస్తాము. ముఖ్యంగా రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల గ.సా.ప్ర. కనుగొనటానికి దానిని ఉపయోగిస్తాము.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతములో పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం వస్తుంది. ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా ఒకేఒక విధంగా చూపవచ్చునని మీకు ముందే తెలుసు. ఈ ముఖ్యమైన విషయమే అం కగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం. ఇది చెప్పటానికి, అర్థం చేసుకోవటానికి సులభంగా ఉన్నప్పటికీ, గణిత క్షేత్రంలో దీని యొక్క లోతైన గుర్తించతగిన అన్వయాలు చాలా ఉన్నాయి. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును రెం డు ముఖ్యమైన అన్వయాలలో ఉపయోగిస్తాము. ముందుగా మీరు 9 వ తరగతిలో అధ్యయనం చేసిన $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{5}$ వంటి సంఖ్యల కరణీయతను నిరూపించటానికి దీనిని ఉపయోగిస్తాము. రెండవది $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ వంటి అకరణీయ సంఖ్యయొక్క దశాంశ విస్తరణ రూపం ఎప్పుడు అంతము చెందుతుంది మరియు ఎప్పుడు అంతము చెందక ఆవర్తనము చెందుతుంది అనే పరిశోధనలో ఈ సిద్ధాంతమును ఉపయోగిస్తాము. $\frac{p}{q}$ యొక్క హారం q ని ప్రధాన కారణాంక విభజన చేయు క్రమంలో దానిని గమనిస్తాము. q యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజన, $\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ స్వభావమును పూర్తిగా తెలుపుతుందని గమనిస్తాము.

ఇపుడు మన పరిశోధన ప్రారంభిద్దాం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం

క్రిందటి తరగతులలో ప్రతి సహజ సంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చని నేర్చుకున్నారు. ఉదాహరణకి $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ మొదలగునవి. ఇప్పుడు సహజ సంఖ్యలను మరొక కోణం నుండి చూడటానికి ప్రయత్నిద్దాం. అంటే ఏ సహజ సంఖ్యనైనా కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలను గుణించి పొందవచ్చా? చూద్దాం.

కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలను తీసుకోండి ఉదాహరణకి 2, 3, 7, 11 మరియు 23 వీటిలో కొన్నింటిని గాని అన్నింటినిగాని ఇష్టం వచ్చినన్ని సార్లు పునరావృతం చేసి గుణిస్తే అనేక ధన పూర్ణసంఖ్యలు వస్తాయి. (నిజానికి అనంతమైన). వాటిలో కొన్నింటిని పట్టీ చేద్దాం:

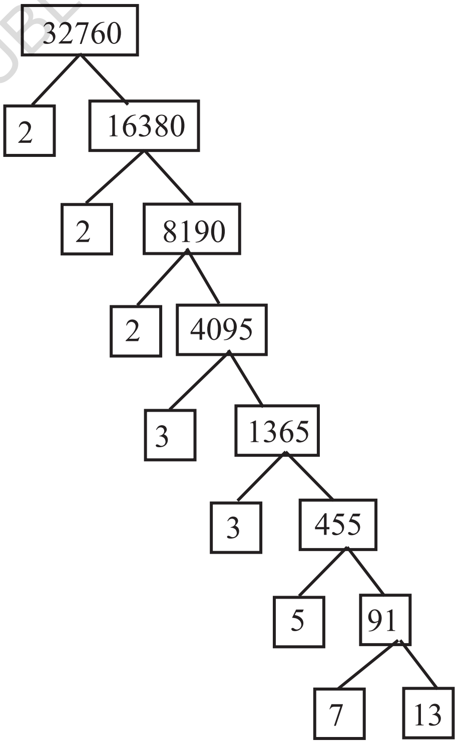
$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ మొదలగునవి.

అన్ని సాధ్యమైన ప్రధాన సంఖ్యలు మన ప్రధాన సంఖ్యల సముదాయంలో ఉన్నాయని అనుకుందాం. ఈ సముదాయం యొక్క పరిమాణం ఎంత ఉంటుందని ఊహిస్తారు. అందులో పూర్ణసంఖ్యలు పరిమితంగా ఉంటాయా లేదా అపరిమితంగా ఉంటాయా? నిజానికి అనంతమైన ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి. ఈ ప్రధాన సంఖ్యలన్నింటిని సాధ్యమైనన్ని విధాలుగా చేర్చితే ప్రధాన సంఖ్యలు, ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధాలు అనంతమైనన్ని ఉంటాయి. ఇప్పుడు అన్ని సంయుక్త సంఖ్యలను ఈ విధంగా పొందవచ్చా అన్నది ప్రశ్న. మీరు ఏమనుకుంటున్నారు? ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్ధంగా చూపలేని సంయుక్త సంఖ్య ఉండవచ్చని అనుకుంటున్నారా? దీనికి సమాధానం చెప్పేముందు ధన పూర్ణసంఖ్యలను కారణాంక విభజన చేద్దాం. అంటే మనం ఇప్పటివరకు చేసిన దానికి వ్యతిరేకంగా చెయ్యాలి.

మీకు ముందే తెలిసిన కారణాంక వృక్షాన్ని ఉపయోగించబోతున్నాం. ఏదైనా ఒక పెద్ద సంఖ్య 32760ని తీసుకుందాం. క్రింది విధంగా కారణాంక విభజన చేద్దాం.



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇదే విధంగా మనము 32760 ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధం $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ గా కారణాంక విభజన చేశాం. అంటే $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్ధంగా

చూపాము. మరొక సంఖ్య 123456789 కి ప్రయత్నం చేద్దాం. దీనిని $3^2 \times 3803 \times 3607$ గా రాయవచ్చు 3803 మరియు 3607 లు ప్రధాన సంఖ్యలా అనిమనము పరిశీలించ వలసి ఉంటుంది! (దీనిని అనేక సహజ సంఖ్యలకు మీకు మీరే ప్రయత్నించండి). ఇది, ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయవచ్చుననే ఆలోచనకి దారి తీస్తుంది. నిజానికి ఇది నిజమైన వ్యాఖ్యానం. పూర్ణసంఖ్యల అధ్యయనానికి దాని ప్రాథమికమైన ప్రాధాన్యత వలన దానిని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం అంటారు. ఇప్పుడు ఈ సిద్ధాంతమును ఒక పద్ధతిలో చెబుదాం.

సిద్ధాంతం 1.1 (అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం):

ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ఒకే ఒక విధంగా ప్రధాన కారణాంకాల క్రమంతో సంబంధం లేకుండా వాటి లబ్ధంగా చూపవచ్చు.

సిద్ధాంతం 1.2 కి సమామైన వృత్తాంతం అది అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంగా తెలియక ముందు యూక్లిడ్ మూలకాలలో IX వ పుస్తకంలో ప్రతిపాదన 14 గా నమోదుచేయ బడినది. ఏది ఏమైనా మొట్టమొదటి సరియైన నిరూపణ కార్ల్‌ఫ్రెడ్రిచ్ గాస్‌చేత *Disquisitiones Arithmeticae* లో ఇవ్వబడినది.

కార్ల్ ఫ్రెడ్రిచ్ గాస్‌ని గణిత శాస్త్ర వేత్తల రాకుమారుడిగా భావించారు. అంతేకాక ఆర్కిమెడిస్ మరియు న్యూటన్‌లతో పాటు ముగ్గురు ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్ర వేత్తలలో ఒకడిగా పరిగణించ బడ్డాడు. అతడు గణితం మరియు విజ్ఞానాలకి ప్రాథమిక సేవలందించాడు.

కార్ల్ ఫ్రెడ్రిచ్ గాస్
(1777-1855)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా చూపవచ్చునని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం చెబుతుంది. నిజానికి అది ఇంకాచాలా చెపుతుంది. ఇది ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ఒకే ఒక విధంగా, ప్రధాన సంఖ్యల క్రమంతో సంబంధం లేకుండా ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చునని చెపుతుంది. అంటే ఏ సంయుక్త సంఖ్యనైనా ప్రధాన సంఖ్యల క్రమమును పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా వాటి లబ్ధంగా ఒకేఒక విధంగా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి $2 \times 3 \times 5 \times 7$ అనేది $3 \times 5 \times 7 \times 2$ కి లేక ఏ ఇతర క్రమంలో ప్రధాన సంఖ్యలను రాసిన దానికైనా సమానమవుతుంది. ఈ విషయాన్ని క్రింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు.

ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజన (కారణాంకాల క్రమంతో సంబంధం లేకుండా) ఒకే ఒక విధంగా ఉంటుంది.

సాధారణంగా $p_1, p_2 ....., p_n$ లు ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు వాటిని ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తే అంటే $p_1 \le p_2 \le ... \le p_n$ అయితే ఏదైనా సంయుక్త సంఖ్య x ని $x = p_1, p_2 .....p_n$ గా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. ఆ ప్రధాన సంఖ్యలను చేర్చితే మనకు వాటి ఘాతాలు వస్తాయి. ఉదాహరణకు.

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

$$= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

ఒకసారి మనము కారణాంకాల క్రమము ఆరోహణమని నిర్ణయిస్తే, కారణాంక విభజన ఒకే విధంగా ఉంటుంది.

గణితము మరియు మరికొన్ని క్షేత్రాలలో అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము యొక్క అన్వయాలు చాలా ఉన్నాయి. వాటిలో కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : n ఒక సహజసంఖ్య అయిన 4^n సంఖ్యను తీసుకుందాం. 4^n విలువ సున్నతో అంతము కలిగియుండు నట్లు n కి ఏదైనా విలువ ఉందే మో పరిశీలించండి.

సాధన: n యొక్క ఏదైనా విలువకు 4^n విలువలో చివరసున్న ఉంటే అది 5 చే భాగించబడుతుంది. అంటే 4^n యొక్క కారణాంక విభజనలో 5 ఉంటుంది. కాని $4^n = (2)^{2n}$ కావున ఇది సాధ్యం కాదు. కాబట్టి 4^n కారణాంక విభజనలో 2 మాత్రమే ప్రధాన సంఖ్య. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము యొక్క ఏకైక లక్షణం వలన 4^n కారణాంక విభజనలో ఇతర ప్రధాన సంఖ్యలేమీ ఉండవని తెలుస్తుంది. కాబట్టి 4^n విలువలో చివరి అంకె సున్న అగునట్లు సహజసంఖ్య n ఉండదని తెలుస్తుంది.

క్రిందటి తరగతులలో తెలియ కుండానే అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమునుపయోగించి రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల గసాప్ర మరియు కసాగు కనుగొనుటను నేర్చుకున్నారు. ఈ పద్ధతిని ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి అంటారు. ఈ పద్ధతిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా గుర్తు చేసుకుందాం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 2 : 6 మరియు 20 ల కసాగు మరియు గసాప్ర లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సాధన: $6 = 2^1 \times 3^1$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

గసాప్ర (6, 20) = 2 మరియు కసాగు (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ఈ విధంగా క్రిందటి తరగతులలో చేశారు.

గసాప్ర (6, 20) = 2^1 = **సంఖ్యల సామాన్య ప్రధాన కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధము.**

కసాగు (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకాల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధము అని గమనించండి.**

పై ఉదాహరణ నుండి గసాప్ర (6, 20) × కసాగు (6, 20) = 6 × 20 అని మీరు గమనించి ఉంటారు. నిజానికి ఏవైనా రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b లకు గసాప్ర (a, b) × కసాగు $(a, b) = a \times b$ అని నిరూపించవచ్చు. ఏవైనారెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యల గసాప్ర కనుగొంటే వాటి కసాగు కనుగొనటానికి ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదాహరణ 3: ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో 96 మరియు 404 ల గసాప్ర కనుగొని దాని ద్వారా కసాగు కనుగొనండి.

సాధన: 96 మరియు 404 ల ప్రధాన కారణాంక విభజన ఈ విధంగా ఉంది.

$$96 = 2^5 \times 3, \ 404 = 2^2 \times 101$$

ఈ రెండు పూర్ణసంఖ్యల గసాప్ర = $2^2 = 4$

మరియు కసాగు $(96,404) = \frac{96 \times 404}{\text{గసాప్ర}(96,404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$

ఉదాహరణ 4: ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో 6, 72 మరియు 120ల గసాప్ర మరియు కసాగు కనుగొనండి.

సాధన: $6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

2 మరియు 3 సామాన్య కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాలు 2^1 మరియు 3^1.

కాబట్టి గసాప్ర (6, 72, 120) $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2, 3, 5 ప్రధాన కారణాంకాల గరిష్ఠ ఘాతాలు క్రమంగా $2^3 \times 3^2 \times 5^1$

కాబట్టి కసాగు (6, 72, 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

వ్యాఖ్య: $6 \times 72 \times 120 \neq$ గసాప్ర (6, 72, 120) $\times$ కసాగు (6, 72, 120) అని గమనించండి. కాబట్టి మూడు సంఖ్యల లబ్ధం వాటి గసాప్ర, కసాగుల లబ్ధానికి సమానం కాదు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 1.1

1. ప్రతి సంఖ్యను వాటి ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా చూపండి.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. క్రింది పూర్ణసంఖ్యల జతలకు కసాగు మరియు గసాప్ర కనుగొని కసాగు × గసాప్ర = రెండు సంఖ్యల లబ్ధమని పరిశీలించండి.

   (i) 26 మరియు 91 (ii) 510 మరియు 92 (iii) 336 మరియు 54

3. ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి నుపయోగించి క్రింది పూర్ణసంఖ్యల కసాగు మరియు గసాప్ర కనుగొనండి.

   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 17, 23 మరియు 29 (iii) 8, 9 మరియు 25

4. గసాప్ర (306, 657) = 9 అయిన కసాగు (306, 657) ని కనుగొనండి.

5. ఏదైన సహజ సంఖ్య n కి 6^n యొక్క విలువ చివరి స్థానంలో '0' అంకె ఉంటుందేమో పరిశీలించండి.

6. $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ మరియు $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ లు సంయుక్త సంఖ్య లెందు కవుతాయో వివరించండి.

7. ఒక ఆటమైదానం చుట్టు వృత్తాకార మార్గముంది. మైదానం చుట్టూ ఒకసారి తిరిగటానికి సోనియాకి 18 నిమిషాలు మరియు రవికి 12 నిమిషాలు పడుతుంది. వారు ఇరువురు ఒకేచోట ఒకేసారి బయలుదేరి ఒకే దిశలో వెళితే, ఎన్ని నిమిషాల తర్వాత వారు బయలు దేరిన స్థానంలో కలుసుకుంటారు.

1.3 కరణీయ సంఖ్యల పునరావలోకనం

9 వ తరగతిలో కరణీయ సంఖ్యలు, వాటి ధర్మాలను పరిచయం చేశారు. మీరు వాటి ఉనికిని తెలుసుకొని, కరణీయ సంఖ్యలు మరియు అకరణీసంఖ్యలు ఏ విధంగా వాస్తవ సంఖ్యలను ఏర్పరచునో తెలుసుకున్నారు. సంఖ్యారేఖ మీద కరణీయ సంఖ్యలను ఏ విధంగా గుర్తించాలో కూడా నేర్చుకున్నారు. ఏది ఏమైనా అవి కరణీయ సంఖ్యలని నిరూపించలేదు. ఈ విభాగంలో $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ మరియు సాధారణంగా, $\sqrt{p}$ (p ప్రధాన సంఖ్య)లు కరణీయ సంఖ్యలని నిరూపిస్తాము. మనము నిరూపించేటపుడు ఉపయోగించే సిద్ధాంతాలలో అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఒకటి.

p, q లు పూర్ణసంఖ్య లై, $q \neq o$ అయినపుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయబడలేని ఏదైనా సంఖ్య ను కరణీయ సంఖ్య అంటామని గుర్తు తెచ్చుకోండి. కరణీయ సంఖ్యలకు మీకు బాగా తెలిసిన కొన్ని ఉదాహరణలు :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110....$

$\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించే ముందు అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును ఆధారంగా చేసుకొని నిరూపించ బడిన క్రింది సిద్ధాంతమును తెలుసుకోవాలి.

సిద్ధాంతం 1.2 : p ఒక ప్రధాన సంఖ్య అనుకోండి. a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయినపుడు p సంఖ్య, q ని భాగిస్తే, అది a^2 ని కూడ భాగిస్తుంది.

***ఉపపత్తి:** a యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజన క్రింది విధంగా ఉంది అనుకోండి:

$a = p_1, p_2, ... p_n$ ($p_1, p_2, ... p_n$ లు ప్రధాన సంఖ్యలు, విభిన్న సంఖ్యలు కానవసరం లేదు)

$\therefore\ a^2 = (p_1 p_2 ...... p_n)(p_1 p_2 ...... p_n) = p_1^2 p_2^2 ...... p_n^2$

p, a^2 ని భాగిస్తుందని మనకు ఇవ్వబడినది. కాబట్టి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం a^2 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలలో p ఒకటి. ఏది ఏమైనా అంక గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము యొక్క ఏకత్వమునుపయోగించి a^2 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు $p_1 p_2 ...... p_n$ మాత్రమే అని గుర్తిస్తాము. కాబట్టి $p_1 p_2 ...... p_n$ లలో p ఒకటి. $a = p_1, p_2, ... p_n$ కావున p, a ని భాగిస్తుంది.

ఇపుడు మనము $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుటకు సిద్ధంగా ఉన్నాము.

''విరుద్ధ పద్ధతి''లో నిరూపణ అనే తంత్రమునాధారంగా దీనిని నిరూపిస్తాము. (ఈ తంత్రము అనుబంధం 1 లో వివరంగా చర్చించ బడినది.)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

* పరీక్షా దృష్టితో కాదు.

సిద్ధాంతం 1.3: $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

ఉపపత్తి: $\sqrt{2}$ అకరణీయ సంఖ్య అని విరుద్ధంగా అనుకుందాం.

$\therefore \sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అగునట్లు పూర్ణసంఖ్యలు r మరియు $s\ (\neq 0)$ ఉంటాయి.

r మరియు s లకు 1 కాని సామాన్య కారణాంకం ఉందనుకుందాం. ఇపుడు సామాన్య కారణాంకంతో r, s లను భాగిస్తే $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ అగునట్లు a, b కవల ప్రధానాంకాలు ఉంటాయి.

$\therefore b\sqrt{2} = a$

రెండు వైపుల వర్గించి అమర్చగా $2b^2 = a^2$ అవుతుంది. $\therefore$ 2, a^2 ని భాగిస్తుంది.

సిద్ధాంతం 1.3 ప్రకారం a ని 2 భాగిస్తుంది $\therefore$ c ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a = 2c$ అని రాయవచ్చు.

a విలువని ప్రతిక్షేపించగా $2b^2 = 4c^2$ అంటే $b^2 = 2c^2$

అంటే b^2 ని 2 భాగిస్తుంది.

b ని 2 భాగిస్తుంది. (మరల $p = 2$తో సిద్ధాంతం 1.3 నుపయోగించి)

$\therefore$ a మరియు b లకు 2 సామాన్య కారణాంకమవుతుంది.

కాని a, b లకు 1 తప్ప వేరే సామాన్య కారణాంకం లేదను భావనకు ఇది విరుద్ధంగా ఉంది.

ఇది $\sqrt{2}$ అకరణీయ సంఖ్య అని అనుకొన్న తప్పుభావన వలన ఏర్పడింది.

కాబట్టి $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిర్ధారిస్తాము.

ఉదాహరణ 5: $\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అని విరుద్ధంగా అనుకుందాం. అంటే $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ అగునట్లు పూర్ణసంఖ్యలు a మరియు $b\ (\neq o)$ ఉంటాయి.

a మరియు b లకు 1 కాని సామాన్య కారణాంకం ఉంటే ఆ సామాన్య కారణాంకంతో భాగించవచ్చు. a మరియు b లు కవల ప్రధానాంకాలు అనుకుందాం.

$\therefore b\sqrt{3} = a$

రెండు వైపుల వర్గించి అమర్చగా $3b^2 = a^2$

$\therefore$ a^2 ని 3 భాగిస్తుంది. సిద్ధాంతం 1.3 ప్రకారం a ని 3 భాగిస్తుంది.

c ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే $a = 3c$ అనుకొందాం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

a విలువని ప్రతిక్షేపించగా $3b^2 = 9c^2$, $b^2 = 3c^2$ అంటే

b^2 ని 3 భాగిస్తుంది. b ని కూడ 3 భాగిస్తుంది. ($p = 3$ తో సిద్ధాంతం 1.3 నుపయోగించి).

$\therefore$ a మరియు b లకు 3 సామాన్య కారణాంకమయినది.

a మరియు b లు కవల ప్రధానాంకాలు అనుదానికి విరుద్ధంగా ఉంది.

ఇది $\sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అని అనుకొన్న తప్పు భావన వలన ఏర్పడింది.

కాబట్టి $\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిర్ధారిస్తాము.

9 వ తరగతిలో మనం ఉల్లేఖించినవిధంగా

- ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు ఒక కరణీయ సంఖ్యల మొత్తము మరియు వ్యత్యాసము కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.
- సున్నకాని అకరణీయ సంఖ్య మరియు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధము మరియు భాగఫలము కరణీయ సంఖ్య అవుతుందని చెప్పుకున్నాము.

  కొన్ని ప్రత్యేకమైన సందర్భాలను ఇక్కడ నిరూపిద్దాం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 6 : $5 - \sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన దానికి విరుద్ధంగా $5 - \sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం.

అపుడు $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, a, bలు కవల ప్రధానాంకాలు; $b \neq 0$

$\therefore 5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $5 - \frac{a}{b}$ అకరణీయ సంఖ్య మరియు $\sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య. కాని ఇది $\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అనుదానికి విరుద్ధంగా ఉంది.

ఇది $5 - \sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనిన తప్పు భావన వలన వచ్చింది.

కాబట్టి $5 - \sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిర్ధారిస్తాము.

ఉదాహరణ 7: $3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన దానికి విరుద్ధంగా $3\sqrt{2}$ అకరణీయ సంఖ్య అని అనుకుందాం.

అపుడు $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ అగునట్లు రెండు కవల ప్రధానాంకాలు a మరియు b ($b \neq 0$) ఉంటాయి. $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

3, a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. అపుడు $\sqrt{2}$ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

$\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అనేదానికి ఇది విరుద్ధంగా ఉంది.

కాబట్టి $3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిర్ధారిస్తాము.

అభ్యాసం 1.2

1. $\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.
2. $3 + 2\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.
3. క్రింది ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు కరణీయ సంఖ్యలని నిరూపించండి.
   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలు అధ్యయనం చేశారు:

1. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం:
   ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ఒకే ఒక విధంగా ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. ప్రధాన కారణాంకాల క్రమముతో సంబంధం లేకుండా.
2. a ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు p ప్రధాన సంఖ్య ఆయి ఉండి a^2 ని p భాగిస్తే, a ని కూడ p భాగిస్తుంది.
3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్యలని నిరూపించుట.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

చదువరులకు గమనిక

p, q, r లు ధనపూర్ణ సంఖ్య లయినపుడు:

గసాప్ర (p, q, r) × కసాగు $(p, q, r) = p \times q \times r$ అనిచూశారు. (ఉదాహరణ 8 చూడండి). ఏది ఏమైన pq మరియు r మూడు సంఖ్యల కు క్రింది ఫలితాలు నిజమవుతాయి.

$$\text{కసాగు}\ (p, q, r) = \frac{p, q, r\ \text{గసాప్ర}\ (p, q, r)}{\text{గసాప్ర}\ (p, q).\ \text{గసాప్ర}\ (q, r).\ \text{గసాప్ర}\ (p, r)}$$

$$\text{గసాప్ర}\ (p, q, r) = \frac{p, q, r\ \text{గసాప్ర}(p, q, r)}{\text{కసాగు}\ (p, q)\ .\ \text{కసాగు}\ (q, r).\ \text{కసాగు}\ (p, r)}$$

❋❋ ✿ ❋❋

బహుపదులు

C7G6B8

2

2.1 పరిచయం

9 వ తరగతిలో మీరు ఒక చలరాశి గల బహుపదులు మరియు వాటి పదవులు (డిగ్రీ) గురించి అధ్యయనం చేశారు. $p(x)$ అనేది x చలరాశి గల బహుపది అయితే $p(x)$ లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతమును $p(x)$ **బహుపది యొక్క పదవి లేక డిగ్రీ** అంటారని గుర్తు చేసుకోండి. ఉదాహరణకి $4x + 2$ అనేది x చలరాశితో పదవి 1 గల బహుపది, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ అనేది x చలరాశితో పదవి 3 గల బహుపది, $2y^2 - 3y + 4$ అనేది చలరాశి y తో పదవి 2 గల బహుపది మరియు $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ అనేది చలరాశి u తో పదవి 6 గల బహు పది. $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ మొదలగు సమాసాలు బహుపదులు కాదు.

పదవి 1 గల బహుపదిని **రేఖీయ బహుపది** అంటారు.

ఉదాహరణకు, $2x-3$, $\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-\frac{2}{11}$, $3z+4$, $\frac{2}{3}u+1$ మొదలగునవి రేఖీయ బహుపదులు. $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ వంటి బహుపదులు రేఖీయ బహుపదులు కాదు.

పదవి 2 గల బహుపదిని వర్గ బహుపది అంటారు. 'quadratic' అను పదం 'quadrate'. అనే పదంనుండి ఉత్పత్తియైనది 'quadrate' అనగా square [వర్గం] అని అర్థం. సాధారణంగా x అను చలరాశిగల వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ రూపంలోవుంటుంది. ఇచ్చట $a, b, c,$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు $a \neq o$. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ లు వర్గ బహుపదులకు ఉదాహరణలు (వాటి సహగుణకాలు వాస్తవ సంఖ్యలైనవి) x అను చలరాశిగల వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c,$ రూపంలోవుంటుంది. ఇచ్చట a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు $a \neq o$ సర్వ సాధారణంగా వర్గ బహుపది యొక్క సాధారణ రూపం $ax^2 + bx + c, a, b, c$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $a \neq o.$

పదవి 3 గల బహుపదిని **ఘన బహుపది** అంటారు. ఘన బహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$. నిజానికి ఘన బహుపది యొక్క సాధారణ రూపం $ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $a \neq o$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇపుడు $p(x) = x^2 - 3x - 4$ బహుపదిని తీసుకోండి. ఈ బహుపదిలో x కి 2 విలువనిస్తే $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ $x^2 - 3x - 4$ బహుపదిలో x కి 2 విలువనివ్వగా వచ్చిన -6 విలువ $x = 2$ వద్ద $x^2 - 3x - 4$ బహుపది విలువ అవుతుంది. ఇదే విధంగా $p(0)$ అలాగే $x = 0$ వద్ద $p(x)$ విలువ $p(o) = -4$.

$p(x)$ అనేది x చలరాశి గల బహుపది మరియు k ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య అయి ఉండి $p(x)$లో x స్థానంలో k ని ప్రతిక్షేపించగా వచ్చిన విలువని $x = k$ వద్ద $p(x)$ విలువ అంటారు మరియు దీనిని $p(k)$ తో సూచిస్తారు.

$x = -1$ వద్ద $p(x) = x^2 - 3x - 4$ విలువ ఎంత?

అది $p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$

అంతేకాక $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$ అని గమనించండి.

$p(-1) = 0$ మరియు $p(4) = 0$ కావున -1 మరియు 4 లను $x^2 - 3x - 4$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలు అంటారు. సర్వ సాధారణంగా $p(k) = 0$ అయితే వాస్తవసంఖ్య k ని బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యతగా చెబుతారు.

రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యతలను ఏ విధంగా కనుగొనాలో మీరు 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. ఉదాహరణకు k అనేది $p(x) = 2x + 3$ యొక్క శూన్యత అయిన $p(k) = 0$.

$\therefore\ 2k + 3 = 0$

అనగా $k = -\dfrac{3}{2}$

సాధారణంగా k అనేది $p(x) = ax + b$ యొక్క శూన్యత అయితే $p(k) = ak + b = 0$ అయితే $k = \dfrac{-b}{a}$

$ax + b$ రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యత $k = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-\text{(స్థిరపదం)}}{x \text{ సహగుణక}}$

ఇలా, రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యత, దాని సహగుణకాలతో సంబంధం కలిగి ఉంది. ఇతర బహుపదులకు కూడ ఇదే విధమైన సంబంధం ఉంటుందా? ఉదాహరణకు వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలు కూడ దాని సహగుణ కాలతో సంబంధం కలిగి ఉంటాయా?

ఈ అధ్యాయంలో ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వటానికి ప్రయత్నం చేద్దాం. బహుపదులకు భాగహార తార్కిక క్రమం గురించి కూడ అధ్యయనం చేద్దాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

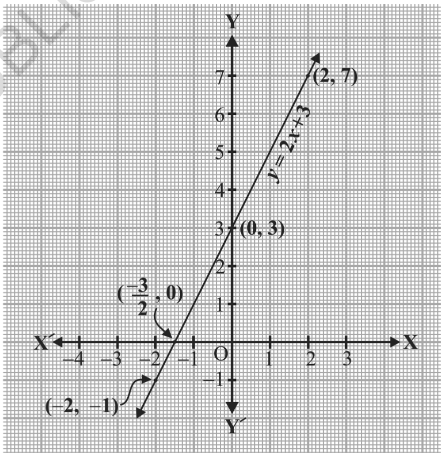
2.2 బహుపది శూన్యతల యొక్క జ్యామితీయ అర్థం:

k అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య, $p(x)$ అనునది ఒక బహుపది అయినపుడు. $p(k) = 0$ అయితే $p(x)$ బహుపది యొక్క శూన్యత k అవుతుందని మీకు తెలుసు. కాని ఒక బహుపది యొక్క శూన్యతలు ఎందుకు అంత ముఖ్యమైనవి? దానికి సమాధానం చెప్పాలంటే ముందుగా రేఖీయ మరియు వర్గ బహుపదుల రేఖాచిత్రాలను మరియు వాటి శూన్యతల జ్యామితీయ అర్థం గురించి తెలుసుకుందాం.

ముందుగా ఒక రేఖీయ బహుపది $ax + b = 0, (a \neq 0)$ని తీసుకుందాం. 9వ తరగతిలో $y = ax + b$ సమీకరణం యొక్క గ్రాఫు ఒక సరళరేఖ అవుతుందని మీరు అధ్యయనం చేశారు. ఉదాహరణకు $y = 2x + 3$ సమీకరణం యొక్క గ్రాఫు $(-2, -1)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువుల గుండాపోవు సరళరేఖ అవుతుంది.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

చిత్రం 2.1 నుండి $y = 2x + 3$ యొక్క గ్రాఫు x అక్షమును $x = -1$ మరియు $x = -2$ ల మధ్య అంటే $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. $2x + 3$ యొక్క శూన్యత $-\frac{3}{2}$ అని కూడ మీకు తెలుసు. కాబట్టి $y = 2x + 3$ గ్రాఫు x– అక్షమును ఖండించు బిందువు యొక్క x– నిరూపకం, $2x + 3$ బహుపది యొక్క శూన్యత అవుతుంది.



చిత్రం 2.1

సాధారణంగా $ax + b$, $(a \neq 0)$ రేఖీయ బహుపదికి $y = ax + b$ యొక్క గ్రాఫు x– అక్షమును ఒకే ఒక బిందువు అంటే $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ వద్ద ఖండించు సరళరేఖ అవుతుంది. కాబట్టి రేఖీయ బహుపది $ax + b$, $a \neq 0$ కి ఒకే ఒక శూన్యత ఉంటుంది. అది $y = ax + b$ యొక్క గ్రాఫు x– అక్షమును ఖండించు బిందువు యొక్క x– నిరూపకం అవుతుంది.

ఇపుడు వర్గ బహుపది శూన్యత యొక్క జ్యామితీయ అర్థమును తెలుసుకొందాం. ఒక వర్గ బహుపది $x^2 - 3x - 4$ ని తీసుకోండి. $y = x^2 - 3x - 4$ యొక్క గ్రాఫు వా ఎలా ఉంటుందో చూద్దాం. పట్టిక 2.1లో ఇవ్వబడిన విధంగా x యొక్క కొన్ని విలువలకు అనుగుణంగా $y = x^2 - 3x - 4$ యొక్క విలువలను పట్టీ చేద్దాం.

* వర్గ లేక ఘన బహుపదుల యొక్క గ్రాఫులను విద్యార్థులు చేయనవసరం లేదు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పట్టిక 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

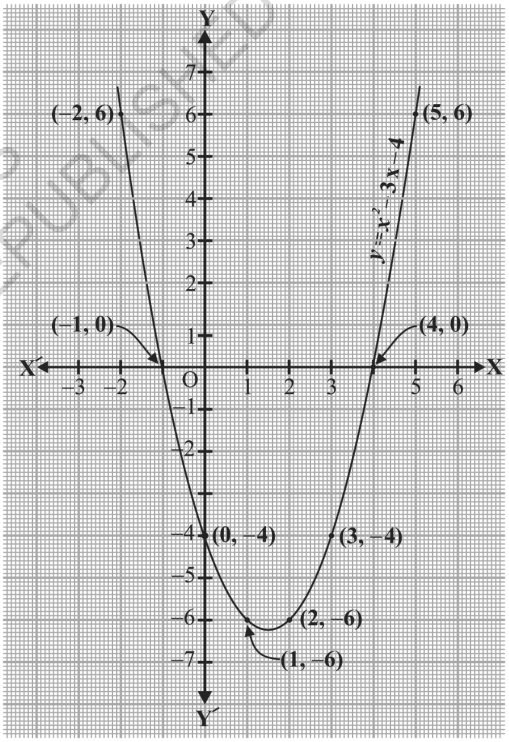
పైన పట్టీ చేయబడిన బిందువులను గ్రాఫు కాగితం మీద గుర్తించి గ్రాఫును గీస్తే ఆది చిత్రం 9.2 మాదిరిగా ఉంటుంది.

నిజానికి $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ వర్గ బహుపదికి దాని అనురూప సమీకరణం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క గ్రాఫు $a > 0$ అయితే పైకి తెరవ బడినట్లు $\vee$ వలె గాని, $a < 0$ అయితే క్రిందికి తెరవ బడినట్లు $\wedge$ వలెగాని ఉంటుంది. (ఈ వక్ర రేఖలను పరావలయాలు అంటారు).

పట్టిక 2.1 నుండి ఈ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలు -1 మరియు 4 అని తెలుస్తుంది అంతేకాక చిత్రం 2.2 నుండి $y = x^2 - 3x - 4$ యొక్క గ్రాఫు x– అక్షమును ఖండించు బిందువుల x– నిరూపకాలు -1 మరియు 4 అని గమనించండి. కాబట్టి $y = x^2 - 3x - 4$ యొక్క గ్రాఫు x– అక్షమును ఖండించు బిందువుల x– నిరూపకాలు $x^2 - 3x - 4$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలవుతాయి.

ఇది ప్రతి వర్గ బహుపదికి నిజమవుతుంది. అంటే $y = ax^2 + bx + c$ ని సూచించు పరావలయం, x– అక్షమును ఖండించు బిందువుల x– నిరూపకాలు $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యత లవుతాయి.

$y = ax^2 + bx + c$ గ్రాఫు యొక్క ఆకారము గురించి ముందుగా పరిశీలించినట్లు క్రింది మూడు సందర్భాలు ఉంటాయి.

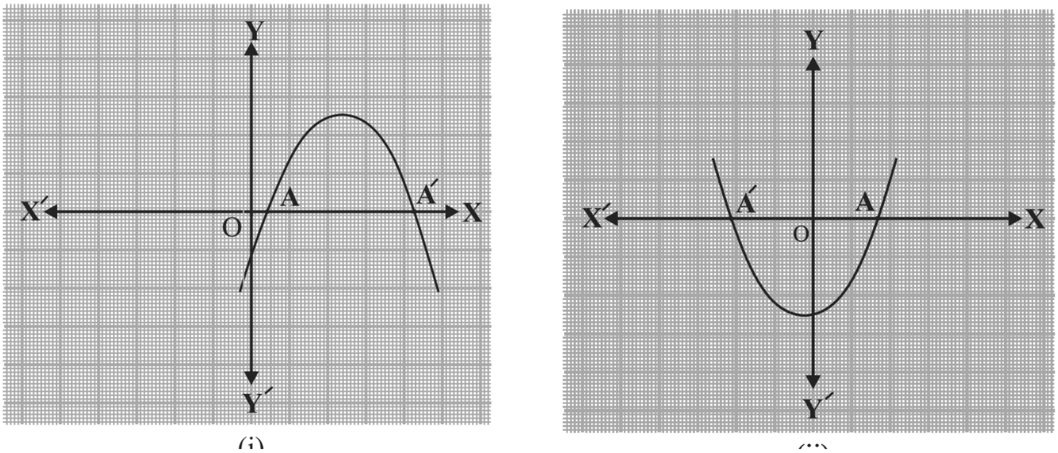


చిత్రం 2.2

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

సందర్భం (i): ఇక్కడ గ్రాఫు, x- అక్షమును రెండు విభిన్న బిందువులు A మరియు A' ల వద్ద ఖండిస్తుంది.

ఈ సందర్భంలో వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క రెండు శూన్యతలు A మరియు A' బిందువుల x- నిరూపకాలు అయినాయి. (చిత్రం 2.3 చూడండి).

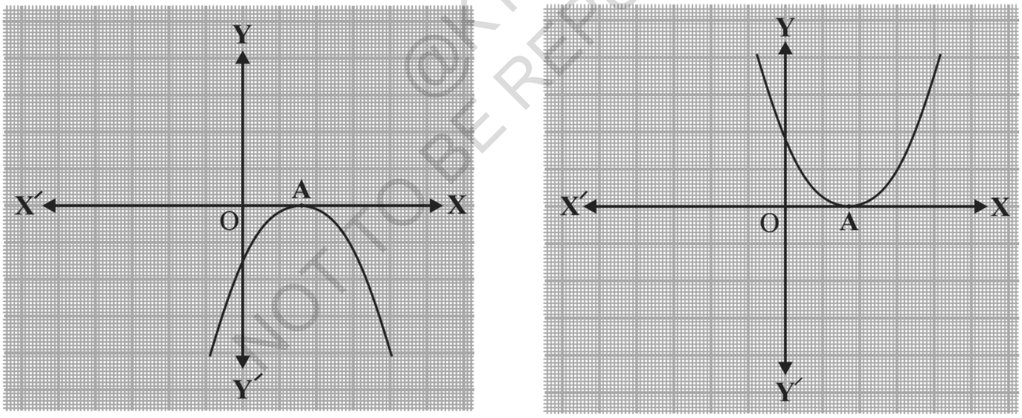


(i) (ii)

చిత్రం 2.3

సందర్భం (ii): ఇక్కడ గ్రాఫు, x- అక్షమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద, అంటే రెండు ఏకీ భవించు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి సందర్భం (i) లోని రెండు బిందువులు A మరియు A' లు ఒకే బిందువు A గా ఏకీభవిస్తాయి. (చిత్రం 2.4 చూడండి).

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

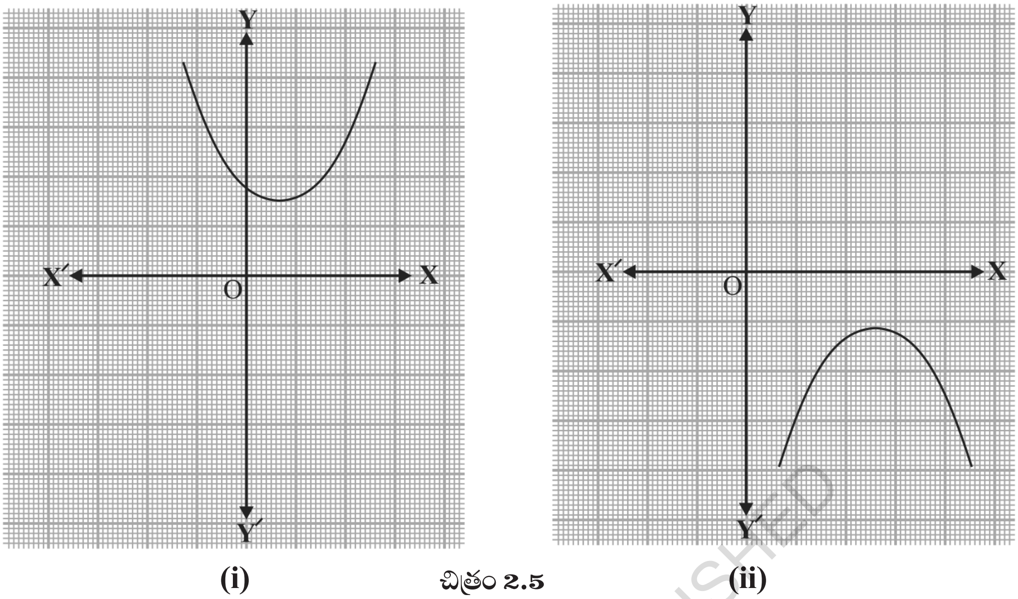


(i) (ii)

చిత్రం 2.4

ఈ సందర్భంలో $ax^2 + bx + c$ వర్గ బహుపదికి A బిందువు యొక్క x– నిరూపకమే శూన్యత అవుతుంది.

సందర్భం (iii): ఇక్కడ గ్రాఫు పూర్తిగా x– అక్షం పైన ఐనా ఉంటుంది లేక పూర్తిగా x– అక్షం క్రింద ఐనా ఉంటుంది. కాబట్టి ఇది x– అక్షమును ఏ బిందువు వద్దా ఖండించదు. (చిత్రం 2.5 చూడండి).



చిత్రం 2.5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కాబట్టి ఈ సందర్భంలో $ax^2 + bx + c$ వర్గ **బహుపదికి శూన్యత లేదు**. కాబట్టి జ్యామితీయంగా ఒక వర్గ బహుపదికి రెండు విభిన్న శూన్యతలు ఉండవచ్చు, లేక రెండు సమాన శూన్యతలు (అంటే ఒక శూన్యత) ఉండవచ్చు, లేక శూన్యత లేకపోవచ్చు. దీనినుండి పదవి (డిగ్రీ) 2 గల బహుపదికి గరిష్ఠం రెండు శూన్యత లుంటాయని తెలుస్తుంది.

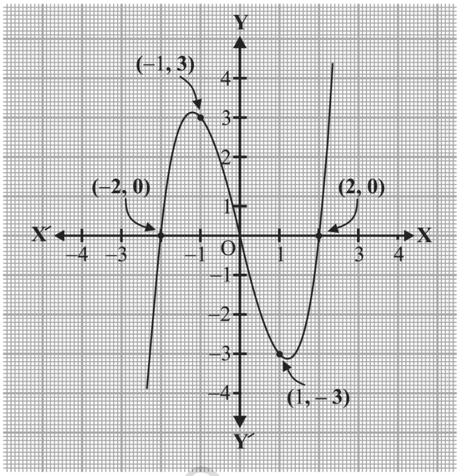
ఇపుడు జ్యామితీయంగా ఘన బహుపది యొక్క శూన్యతల అర్థం ఏమి అనుకుంటున్నారు? కనుగొందాం. $x^3 - 4x$ ఘన బహుపదిని తీసుకోండి. $y = x^3 - 4x$ యొక్క గ్రాఫు ఏ విధంగా ఉంటుందో చూడటానికి పట్టిక 2.2 లో చూపబడిన విధంగా x యొక్క కొన్ని విలువలకు అనుగుణంగా y విలువలు పట్టీ చేద్దాం.

పట్టిక 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

గ్రాఫు కాగితం మీద పట్టిక లోని బిందువులను గుర్తించి, గ్రాఫుని గీయగా $y = x^3 - 4x$ యొక్క గ్రాఫు చిత్రం 2.6లో చూపబడిన విధంగా ఉంటుందని చూస్తాము.

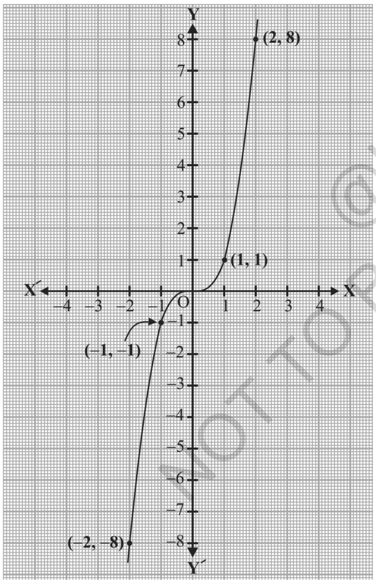
పై పట్టిక నుండి ఘన బహు పది $x^3 - 4x$ యొక్క శూన్యతలు -2, 0 మరియు 2 అని తెలుస్తుంది. నిజానికి $y = x^3 - 4x$ యొక్క గ్రాఫు $x-$ అక్షమును ఖండించు బిందువుల $x-$ నిరూపకాలు -2, 0 మరియు 2 అని గమనించండి. వక్రరేఖ $x-$ అక్షమును ఈ 3 బిందువుల వద్ద మాత్రమే ఖండిస్తుంది. కాబట్టి వాటి $x-$ నిరూపకాలు మాత్రమే బహుపది యొక్క శూన్యత లవుతాయి.



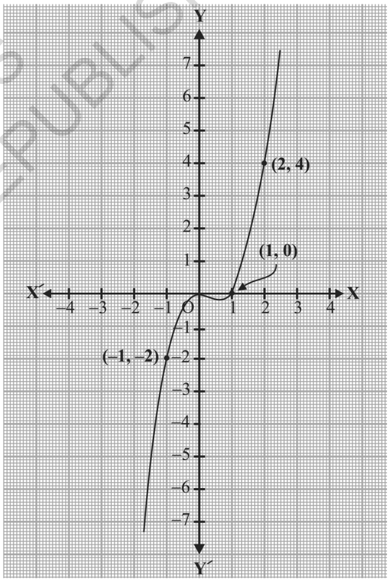
చిత్రం 2.6

మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం. x^3 మరియు $x^3 - x^2$ ఘన బహుపదులకు తీసుకోండి. చిత్రం 2.7 మరియు చిత్రం 2.8లో క్రమంగా $y = x^3$ మరియు $y = x^3 - x^2$ గ్రాఫులు గీసియున్నాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 2.7



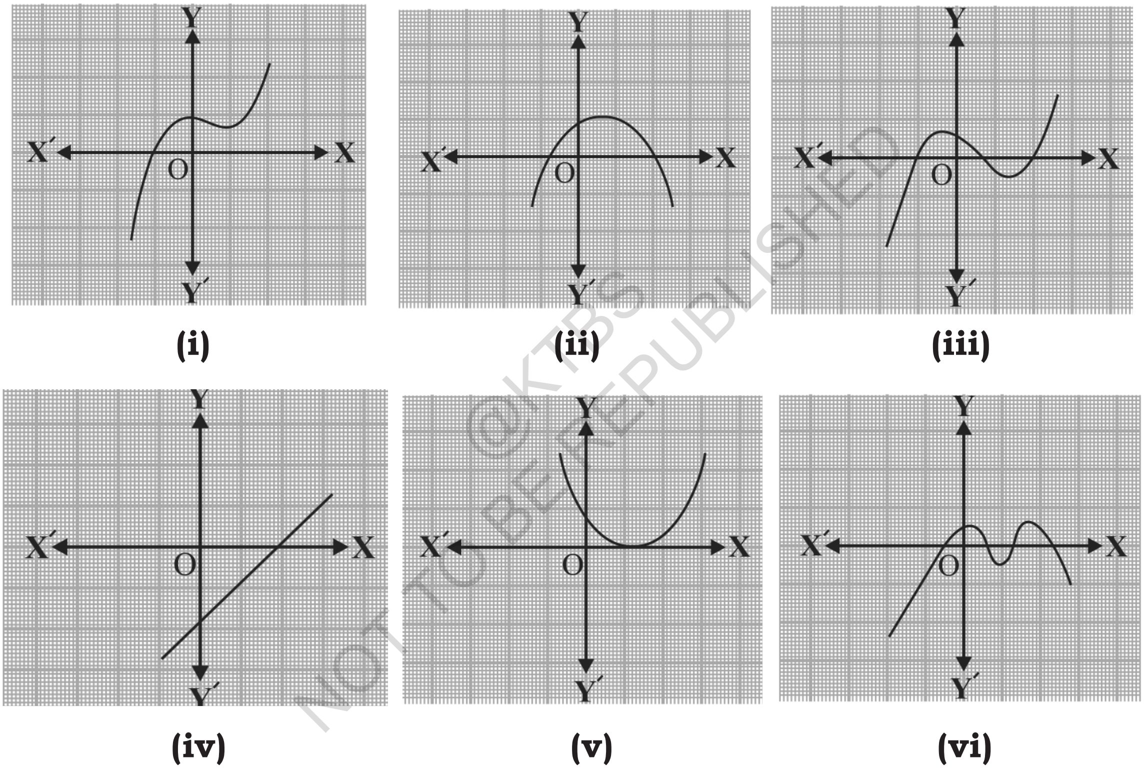
చిత్రం 2.8

x^3 బహుపది యొక్క శూన్యత సున్న మాత్రమే అని గమనించండి. $y = x^3$ యొక్క గ్రాఫు $x-$ అక్షమును ఖండించు ఒకే ఒక బిందువు యొక్క $x-$ నిరూపకం '0' అని కూడ గమనించండి. అదేవిధంగా $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ కావున $x^3 - x^2$ బహుపది యొక్క శూన్యతలు '0' మరియు 1 మాత్రమే. అంతేకాక చిత్రం 2.8 నుండి $y = x^3 - x^2$ రేఖాచిత్రం $x-$ అక్షమును ఖండించు బిందువుల యొక్క $x-$ నిరూపకాలు కూడ 'O' మరియు 1 అని గమనించండి.

పై ఉదాహరణల నుండి ఏదైనా ఘన బహుపదికి గరిష్ఠం 3 శూన్యత లుంటాయని తెలుస్తుంది. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే పదవి 3 కలిగిన బహుపదికి గరిష్ఠం మూడు శూన్యత లుంటాయి.

వ్యాఖ్య: సాధారణంగా బహుపది $p(x)$ యొక్క పదవి n అయితే $y = p(x)$ గ్రాఫు $x-$ అక్షమును గరిష్ఠం n బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి పదవి n గల బహుపది $p(x)$కి గరిష్ఠం n శూన్యతలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 1: క్రింద ఇవ్వబడిన చిత్రం 2.9 లోని గ్రాఫులను చూడండి. $p(x)$ బహుపదికి ప్రతి చిత్రం $y = p(x)$ యొక్క గ్రాఫుని సూచిస్తుంది. ప్రతి గ్రాఫుకి $p(x)$ యొక్క శూన్యతల సంఖ్యని కనుగొనండి.



చిత్రం 2.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:

(i) గ్రాఫు $x-$ అక్షమును ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే ఖండిస్తుంది కాబట్టి శూన్యతల సంఖ్య 1 అవుతుమది.

(ii) గ్రాఫు $x-$ అక్షమును టెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది కాబట్టి శూన్యతల సంఖ్య 2 అవుతుంది.

(iii) శూన్యతల సంఖ్య 3 అవుతుంది. (ఎందుకు?)

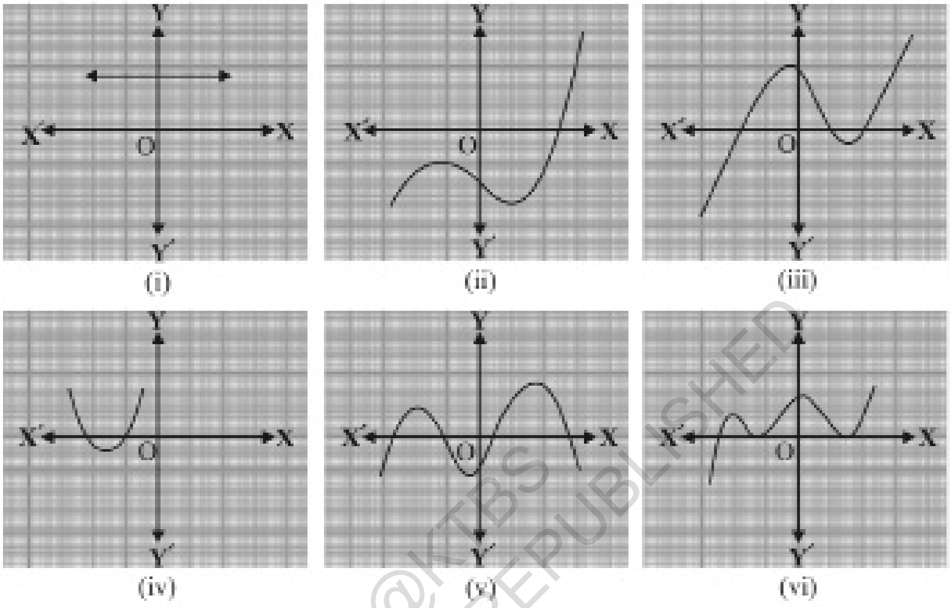
(iv) శూన్యతల సంఖ్య 1 అవుతుంది. (ఎందుకు?)

(v) శూన్యతల సంఖ్య 1 అవుతుంది. (ఎందుకు?)

(vi) శూన్యతల సంఖ్య 4 అవుతుంది. (ఎందుకు?)

అభ్యాసం 2.1

1. కొన్ని బహుపదులు $p(x)$ లకు $y = p(x)$ యొక్క గ్రాఫులు క్రింద చిత్రం 2.10 లో ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి సందర్భంలో $p(x)$ యొక్క శూన్యతల సంఖ్య కనుగొనండి.



చిత్రం 2.10

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.3 ఒక బహుపది యొక్క శూన్యతలు మరియు సహగుణకాల మధ్య సంబంధం

రేఖీయ బహుపది $ax + b$ యొక్క శూన్యత $-\frac{b}{a}$ అని మనకు ముందే తెలుసు. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలు మరియు సహగుణకాల మధ్య సంబంధము గురించి విభాగము 2.1లో తలెత్తిన ప్రశ్నకు సమాధానం చెప్పటానికి ప్రయత్నం చేద్దాం. దీనికోసం ఒక వర్గ బహుపది $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ని తీసుకుందాం. 9వ తరగతిలో ఒక వర్గ బహుపదిని దాని మధ్య పదమును విడదీయుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేయటం నేర్చుకున్నారు. ఇక్కడ మధ్యపదం $-8x$ ని రెండుపదాల మొత్తంగా విభజించాలి. ఆ పదాల లబ్ధం $6 \times 2x^2 = 12x^2$ అయిఉండాలి. కాబట్టి

$$\therefore 2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$$
$$= 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3)$$
$$= 2(x - 1)(x - 3)$$

కాబట్టి, $x - 1 = 0$ లేక $x - 3 = 0$ అయినపుడు $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ విలువ సున్న అవుతుంది.

అంటే $x = 1$ లేక $x = 3$ అయినపుడు $p(x)$ విలువ సున్న అవుతుంది. కాబట్టి, $2x^2 - 8x + 6$ యొక్క శూన్యతలు 1 మరియు 3 అవుతాయి క్రిందివాటిని పరిశీలించండి.

శూన్యతల మొత్తం $= 1 + 3 = 4 = -\frac{(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ యొక్క సహగుణకం})}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

మరొక వర్గ బహుపది $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ని తీసుకోండి. మధ్య పదమును విభజించు పద్ధతి ద్వారా.

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2$$

$$= 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$

$$= (3x - 1)(x + 2)$$

$3x - 1 = 0$ లేక $x + 2 = 0$ అయినపుడు $3x^2 + 5x - 2$ విలువసున్న అవుతుంది. అంటే $x = \frac{1}{3}$ లేక $x = -2$ అయినపుడు $3x^2 + 5x - 2$ విలువ సున్న అవుతుంది. కాబట్టి $3x^2 + 5x - 2$ యొక్క శూన్యతలు $\frac{1}{3}$ మరియు -2 క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

శూన్యతల మొత్తం $= \frac{1}{3} + (-2) = -\frac{5}{3} = \frac{-(x \text{ యొక్క సహగుణకం})}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= \frac{1}{3} \times (-2) = -\frac{2}{3} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

సాధారణంగా $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలు α* మరియు β అయితే $(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$లు $p(x)$ యొక్క కారణాంకాలవుతాయి.

కాబట్టి $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$, k ఒక స్థిరసంఖ్య

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

ఇరు వైపులా x^2 సహగుణాకాలు, x సహగుణకాలు మరియు స్థిరపదాలను పోల్చగా.

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ మరియు $c = k\alpha\beta$.

దీనినుండి $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* α β, లు క్రమంగా ఆల్ఫా, బీటాగా పలక బడే గ్రీకు అక్షరాలు. గామాగా పలకబడే 'γ' అను మరొక అక్షరాన్ని కూడ తర్వాత ఉపయోగిస్తాము.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అంటే శూన్యతల మొత్తం $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ యొక్క సహగుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క సహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ యొక్క సహగుణకం}}$

కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 2: $x^2 + 7x + 10$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతలను కనుగొని శూన్యతలు మరియు సహగుణ కాల మధ్య సంబంధమును పరిశీలించండి.

సాధన: $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

$x + 2 = 0$ లేక $x + 5 = 0$ అయినపుడు $x^2 + 7x + 10$ విలువ సున్న అవుతుంది.

అంటే $x = -2$ లేక $x = -5$ అయినపుడు $x^2 + 7x + 10$ విలువ సున్న అవుతుంది.

కాబట్టి $x^2 + 7x + 10$ యొక్క శూన్యతలు -2 మరియు -5 ఇపుడు

శూన్యతల మొత్తం $= -2 + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్కసహగుణకం})}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

ఉదాహరణ 3: $x^2 - 3$ బహుపది యొక్క శూన్యతలను కనుగొని, శూన్యతలు మరియు సహగుణకాల మధ్య సంబంధమును పరిశీలించండి.

సాధన: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ తత్సమమును గుర్తు తెచ్చుకోండి. దానినుపయోగించి.

$$x^2 - 3 = \left(x = -\sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

$x = \sqrt{3}$ లేక $x = -\sqrt{3}$ అయిన $x^2 - 3$ విలువసున్న అవుతుంది.

కాబట్టి $\sqrt{3}$ మరియు $-\sqrt{3}$ లు $x^2 - 3$ యొక్క శూన్యతలవుతాయి.

శూన్యతల మొత్తం $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ యొక్కసహగుణకం})}{x^2 \text{ యొక్కసహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ యొక్కసహగుణకం}}$

ఉదాహరణ 4: ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతల మొత్తం మరియు లబ్ధం క్రమంగా -3 మరియు 2 అయిన ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన: వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$, మరియు దాని శూన్యతలు α మరియు β అనుకోండి.

$\therefore\ \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$

మరియు $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

$a = 1$ అయితే, $b = 3$ మరియు $c = 2$ అవుతుంది.

కాబట్టి ఇచ్చిన నియమాలకు సరితూగు ఒక వర్గ బహు పది $x^2 + 3x + 2$.

ఈ నియమాలకు సరితూగు ఏ ఇతర వర్గ బహుపది ఐనా $k(x^2 + 3x + 2)$, (k వాస్తవ సంఖ్య) రూపం లో ఉంటుంది.

ఇపుడు ఘన బహుపదులను చూద్దాం. ఘన బహుపది యొక్క శూన్యతలకు మరియు దాని సహగుణ కాలకు మధ్య ఇదేవిధమైన సంబంధం. ఉంటుందని మీరు అనుకుంటున్నారా?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ని తీసుకుందాం.

$x = 4,\ -2,\ \frac{1}{2}$ ల వద్ద $p(x) = 0$ అవుతుందని పరీక్షించవచ్చు. $p(x)$ కి గరిష్ఠం మూడు శూన్యతలుంటాయి కాబట్టి ఇవి $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ యొక్క శూన్యతలవుతాయి. ఇపుడు శూన్యతల మొత్తం

శూన్యతల మొత్తం $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ సహగుణకం})}{x^2 \text{ సహగుణకం}}$

శూన్యతల లబ్ధం $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{(-\text{స్థిరపదం})}{x^3 \text{సహగుణకం}}$

అయినము, ఇక్కడ మరొక సంబంధాన్ని మనం చూడవచ్చు. రెండేని శూన్యతల గుణలబ్దాల మొత్తాన్ని పరిగణించండిఈ ఇప్పుడు.

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = -8 - 1 + 2 = \frac{-x \text{ సహగుణకం}}{x^3 \text{ సహగుణకం}}$$
$$= -7$$
$$= \frac{-14}{2}$$

సాధారణంగా α, β, γ లు ఘన బహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యత లయితే,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\ \beta\ \gamma=\frac{-d}{a}$$ అవుతుంది.

ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 5*: $3,-1,-\frac{1}{3}$ లు ఘనబహుపది $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ యొక్క శూన్యత లని నిరూపించి, శూన్యతలు మరియు సహగుణకాల మధ్య సంబంధమును నిరూపించండి.

సాధన: ఇచ్చిన బహుపదిని ax^2+bx^2+cx+d, తో పోల్చితే $a=3, b=-5, =-11, d=-3$.

$$\begin{aligned} p(3) &= 3\times 3^3-(5\times 3^2)-(11\times 3)-3\\ &= 81-45-33-3\\ &= 0\\ p(-1) &= 3\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-3\\ &= -3-5+11-3\\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(\frac{-1}{3}\right)-3\\ &= -\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3\\ &= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\ &= 0 \end{aligned}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore$ కాబట్టి, $3,-1,-\frac{1}{3}$ లు $3x^3-5x^2-11x-3$ యొక్క శూన్యత లవుతాయి.

$\alpha=3,\ \beta=-1,\ \gamma=-\frac{1}{3}$ అని తీసుకుంటే

$$\alpha+\beta+\gamma=3+(-1)+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\times(-1)+(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=-3+\frac{1}{3}-1=\frac{-11}{3}=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1=\frac{-(-3)}{3}=\frac{-d}{a}.$$

అభ్యాసం 2.2

1. క్రింది వర్గ బహుపదుల శూన్యతలను కనుగొని శూన్య తలు మరియు సహగుణకాల మధ్య సంబంధమును నిరూపించండి.

   i) $x^2 - 2x - 8$ ii) $4s^2 - 4s + 1$ iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   iv) $4u^2 + 8u$ v) $t^2 - 15$ vi) $3x^2 - x - 4$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యతల మొత్తం మరియు లబ్ధం అయిన ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

   i) $\frac{1}{4}, -1$ ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ iii) $0, \sqrt{5}$

   iv) 1, 1 v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ vi) 4, 1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. పదువులు 1, 2 మరియు 3 కలిగిన బహుపదులను క్రమంగా రేఖీయ, వర్గ మరియు ఘన బహుపదులు అంటారు.

2. a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$ అయిన x చలరాశి గల వర్గ బహుపది యొక్క సాధారణ రూపం $ax^2 + bx + c$ అవుతుంది.

3. $y = p(x)$ గ్రాఫు, $x-$ అక్షమును ఖండించు బిందువుల $x-$ నిరూపకాలు, $p(x)$ బహుపది యొక్క శూన్యతలవుతాయి.

4. ఒక వర్గ బహుపదికి గరిష్ఠం 2 శూన్యతలు, ఒక ఘన బహుపదికి గరిష్ఠం 3 శూన్యతలు ఉంటాయి.

5. α మరియు β, లు $ax^2 + bx + c$ వర్గ బహుపదికి శూన్యతలైన $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ అవుతుంది.

6. α, β, γలు ఘన బహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యతలైన

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

మరియు $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

✵✵✵✵

రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాల జత

Y2S1T6

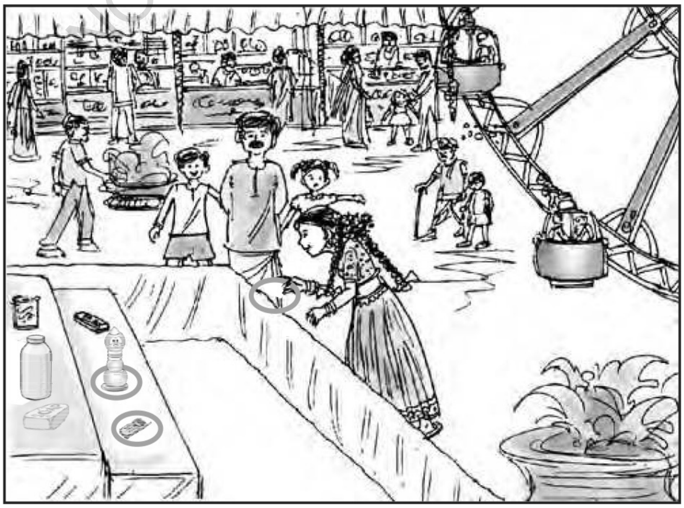
3

3.1 పరిచయం:

క్రింద ఇవ్వబడినటువంటి సన్నివేశాలను మీరు ఎన్నో చూసి ఉంటారు.

అఖిల తన గ్రామంలో ఒక వస్తు ప్రదర్శనకి వెళ్ళింది. ఆమె దైత్యచిత్రం (Giant Wheel) సవారి చెయ్యాలనుకుంది మరియు హూప్లా (ఒక స్టాల్‌లో పెట్టిన వస్తువుల మీదికి ఒక రింగును విసరివేసే ఆట. ఆ రింగు ఏదైనా వస్తువు మీద పడితే ఆ వస్తువు విసరినవారి దవుతుంది) ఆడాలనుకుంది. జైంట్‌వీల్ సవారీలలో సగం సార్లు ఆమె హూప్లా ఆడింది. ఒక సవారీ ఖరీదు ₹ 3 మరియు ఒక హూప్లా ఆట ఖరీదు ₹ 4. ఆమె మొత్తం ₹ 20 ఖర్చు పెడితే, ఎన్ని సార్లు సవారీచేసిందీ, ఎన్ని సార్లు హూప్లా ఆడిందీ ఏ విధంగా కనుగొంటారు?

వివిధ సందర్భాలు తీసుకొని మీరు ప్రయత్నం చేయవచ్చు. ఆమె ఒక సవారీ చేస్తే అది సాధ్యమవుతుందా? రెండు సవారీలతో సాధ్య పడుతుందా? ఈ విధంగా ప్రయత్నం చేయవచ్చు. లేదంటే 9వ తరగతిలో చేసినట్లు ఈ సందర్భాలను రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలుగా గుర్తించి చేయవచ్చు.



చిత్రం 3.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనం ఈ క్రింది విధంగా ప్రయత్నం చేద్దాం.

అఖిల చేసిన సవారీల సంఖ్యను x తోను, హూప్లా ఆడిన సంఖ్య y తో సూచించండి. ఈ స్థితిని రెండు సమీకరణాలతో సూచించవచ్చు.

$$y = \frac{1}{2}x \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

ఈ జత సమీకరణాలకు సమాధానం కనుగొనగలమా? దానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి. అవి ఈ అధ్యాయంలో నేర్చుకుందాం.

3.2 గ్రాఫు పద్ధతి ద్వారా జత సరళ సమీకరణాలను సాధించుట:

సమాధానం లేని జత సరళ సమీకరణాలను అసంగత సరళ సమీకరణాలు అంటారు. సమాధానం కలిగిన రెండు చలరాశులు గల జత సరళ సమీకరణాలను సంగత సమీకరణాలు అంటారు.

సమతుల్యమైన జత సరళ సమీకరణాలకు అనంతమైన విభిన్న సామాన్య సమాధానాలు ఉంటాయి. ఆటువంటి జతను రెండు చల రాశులు గల జత పరస్పరాధార సరళ సమీకరణాలు అంటారు. జత పరస్పరాధార సరళ సమీకరణాలు ఎప్పుడూ సంగతంగానే ఉంటాయి.

రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణాల జతను సూచించు రేఖల లక్షణాలను, వాటి సమాధానాల ఉనికిని క్రిందివిధంగా సంక్షేపిద్దాం:

(i) రేఖలు ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకోవచ్చు. ఈ సందర్భంలో జత సమీకరణాలకి, ఒకే ఒక సమాధానం ఉంటుంది. (సంగత సమీకరణాల జత).

(ii) రేఖలు సమాంతరంగా ఉండవచ్చు. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాలకు సమాధానం ఉండదు. (అసంగత సమీకరణాల జత).

(iii) రేఖలు ఏకీభవించవచ్చు. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాలకు అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి. (జత పరస్పరాధార సంగత సమీకరణాలు).

ఇపుడు వెనుకకు వెళ్లి ఉదాహరణలు 1, 2 మరియు 3 లలో ఏర్పడిన సరళ సమీకరణాల జతలను తీసుకొని అవి జ్యామితీయంగా ఏరకంజతలో గమనిద్దాం.

(i) $x - 2y = 0$ మరియు $3x + 4y - 20 = 0$ (రేఖలు ఖండించు కుంటాయి).

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ మరియు $4x + 6y - 18 = 0$ (రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి).

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ మరియు $2x + 4y - 12 = 0$ (రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి).

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఇపుడు మూడు ఉదాహరణలలో $\frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$, విలువలను రాసి పోల్చి చుద్దాం. ఇక్కడ a_1, b_1, c_1, మరియు a_2, b_2, c_2, లు విభాగం 3.2లో సాధారణ రూపంలో ఇవ్వబడ్డ సమీకరణాల సహగుణకాలను సూచిస్తాయి.

పట్టిక 3.1

క్ర. సం.	రేఖల జతలు	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	నిష్పత్తులను పోల్చండి	గ్రాఫు ద్వారా ప్రతినిధించుట	బీజీయ వివరణ
1	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ఖండించు రేఖలు	ఒకే ఒక సమాధానం
2	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ఏకీ భవించు రేఖలు	అనంతమైన సమాధానాలు
3	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సమాధానం లేదు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై పట్టికనుండి

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

మరియు $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

సమీకరణాలచే సూచించ బడిన రేఖలు

(i) ఖండించుకుంటే, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ఏకీభవిస్తే, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) సమాంతరం అయితే $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అని గమనించవచ్చు.

నిజానికి ఏవైనా రేఖల జతకి విలోమంకూడ నిజమవుతుంది. మీరు మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని కూడ పై వాటిని పరిశీలించవచ్చు.

వాటిని విశదీకరించటానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1: రేఖా చిత్రం ద్వారా జత సమీకరణాలు

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

మరియు $$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

సంగత సమీకరణాలగునేమో పరిశీలించండి. అట్లయిన రేఖాచిత్రం ద్వారా వాటిని సాధించండి.

సాధన: సమీకరణాలు (1) మరియు (2) లకు గ్రాఫులు గీద్దాం. దానికోసం ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలు కనుగొని పట్టీ చేద్దాం.

పట్టిక 3.2

x	0	6
$y = \dfrac{6-x}{3}$	2	0

(i)

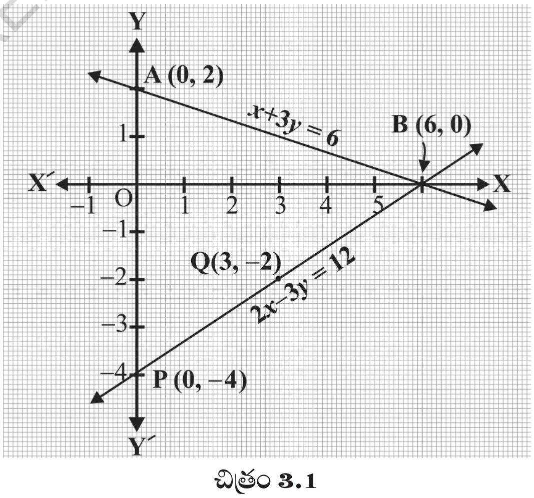
x	0	3
$y = \dfrac{2x-12}{3}$	-4	-2

(ii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 3.5లో చూపినట్లుగా గ్రాఫు కాగితం మీద A (0, 2), B (6, 0), P (0, – 4), మరియు Q (3, –2) బిందువులను గుర్తించి, చిత్రం 3.1 లో చూప బడిన విధంగా AB మరియు PQ సరళరేఖలు ఏర్పడు నట్లు బిందువులను కలపండి.

AB మరియు PQ రెండు రేఖలకు B (6, 0) సామాన్య బిందువని గమనిస్తాము. కాబట్టి జత సరళ సమీకరణాలకు $x = 6$ మరియు $y = 0$ సమాధానమవుతుంది అంటే ఇచ్చిన జత సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలు.



చిత్రం 3.1

ఉదాహరణ 2: రేఖాపద్ధతి ద్వారా క్రింద ఇవ్వబడిన జత సమీకరణాలకు సమాధానం లేదా, ఒకే ఒక సమాధానం ఉందా లేక అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నా యోకనుగొనండి.

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

మరియు $$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

సాధన: సమీకరణం (2) ని $\frac{5}{3}$ చే గుణించగా $5x - 8y + 1 = 0$ అవుతుంది.

కాని ఇది సమీకరణం (1) వలె ఉంది. కాబట్టి సమీకరణాలు (1) మరియు (2) లను సూచించు రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి. కాబట్టి (1) మరియు (2) సమీకరణాలు అనంతమైన సమాధానాలు కలిగి ఉంటాయి. గ్రాఫు కాగితం మీద కొన్ని బిందువులను గుర్తించి పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 3: చంప కొన్ని సమాధానాలు ప్యాంట్లు మరియు స్కర్ట్‌లు కొనటానికి మార్కెట్‌కి వెళ్లింది. ఆమె స్నేహితులు ఆమెని ఎన్ని ప్యాంట్లు కొన్నదీ, ఎన్ని స్కర్ట్‌లు కొన్నదీ అడిగారు. దానికి ఆమె చెప్పిన సమాధానం ''స్కర్ట్‌ల సంఖ్య, ప్యాంట్ల సంఖ్య రెట్టింపుకి రెండు తక్కువ మరియు ప్యాంట్ల సంఖ్య నాలుగు రెట్లకి నాలుగు తక్కువ'' అని. చంపకొన్న ప్యాంట్లసంఖ్య మరియు స్కర్ట్‌ల సంఖ్య కనుగొనటానికి ఆమె స్నేహితులకి సహాయం చెయ్యండి.

సాధన: ప్యాంట్ల సంఖ్యను x తోను స్కర్ట్‌ల సంఖ్యను y తోను సూచిద్దాం. అపుడు క్రింది సమీకరణాలు ఏర్పడతాయి.

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

మరియు

$$y = 4x - 4 \quad (2)$$

(1) మరియు (2) సమీకరణాలకు ప్రతిదానికి రెండు సమాధానాలు కనుగొనుట ద్వారా రేఖాచిత్రాలు గీద్దాం.

అవి పట్టిక 3.3 లో ఇవ్వబడ్డాయి

పట్టిక 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

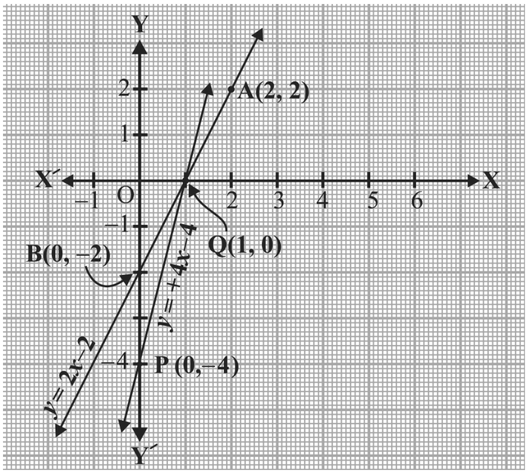
(i)

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

(ii)

చిత్రం 3.2లో చూపిన విధంగా సమీకరణాలను సూచించటానికి బిందువులను గుర్తించి వాటి గుండా రేఖలను గీయండి.

రెండు రేఖలు (1,0) బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. కాబట్టి $x = 1$, $y = 0$ అనేది జత సరళ సమీకరణాల యొక్క సమాధానం అవుతుంది. అంటే ఆమెకొన్న ప్యాంట్ల సంఖ్య 1 మరియు స్కర్ట్‌లు ఏమీ కొనలేదు. ఇచ్చిన సమస్యలోని షరతులకు అనుగుణంగా సమాధానం ఉన్నదీ లేనిదీ పరిశీలించండి.



చిత్రం 3.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 3.1

1. క్రింది సమస్యలకు సరళ సమీకరణాలను కనుగొని, గ్రాఫు ద్వారా వాటిని సాధించండి.

   (i) X వ తరగతి లోని 10 మంది విద్యార్థులు గణిత రసప్రశ్నపోటీలో పాల్గొన్నారు. అమ్మాయిల సంఖ్య, అబ్బాయిల సంఖ్య కంటే 4 ఎక్కువ అయితే పోటీలో పాల్గొన్న అమ్మాయిల సంఖ్య, అబ్బాయిల సంఖ్య కనుగొనండి.

   (ii) 5 పెన్సిళ్లు మరియు 7 పెన్నుల మొత్తం ఖరీదు ₹ 50. మరియు మరియు 7 పెన్సిళ్లు మరియు 5 పెన్నుల మొత్తం ఖరీదు ₹ 46. ఒక పెన్సిలు మరియు ఒక పెన్ను విలువ కనుగొనండి.

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$ నిష్పత్తులను పోల్చుట ద్వారా క్రింద ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణాల జతలను సూచించు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు కుంటాయా, సమాంతరంగా ఉంటాయా లేక ఏకీభవిస్తాయా కనుగొనండి.

   (i) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$ (ii) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$ (iii) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$ నిష్పత్తులను పోల్చుట ద్వారా క్రింద ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణాల జతలు సంగతమా లేక అసంగతమా కనుగొనండి.

   (i) $3x + 2y = 5;\ 2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8;\ 4x - 6y = 9$

   (ii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7;\ 9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11;\ -10x + 6y = -22$

   (v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8;\ 2x + 3y = 12$

4. క్రింద ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణాల జతలు సంగతమా? లేక అసంగతమా కనుగొనండి. సంగతమైతే గ్రాఫు ద్వారా సాధించండి.

   (i) $x + y = 5,\quad 2x + 2y = 10$

   (ii) $x - y = 8,\quad 3x - 3y = 16$

   (iii) $2x + y - 6 = 0\quad 4x - 2y - 4 = 0$

   (iv) $2x - 2y - 2 = 0\quad 4x - 4y - 5 = 0$

5. దీర్ఘ చతురస్రాకారపు తోట పొడవు, వెడల్పు కంటే 4 m ఎక్కువ ఉండి చుట్టుకొలతలో సగం 36 m ఉంటే తోట కొలతలు కనుగొనండి.

6. $2x + 3y - 8 = 0$ రెండు చలరాశులు గల ఒక సరళ సమీకరణం అయితే జ్యామితీయ వివరణ క్రింది విధంగా ఉండునట్లు మరొక రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణమును కనుగొనండి.

   (i) ఖండించు రేఖలు (ii) సమాంతర రేఖలు (iii) ఏకీభవించు రేఖలు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. $x - y + 1 = 0$ మరియు $3x + 2y - 12 = 0$ సమీకరణాల గ్రాఫులను గీయండి. ఈ రేఖలు మరియు x – అక్షంలతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క శీర్షాల నిరూపకాలను కనుగొని త్రిభుజాకార ప్రదేశమును రంగుతోదిద్దండి.

3.3 ఒక జత సరళసమీకరణాలను సాధించటానికి బీజీయ పద్ధతులు:

క్రిందటి విభాగంలో సరళ సమీకరణాల జతను జ్యామితీయంగా ఏ విధంగా సాధించాలో చర్చించాము. సరళ సమీకరణాల యొక్క సమాధానంను సూచించు బిందువు $(\sqrt{3},\ 2\sqrt{7})$, $(-1.75,\ 3.3)$, $\left(\frac{4}{13},\ \frac{1}{19}\right)$, మొదలగు వాటివలె పూర్ణ సంఖ్యలు కాని యెదల, జ్యామితీయ పద్ధతి అనుకూలంగా ఉండదు. అటువంటి నిరూపకాలను చదివేటపుడు తప్పులు చేయటానికి అవకాశముంది. సమాధానం కనుగొనటానికి వేరే ఏమైనా పద్ధతి ఉందా? దానికి అనేక బీజీయ పద్ధతులు ఉన్నాయి. ఇపుడు వాటిని చర్చిద్దాం.

3.3.1 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి:

కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని వివరించవచ్చు.

ఉదాహరణ 4: ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణాల జతను సాధించండి.

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

మరియు $$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:

సోపానం 1: ఏదైనా ఒక సమీకరణమును తీసుకొని ఒక చలరాశిని మరొక చలరాశితో రాయండి. సమీకరణం (2) ని తీసుకుందాం.

$$x + 2y = 3 \qquad (1)$$

దానిని ఇలా రాస్తాం $$x = 3 - 2y \qquad (3)$$

సోపానం 2: సమీకరణం (1) లో x విలువని ప్రతి క్షేపించినప్పుడు.

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

అంటే $$21 - 14y - 15y = 2$$

అంటే $$-29y = 2 - 21 = -19$$

కాబట్టి, $$y = \frac{19}{29}$$

సోపానం 3: సమీకరణం (3)లో y విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే.

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

కాబట్టి, $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$ సమాధానమవుతుంది.

పరిశీలన: $x = \frac{49}{29}$ మరియు $y = \frac{19}{29}$ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే (1) మరియు (2) సమీకరణాలు రెండూ తృప్తి చెందుతాయని పరిశీలించవచ్చు.

ప్రతి క్షేపణ పద్ధతిని స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవటానికి దానిని సోపాన విధానంలో చూద్దాం.

సోపానం 1: మనకు అనుకూలంగా ఉన్న ఏదైనా ఒక సమీకరణమును తీసుకొని ఏదైనా ఒక చలరాశి విలువను మరొక చలరాశి పదాలలో కనుగొనండి. ఉదాహరణకి y విలువను x పదాలలో కనుగొనవచ్చు.

సోపానం 2: ఈ y విలువను మరొక సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి దానిని ఒక చలరాశి గల సమీకరణంగా అంటే x పదాలలోకి మార్చండి. అపుడు దానిని సాధించవచ్చు. కొన్ని సార్లు క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలు 9 మరియు 10లలో మాదిరిగా చలరాశి లేని వ్యాఖ్యానాలు ఉండవచ్చు. ఈ వ్యాఖ్యానం సరియైనదైతే, సరళ సమీకరణాల జతకి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయని నిర్ధారించవచ్చు. ఈ వ్యాఖ్యానం తప్పైతే సరళ సమీకరణాల జత అసంగతమని తెలుస్తుంది.

సోపానం 3: సోపానం 2 లో లభించిన x (లేక y) విలువని సోపానం 1లో ఉపయోగించిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే మరొక చలరాశి విలువ పొందవచ్చు.

వ్యాఖ్య: సరళ సమీకరణాల జతను సాధింటానికి మనకు ఒక చలరాశి విలువను మరొక చలరాశి పదాలలో వ్యక్తపరచి ప్రతిక్షేపించాము. అందువలన ఈ పద్ధతిని ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి అంటారు.

ఉదాహరణ 5 : అభ్యాసం 3.1లోని ప్రశ్న 1ని ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించండి.

సాధన: అఫ్తాబ్ మరియు అతని కుమార్తె వయస్సులు క్రమంగా s మరియు t అనుకొనుము. అపుడు ఈ సందర్భమును సూచించు సరళ సమీకరణాల జత

$s - 7 = 7(t - 7)$, అంటే $s - 7t + 42 = 0$ (1)

మరియు $s + 3 = 3(t + 3)$, అంటే $s - 3t = 6$ (2)

(2) వ సమీకరణం నుండి $s = 3t + 6$

ఈ s విలువను సమీకరణం (1)లో పెడితే

$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అంటే $4t = 48$ అంటే $t = 12$

t విలువను సమీకరణం (2) లో పెడితే,

$s = 3(12) + 6 = 42$

కాబట్టి ఆఫ్తాబ్ మరియు అతని కుమార్తెల వయస్సులు క్రమంగా 42 మరియు 12 సంవత్సరాలు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 6 : 2 పెన్సిళ్లు మరియు 3 రబ్బర్ల విలువ ₹ 9 మరియు 4 పెన్సిళ్లు మరియు 6 రబ్బర్ల విలువ ₹ 18. ఒక పెన్సిలు మరియు ఒక రబ్బరు విలువ కనుగొనండి.

సాధన: సరళ సమీకరణాల జత

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

మరియు
$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

$2x + 3y = 9$ సమీకరణం నుండి y పదాలలో x విలువను వ్యక్త పరుద్దాం. అపుడు

$$x = \frac{9-3y}{2} \quad (3)$$

ఇపుడు ఈ x విలువను సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$

అంటే,
$$18 - 6y + 6y = 18$$

అంటే,
$$18 = 18$$

y యొక్క అన్ని విలువలకు ఈ వాక్యం సరి అవుతుంది. ఏది ఏమైనా సమాధానంగా y కి ఒక ప్రత్యేకమైన విలువని పొందలేము. కాబట్టి x కి ఒక ప్రత్యేకమైన విలువని పొందలేము. ఇవ్వబడిన రెండు సమీకరణాలు ఒకటే కావటాన ఈ పరిస్థితి వచ్చింఇ. కాబట్టి సమీకరణాలు (1) మరియు (2) లకు అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి. జ్యామితీయంగా కూడ మనకు ఇదే సమాధానం లభించిందని గమనించండి. (విభాగం 3.2, చిత్రం 3.3 చూడండి). ఒక పెన్సిలుకి మరియు ఒక రబ్బరు కి మనము ఒకే వెలని పొందలేము. ఎందుకంటే ఇవ్వబడిన సందర్భానికి మనకి అనేక సామాన్య సమాధానాలు ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ 7 : విభాగం 3.2 లోని ఉదాహరణ 3 తీసుకుందాం. పట్టాలు ఒకదాని నొకటి దాటి పోతాయా?

సాధన: ఏర్పడిన సరళ సమీకరణాల జత.

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

మరియు
$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సమీకరణం (1) నుండి x ని y పదాలలో వ్యక్తపరిస్తే $x = 4 - 2y$

ఇపుడు ఈ x విలువని సమీకరణం (2)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

అంటే, $8 - 12 = 0$

అంటే, $-4 = 0$

ఇది ఒక తప్పు వ్యాఖ్యానం.

కాబట్టి ఈ సమీకరణాలకు సామాన్య సమాధానంలేదు. కాబట్టి రెండు పట్టాలు ఒకదాని నొకటి దాటిపోవు.

అభ్యాసం 3.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా క్రింది సమీకరణాల జతలను సాధించండి.

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ మరియు $2x - 4y = -24$ సమీకరణాలను సాధించి $y = mx + 3$ అయిన m విలువని కనుగొనండి.

3. క్రింది సమస్యలకు సరళ సమీకరణాల జతలను రాసి, ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో వాటిని సాధించండి.

(i) రెండు సంఖ్యల వ్యత్యాసం 26 మరియు ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకి మూడు రెట్లు. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

(ii) రెండు పరిపూరక కోణాలలో పెద్దకోణం, చిన్న కోణం కంటే 18 డిగ్రీలు ఎక్కువ. ఆ కోణాలను కనుగొనండి.

(iii) ఒక క్రికెట్టు టీము యొక్క సలహాదారురాలు 7 బ్యాట్లు మరియు 6 బంతులను ₹ 3800 లకు కొంటుంది. తర్వాత ఆమె 3 బ్యాట్లు మరియు 5 బంతులను ₹ 1750లకు కొంటుంది. ఒకబ్యాటు విలువ మరియు ఒక బంతి విలువలను కనుగొనండి.

(iv) ఒక నగరంలో ట్యాక్సి ఖర్చు అంటే ఒక స్థిరమైన ఖర్చు మరియు ప్రయాణం చేసిన దూరాని కయ్యే ఖర్చు కలసి ఉంటుంది. 10 km లకు ₹ 105 మరియు 15 kmకి ₹ 155 ఖర్చవుతుంది. స్థిరమైన ఖర్చు ఎంత? మరియు ఒక km కగు ఖర్చు ఎంత? ఒక వ్యక్తి 25 km ప్రయాణం చేస్తే ఎంత ఖర్చవుతుంది?

(v) ఒక భిన్నము యొక్క లవము మరియు హారము రెండిటికీ 2 కూడితే $\frac{9}{11}$ అవుతుంది. మరియు 3 కూడితే $\frac{5}{6}$ అవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనండి.

(vi) 5 సంవత్సరాలతర్వాత జాకోబ్ వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకి మూడు రెట్లు ఉంటుంది. 5 సంవత్సరాల క్రితం జాకోబ్ వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకి ఏడురెట్లు ఉంది. ప్రస్తుతము వారిద్దరి వయస్సు లెంతెంత?

3.3.2 తొలగించు పద్ధతి

ఇపుడు ఒక చలరాశిని తొలగించే మరొక పద్ధతిని చూద్దాం. కొన్ని సార్లు ఈ పద్ధతి ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి కంటే చాలా అనుకూలంగా ఉంటుంది. ఇపుడు ఈ పద్ధతి ఏంటో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 8 : ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9:7 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4:3 వారిలో ప్రతి ఒక్కరు నెలకి ₹ 2000 పొదుపు చేస్తే, వారి నెలసరి ఆదాయాలను కనుగొనండి.

సాధన: ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాలు క్రమంగా $9x$ మరియు $7x$ మరియు వారి ఖర్చులు $4y$ మరియు $3y$ అనుకొందాం. ఈ సందర్భంలో ఏర్పడిన సమీకరణాలు.

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

మరియు $$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

సోపానం 1: y యొక్క సహగుణకాలను సమానం చేయటానికి సమీకరణం (1)ని 3 చేత సమీకరణం (2)ని 4 చేత గుణించండి. అపుడు.

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

మరియు $$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

సోపానం 2: y యొక్క సహగుణకాలు సమానం కావున y ని తొలగించటానికి సమీకరణం (4)నుండి సమీకరణం (3)ని తీసివేయండి. అపుడు

$$(28x - 27x) - (12y + 12y) = 8000 - 6000$$

అంటే $$x = 2000$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సోపానం 3: ఈ x విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా.

$$9(2000) - 4y = 2000 \qquad (3)$$

అంటే $$y = 4000 \qquad (4)$$

కాబట్టి $x = 2000$, $y = 4000$, అనేది సమీకరణాల సమాధానం అవుతుంది.

అంటే ఆ వ్యక్తుల యొక్క నెలసరి ఆదాయాలు క్రమంగా ₹ 18000 మరియు ₹ 14000 అవుతాయి.

పరిశీలన: 18000 : 14000 = 9 : 7 అంతేకాక వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి

= 18000 - 2000 : 14000 - 2000

= 16000 : 12000 = 4 : 3

గమనించండి:

1. పై ఉదాహరణను సాధించుటలో ఉపయోగించిన పద్ధతిని తొలగించు పద్ధతి అంటారు. ఎందుకంటే ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణమును పొందటానికి ముందు ఒక చలరాశిని తొలగిస్తాము. పై ఉదాహరణలో మనము y ని తొలగించాము. మనము xని కూడ తొలగించవచ్చు. ఆ విధంగా ప్రయత్నం చేయండి.
2. మీరు ఈ సమస్యను సాధించటానికి ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి లేక గ్రాఫు పద్ధతి కూడ ఉపగించవలసినది. ఆ విధంగా కూడ చేసి ఏ పద్ధతి ఎక్కువ అనుకులంగా ఉంటుందో చూడండి.

   ఇపుడు తొలగించు పద్ధతిలోని సోపానాలను గమనిద్దాం:

సోపానం 1: ఒక చలరాశి యొక్క సహగుణకాలను సంఖ్యాత్మకంగా సమానం చేయటానికి రెండు సమీకరణాలను ముందుగా ఒక శూన్యం కాని సూక్తమైన స్థిర సంఖ్యతో గుణించండి.

సోపానం 2: తర్వాత ఒక సమీకరణం నుండి మరొక సమీకరణమును తీసివేయటం కాని కూడటంగాని చేసి ఒక చలరాశిని తొలగించండి. మీకు ఒక చలరాశి గల సమీకరణం వస్తే 3వ సోపానానికి వెళ్లండి.

సోపానం 2లో ఏ చలరాశి లేని ఒక సత్యమైన వ్యాఖ్యానం మిగిలితే, ఇవ్వబడిన సమీకరణాల జతకు అనంతమైన అనేక సమాధానాలు ఉంటాయి.

సోపానం 2లో ఏ చలరాశి లేని ఒక తప్పు వ్యాఖ్యానం వస్తే, ఇవ్వబడిన సమీకరణాల జతకు ఏ సమాధానం ఉండదు. అంటే అవి అసంగతమైనవి.

సోపానం 3: ఒక చలరాశి (x లేక y) లో లభించిన సమీకరణమును, ఆ చలరాశి విలువ కనుగొనుటకు సాధించండి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

సోపానం 4: ఈ x (లేక y) విలువను ఇవ్వబడిన సమీకరణాలలో ప్రతిక్షేపించి, మరొక చలరాశి విలువ కనుగొనండి.

ఇపుడు దీనిని విశదీకరించటానికి మనము మరికొన్ని ఉదాహరణలు సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : క్రింద ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణాల జత యొక్క అన్ని సాధ్యమైన సమాధానాలను తొలగించు పద్ధతిలో కనుగొనండి.

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$

మరియు

$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

సాధన:

సోపానం 1: x యొక్క సహగుణకాలను సమానం చేయటానికి సమీకరణం (1) ని 2 చేత మరియు సమీకరణం (2)ని 1చేత గుణించండి. అపుడు మనకు సమీకరణాలు క్రింది విధంగా వస్తాయి.

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$

మరియు

$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

సోపానం 2: సమీకరణం (4)ని సమీకరణం (3)నుండి తీసివేస్తే.

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

అంటే, $0 = 9$, ఇది తప్పు వ్యాఖ్యానం కాబట్టి సమీకరణాల జతకు సమాధానం లేదు.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 10 : ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు దానిని తిప్పి రాయగా ఏర్పడిన సంఖ్యల మొత్తము 66. ఆ రెండు అంకెల వ్యత్యాసము 2 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి అటువంటి సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

సాధన: మొదటి సంఖ్యలోని పదుల స్థానంలోని అంకె మరియు ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె క్రమంగా x మరియు y అనుకొనుము. కాబట్టి మొదటి సంఖ్యను విస్తరణ రూపంలో $10x + y$ గా రాయవచ్చు. (ఉదాహరణకు $56 = 10(5) + 6$).

అంకెలను తిప్పిరాస్తే ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె x మరియు పదుల స్థానంలోని అంకె y అవుతుంది. ఈ సంఖ్య విస్తరణ రూపంలో $10y + x$ అవుతుంది. (ఉదాహరణకు 56ని తిప్పిరాస్తే $65 = 10(6) + 5$ అవుతుంది).

ఇవ్వ బడిన నియమం ప్రకారం

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

అంటే,

$$11(x + y) = 66$$

అంటే, $x + y = 6$ (1)

రెండు అంకెల వ్యత్యాసం 2 అని ఇవ్వబడినది. కాబట్టి

$x - y = 2$ (2)

లేక $y - x = 2$ (3)

$x - y = 2$ అయితే (1) మరియు (2) లను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధిస్తే $x = 4$ మరియు $y = 2$ అవుతుంది. అపుడు ఆ సంఖ్య 42 అవుతుంది.

$y - x = 2$ అయితే (1) మరియు (3) లను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధిస్తే $x = 2$ మరియు $y = 4$ అవుతుంది. అపుడు ఆ సంఖ్య 24 అవుతుంది.

కాబట్టి అటువంటి సంఖ్యలు రెండు ఉన్నాయి. అవి 42 మరియు 24.

పరిశీలన: $42 + 24 = 66$ మరియు $4 - 2 = 2$ అంతేకాక $24 + 42 = 66$ మరియు $4 - 2 = 2$

అభ్యాసం 3.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణాల జతలను తొలగించు పద్ధతి మరియు ప్రతిక్షేపణ పద్ధతులలో సాధించండి.

   (i) $x + y = 5$ మరియు $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ మరియు $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ మరియు $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ మరియు $x - \frac{y}{3} = 3$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన సమస్యలకు సరళ సమీకరణాల జతలను రాసి, వాటి సమాధానాలను (ఉంటే) తొలగించు పద్ధతిలో కనుగొనండి:

   (i) ఒక భిన్నం యొక్క లవానికి 1 కూడి, హారం నుండి 1 తీసివేస్తే అది 1 అవుతుంది. దాని హారానికి మాత్రమే 1 కూడితే అది $\frac{1}{2}$ అవుతుంది ఆ భిన్నమును కనుగొనండి.

   (ii) అయిదు సంవత్సరాల క్రిందట నూరి వయస్సు సోను వయస్సుకి మూడు రెట్లు ఉంది. పది సంవత్సరాల తర్వాత నూరి వయస్సు సోను వయస్సుకి రెండు రెట్లు ఉంటుంది. నూరి మరియు సోను వయస్సు లెంతెంత?

   (iii) ఒక రెండంకెల సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 9. ఈ సంఖ్య యొక్క 9 రెట్లు, ఆ సంఖ్యలోని అంకెలను తిప్పిరాయగా ఏర్పడిన సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్లకి సమానం. ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.

(iv) మీన ₹ 2000 తీసుకోవటానికి బ్యాంకుకి వెళ్లింది. ఆమె షరాబు (క్యాషీర్) ని ₹ 50 మరియు ₹ 100 నోట్లు మాత్రమే ఇవ్వమని అడిగింది. మీనాకి మొత్తం 25 నోట్లు వచ్చాయి. ఆమెకి ₹ 50 నోట్లు మరియు ₹ 100 నోట్లు ఏవి ఎన్ని వచ్చాయో కనుగొనండి.

(v) ఒక అప్పిచ్చు గ్రంథాలయములో మొదటి మూడు రోజులకు ఒక స్థిరమైన వెల మరియు తర్వాత ప్రతి రోజుకి కొంత అదనపు వెల ఉంటుంది. సరిత ఒక పుస్తకాన్ని ఏడురోజులు ఉంచుకొని ₹ 27 చెల్లించింది. సుశీ ఒక పుస్తకాన్ని 5 రోజులు, ఉంచుకొని ₹ 21 చెల్లించింది. స్థిరవెలను మరియు ఒకరోజు అదనపువెలను కనుగొనండి.

3.4 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాల జతను

(i) జ్యామితీయ పద్ధతి (ii) బీజీయ పద్ధతిలలో సూచించవచ్చు మరియు సాధించవచ్చు.

2. జ్యామితీయ పద్ధతి

రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాల జత యొక్క గ్రాపుని రెండు సరళ రేఖలతో సూచించవచ్చు.

(i) రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటే, ఆ బిందువు, రెండు సమీకరణాల యొక్క ఒకే ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాల జతను సంగత సమీకరణాలు అంటారు.

(ii) రెండు రేఖలు ఏకీభవిస్తే, అపుడు అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి సరళరేఖ మీది ప్రతి బిందువు ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాల జతను పరస్పరాధార సరళ సమీకరణాలు అంటారు.

(iii) సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటే ఆ సమీకరణాల జతకు సమాధానం ఉండదు. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాల జతను అసంగత సమీకరణాలు అంటారు.

3. బీజీయ పద్ధతులు:

సరళ సమీకరణాల జతను సాధించటానికి మనము క్రింది పద్ధతులను చర్చించాము.

(i) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి (ii) తొలగించు పద్ధతి (iii) అడ్డ గుణకార పద్ధతి

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. సరళ సమీకరణాల జత $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అయితే క్రింది సందర్భాలు ఏర్పడతాయి.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$; ఈ సందర్భంలో సరళ సమీకరణాల జత సంగతంగా ఉంటుంది.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ఈ సందర్భంలో సరళ సమీకరణాల జత అసంగతంగా ఉంటుంది.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ఈ సందర్భంలో సరళ సమీకరణాల జత పరస్పరాధారితం మరియు సంగతం.

5. అనేక సందర్భాలను గణిత పరంగా రేఖీయంగా కాకుండా రెండు సమీకరణాలతో సూచించవచ్చు. కాని మనము వాటిని మార్చి, సరళ సమీకరణాల జతగా చూపిస్తాము.

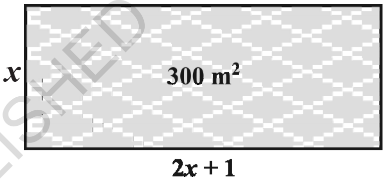
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

వర్గ సమీకరణాలు

X5Y6D3

4

4.1 పీఠిక:



చిత్రం 4.1

అధ్యాయం 2లో మీరు వివిధ బహుపదోక్తుల గురించి నేర్చుకున్నారు. $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. అనునది వర్గ బహుపదులలో ఒక విధము. ఈ బహుపదోక్తిని సున్నకు సమానం చేసినపుడు మనకు వర్గ సమీకరణము లభిస్తుంది. నిజ జీవిత పరిస్థితులలో అనేక సన్నివేశాలలో వర్గసమీకరణాల అన్వయాలను మనం చూడవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక స్వచ్ఛంద సంస్థ ఒక ప్రార్థనా మందిరాన్ని నిర్మించాలని అనుకుంటారు. దాని లోపలి వైశాల్యం 300m^2, మరియు పొడవు, వెడల్పు రెండింతలకంటే 1m ఎక్కువగా ఉండాలని నిర్ణయిస్తారని అనుకుందాం. ఆ మందిరం పొడవు మరియు వెడల్పులు ఎంతుండాలి?

ఆ మందిరం వెడల్పు x మీటర్లు అనుకుందాం. అపుడు, దాని పొడవు $(2x + 1)$ మీటర్లు అవుతుంది. ఈ వివరాలను చిత్రం 10.1లో చూపినట్లు సూచించవచ్చు.

ఇపుడు, మందిరం వైశాల్యం $= (2x + 1)x \text{ m}^2$

$= (2x^2 + x) \text{ m}^2$

కనుక $2x^2 + x = 300$ (దత్తాంశం)

$\therefore \quad 2x^2 + x - 300 = 0$

అందువలన మందిరం పొడవు వర్గసమీకరణం $2x^2 + x - 300 = 0$ ను సంతృప్తి పరచాలి.

బ్యాబిలోనియన్లు మొదట వర్గసమీకరణాలకు పరిష్కారం కనుగొన్నారని నమ్ముతారు. ఉదాహరణకు రెండు ధన సంఖ్యల మొత్తం మరియు, గుణలబ్ధాలను ఇచ్చినపుడు ఆ రెండు సంఖ్యలను ఎలా కనుగొనవచ్చు అనుటను వారు తెలుసుకున్నారు. మరియు ఈ సమస్య $x^2 - px + q = 0$ రూపంలోని వర్గసమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించుటకు సమానం. గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త యూక్లిడ్ పొడవులు కనుగొనడానికి ఒక రేఖాగణిత

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

విధానాన్ని అభివృద్ధి పరిచారు. ఇది మన ప్రస్తుత పరిభాషలో వర్గ సమీకరణాల పరిష్కారం అను అర్థాన్ని ఇస్తుంది. సాధారణ రూపంలో వర్గసమీకరణాలను పరిష్కరించు కీర్తి ప్రాచీన భారత గణిత శాస్త్ర వేత్తలకే దక్కుతుంది. వాస్తవానికి బ్రహ్మగుప్త (క్రీ.శ. 598 – 665) $ax^2 + bx = c$ రూపంలోని వర్గ సమీకరణాన్ని పరిష్కరించడానికి స్పష్టమైన సూత్రాన్ని ఇచ్చారు. తర్వాత శ్రీధరాచార్య (క్రీ.శ. 1025) వర్గ సమీకరణాన్ని పరిష్కరించడానికి వర్గమును పూర్తీ చేయు విధానం ద్వారా వర్గ సమీకరణము యొక్క సూత్రం (భాస్కర II చెప్పినట్టు) అని పిలువబడు ఒక సూత్రాన్ని కనుగొన్నారు. అరబ్ గణితశాస్త్రవేత్త అల్–ఖ్వారిజ్మి (సుమారు క్రీ.శ. 800) కూడ వివిధ వర్గ సమీకరణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు. అబ్రహం బార్ హియ్యహా నసి క్రీ.శ. 1145లో యూరోప్‌లో ప్రకటించబడిన తన పుస్తకం 'లిబర్ ఎంబాడోరమ్'లో వివిధ వర్గసమీకరణాల సంపూర్ణ పరిష్కారాలను రాశారు.

ఈ అధ్యాయంలో మీరు వర్గ సమీకరణాలు మరియు వర్గమూలాలను కనుగొను వివిధ విధానాలను అధ్యయనం చేస్తారు. దిన నిత్య జీవన సన్నివేశాలలో వర్గసమీకరణాల కొన్ని అన్వయాలను కూడా మీరు ఇక్కడ చూస్తారు.

4.2 వర్గ సమీకరణములు (Quadratic Equations):

a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ ను 'x'లో వర్గ సమీకరణము అంటాము. ఉదాహరణకి $2x^2 + x - 300 = 0$ ఒక వర్గ సమీకరణము. అదే విధంగా $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$, మరియు $1 - x^2 + 300 = 0$ కూడా వర్గ సమీకరణాలే.

వాస్తవానికి $p(x)$ ఒక ద్విపరిమాణ బహుపది అవుతూ $p(x) = 0$ రూపంలోవున్న వానినన్నింటిని వర్గసమీకరణాలు అంటాం. అయితే $p(x)$లోని పదాలను వాని పరిమాణాల ఆధారంగా అవరోహణ క్రమంలో రాస్తే దానిని వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం. అనగా $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ను వర్గసమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం.

ప్రపంచంలోని అనేక సందర్భాలలో మనం ఈ వర్గ సమీకరణాలను వివిధ గణితరంగాలలో చూస్తాము. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 1: క్రింది సందర్భాలకు గణిత సమీకరణాలను రాయండి.

(i) జాన్ మరియు జీవంతి ఇద్దరి వద్ద కలసి 45 గోళీలు కలవు. అయితే ఇద్దరూ చేరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్నారు. ఇద్దరి వద్ద మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్దము 124 అయిన ఇద్దరి వద్ద మొదటవున్న గోళీల సంఖ్యను కనుగొందాము.

(ii) ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ఒక రోజుకు కొన్ని బొమ్మలు తయారుచేస్తారు. ప్రతి బొమ్మ ఉత్పాదన ఖర్చు (రూపాయలలో) ఒకరోజులో ఉత్పత్తి చేసిన బొమ్మల సంఖ్యను 55 నుండి తీసివేసినదానికి సమానం

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక రోజులో బొమ్మల మొత్తం ఉత్పాదనా ఖర్చు ₹ 750 అయితే, ఆ రోజు తయారు చేసిన బొమ్మల సంఖ్యను కనుగొందాము.

సాధన:

(i) జాన్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య 'x' అనుకొనిన

జీవంతి వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = $45 - x$ (ఎందుకు?)

5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత జాన్ వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య = $x - 5$

అదే విధంగా జీవంతి వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య = $45 - x - 5 = 40 - x$

$\therefore$ మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల లబ్దం = $(x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

అనగా $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధము 124)

i.e., $-x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 45x + 324 = 0$

కావున జాన్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య వర్గసమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తుంది. $x^2 - 45x + 324 = 0$ ఇది కావలసిన గణిత సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

(ii) ఆ రోజు తయారుచేసిన బొమ్మల సంఖ్య 'x' అనుకొనుము.

అనగా ఆ రోజు తయారైన ప్రతి బొమ్మ విలువ (రూపాయలలో) $= 55 - x$

అలాగే ఆ రోజు తయారుచేసిన మొత్తం బొమ్మల విలువ $= x(55 - x)$

అనగా $x(55 - x) = 750$

$55x - x^2 = 750$

i.e., $-x^2 + 55x - 750 = 0$

i.e., $x^2 - 55x + 750 = 0$

అనగా $x^2 - 55x + 750 = 0$ వర్గ సమీకరణము ఆ రోజు తయారుచేయబడిన బొమ్మల సంఖ్యను తృప్తిపరుస్తుంది. ఇది కావలసిన గణిత సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 2: క్రిందివి వర్గసమీకరణాలేమో పరిశీలించండి.

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

సాధన:

(i) LHS $= (x-2)^2 + 1$

$= x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

అనగా, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ ని

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ గా రాయవచ్చు.

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో ఉంది. కావున ఇది వర్గ సమీకరణము.

(ii) ఇచ్చుట $x(x+1) + 8 = x^2 + x + 8$ మరియు $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

అనగా, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో లేదు. కావున ఇది వర్గసమీకరణము కాదు.

(iii) ఇచ్చుట LHS $x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

అనగా $x(2x+3) = x^2 + 1$ ను

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ అని రాయవచ్చు

అనగా $x^2 + 3x - 1 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో ఉంది. కావున ఇది వర్గసమీకరణము.

(iv) ఇచ్చుట LHS $= (x+2)^3 = (x+2)^2(x+2)$

$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$

$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

కనుక, $(x+2)^3 = x^3 - 4$ ను $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ గా రాయవచ్చు.

$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0$ లేదా $x^2 + 2x + 2 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

సూచన: పై ఉదాహరణ (ii)లో ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం లాగా కనపడుతుంది. కానీ ఇది వర్గ సమీకరణం కాదు. అదే విధంగా ఉదాహరణ (iv)లో ఇచ్చిన సమీకరణం ఘన సమీకరణం లాగా కనబడుతుంది కానీ ఇది వర్గ సమీకరణమే.

పై ఉదాహరణల నుంచి ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం అవునో, కాదో నిర్ణయించుటకు ముందు దానిని సూక్ష్మీకరించటము మంచిదని మనం గుర్తించగలం.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అభ్యాసం 4.1

1. క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవునో, కాదో నిర్ణయించండి.

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$ (iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. క్రింది వానికి సరియగు వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము:

(i) ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 m^2. దాని పొడవు, వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుటకు అవసరమైన వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము?

(ii) రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గీ సమీకరణమును కనుగొనుము?

(iii) రోహన్ తల్లి, రోహన్ కంటే 26 సం.లు పెద్దది. 3 సం.లు తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్ధం 360. అయిన రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గసమీకరణమును రాయుము?

(iv) 480 కి.మీ. దూరమును ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది. ఒక వేళ ఇదే రైలు ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి.మీ. తక్కువ వేగముతో ప్రయాణిస్తే గమ్యం చేరుటకు పట్టే కాలం 3 గం.లు పెరుగుతుంది. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుటకు కావలసిన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.3 కారణాంక పద్ధతిలో వర్గ సమీకరణమును సాధించడం:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణమును తీసుకుందాం. దీనిలో x బదులు '1' ప్రతిక్షేపించిన $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = RHS. $x = 1$ ను వర్గ సమీకరణము $2x^2 - 3x + 1 = 0$ కు మూలాము లేదా సాధన అంటాం. 1 అనునది $2x^2 - 3x + 1 = 0$ యొక్క వర్గ బహుపదియొక్క శూన్య విలువ కూడ అవుతుంది.

సాధారణంగా $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన αను వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలం అంటాం. మరియు $x = \alpha$ వర్గసమీకరణము యొక్క సాధన అనికూడా అంటాం. లేదా α వర్గసమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుంది అంటాం. $\boldsymbol{ax^2 - bx + c}$ వర్గబహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు ఒక్కటే అని గుర్తించగలరు.

2వ అధ్యాయంలో ఒక వర్గ బహుపదికి రెండు శూన్య విలువలుంటాయని మనం గమనించాం కనుక వర్గసమీకరణ మునకు కూడా రెండు మూలాలే వుంటాయి.

మనం 9వ తరగతిలో మధ్యపదమును రెండింటిగా విడగొట్టుట ద్వారా ఒక వర్గ బహుపది యొక్క కారణాంకాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో నేర్చుకున్నాము. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 3: $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన: మొదటిగా మధ్యపదమును రెండింటిగా విడగొట్టుదాం. $-5x$ ను $-2x -3x$ గా రాయవచ్చు.

$$[-2x \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3]$$

అనగా $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3$

$$= 2x(x-1) - 3(x-1)$$

$$= (2x-3)(x-1)$$

అనగా $(2x - 3) = 0$ లేదా $(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ మరియు $x = 1$లు ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క సాధనలు.

మరొక విధంగా 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలు.

ఇచ్చిన సమీకరణానికి 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు మూలాలవుతాయా? లేదా? సరిచూడండి.

ఇచ్చుట $2x^2 - 5x + 3$ ని రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి ప్రతి రేఖీయ కారణాంకాన్ని సున్నాకు సమానంచేయడం ద్వారా $\mathbf{2x^2 - 5x + 3 = 0}$ యొక్క మూలాలను కనుగొన్నామని గమనించండి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 4: $6x^2 - x - 2 = 0$ వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలను కనుగొనుము?

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $6x^2 - x - 2 = 0$.

అనగా $6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$$= 3x(2x+1) - 2(2x+1)$$

$$= (3x-2)(2x+1)$$

అనగా $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ అయ్యే విధంగావున్న x విలువలే $6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలవుతాయి.

$\therefore 3x - 2 = 0$ లేదా $2x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ లేదా $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ 6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ $6x^2 - x - 2 = 0$. లో $x = \frac{2}{3}$ మరియు $x = -\frac{1}{2}$ లను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా సమీకరణమునకు మూలాలు అవుతాయో లేదో సరిచూడగలము.

ఉదాహరణ 5: $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలను కనుగొనండి

సాధన: $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

అనగా ఇవి దత్త సమీకరణము యొక్క మూలాలు. $\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$ ఇపుడు, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$, $x = \frac{2}{3}$

అనగా ఈ మూలం రెండు సార్లు పునరావృతమైనది. ఇందులో పునరావృతమైన ఒక మూలం $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$

$\therefore\ 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$.

ఉదాహరణ 6: విభాగం 10.1 లో చర్చించిన ప్రార్థనా మందిరము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను కనుగొనండి.

సాధన: విభాగం 10.1లో మందిరం వెడల్పు x m. అయితే x సమీకరణం $2x^2 + x - 300 = 0$ ని సంతృప్తి పరచాలి అనుటను మనం చూశాము. కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించుట ద్వారా ఈ సమీకరణాన్ని మనం కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

i.e., $(x - 12)(2x + 25) = 0$

$\therefore$ $x - 12 = 0$ లేదా $2x + 25 = 0$

$x = 12$ లేదా $x = -\frac{25}{2} = -12.5$

కావున $x = 12$ లేదా $x = -12.5$ ఇవి దత్త సమీకరణ ములాలు. x మందిరం వెడల్పు అయినందువలన దీని విలువ ఋణాత్మకం కావడం సాధ్యము లేదు కావున మందిరం వెడల్పు = 12m.

దాని పొడవు $= 2x + 1 = 2(12) + 1 = 25$ m

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 4.2

1. క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాలను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము:

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. ఉదాహరణ 1 లో ఇచ్చిన సమస్యలను సాధించండి.

3. మొత్తము 27, లబ్దము 182 అయ్యే విధంగా రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. రెండు వరుస ధనపూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 365 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

5. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 cm తక్కువ కర్ణము పొడవు 13 cm అయిన మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనుము.

6. ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజు ఒక నియమిత సంఖ్యలో వస్తువులను తయారు చేస్తారు. ఒక రోజు తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు (రూపాయిలలో) ఆ రోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే 3 ఎక్కువ. ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు 90 రూపాయలు అయిన ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య మరియు ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదును కనుగొనుము?

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

10.5 మూలాల స్వభావము:

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

అని మనము ఇంతకు ముందు భాగంలో తెలుసుకున్నాం.

$b^2 - 4ac > 0$ అయినపుడు దానికి రెండు వేరు వేరు మూలాలుండును. అవి

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac = 0$, తర్వాత $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ లేక $-\frac{b}{2a}$

$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}, \ -\frac{b}{2a}$ ఇవి రెండు $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణానికి సమాన వాస్తవ మూలాలు అని చెబుతాము.

$b^2 - 4ac < 0$ అయిన అపుడు ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య వర్గము $b^2 - 4ac$ కావడానికి సాధ్యంకాదు. ఇలాంటి ఉదాహరణలలో వర్గసమీకరణం ఏ వాస్తవ మూలాలను కలిగివుండదు.

$b^2 - 4ac$ అనేది $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు వుంటాయో లేదో నిర్ణయించుటకు తోడ్పడుతుంది. కనుక దీనిని వర్గ సమీకరణం యొక్క విచక్షణి (Discriminant) అంటాం.

అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం

(i) $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

(ii) $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

(iii) $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగివుండదు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 7 : $2x^2 - 4x + 3 = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొని తద్వారా మూలాల స్వభావమును కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలోవుంది. ఇచ్చట $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$ కనుక విచక్షణి.

$b2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$

∴ ఇచ్చిన సమీకరణం వాస్తవ మూలాలను కలిగివుండదు.

ఉదాహరణ 8 : 13 m వ్యాసం గల ఒక వృత్తాకార పార్కు సరిహద్దు మీద ఒక స్తంభమును ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. పార్కు యొక్క సరిహద్దు మీద ఎదురెదురుగా అనగా ఒక వ్యాసం యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద ఏర్పాటు చేయబడిన A మరియు B అనే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభము వరకూ గల దూరాల బేధము 7m వుండునట్లు స్తంభమును ఏర్పాటు చేయగలమా? ఒక వేళ చేయగలిగితే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభం ఎంత దూరంలోవుంటుంది?

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

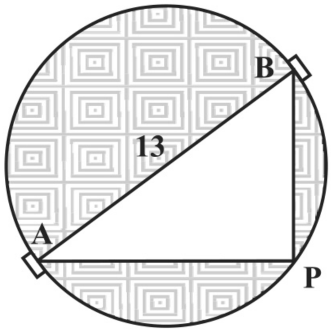
సాధన: ముందుగా తగిన చిత్రాన్ని గీద్దాం (చిత్రం 4.4).

స్తంభమును ఏర్పాటు చేసే బిందువు P అనుకుందాం. B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరమును x m అనుకుందాం. అనగా BP = x m దత్తాంశము ప్రకారము AP, BP ల మధ్య భేదము 7m. (AP – BP లేదా BP – AP = 7m) కనుక AP = $x + 7$ m అవుతుంది.

AB = 13 m, మరియు AB వ్యాసం కనుక

$\angle APB = 90^0$ (ఎందుకు?)

∴ పైథాగారస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $AP^2 + PB^2 = AB^2$



చిత్రం **4.2**

i.e., $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

i.e., $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore\ 2x^2 + 14x - 120 = 0$

పై సమీకరణంను తృప్తి పరిచే x విలువయే B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరం అవుతుంది.

అనగా $2(x^2 + 7x - 60) = 0$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

సమీకరణంనకు వాస్తవ మూలాలు వున్నప్పుడే స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడానికి వీలవుతుంది. అయితే ఈ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు వున్నదీ లేనిదీ దాని విచక్షణి ఆధారంగానే తెలుసుకోగలం కనుక ముందుగా దీని విచక్షణిని పరిశీలిద్దాం.

$\therefore$ విచక్షణి $= b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times 1\ (-60)$

$= 49 + 240$

$= 289 > 0$

అనగా ఈ వర్గ సమీకరణంనకు రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలాలు వుంటాయి. అంటే సమస్యలో ఇచ్చిన షరతులకు అనుగుణంగా స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడం సాధ్యమే.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సూత్రమును ఉపయోగించి $x^2 + 7x - 60 = 0$ ను సాధిస్తే

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$\therefore\ x = 5$ లేదా -12

అయితే x దూరమును సూచిస్తుంది. కనుక ఇది ఖచ్చితంగా ధనాత్మకము.

$\therefore\ x = 5$

అనగా B నుంచి 5 m దూరంలో మరియు A నుంచి 12 m. దూరంలో స్తంభంను ఏర్పాటు చేయాలి.

ఉదాహరణ 9: $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుము? తద్వారా మూలాల స్వభావమును తెలుపుము? ఒక వేళ మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలైతే వానిని కనుగొనుము?

సాధన: ఇచ్చుట $a = 3$, $b = -2$ మరియు $c = \frac{1}{3}$

$\therefore$ విచక్షిణి $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణంలో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలువుంటాయి.

అవి $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}, \Rightarrow \frac{2}{6}, \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

అభ్యాసం 4.3

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాల స్వభావమును తెలుపుము? ఒక వేళ వాస్తవ మూలాలు వుంటే కనుగొనుము.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలలో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే k విలువను కనుగొనుము?

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$

3. మామిడి పండ్లను నిల్వ చేయుటకు 800 m^2 వైశాల్యంవుంటూ, పొడవు వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లు వుండే విధంగా ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలమును ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

4. ఇద్దరు మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సం.లు. నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48. ఇది సాధ్యమేనా? ఒక వేళ సాధ్యమైతే వారి వయస్సులను కనుగొనుము.

5. చుట్టుకొలత 80 m, వైశాల్యము 400 m^2 వుండునట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కును తయారు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.6 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింది విషయాలను చదువుకున్నాము:

1. చరరాశి 'x' లో వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం $ax^2 + bx + c = 0$, ఇచ్చట a, b, cలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$

2. ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య 'α' కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన 'α'ను $ax^2 + bx + c$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలము అంటాము. $ax^2 + bx + c$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు, $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే.

3. $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి ప్రతి దానికి సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనగలుగుతాము.

4. వర్గ సమీకరణమునకు సూత్రం: $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు.
   $$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం

   (i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగివుంటుంది.

   (ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగివుంటుంది.

   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

సమాంతర శ్రేఢులు

G1C6J4

5

5.1 పరిచయం:

ప్రకృతిలో చాలా వస్తువులు అమరికలను పాటించడం మనం గమనించే వుంటాము. ఉదాహరణకు ప్రొద్దు తిరుగుడుపువ్వులోని పూల రెక్కలు, తేనెతుట్టలోని రంధ్రాలు, మొక్కజొన్న కంకిలోని విత్తనాలు, అనాస మరియు దేవదారు పండ్లు మీది సర్పిలాకారాలు.

నిత్యజీవితంలో కనబడు ఇలాంటి మరికొన్ని అమరికలను పరిశీలిద్దాం. అలాంటి కొన్ని ఉదాహరణలు.

(జీ) రీనా ఒక ఉద్యోగానికి దరఖాస్తు చేసింది. ఆమె నెలకు ₹ ೮೦೦೦ చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ ೫೦೦ పెంచే విధంగావున్న ఉద్యోగంలో నియమితురాలైంది. అయిన ఆమె వేతనం మొదటి, రెండవ, మూడవ.......... సంవత్సరాలలో వరుసగా (₹ లలో)

8000, 8500, 9000, ...

(జీజీ) ఒక నిచ్చెన మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి వరుసగా ೨ ఛిఋ తగ్గుతూవుంది. (చిత్రం 5.1 గమనించండి) క్రింద నుంచి మొదటి మెట్టు యొక్క పొడవు ೪೫ ఛిఋ అయిన క్రిందనుంచి క్రమంగా మొదటి, రెండవ, మూడవ.......... ఎనిమిదవ మెట్ల పొడవులు వరుసగా

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

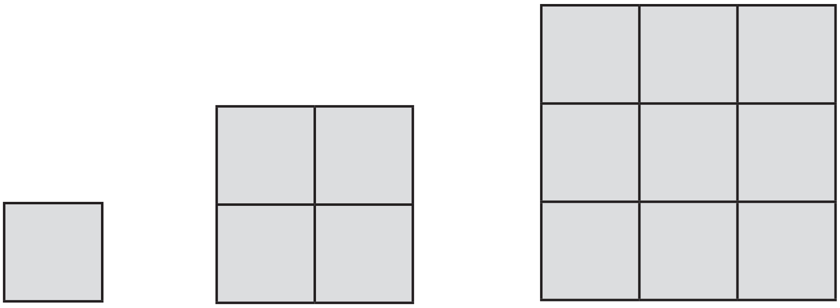
చిత్రం 5.1

(జీజీజీ) ఒక సేవింగ్ స్కీములో సొమ్ము మూడు సంవత్సరములకు ఒక సారి $\frac{5}{4}$ రెట్లు పెరుగుతుంది. స్కీములో ₹ ೧೦೦೦೦ లను పెట్టుబడిగా పెట్టిన ೩, ೬, ೯ మరియు ೧೨ సంవత్సరాలలో తరువాత వచ్చే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా: (₹ లలో) 10000, 12500, 15625, 19531.25

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) 1, 2, 3, ... యూనిట్లు భుజాలుగా గల చతురస్రాలలోని చదర ప్రమాణాల సంఖ్యలు (చిత్రం 5.2ను గమనించండి)

$1^2, 2^2, 3^2$, ...



చిత్రం 5.2

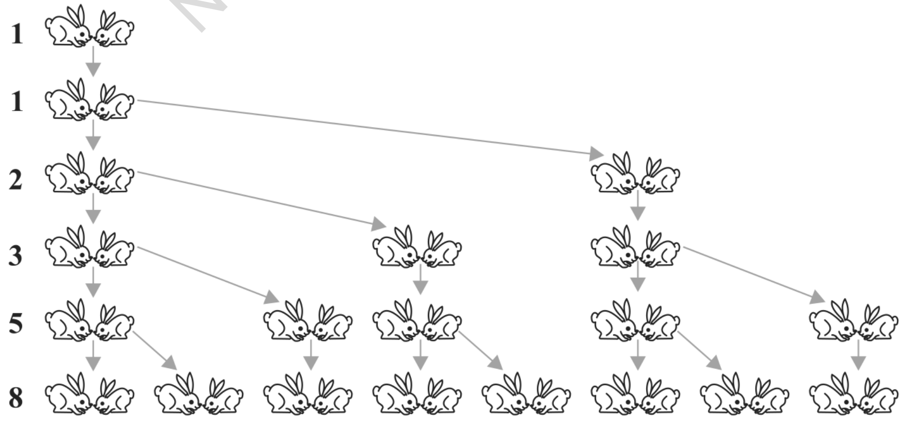
(v) శకీలా తన కూతురు మొదటి పుట్టిన రోజు ₹ 100 లను తన కూతురు యొక్క డబ్బుల పెట్టెలోవుంచింది. ప్రతి సంవత్సరం ఈ విధంగా వుంచే సొమ్ము ₹ 50 లు పెంచుతూ పోయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ .... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా (₹ లలో)

100, 150, 200, 250, ...

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(vi) ఒక కుందేళ్ళ జంట మొదటి నెలలో పిల్లలకు జన్మనివ్వడం సాధ్యంకాదు. రెండవ నెల నుంచి ప్రతి నెల మళ్ళీ ఒక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందని అనుకొనుము. ఇలా ఉత్పత్తి అయిన కుందేళ్ళ జంట కూడా తిరిగి రెండవ నెల నుంచి ప్రతినెల మరొక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. మొదటి నెలలో ఒకే ఒక జంట వుందనుకొని ఏ కుందేళ్ళ జంట చనిపోలేదని భావించి 1వ, 2వ, 3వ........ 6వ నెలల ప్రారంభంలోగల జంట సంఖ్యలు వరుసగా:

1, 1, 2, 3, 5, 8



చిత్రం 5.3

పై ఉదాహరణలలో మనం కొన్ని అమరికలను గమనించగలం. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదము దాని ముందువున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపడం వల్ల లభిస్తాయి. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదమును ఒక స్థిర పదంచే గుణించడంవల్ల తరువాత పదాలను పొందగలం. మరికొన్నింటిలో వరుస సంఖ్యల వర్గాలను తెలుసుకొనగలం.

ఈ అధ్యాయంలో ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపడం వల్ల లభించే అమరికలను మరియు ప్రతీ పదమును ఒక స్థిరపదముచే గుణించడంవల్ల, తరువాత పదాలను పొందే అమరికలను వాని యొక్క nవ పదాలను మరియు n పదాల మొత్తాలను కనుగొనడం ఎలా? అనేదానిని చూద్దాం. నిత్య జీవన సమస్యలను పరిష్కరించడానికి ఈ జ్ఞానాన్ని ఉపయోగిద్దాం.

5.2 సమాంతర శ్రేఢులు:

క్రింది సంఖ్యా జాబితాలను పరిశీలించండి.

(i) 1, 2, 3, 4, ...

(ii) 100, 70, 40, 10, ...

(iii) –3, –2, –1, 0 .....

(iv) 3, 3, 3, 3, ...

(v) –1, –1.5, –2.0, –2.5, ...

జాబితాలోని ప్రతీ సంఖ్యను ఒక పదం అని అంటారు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పై ప్రతి జాబితాలో ఇచ్చిన పదాల ఆధారంగా ప్రతి జాబితాలో తరువాత పదమును రాయగలరా? రాయగలిగితే ఎలా రాయగలరు? బహుశా అమరికలోని నియమం ఆధారంగా రాయగలరు. ఆ నియమం ఏమిటో పరిశీలిద్దాం.

(i) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదాని కంటే '1' ఎక్కువ.

(ii) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదము కంటే 30 తక్కువ.

(iii) లో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి '1' కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(iv) లో అన్ని పదాలు '3' అనగా ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి సున్న కలపటంవల్ల వస్తుంది.

(v) లో ప్రతి పదము దాని ముందు వున్న పదానికి'–0.5' ను కలపటం వల్ల. (అనగా 0.5ను తీసివేయటం వల్ల) వస్తుంది.

పై ప్రతి జాబితాలోను ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటంవల్ల గానీ లేదా తీసివేయటం వల్లగానీ వస్తున్నాయి. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను సమాంతరశ్రేఢి (AP) అంటాము.

అనగా **''ఒక సంఖ్యా జాబితాలో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు వాని ముందున్న పదానికి ఏదో ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తూవుంటే ఆ జాబితాను సమాంతరశ్రేఢి అంటాము''**. అనునది గుర్తుంచుకోండి. స్థిర సంఖ్యను సామాన్య భేదము లేదా పదాంతరము అంటాము. ఇది ధనాత్మకము లేదా సున్నాకావచ్చు. అనునది గుర్తుంచుకోండి.

ఒక సమాంతరశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a_1 రెండవ పదమును a_2.........., nవ పదమును a_n మరియు సామాన్య బేధము d అనుకొనిన సమాంతరశ్రేఢి a_1, a_2, a_3.........., a_n

మరియు $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d.$

సమాంతర శ్రేఢులకు మరిన్ని ఉదాహరణలు

(a) ఒక పాఠశాలలో ప్రార్థనా సమయంలో వరుసగా నిలబడిన విద్యార్థుల ఎత్తులు (cm లలో)

147, 148, 149, ..., 157.

(b) ఒక పట్టణములో జనవరి నెలలో ఒక వారంలో నమోదైన కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల ఆరోహణ క్రమము.

–3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5

(c) ₹ 1000 అప్పకు 5% సొమ్మును ప్రతీ నెల చెల్లించిన, ప్రతి నెల చివర ఇంకనూ చెల్లించవలసిన సొమ్ము. (₹ లలో)

950, 900, 850, 800, ..., 50.

(d) ఒక పాఠశాలలో 1 నుంచి 12వ తరగతి వరకూ ప్రతి తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు సాధించిన వారికి ఇచ్చే బహుమతుల విలువ వరుసగా (₹ లలో)

200, 250, 300, 350, ..., 750.

(e) ప్రతి నెల ₹ 50 చొప్పున పొదుపు చేసిన, 10 విడతలలో అయ్యే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా (₹ లలో)

50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

సమాంతరశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము: సమాంతర శ్రేఢులన్నింటిని ఈ క్రింది రూపంలో రాయవచ్చని మీరు గమనించే వుంటారు.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$$

దీనినే సమాంతరశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపము అంటాం. ఇందులో $\boldsymbol{a}$ మొదటి పదము, $\boldsymbol{d}$ సామాన్యబేధం లేదా రుపాంతరము.

ఉదాహరణ (a) నుంచి (e) వరకూ ఇవ్వబడిన జాబితాలన్ని కూడా పరిమిత సంఖ్యలో పదాలను కలిగివున్నాయి. ఇలాంటి సమాంతర శ్రేఢులను పరిమిత సమాంతరశ్రేఢులు అంటారు. వీటిలో చివరి పదము ఉంటుంది. అయితే ఉదాహరణ (i) నుంచి (v) వరకూ ఇవ్వబడిన జాబితాలలో పదాల సంఖ్య అపరిమితము. ఇలాంటి సమాంతరశ్రేఢులను అనంత సమాంతరశ్రేఢులు అంటాం. దీనిలో చివరి పదమువుండదు.

ఒక సమాంతరశ్రేఢిని గురించి తెలియాలంటే మనకు ఏమేమి అవసరము! ఈ శ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము తెలిస్తే సరిపోతుందా? లేదా సామాన్యబేధం తెలిస్తే సరిపోతుందా?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అయితే ఒక సమాంతరశ్రేఢి గురించి తెలియాలంటే లేదా దానిని పూర్తి చేయాలంటే మనకు రెండూ అనగా దాని మొదటి పదము 'a' మరియు సామాన్యబేధం 'd' తెలియాలని మనం గమనించగలం. ఉదాహరణకు మొదటి పదము a విలువ 6 మరియు సామాన్యబేధం d విలువ 3 అయితే సమాంతరశ్రేఢి.

6, 9, 12, 15, ...

మరియు మొదటి పదము $a = 6$, సామాన్య బేధం $d = -3$ అయిన సమాంతరశ్రేఢి

6, 3, 0, –3 ....

అదే విధంగా $a = -7$, $d = 2$ అయిన సమాంతరశ్రేఢి –7, –9, –11, –13, ...

$a = 1.0$, $d = 0.1$ అయిన సమాంతరశ్రేఢి 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, ...

$a = 0,\ d = 1\frac{1}{2}$ అయిన సమాంతరశ్రేఢి $0,\ 1\frac{1}{2},\ 3,\ 4\frac{1}{2},\ 6$, ...

$a = 2$, $d = 0$ అయిన సమాంతరశ్రేఢి 2, 2, 2, 2 ....

కావున a మరియు d లు తెలిసినపుడు మీరు దీనికి సమాంతరశ్రేఢిని పట్టీ చేయవచ్చు. విలోమ విధానం ఏది? అంటే కొన్ని సంఖ్యల జాబితాను ఇచ్చినపుడు అవి సమాంతరశ్రేఢి అని మీరు ఎలా చెప్పగలరు? తర్వాత a మరియు dలను కనుగొంటాము. a మొదటి పదం కాబట్టి సులభంగా చెప్పవచ్చు. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో ఒక పదం కావాలంటే దాని వెనుక పదానికి dని కలపాలని మనకు తెలుసు. కావున ఒక పదాన్ని దాని అనుక్రమ ముందు పదాలతో (అంటే ఒక పదం తర్వాత వెంటనేవచ్చు మరొక పదంచే) తీసివేసినపుడు d లభిస్తుంది ఇది ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో ఒకటే అయివుంటుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదా:

మనకు 6, 9, 12, 15....... ఈ సంఖ్యా జాబితాలో

$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$

$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$

$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$

ఇక్కడ ఏదేని రెండు క్రమపదాల మధ్యవ్యత్యాసం 3 అయినది. ఈ సంఖ్యా పట్టికలో

6, 3, 0, – 3.......

$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$

$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$

$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$

అలాగే ఇది కూడా ఒక సమాంతర శ్రేఢి. దాని మొదటి పదం 6 సామాన్య బేధం 3.

సాధారణంగా a_1, a_2, a_3......... a_n ఒక సమాంతరశ్రేఢి అయితే $d = a_{k+1} - a_k$

మరియు a_k లు క్రమంగా $(k + 1)$ వ మరియు k వ పదాలు.

ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో d ను పొందడానికి మనం $a_2, a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3$ ...., వీటన్నింటిని కనుగొననవసరం లేదు. ఇందులో ఏదైనా ఒకటి కనుగొంటే చాలు.

1, 1, 2, 3, 5.......... ఈ సంఖ్యా జాబితాను గమనించండి. రెండు అనుక్రమ పదాల మధ్య బేధం ఒకటి (సమానం) కాదని చూడగానే మనం చెప్పవచ్చు. కావున ఇది సమాంతరశ్రేఢి కాదు.

6, 3, 0, –3.................. ఈ సమాంతర శ్రేఢిలో d ని కనుగొనడానికి 3లో 6ను తీసివేయాలి. 6నుండి 3ను కాదు అనుటను గమనించండి. అంటే మనం $(k + 1)$వ పదం చిన్నదైనా కూడ k వ పదాన్ని $(k + 1)$ వ పదనుండి తీసివేయాలి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 1: $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ .... ఈ సమాంతరశ్రేఢి మొదటి పదం a మరియు సామాన్య బేధం d లను కనుగొనండి.

సాధన: ఇక్కడ $a = \frac{3}{2}, \; d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

సంఖ్యలు సమాంతర శ్రేఢిలో ఉన్నాయి అని మనకు ఏ రెండు అనుక్రమ పదాలను ఉపయోగించి d కనుగొనవచ్చు అని గుర్తుంచుకోండి.

ఉదాహరణ 2: క్రింది వానిలో ఏవి సమాంతర శ్రేఢులు? ఒక వేళ సమాంతరశ్రేఢి అయితే తరువాత వచ్చే రెండు పదాలను కనుగొనుము?

(i) 4, 10, 16, 22, ... (ii) 1, –1, –3, –5, ...

(iii) –2, 2, –2, 2, –2 ..... (vi) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 .....

సాధన:

(i) ఇచ్చుట $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతీ సారి స్థిరము. ఇచ్చిన జాబితా ఒక సమాంతర శ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్యబేధం $d = 6$. జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు: 22 + 6 = 28 మరియు 28 + 6 = 34

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతీ సారి స్థిరము. ఇచ్చిన జాబితా ఒక సమాంతర శ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్యభేధం $d = -2$. జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు:

$-5 + (-2) = -7$ మరియు $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 -(-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

ఇచ్చుట $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యా జాబితా సమాంతర శ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ఇచ్చుట $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$, అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యా జాబితా సమాంతర శ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అభ్యాసము 5.1

1. ఈ క్రింది సంఘటనలలో ఏ సందర్భంలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితా సమాంతర శ్రేఢి అవుతుంది. ఎందుకు?

   (i) ఒక ట్యాక్సీకి మొదటి గంట ప్రయాణానికి ₹ 15 చొప్పున, తరువాత ప్రతి గంటకు ₹ 8 చొప్పున చెల్లించవలసివున్న, ప్రతి km కు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (ii) ఒక వాక్యూమ్ పంపు సిలెండరులో వుండే గాలి నుంచి $\frac{1}{4}$ వంతు తీసివేయును. అయిన ప్రతిసారీ సిలెండరులో మిగిలివుండే గాలి పరిమాణము.

   (iii) ఒక బావిని తవ్వడానికి మొదటి మీటరుకు ₹ 150 వంతున, ఆపై ప్రతి మీటరుకు ₹ 50 వంతున చెల్లించాలి. అయిన ప్రతి మీటరుకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (iv) ఒక బ్యాంకులో ₹ 10000 సంవత్సరానికి 8% చక్రవడ్డీ ప్రకారం పొదుపు చేసిన, ప్రతి సంవత్సరము చివర ఖాతాలో వుండే సొమ్ము.

2. సమాంతరశ్రేఢుల యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్యభేధం d విలువలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. అయిన శ్రేఢిలోని మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొనుము?

   (i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$ (iii) $a = 4, d = -3$

   (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$ (v) $a = -1.25, d = 0.25$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాంతరశ్రేఢులకు మొదటి పదమును, సామాన్య బేధంను కనుగొనుము?

(i) $3, 1, -1, -3$ .... (ii) $-5, -1, 3, 7,$ ....

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ .... (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9$ ....

4. క్రింది జాబితాలలో ఏవి సమాంతర శ్రేఢులు? ఒక వేళ సమాంతరశ్రేఢి అయిన సామాన్యబేధం dను, తరువాత వచ్చే మూడు పదాలను రాయండి.

(i) $2, 4, 8, 16,$ .... (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2},$ ....

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2,$ .... (iv) $-10, -6, -2, 2,$ ....

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}$ .... (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222,$ ....

(vii) $0, -4, -8, -12$ .... (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},$ ....

(ix) $1, 3, 9, 27$ .... (x) $a, 2a, 3a, 4a$ ....

(xi) a, a^2, a^3, a^4 .... (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32},$ ....

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$ (xiv) $1^1, 3^2, 5^2, 7^2$ ....

(xv) $1^1, 5^2, 7^2, 7^3$ ....

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1.3 సమాంతరశ్రేఢి యొక్క n వ పదము:

శీర్షిక 5.1లో చర్చించిన 'రీనా' విషయాన్ని మరి ఒకసారి పరిశీలిద్దాం. ఈమెను నెలకు ₹ 8000 చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 చొప్పున పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమించటం జరిగింది. అయితే ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత 5వ సం.ములో ఆమె వేతనం ఎంత వుండవచ్చు.

దీనికి సమాధానం కనుగొనాలంటే ముందు ఉద్యోగంలో చేరినపుడు, తరువాత రెండవ సంవత్సరములో ఆమె వేతనమున కనుగొనాలి.

అది ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 అవుతుంది. ఇదే విధంగా 3వ, 4వ, 5వ సం.లలో ఆమె వేతమును ముందు సంవత్సరములో వున్న జీతంనకు ₹ 500 కలపడటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

∴ 3 వ సంవత్సరం వేతనం = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ (8000 + (3 – 1) × 500) (3 వ సంవత్సరము)

= ₹ 9000

4 వ సంవత్సరం వేతనం = ₹ (9000 + 500)

$= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹ (8000 + (4 - 1) \times 500)$ 4 వ సంవత్సరములో

$= ₹ 9500$

5 వ సంవత్సరం వేతనం $= ₹ (9500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹ (8000 + (5 - 1) \times 500)$ 5 వ సంవత్సరములో

$= ₹ 10000$

ఒక సంఖ్యా జాబితా పొందుతామని గమనించండి.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, ...

ఈ సంఖ్యలు సమాంతర శ్రేఢులలో ఉన్నాయా ఎందుకు?

పై అమరిక ఆధారంగా 6వ, 15వ సం.లలో ఆమె యొక్క వేతన కనుగొనగలమా? ఆమె ఒక వేళ 25 సంవత్సరముల పాటు అదే ఉద్యోగంలో కొనసాగితే 25వ సంవత్సరములో ఆమె వేతనమును కనుగొనగలమా? ప్రతి సంవత్సరము ఆమె వేతన ముందున్న సంవత్సరములో ఆమె వేతనా ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు. అయితే దీనిని వీలైనంత తక్కువ సమయంలో వీలైనంత సులభంగా కనుగొనగలమా? పై ప్రక్రియలలో వేతనమును కనుగొనే విధానంలో మనకు కొంత అవగాహన అయినది కనుక దానిని ఉపయోగిద్దాం.

15 వ సంవత్సర వేతనమును

$= 14$వ సంవత్సరపు వేతనం $+ ₹ 500$

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + \ldots\ldots + 500}_{13 \text{ సార్లు}} \right] + ₹ 500$$

$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹ 15000$

అనగా మొదటి వేతనం + (15 – 1) × సంవత్సరమునకు పెరిగేది.

అదే విధంగా 25వ సంవత్సరములో ఆమె వేతనం

$= [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹ 20000$

= మొదటి వేతనం + (25 – 1) × సంవత్సరమునకు పెరిగేది.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ ఉదాహరణ ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో 15వ పదమును, 25వ పదమును రాయుటకు కావలసిన ఒక సులభ పద్ధతిని ఇచ్చింది. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక సమాంతరశ్రేఢి యొక్క nవ పదమును కనుగొందాం.

a_1, a_2, a_3............ అనే ఒక సమాంతరశ్రేఢిని తీసుకొందాం.

దీనిలో మొదటి పదం $a_1 = a$ మరియు సామాన్య బేధం $= d$ అనుకుందాం

రెండవ పదం $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\, d$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\, d$

నాల్గవ పదం $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\, d$

....

....

పై అమరిక ఆధారంగా nవ పదం $a_n = a + (n - 1)d$ అని చెప్పవచ్చు. $a_n = a + (n - 1)d$

అందువలన సమాంతరశ్రేఢిలోని మొదటిపదం a సామాన్య వ్యత్యాసం d అయినప్పుడు $a_n = a + (n - 1)d$

a_nను సమాంతర శ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదము అనికూడా అంటాం. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో m పదాలున్న a_mవ పదము చివరి పదం అవుతుంది. దీనిని కొన్నిసార్లు 'l' చే కూడ సూచిస్తారు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 3: 2, 7, 12, ... సమాంతర శ్రేఢిలో 10 వ పదమును కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చుట, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ మరియు $n = 10$

$a_n = a + (n - 1)d$ నుంచి

అందువలన $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

అందువలన సమాంతరశ్రేఢిలో 10 వ పదము = 47

ఉదాహరణ 4: 21, 18, 15, ... సమాంతర శ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము '– 81' అవుతుంది? ఏదైనా ఒక పదము '0' అవుతుందా? నీ సమాధానమునకు కారణాలివ్వండి.

సాధన: ఇచ్చుట $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ మరియు $a_n = -81$ అయినప్పుడు మనం n ను కనుగొనాలి.

$a_n = a + (n - 1)d$

$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

$-81 = 24 - 3n$

$-105 = -3n$

$\therefore \quad n = 35$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అందువలన పై సమాంతరశ్రేఢిలో 35వ పదము – 81 అవుతుంది తరువాత $a_n = 0$ అయ్యే విధంగా nను కనుగొనాలి.

తరువాత $21 + (n – 1) (– 3) = 0$

అనగా $3(n – 1) = 21$

అనగా $n = 8$

అందువలన సమాంతర శ్రేఢిలో 8వ పదము సున్నా అవుతుంది.

ఉదాహరణ 5: 3 వ పదము 5, 7వ పదము 9గా వుండునట్లు ఒక సమాంతరశ్రేఢిని కనుగొనండి.

సాధన: $a_3 = a + (3 – 1) d = a + 2d = 5$ (1)

మరియు $a_7 = a + (7 – 1) d = a + 6d = 9$ (2)

సమీకరణాలు (1) మరియు (2) ల ను సాధించడం వలన

$a = 3, d = 1$ అని మనం పొందవచ్చు

∴ కావలసిన సమాంతర శ్రేఢి 3, 4, 5, 6, 7 ....

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 6: 5, 11, 17, 23, ... జాబితాలో 301 సంఖ్యాపట్టికలో పదం అయిందా పరీక్షించండి.

సాధన: ఇచ్చుట $a_2 – a_1 = 11 – 5 = 6$, $a_3 – a_2 = 17 – 11 = 6$, $a_4 – a_3 = 23 – 17 = 6$ అనగా $k = 1, 2, 3,$ .... లకు $(a_{k+1} – a_k)$ స్థిరము. ఇవ్వబడిన సంఖ్యా జాబితా ఒక సమాంతరశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ సమాంతర శ్రేఢిలో $a = 5$ మరియు $d = 6$

ఇక 301 ఈ జాబితాలో nవ పదంగా వుందనుకుందాం.

అయితే

$$a_n = a + (n – 1)d$$
$$301 = 5 + (n – 1) \times 6$$

అనగా $301 = 6n – 1$

$$\therefore\ n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

అయితే n ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య కావలెను. (ఎందుకు?) కనుక 301 ఇచ్చిన జాబితాలోవుండదు.

ఉదాహరణ 7: 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

సాధన: ఇది ఒక సమాంతరశ్రేఢియేనా? అవును. ఇచ్చట, $a = 12, d = 3, a_n = 99$

సూత్రం $a_n = a + (n - 1)d$ అని మనకు తెలుసు.

$99 = 12 + (n - 1) \times 3$

అనగా $87 = (n - 1) \times 3$

అనగా $n-1=\frac{87}{3}=29$

అనగా $n = 29 + 1 = 30$

అనగా $n = 30$

అనగా 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు 30 గలవు.

ఉదాహరణ 8: 10, 7, 4, ... – 62 సమాంతర శ్రేఢిలో చివరి నుంచి 11వ (మొదటి పదం వైపుకు) పదమును కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చట, $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62$

అనగా $l = a + (n - 1)d$

చివరి నుంచి 11వ పదమును కనుగొనవలెనన్న ముందుగా శ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలు వున్నవో కనుగొనవలెను.

అందువలన $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

$-72 = (n - 1)(-3)$

$n - 1 = 24$

$n = 25$

అనగా ఇవ్వబడిన సమాంతర శ్రేఢిలో 25 పదాలు వుంటాయి. అంటే చివరి నుంచి 11వ పదము మొదటి నుంచి 15వ పదం అవుతుంది. (14వ పదం కాదు ఎందుకు?)

అయితే $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

అనగా చివరనుండి 11వ పదం – 32

ప్రత్యామ్నాయ పరిష్కారం:

ఇచ్చిన సమాంతర శ్రేఢిని వెనుక నుండి రాస్తే $a = -62, d = 3$ (ఎందుకు?) అంటే, ఇపుడు ఈ ప్రశ్న a మరియు d ల 11వ పదం కనుగొనాలి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అది $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

అంటే అది 11వ పదం అంటే మనకు కావలసిన పదం – 32.

ఉదాహరణ 9: ₹ 1000 లకు సంవత్సరానికి 8% సరళ వడ్డీ ప్రకారము ప్రతి సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీని కనుగొనండి? ఈ వడ్డీల జాబితా ఒక సమాంతరశ్రేఢి అవుతుందా? ఒక వేళ సమాంతర శ్రేఢి అయితే 30 వ సం.ము చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనండి?

సాధన: సరళ వడ్డీని కనుగొనుటకు సూత్రము, $= \frac{P \times R \times T}{100}$

అనగా మొదటి సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} =$ ₹ 80

2 వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} =$ ₹ 160

3 వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} =$ ₹ 240

ఈ విధంగా 4వ, 5వ ఇత్యాది సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీలను కనుగొనవచ్చు. అనగా 1వ, 2వ, 3వ, ... సం.ల చివర అయ్యే వడ్డీల (₹ లలో)విలువ వరుసగా

80, 160, 240, ...

పై జాబితాలో రెండు వరుస పదాల చేదము 80 స్థిరము కనుక ఇది ఒక సమాంతర శ్రేఢి అవుతుంది.

అనగా $a = 80$; $d = 80$

అనగా 30 సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనవలెనన్న మనము a_{30}ని కనుగొనవలెను.

$$a_{30} = a + (30 - 1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

$\therefore$ 30 సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీ = ₹ 2400 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 10: ఒక పూలపాదులో మొదటి వరుసలో 23 గులాబీ మొక్కలు రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19వున్నాయి. చివరి వరుసలో 5 మొక్కలు వున్న ఎన్ని వరుసలలో గులాబీ మొక్కలు కలవు?

సాధన: 1వ, 2వ, 3వ, ..., చివరి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య వరుసగా

23, 21, 19, ..., 5

ఇది ఒక సమాంతర శేఢి (ఎందుకు?)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పూలపాదులోని వరుసల సంఖ్య n అనుకొనిన

$a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

అనగా $a_n = a + (n-1)d$

అనగా $5 = 23 + (n-1)(-2)$

అనగా $-18 = (n-1)(-2)$

అనగా $n = 10$

అందువలన పూల పాదులోని వరుసల సంఖ్య = 10

అభ్యాసము 5.2

1. మొదటి పదము a సామాన్య బేధము d, n వ పదము a_n అయిన క్రింది పట్టికను పూరించండి.

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	−18	...	10	0
(iii)	...	−3	18	−5
(iv)	−18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. కింది వాటికి సరైన ఎంపికను ఎంచుకొని, నిర్ధారించండి.

(i) 10, 7, 4 .... సమాంతర శ్రేఢిలో 30వ పదము

(A) 97 (B) 77 (C) −77 (D) −87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2,$ .... ఈ సమాంతర శ్రేఢిలో 11వ పదము

(A) 28 (B) 22 (C) −38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. కింది సమాంతర శ్రేఢుల యొక్క బాక్స్‌లలో ఖళీ వదిలిన పదాలను పూరించండి.

(i) 2, □, 26

(ii) □, 13, □, 3

(iii) 5, □, □, $9\frac{1}{2}$

(iv) −4, □, □, □, □, 6

(v) □, 38, □, □, □, −22

4. 3, 8, 13, 18, ... సమాంతరశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము78 అవుతుంది?

5. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాంతర శ్రేఢులలోని పదాల సంఖ్యను కనుగొనండి?

(i) 7, 13, 19 .... 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13 .... – 47

6. 11, 8, 5, 2 .... సమాంతరశ్రేఢిలో '– 150' ఒక పదంగా వుంటుందో లేదో పరీక్షించండి.

7. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో 11 వ పదము 38 మరియు 16 వ పదము 73 అయిన 31 వ పదమును కనుగొనండి.

8. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో 50 పదాలు ఉన్నాయి. అందులో 3వ పదం 12 మరియు చివరి పదం 106 అయితే 29వ పదాన్ని కనుగొనండి.

9. ఒక శ్రేఢిలో 3వ, 9వ పదాలు వరుసగా 4, –8 అయిన ఎన్నవ పదము 0 (సున్నా) అవుతుంది?

10. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో 17వ పదము, 10వ పదంకంటే 7 ఎక్కువ. అయిన సామాన్యబేధం ఎంత?

11. 3, 15, 27, 39 ..... ఈ సమాంతరశ్రేఢిలో ఏ పదం, దాని 54వ పదం కంటే 132 ఎక్కువగా ఉన్నది.

12. రెండు సమాంతరశ్రేఢుల సామాన్యబేధం సమానము. వాని 100వ పదాల మధ్యబేధం 100 అయిన వాని 1000వ పదాల మధ్యబేధం ఎంత?

13. 7 చే భాగించబడే మూడంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?

14. 10 మరియు 250ల మధ్య గల 4 యొక్క గుణిజాల సంఖ్యను కనుగొనండి?

15. 63, 65, 67,............ మరియు 3, 10, 17,............ సమాంతరశ్రేఢుల nవ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనండి?

16. 3వ పదము 16; 7వ పదము, 5వ పదము కంటే 12 ఎక్కువ వుండునట్లుగా ఒక సమాంతరశ్రేఢిని కనుగొనండి?

17. 3, 8, 13, ,............, 253 సమాంతరశ్రేఢి యొక్క చివరనుంచి 20వ పదమును కనుగొనండి?

18. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో 4వ, మరియు 8వ పదాల మొత్తము 24 మరియు 6వ, 10వ పదాల మొత్తము 44. అయిన మొదటి మూడు పదాలను కనుగొనండి?

19. సుబ్బారావు 1995వ సంవత్సరంలో నెలకు ₹ 5000 వేతనం ఉద్యోగంలో చేరాడు. అతని వేతనం సంవత్సరంలో మనకు ₹ 200 పెరిగిన, అతని వేతనం ఏ సం.లో ₹ 7000 అవుతుంది?

20. రామ్కలి సంవత్సరపు మొదటి వారంలో ₹5ను పొదుపు చేసింది. మరియు ప్రతివారం తన పొదుపును ₹ 1.75 కు పెంచింది. n వ వారంలో ఆమె పొదుపు ₹ 20.75అయితే nను కనుగొనండి.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

5.4 ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

విభాగం5.1లోచర్చించినశకీలావిషయాన్నిమరొకసారిపరిశీలిద్దాం. ఈమె తన కూతురు మొదటి పుట్టినరోజున ₹ 100లు, రెండవ పుట్టిన రోజున ₹ 150, మూడవ పుట్టిన రోజున ₹ 200 ఒక డబ్బుల పెట్టెలో వుంచుతూ పోయింది. అయితే ఆమె కూతురు యొక్క 21వ పుట్టిన రోజు తర్వాత డబ్బుల పెట్టెలోని సొమ్ము మొత్తం ఎంత ఉంటుంది?

ఇచ్చట మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ .... 21 వ పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచిన సొమ్ము విలువలు వరుసగా (₹ లలో) 100, 150, 200, 250 .... ఇలా 21వ పుట్టిన రోజు వరకూ కొనసాగించబడింది. 21 వ పుట్టిన రోజు అనంతరం పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనవలెనన్న, పై జాబితాలో 21 పదాలను వరుసగా రాసి వాని మొత్తమును కనుగొనవలసి వుంటుంది. ఈ విధంగా చేయటం సమయం వృథా చేయటమే కాకుండా కష్టమైనదిగా మీరు భావించటం లేదా? దీనిని తక్కువ సమయంలో సులభంగా చేయలేమా? మొత్తాన్ని పొందు విధానం తెలుసుకొన్నచో అది మనకు సాధ్యం కావచ్చని మనమిప్పుడు తెలుసుకుందాం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గాస్ (అతని గురించి 8వ అధ్యాయంలో చదువుతారు) 10 సం.ల వయస్సులో సాధించిన ఒక సమస్యను ఇపుడు మనము పరిశీలిద్దాం. ఇతను 10 సం.ల వయస్సులో వున్నపుడే 1 నుంచి 100 వరకూ గల అన్ని సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? అని ఇతనిని ప్రశ్నించటం జరిగింది. ఇతను దానికి సమాధానంగా 5050 అని చెప్పినాడు. అతను ఏవిధంగా సమాధానం చెప్పాడో ఊహించగలరా? అతను దానిని ఈ క్రింది విధంగా రాసాడు.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$$

తిరిగి అతను దీనినే క్రింద విధంగా రాసాడు.

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

అతను ఈ రెండింటినీ కూడి సూక్ష్మీకరించి ఫలితమును ఈ క్రింది విధంగా కనుగొన్నాడు.

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + ... + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101 \text{ (100 సార్లు)}$$

అనగా, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$

అనగా, మొత్తము = 5050

మనం అదే తంత్రాన్ని ఇక్కడ ఉపయోగించి సమాంతర శ్రేఢి మొదటి n పదాల వరకు మొత్తాన్ని కనుగొందాం.

$a, a + d, a + 2d, ...$

సమాంతర శ్రేఢి n వ పదం $a + (n - 1)d$ సమాంతరశ్రేఢి మొదటి పదాల మొత్తం S అయితే మనకు

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + ... [a + (n - 1)d] \quad (1)$$

పదాలను వ్యతిరేక దిశలో తిప్పిరాసినపుడు మనకు

$$S = [a + (n - 1)d] + a + (n - 2)d] + ... + (a + d) + a \quad (2)$$

(1) మరియు (2) ల లోని ప్రతి పదాన్ని కలిపినపుడు

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+ ......+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{n \text{ పదాలు}}$$

లేదా $2S = n[2 + (n - 1)d]$ (ఇక్కడ n పదాలున్నందువల్ల)

లేదా $S = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1)d\right]$

కావున శ్రేఢిలోని n పదాల మొత్తము

$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

మనం దీనిని ఇలాకూడా రాయవచ్చు

$$S = \frac{n}{2}\left[a + a + (n-1)d\right]$$

అనగా, $S = \frac{n}{2}\left[a + a_n\right] \quad (3)$

ఇపుడు సమాంతర శ్రేఢిలోని n పదాలుంటే $a_n = 1$, చివరిపదం

(3) నుండి $S = \frac{n}{2}\left[a + l\right] \quad (4)$

అని మనం గమనించవచ్చు. సామాన్య బేధము ఇవ్వకుండా, మొదటిపదం మరియు చివరిపదాలను ఇచ్చినపుడు ఈ సూత్రము ఉపయోగపడుతుంది. తిరిగి మన ప్రశ్నను పరిశీలిద్దాం. శకీలా కూతురు యొక్క 1వ, 2వ, 3వ, 4వ, ..., పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా 100, 150, 200, 250, ...

ఇది ఒక సమాంతరశ్రేఢి. మనము శకీలా కూతురు యొక్క 21వ పుట్టినరోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనాలి. ఇచ్చుట $a = 100$, $d = 50$ మరియు $n = 21$ సూత్రంను ఉపయోగించి.

మనకు $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$,

$$S = \frac{21}{2}\left[2 \times 100 + (21-1) \times 50\right] = \frac{21}{2}\left[200 + 1000\right]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

21 వ పుట్టిన రోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్ము = ₹ 12600.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

S బదులుగా S_nను వాడుదాం. దీనివల్ల ఎన్ని పదాల మొత్తం మనం కనుగొంటున్నామో తెలుస్తుంది. మొదటి 20 పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు మనం S_{20}ని వాడతాం. మనం సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రములో నాలుగు రాశులు కలవు. అవి S_n, a, d మరియు n వాటిలో ఏవైనా మూడు రాశుల విలువలు తెలిసిన నాల్గవ రాశిని కనుగొనవచ్చు.

గమనిక: ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం నుంచి మొదటి $(n - 1)$ పదాల మొత్తాన్ని తీసివేసిన ఆశ్రేఢి యొక్క nవ పదము వస్తుంది. అనగా $a_n = S_n - S_{n-1}$ మనమిప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 11: 8, 3, −2, ... ఈ సమాంతరశ్రేఢి మొదటి 22 పదాల మొత్తమెంత?

సాధన: ఇచ్చుట $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$

మనకు తెలిసినట్లుగా $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

అందువలన $S = \frac{22}{2}\left[16 + 21(-5)\right]$

$= 11(16 - 105)$

$= 11(-89) = -979$

అయితే, సమాంతరశ్రేఢి మొదటి 22 పదాల మొత్తము – 979 అవుతుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 12: ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి పదం 10 మరియు మొదటి 14 పదాల మొత్తము 1050 అయిన 20వ పదమును కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చుట $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$1050 = \frac{14}{2}\left[20 + 13d\right] = 140 + 91d$$

$$910 = 91d$$

$$d = 10$$

అందువలన $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, i.e., 20 ఈ పదము 200

ఉదాహరణ 13: 24, 21, 18, ... సమాంతర శ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకున్న, వాని మొత్తం 78 అవుతుంది?

సాధన: ఇచ్చుట $a = 24, d = 21 - 24 = -3,$ $S_n = 78$ మనం n యొక్క విలువను కనుగొనాలి.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$ అని మనకు తెలుసు

అయితే $$78 = \frac{n}{2}\left[48 + (n-1)(-3)\right] = \frac{n}{2}\left[51 - 3n\right]$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$(n - 4)(n - 13) = 0$$

$n = 4$ లేదా 13

n యొక్క రెండు విలువలను పరిగణలోనికి తీసుకోవచ్చు. అనగా పదాల సంఖ్య = 4 లేదా 13.

గమనించండి:

(1) ఈ ఉదాహరణంలో మొదటి 4 పదాల మొత్తము = మొదటి 13 పదాల మొత్తము = 78

(2) ఈ శ్రేఢిలో 5వ పదం నుంచి 13వ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తం సున్నా (0) ఎందుకనగా ఇచట సామాన్య బేధము యొక్క విలువ ఋణాత్మకము. దీనివల్ల కొన్ని పదాలు ధనాత్మకము, మరికొన్ని పదాలు ఋణాత్మకం అవుతూ ఫలితం శూన్యం కావచ్చు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 14: కింది వాని మొత్తాలను కనుగొనండి:

(i) మొదటి 1000 ధన పూర్ణసంఖ్యలు.

(ii) మొదటి n ధన పూర్ణసంఖ్యలు.

సాధన:

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + 1000$ అనుకొనుము

సమాంతర శ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం మనకు

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ను ఉపయోగించిన $S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$

అలాగయితే మొదటి 1000 ధనపూర్ణసంఖ్యల మొత్తము = 500500

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + n$ అనుకొనుము

ఇచ్చుట $a = 1$ మరియు చివరిపదం $l = n$

అందువలన $S_n = \frac{n(1 + n)}{2}$ లేదా $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$

అనగా మొదటి n ధనపూర్ణసంఖ్యల మొత్తం $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$

ఉదాహరణ 15: $a_n = 3 + 2n$ ను n వ పదంగా కలిగిన శ్రేఢి యొక్క మొదటి 24 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుము ?

సాధన:

$a_n = 3 + 2n$

$a_1 = 3 + 2 \times 1 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

సంఖ్యల సరళి: 5, 7, 9, 11 ....

ఇచ్చట, 7 – 5 = 9 – 7 = 11 – 9 = 2 ....

అనగా ఈ జాబితా ఒక సమాంతర శ్రేఢి. దీని మొదటి పదం $a = 5$, సామాన్య బేధము $d = 2$.

అందువలన $S_{24} = \frac{24}{2}\left[2\times5+(24-1)\times2\right] = 12[10+46] = 672$

ఇచ్చిన శ్రేఢిలో 24 పదాల మొత్తము = 672

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 16: ఒక టెలివిజన్ తయారీ కంపెనీ 3వ సం.లో 600 టెలివిజన్లను, 7వ సం.ము, 700 టెలివిజన్లను తయారు చేసింది. ఇది తయారీ చేసే టెలివిజన్ల సంఖ్య ప్రతి సంవత్సరము స్థిరంగా పెరుగుతుంది అని భావించుకోండి.

(i) 1వ సంవత్సరంలో తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య.

(ii) 10వ సంవత్సరంలో తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య.

(iii) మొదటి 7 సం.రాలలో టెలివిజన్లను తయారు చేసిన మొత్తం టెలివిజన్‌ల సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన:

(i) ప్రతి సంవత్సరం తయారు చేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య ఒక స్థిర విలువతో పెరుగుతూ ఉంటే 1వ, 2వ, 3వ సం.లో తయారు అయ్యే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యల జాబితా ఒక సమాంతర శ్రేఢిని (A.P) ఏర్పరుస్తుంది.

n వ సం.లో తయారు చేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యను a_n అనుకొనిన

$a_3 = 600$ మరియు $a_7 = 700$.

లేదా $a + 2d = 600$ మరియు $a + 6d = 700$

పై సమీకరణాలను సాధించిన $d = 25$ మరియు $a = 550$ వచ్చును.

$\therefore$ మొదటి సం.లో తయారైన టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య = 550

(ii) ఇపుడు $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

అనగా 10వ సంవత్సరం తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య = 775

(iii) అదే విధంగా $S_7 = \frac{7}{2}\left[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25\right]$

$= \frac{7}{2}[1100 + 50] = 4375$

$\therefore$ మొదటి 7 సంవత్సరం తయారైన మొత్తం టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య = 4375.

అభ్యాసము 5.3

1. కింది సమాంతరశ్రేఢులలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తాలను కనుగొనండి?

(i) 2, 7, 12 .... 10 పదాలు

(ii) –37, –33, –29 .... 12 పదాలు

(iii) 0.6, 1.7, 2.8 .... 100 పదాలు

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$ .... 11 పదాలు

2. కింది వాటి మొత్తాలను కనుగొనండి.

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots\ldots + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + \ldots\ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots\ldots + (-230)$

3. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ అయిన n మరియు S_nలను కనుగొనండి?

(ii) $a = 7, a_{13} = 35$ అయిన d మరియు S_{13}లను కనుగొనండి?

(iii) $a_{12} = 37$, d = 3 అయిన a మరియు S_{12}లను కనుగొనండి?

(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ అయిన d మరియు a_{10}లను కనుగొనండి?

(v) $d = 5, S_9 = 75$ అయిన a మరియు a_9లను కనుగొనండి?

(vi) $a = 2, d = 8, S_n = 90$ అయిన n మరియు a_nలను కనుగొనండి?

(vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210$ అయిన n మరియు dలను కనుగొనండి?

(viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$ అయిన n మరియు aలను కనుగొనండి?

(ix) $a = 3, n = 8, S = 192$ అయిన d ని కనుగొనండి?

(x) $l = 28, S = 144$ మరియు పదాల సంఖ్య 9 అయితే aని కనుగొనండి?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 9, 17, 25, ... ఈ సమాంతరశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తము 636 కావాలంటే ఎన్ని పదాలను తీసుకోవలసి ఉంటుంది?

5. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో మొదటి పదం 5, చివరి పదం 45 మరియు మొత్తము 400 అయితే వాటి పదాల సంఖ్య మరియు సామాన్య బేధాన్ని కనుగొనండి?

6. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో మొదటి చివరి పదాలు వరుసగా 17 మరియు 350. సామాన్య బేధము 9 అయిన శ్రేఢిలోని పదాల సంఖ్యను, పదాల మొత్తమును కనుగొనండి?

7. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో $d = 7$ మరియు 22వ పదం 149 అయితే 22 పదాల మొత్తమెంత?

8. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో 2వ, 3వ పదాలు వరుసగా 14 మరియు 18 అయిన 51 పదాల మొత్తమును కనుగొనండి?

9. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి 7 పదాల మొత్తము 49 మరియు 17 పదాల మొత్తము 289. అయిన మొదటి n పదాల మొత్తమును కనుగొనండి?

10. a_n క్రింది విధంగా నిర్వచించబడితే a_1, a_2, ...a_n .... సమాంతర శ్రేఢి అవుతుందని చూపండి. ప్రతి సందర్భంలో మొదటి 15 పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

11. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $4n - n^2$ అయిన మొదటి పదం (S_1) ఎంత? మొదటి రెండు పదాల మొత్తం ఎంత? రెండవ పదము ఎంత? అదే విధంగా 3వ పదమును, 10వ పదమును మరియు nవ పదమును కనుగొనండి?

12. 6 చే భాగించబడే మొదటి 40 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి?

13. 8 యొక్క మొదటి 15 గుణిజాల మొత్తమును కనుగొనండి?

14. సున్నా (0) నుండి 50 మధ్య గల బేసి సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి?

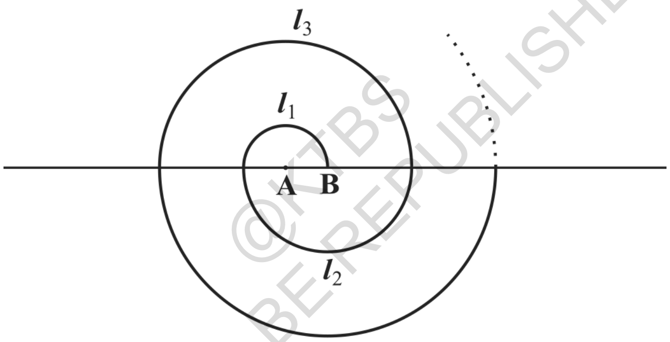
15. ఒక కట్టడం నిర్మాణం పని ఒప్పందం పై పని ఆలస్యంగా చేస్తే ఒక నిర్దిష్ట సమాయానికి పెనాల్టీని విధిస్తుంది. అది ఇలా ఉంది. మొదటి రోజుకు ₹ 200, రెండవరోజుకు ₹ 250, 3వ రోజుకు ₹ 300 మొదలగునవి. ప్రతి రోజు పెనాల్టీ దాని వెనుకటి రోజు పెనాల్టీకంటే ₹ 50 ఎక్కువ అయితే ఒక కంట్రాక్టరు ఒక పనిని 30 రోజులు ఎక్కువ తీసుకుంటే అతను ఇవ్వవలసిన పెనాల్టీ ఎంత?

16. ఒక పాఠశాలలో విద్యావిషయ సంబంధిత విషయాలలో అత్యున్నత ప్రతిభ కనపరిచిన వారికి మొత్తం ₹ 700 కు 7 బహుమతులు ఇవ్వాలని భావించారు. ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దానికి ₹ 20 తక్కువ అయిన, ప్రతి బహుమతి విలువను కనుగొనుము?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

17. ఒక పాఠశాల ఆవరణలో పర్యావరణ పరిరక్షణకు విద్యార్థులు చెట్లు నాటాలని భావించారు. ప్రతి సెక్షను విద్యార్థులు వారు చదువుతున్న తరగతి సంఖ్యకు సమానమైన చెట్లను అనగా 1వ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు ఒక చెట్టును, రెండవ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు 2 చెట్లను, నాటాలని ఈ విధంగా 12వ తరగతి వరకూ చేయాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ప్రతి తరగతిలో మూడు సెక్షన్లువున్న మొత్తం నాటిన చెట్లు ఎన్ని?

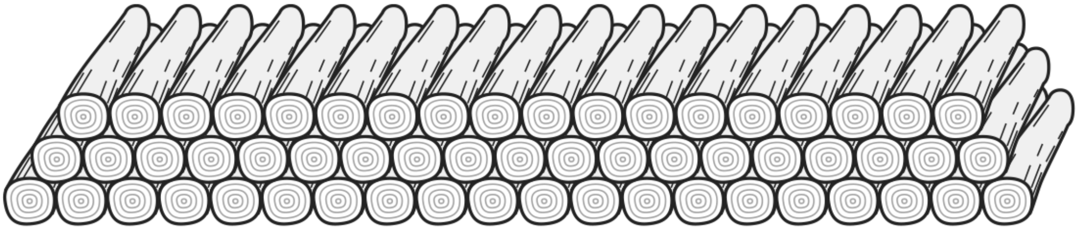
18. అర్ధ వృత్తాలచే ఒక సర్పిలాకారము తయారు చేయబడింది. పటంలో చూపిన విధంగా అర్ధవృత్తాల కేంద్రాలు A వద్ద ప్రారంభించబడి, A, B ల మధ్య మారుతూ వున్నాయి. అనగా మొదటి అర్ధవృత్త కేంద్రము A, రెండవ అర్ధవృత్త కేంద్రము B, మూడవ అర్ధవృత్త కేంద్రము A మరియు అర్ధవృత్తాల వ్యాసార్ధాలు వరుసగా 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... ఈ విధంగా మొత్తం 13 అర్ధవృత్తాలువున్న సర్పిలం మొత్తం పొడవు ఎంత? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



చిత్రం 5.4

[సూచన: వరుస అర్ధవృత్తాల పొడవులు l_1, l_2, l_3, l_4, ... మరియు వాని కేంద్రాలు వరుసగా A, B, A, B........]

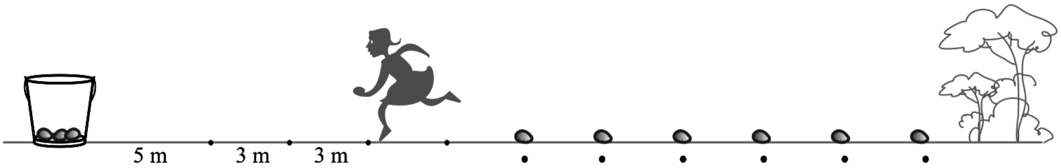
19. 200 చెక్క దిమ్మెలను క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చారు. అన్నింటి కంటే క్రిందవున్న వరుసలో 20 దిమ్మెలను, దానిపై 19 దిమ్మెలను, దాని పైన 18 దిమ్మెలు ఇలా కొనసాగింది. (చిత్రం 5.6 చూడండి) అమర్చిన మొత్తం 200 దిమ్మెలను అమర్చుటకు ఎన్ని వరుసలు కావాలి? అన్నింటి కంటే పైనవున్న వరుసలో ఎన్ని చెక్క దిమ్మెలు కలవు?



చిత్రం 5.5

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

20. బంతి మరియు బకెట్ ఆట ప్రారంభంలో ఒక బకెట్ దానికి 5m. దూరంలో ఒక బంతి వుంచబడినవి. మొత్తం 10 బంతులలో మిగిలిన బంతులు ఒకదాని కొకటి 3m. దూరంలో పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చబడినవి. ఆటలో పాల్గొనే వ్యక్తి మొదటి బకెట్ వద్దనుంచి బయలుదేరి మొదటి బంతివద్దకు పోయి దానిని తీసుకొని వెనుకకు వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. (చిత్రం 5.6 చూడండి)



చిత్రం 5.6

తరువాత తిరిగి బకెట్ నుంచి బయలుదేరి రెండవ బంతి వద్దకు పోయి దానిని తీసుకొని వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. ఈ విధంగా అన్ని బంతులను బకెట్‌లో వేయవలె నన్న ఆ వ్యక్తి పరిగెత్తవలసిన మొత్తం దూరం ఎంత?

[**సూచన:** మొదటి, రెండవ బంతులను తీసుకొని రావడానికి ఆట ఆడే వ్యక్తి పరిగెత్తవలసిన దూరము వరుసగా $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

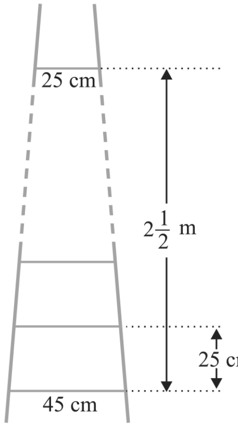
అభ్యాసము 5.4 (ఐచ్ఛికం)*

1. 121,117,113,.......సమాంతరశ్రేఢిలో ఎన్నవపదముమొదటిఋణపదము అవుతుంది?

[**సూచన:** $a_n < 0$ అయ్యే విధంగా n విలువ కనుగొనుము]

2. ఒక సమాంతరశ్రేఢిలో 3వ, 7వ పదాల మొత్తము 6 మరియు వాని లబ్ధము 8 అయిన మొదటి 16 పదాల మొత్తము కనుగొనండి?

3. ఒక నిచ్చెనకు 25 మెట్లు కలవు. మెట్ల యొక్క పొడవు క్రిందనుంచి పైకి ఏకరీతిని తగ్గుతూ వుంది, (చిత్రం 5.7) క్రిందనుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 45 cm మరియు పైనుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 25 cm ఈ రెండింటి మధ్య దూరము $2\frac{1}{2}$ m. అయిన అన్ని మెట్ల తయారీకి కావలసిన చెక్క పొడవు ఎంత?



చిత్రం 5.7

[**సూచన:** మెట్ల సంఖ్య $= \frac{250}{25} + 1$]

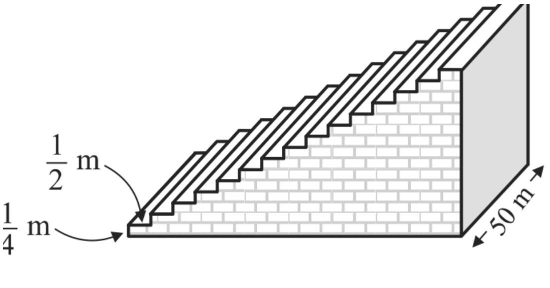
4. కొన్ని ఇండ్లు ఒక వరుసలో కలవు. వీటికి 1 నుంచి 49 వరకూ సంఖ్యలను కేటాయించటం జరిగింది. ఏదైనా ఒక ఇంటికి కేటాయించిన సంఖ్యను x అనుకొంటే; ఈ ఇంటికి ముందు (Preceeding) వున్న

* ఈ అభ్యాసం పరీక్షను ఉద్దేశించినది కాదు.

ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము, తరువాత వున్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము సమానం అయ్యే విధంగా ఆ ఇంటి సంఖ్య x వ్యవస్థితమని చూపండి? మరియు x విలువను కనుగొనుము.

[**సూచన:** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. క్రింది పటములు చూపిన విధంగా ఒక ఫుట్‌బాల్ గ్రౌండ్‌లో 15 మెట్లు గల ఒక మెట్ల సోపానము కలదు. దీనిలో ప్రతి మెట్టు పొడవు 50 m. మరియు వెడల్పు $\frac{1}{2}$ m. మొదటి మెట్టు భూమి నుంచి $\frac{1}{4}$ m. ఎత్తులో మరియు ప్రతి మెట్టు దాని ముందున్న మెట్టుకు $\frac{1}{4}$ m. ఎత్తులోవున్న ఆ మెట్ల సోపానాన్ని నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రీట్ యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము?



చిత్రం 5.8

[**సూచన:** మొదటి సోపానం నిర్మించుటకు కావల్సిన కాంక్రీట్ ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50m^3$]

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.5 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది అంశాలు నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక సంఖ్యా జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అన్ని వాని ముందున్న పదాలకు ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటంవల్ల ఏర్పడుతూ ఉండే ఆ జాబితాను ''సమాంతరశ్రేఢి'' అంటారు. కలిపే స్థిర సంఖ్యను సామాన్య బేధము అంటారు.

   A.P లో పదాలు వరుసగా $a, a + d, a + 2d, a + 3d,$ ....

2. $a_1, a_2, a_3,$..................... సంఖ్యల జాబితాలో $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3$ విలువలు సమానమైన, అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ స్థిరమైన ఆ జాబితాను సమాంతరశ్రేఢి అంటాము.

3. మొదటి పదము a గా, పదాంతరము d గా గల ఒక సమాంతరశ్రేఢి (AP)లో nవ పదము $a_n = a + (n - 1)\mathrm{d}$

4. సమాంతర శ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము. $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

5. ఒక సమాంతర శ్రేఢిలో చివరి పదాల మొత్తము $S = \frac{n}{2}(a+1)$ ఇచ్చుట n పదాల సంఖ్య.

చదువరులకు సూచన

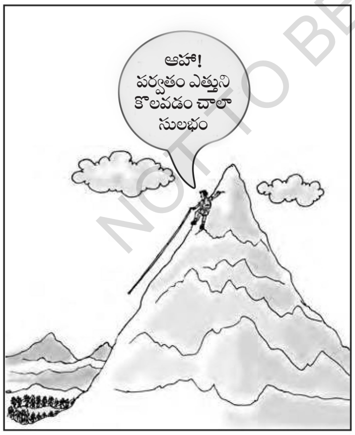
a, b, మరియు c లు సమాంతరశ్రేఢిలో ఉంటే $b = \frac{a+c}{2}$, b ని a, c ల సమాంతరమధ్యమము అని అంటాము

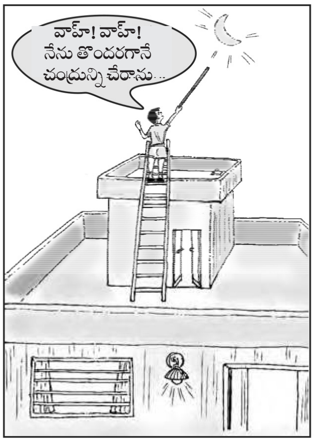
6 త్రిభుజాలు

6.1 పరిచయం

త్రిభుజాలు మరియు వాటి లక్షణాల గురించి మీరు వెనుకటి తరగతులలో తెలుసుకొన్నారు. 9వ తరగతిలో సర్వసమాన త్రిభుజాల గురించి వివరంగా నేర్చుకున్నారు. రెండు ఆకృతులు సర్వసమానాలు కావాలంటే వాటికి ఒకటే ఆకారం మరియు ఒకటే పరిమాణం ఉండాలని గుర్తుంచుకోండి. ఈ అధ్యాయంలో ఒకటే ఆకారం మరియు ఒక పరిమాణం వుండనవసరం లేని ఆకృతుల గురించి మనం నేర్చుకుందాం. ఒకే ఆకారం గల (అయితే ఒకే పరిమాణం లేని) ఆకృతులను సరూప పటాలు అని అంటారు. ప్రత్యేకంగా సరూరు త్రిభుజాల గురించి చర్చించి వాటిద్వారా ఇది వరకే నేర్చుకున్న పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క సరళ సాధనకు ఈ జ్ఞానాన్ని అనువర్తింప చేసి చూద్దాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



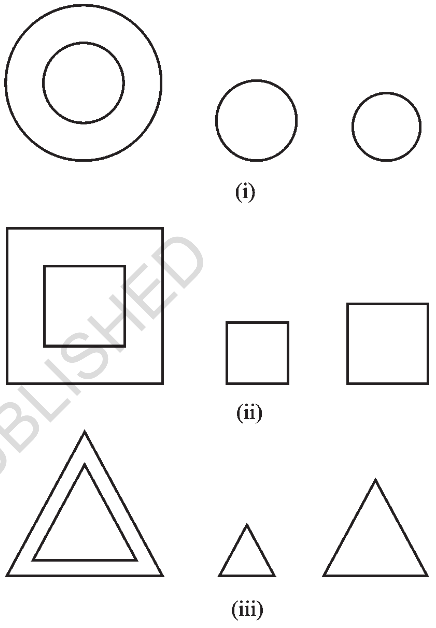


చాలా ఎత్తైన పర్వతం (మౌంట్ ఎవరెస్ట్) యొక్క ఎత్తును ఊహించడం మీకు సాధ్యమా? లేదా చాలా దూరంలో గల వస్తువుల (చంద్రుడు) దూరాన్ని కనుగొనడం సాధ్యమా? వీటిని కొలబద్ద (టేప్) సహాయంతో నేరుగా కొలవవచ్చు అని మీరు తెలుసుకున్నారా? ఖచ్చితంగా ఈ దూరాలన్నింటిని సరూప పటాల సూత్రం ఆధారం పై పరోక్ష కొలతల ద్వారా కనుగొనవచ్చు. (ఉదాహరణ 7, అభ్యాసం 6.3లో 15వ ప్రశ్న మరియు ఈ పుస్తకంలో 8వ మరియు 9వ అధ్యాయాలను గమనించండి).

6.2 సరూప పటాలు

ఒకే వ్యాసార్థము కలిగిన వృత్తాలు సర్వసమానాలు, సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల అన్ని క్రమ బహుభుజాలు ఎప్పుడూ సరూపాలే. అన్ని చతురస్రాలు సరూపాలు అలాగే అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సరూపాలు అని మీరు 9వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు.

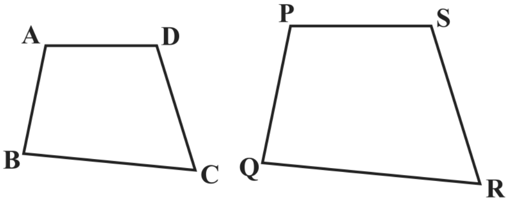
ఇపుడు రెండు (లేదా ఎక్కువ) వృత్తాలను గమనించండి (చిత్రం 6.1 (i)ను చూడండి). అవి సర్వ సమానాలా? వాటి వ్యాసార్థాలు సమానం కాదు కాబట్టి అవి పరస్పరం సర్వ సమానం కాదు. కొన్ని సర్వ సమానాలు మరియు కొన్ని సర్వ సమానాలు కాదు అనుటను గమనించండి. అయితే అవన్నీ ఒకే ఆకారాన్ని కల్గి ఉన్నాయి. కావున అవన్నీ సరూపాలు. రెండు సమరూప ఆకృతులకు ఒకే ఆకారం ఉండి, ఒకే పరిమాణం ఉండనవసరం లేదు కావున అన్ని వృత్తాలు సరూప పటాలు. రెండు (లేదా ఎక్కువ) చతురస్రాల లేదా రెండు (లేక ఎక్కువ) సమబాహు త్రిభుజాల గురించి ఏమి చెప్పవచ్చు? (చిత్రం 6.1) (ii) మరియు 6.1 (iii) లను చూడండి) వృత్తాల ఉదాహరణలో గమనించిన విధంగా ఇక్కడ కూడా అన్ని చతురస్రాలు సరూపాలు మరియు అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సరూపాలు.



చిత్రం 6.1

పై విషయాల నుండి సర్వ సమాన పటాలన్నీ సరూపాలని మనం చెప్పగలము, కానీ అన్ని సరూప పటాలు, సర్వసమాన పటాలు కానవసరం లేదని మనం చెప్పవచ్చు.

ఒక వృత్తము మరియు ఒక చతురస్రము సరూపాలా? ఒక త్రిభుజము మరియు చతురస్రము సరూపాలా? కేవలం ఆకృతులను గమనించడం ద్వారా ఈ ప్రశ్నలకు జవాబు చెప్పవచ్చు. (చిత్రం 6.1ను చూడండి) ఖచ్చితంగా ఈ ఆకృతులు సరూప పటాలు కాదు. (ఎందుకు?) రెండు చతురస్రాలు ABCD మరియు PQRS (చిత్రం 6.2)ల గురించి మీరేమి చెబుతారు? అవి సరూపపటాలా? అవి సరూపాలుగా కనబడినా మనం ఖచ్చితంగా చెప్పడానికి సాధ్యంకాదు. కావున సరూప పటాల గురించి కొన్ని వ్యాఖ్యానాల అవసరం ఉంది. ఈ వ్యాఖ్యాలను ఆధారం చేసుకొని కొన్ని నియమాలు ఇచ్చిన ఆకృతులు సరూప పటాలు కాదా అనుటను మనము నిర్ణయించవచ్చు. దాని కొరకు ఈ క్రింది చిత్రం 6.3లో ఇచ్చిన ఛాయా చిత్రాలను గమనించండి.



చిత్రం 6.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 6.3

వేర్వేరు పరిమాణాలలో ఉన్ననూ అవి ఒకటే స్మారకం (తాజ్‌మహల్) యొక్క ఛాయాచిత్రాలు అని మీరు చూసిన వెంటనే చెప్పవచ్చు. ఈ మూడు ఛాయా చిత్రాలు సరూప పటాలని మీరు చెప్పగలరా? అవును అవి సరూపపటాలు.

ఒక వ్యక్తి యొక్క 10 సంవత్సరాల వయస్సు మరియు 40 సంవత్సరాలు వయస్సు గల ఒకే కొలత గల రెండు భావ చిత్రాల గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు? ఈ భావ చిత్రాలు సరూపపటాలా? ఈ భావ చిత్రాలు ఒకే కొలత కల్గి ఉన్ననూ ఖచ్చితంగా ఒకే ఆకారాన్ని కల్గి ఉండవు. కావున అవి సరూపాలు కాదు.

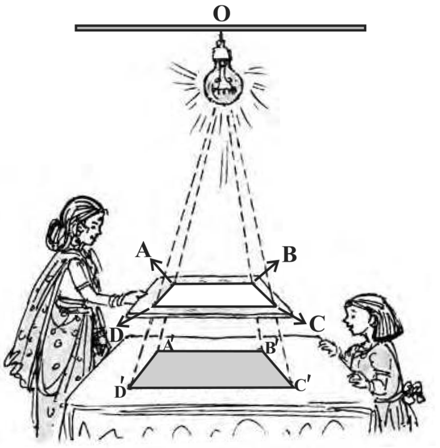
ఒకే ఛాయా చిత్రపు నెగిటివ్ నుండి వేర్వేరు కొలతలు గల అనేక ప్రతులను చేయడానికి ఛాయాచిత్రకారులు ఏం చేస్తారు? స్టాంప్ సైజ్, పాస్‌పోర్ట్ సైజ్, మరియు పోస్ట్‌కార్డ్‌సైజ్ ఛాయాచిత్రాల గురించి మీరు వినిఉండవచ్చు. వారు సాధారణంగా ఒక చిన్న ఛాయాచిత్ర ప్రతిని అంటే 35*mm* పరిమాణం కలిగిన చిన్న ఫిల్మ్‌పై తీసుకొంటారు. తరువాత దానిని 45*mm* (లేదా 55*mm*) కు పెద్దదిగా చేస్తారు. ఆ చిన్న ఫోటోగ్రాఫ్‌లోని ప్రతి రేఖా ఖండము $\frac{45}{35}$ $\left(\text{లేదా } \frac{55}{35}\right)$ నిష్పత్తిలో పెద్దది కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. ఇంకా రెండు వేర్వేరు పరిమాణాలు కల ఆ ఫోటోగ్రాఫలలో కోణాలు సమానంగా వుండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. అంటే ఈ ఫోటోగ్రాఫ్‌లు సరూపాలు. పెద్ద ఛాయాచిత్రంలోని ప్రతి రేఖా ఖండము 45 : 35 (లేదా 55 : 35) నిష్పత్తిలో చిన్న ఛాయా చిత్రంలో తక్కువ అవుతుందని చెప్పవచ్చు. అదే కాకుండా రెండు వేర్వేరు కొలతలు గల ఛాయాచిత్రాల అనురూప రేఖాఖండాల మధ్య కోణాలు ఎప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయి. అది రెండు ఆకృతులు మరియు విశేషంగా రెండు బహుభుజాకృతుల ప్రముఖ అంశం. దీనిని మనం ఇలా చెప్పవచ్చు.

భుజాల సంఖ్య సమానంగావున్న రెండు బహుభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి (ii) అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా) అనుపాతంలో వుండాలి.

బహుభుజాకృతుల యొక్క అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని సాధారణంగా స్కేలు (లేదా) స్కేలు గుణకం (లేదా) ప్రత్యామ్నాయ గుణకం అంటారు. నిజజీవితంలో ఒక భవనాన్ని నిర్మించడానికి ముందుగా దానిని కాగితముపై స్కేలుకకు గీస్తారు. దానినే మనం బ్లూప్రింటు అంటాము.

ఈ సరూప పటాల గురించి మరింత స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కార్యాచరణాన్ని చేద్దాం.

© KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 6.4

కార్యాచరణం 1: మీ తరగతి గదిలోని పైకప్పుకు O బిందువులో అమర్చిన బల్బును వెలిగించి సరిగ్గా క్రిందకు వచ్చేటట్లు బల్లను అమర్చుము. ఒక సమతలంగా నున్న దళసరి అట్ట నుండి ఒక బహుభుజి ABCD ని కత్తరించండి. దానిని నేలకు సమాంతరంగా బల్బుకు మరియు బల్లకు మధ్యలో అమర్చండి. అప్పుడు బల్లపై చతుర్భుజము ABCD నీడ ఏర్పడును. ఆ నీడ యొక్క అంచులను గీసి ఆ చతుర్భుజానికి A'B'C'D' అని అని గుర్తించండి (చిత్రం 6.4 చూడండి).

ఈ చతుర్భుజము A'B'C'D' అనేది చతుర్భుజము ABCD కన్నా పెద్దది లేదా వృద్ధి చెందినది. ఇంకా బల్బు స్థానము O అనుకుంటే A' అనేది కిరణము OA పై వుండును. అలాగే B' అనేది $\overrightarrow{OB}$ పై. C' అనేది $\overrightarrow{OC}$ పై మరియు D' అనేది $\overrightarrow{OD}$ పై వుండును. చతుర్భుజములు ABCD మరియు A'B'C'D'లు ఒకే ఆకారము మరియు వివిధ పరిమాణములకు చెందిన పటములు.

అందువలన A'B'C'D' చతుర్భుజం ABCD చతుర్భుజానికి సమరూపం కల్గియుంది. ABCD చతుర్భుజం A'B'C'D చతుర్భుజానికి సమరూపమయ్యాయని కూడా మనం చెప్పవచ్చు. సాంకేతికంగా

A' అనేది శీర్షము Aకు అనురూపము. దీనిని మనం గణిత చిహ్నాలలో A' ↔ A అని వ్రాస్తాము. B' ↔ B', C' ↔ C మరియు D' ↔ D. నిజంగా కోణాలను మరియు భుజాలను కాలవడంవలన మనం పరిశీలించవచ్చు.

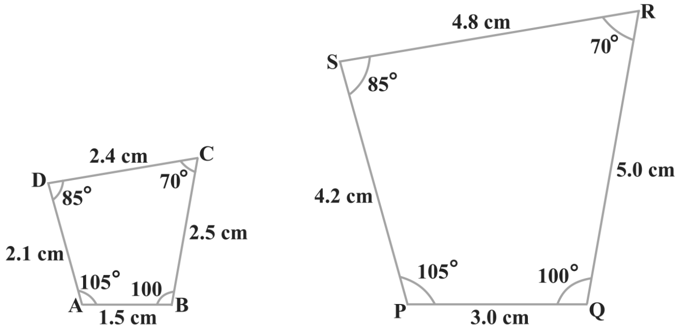
(i) $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D'$, మరియు

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$ అని నిర్ధారించుకొనవచ్చును.

బాహువుల సంఖ్య సమానంగాగల రెండు బహుభుజాకృతులలో (i) అనురూప కోణాలన్నియు. సమానమైనచో మరియు (ii) అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానంగానున్నచో (లేదా అనుపాతంలో ఉన్నచో) ఆ రెండు బహుభుజాకృతులు సమరూపాలై ఉంటాయనేది అది ధృవీకరిస్తుంది.

చిత్రం 6.5లోగల చతురస్రాలు ABCD మరియు PQRSలు సరూప పటాలని పై కార్యాచరణం ద్వారా చెప్పవచ్చు.

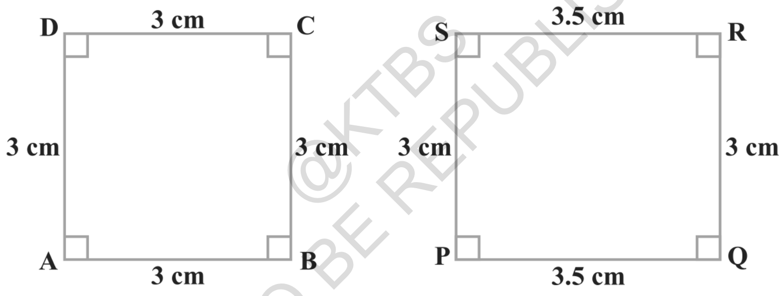
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 6.5

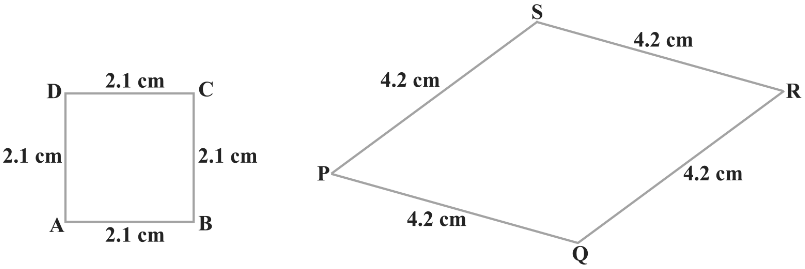
గమనిక: ఒక చతురస్రము మరొక దానికి సరూపము. రెండవ బహుభుజ, మూడవ బహుభుజికి సరూపము. అప్పుడు మొదటి బహుభుజి మూడవ బహుభుజికి సరూపము అవుతుందని మీరు సులభంగా చెప్పవచ్చు.

చిత్రం 6.6లో ఇచ్చిన రెండు చతుర్భుజాల చతురస్రము మరియు ఒక దీర్ఘ చతురస్రము అనురూప కోణాలు సమానమైతే వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండవు అని మీరు గమనించవచ్చు.



చిత్రం 6.6

కావున ఆ రెండు చతురస్రాలు సరూపాలు కావు. అలాగే చిత్రం 6.7లో రెండు చతుర్భుజాలలో (ఒక చతురస్రము మరియు రాంబస్) అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానం. అయితే వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా లేవని మీరు గమనించవచ్చు. మరళా రెండు బహుభుజాకృతులు (చతురస్రాలు) సరూపాలు కాదు.



చిత్రం 6.7

పై రెండు నియమాలు (i) మరియు (ii) లలో ఏదో ఒక దాని నుండి బహుభుజాకృతులు సరూపాలు చెప్పడం సాధ్యం కాదు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 6.1

1. ఆవరణంలో ఇచ్చిన పదాలనుండి సరైన పదాన్ని ఎన్నుకొని ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) అన్ని వృత్తాలు ______________ (సర్వ సమానాలు, సరూపాలు)

   (ii) అన్ని చతురస్రాలు ______________ (సరూపాలు, సర్వ సమానాలు)

   (iii) అన్ని ______________ త్రిభుజాలు సరూప పటాలు (సమద్విబాహు, సమబాహు)

   (iv) భుజాల సంఖ్య సమానంగా గల రెండు బహుభుజాకృతులు సరూపాలు కావాలంటే

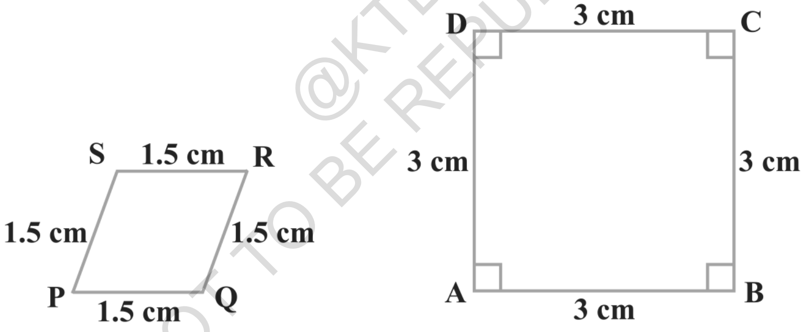
   (a) వాటి అనురూప కోణాలు ______________

   (b) వాటి అనురూప భుజాలు ______________ (సమానం, అనుపాతంలో ఉంటాయి.)

2. ఈ క్రింది వాటికి రెండు వేర్వేరు ఉదాహరణలివ్వండి..

   (i) సరూప పటాలు (ii) సరూప పటాలు కానివి.

3. క్రింది చతుర్భుజాలు సరూపాలా కాదా తెల్పండి.



చిత్రం 6.8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.3 త్రిభుజాల సరూపత

రెండు త్రిభుజాల సరూపత గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు?

త్రిభుజం కూడా ఒక బహుభుజాకృతి అని మీరు గుర్తుచేసుకోండి. అందువలన రెండు త్రిభుజాల సరూపత గురించి పైన తెల్పిన నియమాలను మనం అన్వయించవచ్చు. అవి రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తి (అనుపాతం సమానంగా వుండాలి).

క్రీ.పూ. (640-546 B.C.) థేల్స్

రెండు త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాలను సమకోణీయ త్రిభుజములు అంటారు. అనుటను గమనించండి. రెండు సమకోణ త్రిభుజాలకు సంబంధించినట్లు గ్రీకు ప్రఖ్యాత గణిత శాస్త్రవేత్త థేల్స్ ఒక ముఖ్యమైన సత్యాంశాన్ని చెప్పాడు.

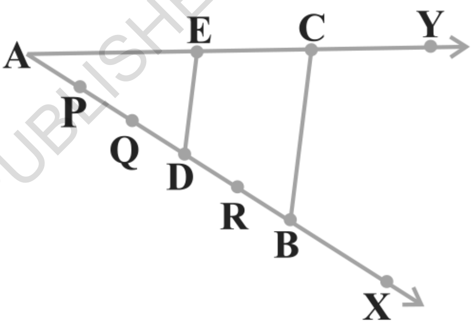
అది రెండు సమకోణ త్రిభుజాలలో రెండు అనురూపభుజాల నిష్పత్తియైనా ఒకేలా వుంటుంది.

దీని నిరూపణకు **ప్రాథమిక అనుపాత** సిద్ధాంతము (ఇప్పుడు దానిని **థేల్స్ సిద్ధాంతము** అంటారు) యొక్క ఫలితాన్ని ఉపయోగిస్తారని నమ్మడమైనది.

ఈ ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కార్యాచరణాన్ని చేద్దాము.

కార్యాచరణం 2: $\angle XAY$ ను నిర్మించి దాని ఒక భుజము AX పై $AP = PQ = QD = DR = RB$ అగునట్లు P, Q, D, R బిందువులను గుర్తించండి.

ఇప్పుడు B నుండి AY ను Cలో ఖండించునట్లు ఒక రేఖను గీయండి. (చిత్రం 6.9ను చూడండి)



చిత్రం 6.9

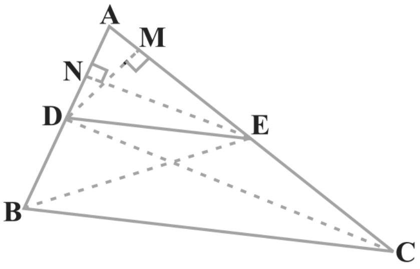
అలాగే, బిందువు D నుండి BC కి సమాంతరంగా ఉండునట్లు మరియు AC ని Eలో ఖండించునట్లు ఒక రేఖను గీయండి. మీ నిర్మాణంలో $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ అయినదని గమనించారా? AE మరియు EC లను కొలవండి. $\frac{AE}{EC} = ?$ $\frac{AE}{EC}$ కూడా $\frac{3}{2}$ కు సమానమని గమనించండి. అయితే ΔABC, లో $DE \| BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అనుట మీరు గమనించవచ్చు. ఇది కాకతాలీయమా? కాదు, దీనికి కారణము క్రింద ఇవ్వబడిన ఈ సిద్ధాంతం (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సిద్ధాంతము 6.1

ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

సాధన: ΔABCలో BCకి సమాతరంగా ఒక రేఖ DE అది AB, AC భుజాలను వరుసగా D మరియు E వద్ద ఖండించును. (చిత్రం 6.10ను చూడండి)



చిత్రం 6.10

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అని మనము నిరూపించాలి. BE మరియు CDలను కలపాలి. మరియు DM ⊥ A మరియు EN ⊥ AB గీయాలి.

ఉపపత్తి: ఇప్పుడు Δ (ADE) వైశాల్యము $= (\frac{1}{2}$ భూమి × ఎత్తు)

$$= \frac{1}{2} AD \times EN$$

అదే విధంగా Δ (BDE) వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

Δ (ADE) వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$ మరియు

Δ (DEC) వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

కావున $\frac{(\Delta ADE)\text{ వైశాల్యము}}{(\Delta BDE)\text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{BD}$ (1)

మరియు $\frac{(\Delta ADE)\text{ వైశాల్యము}}{(\Delta CED)\text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$ (2)

Δ BDE, Δ DEC లు ఒకే భూమి DF మరియు సమాంతర రేఖలు BC || DE రేఖల ల మధ్య వున్నట్లు గమనించవచ్చును.

కావున Δ BDE వైశాల్యము = (Δ CDE) వైశాల్యము (3)

∴ (1), (2), (3) ల నుండి $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

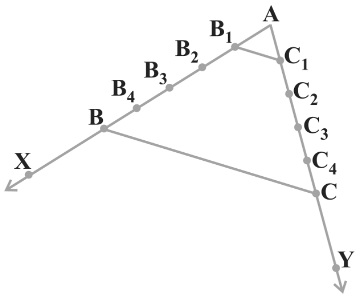
కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమేనా? దీనిని నిర్ధారించుకొనుటకు మరొక కృత్యాన్ని చేద్దాము.

విపర్యయము అర్థం తెలుసుకోవడానికి అనుబంధం 1 ని చూడండి. దీనిని పరీక్షించడానికి కింది కార్యాచరణం చేద్దాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కృత్యము 3: మీ నోటు పుస్తకంలో కోణము $\angle XAY$ ని గీయండి. ఇంకా కిరణము AX పై $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ వుండునట్లు బిందువులు B_1, B_2, B_3, B_4 మరియు B లను గుర్తించుము. అలాగే కిరణము AY పై $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$ వుండునట్లు బిందువులు C_1, C_2, C_3, C_4 మరియు C లను గుర్తించుము. (చిత్రం 6.11 చూడండి).



చిత్రం 6.11

B, C, మరియు B, C బిందువులను కలుపుము.

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ప్రతి యొక్కటి $\frac{1}{4}$ కు సమానం) అని గమనించుము.

B_1C_1 మరియు BC రేఖలు ఒక దానికొకటి సమాంతరంగా ఉన్నాయని గమనించండి.

అనగా $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

అదే విధంగా B_2C_2, B_3C_3 మరియు B_4C_4 లను కలుపుము

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $B_1C_1 \parallel BC$ (3)

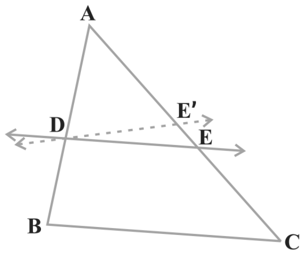
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $B_4C_4 \parallel BC$ (4)

(1), (2), (3) మరియు (4) ల నుండి త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలను సమాన నిష్పత్తిలో విభజించు రేఖ త్రిభుజం యొక్క మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుందని మనం గమనించవచ్చు.

$\angle XAY$ యొక్క కొలతలు వేర్వేరుగా ఉండునట్లు మరియు భుజము AX పై చేసిన సమభాగాలు అంతే సమభాగాలను భుజము AY పై కూడా చేసి ఈ కార్యాచరణాన్ని మీరు పునరావర్తనం చేయవచ్చు. ప్రతి సారీ మీరు ఒకే విధమైన ఫలితాన్ని పొందుతారు. ఈ సిద్ధాంతము 6.1 యొక్క విపర్యయము.

సిద్ధాంతము 6.2: ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుండును.

దత్తాంశము: ΔABCలో $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగునట్లు గీయబడిన సరళరేఖ DE (చిత్రం 6.12ని చూడండి).



చిత్రం 6.12

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

సాధన: DE || BC

ఉపపత్తి: DE, BC కి సమాంతరము కాదు అనుకొనుము. అపుడు BC కి సమాంతరంగా DE' ను గీయుము

అందువలన $\frac{AD}{DB} = \frac{AD'}{E'C}$ (ఎందుకు?)

$\therefore \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు?)

పై సమీకరణానికి ఇరు వైపులా '1' కలుపగా, E మరియు E' లు తప్పనిసరిగా ఏకీభవించాలి అని తెలుస్తుంది (ఎందుకు?)

పై సిద్ధాంతము యొక్క ఉపయోగాన్ని వివరించడానికి మనం కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొందాం.

ఉదాహరణ 1: ΔABC లో AB మరియు AC భుజాలను క్రమంగా D మరియు E బిందువులలో ఖండించు రేఖ BC కి సమాంతరంగా ఉంటే $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (చిత్రం 6.13 చూడండి) అని సాధించండి.

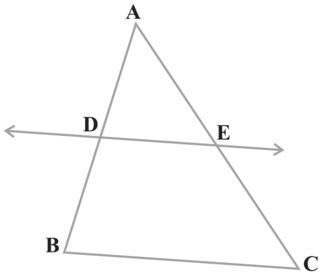
సాధన: DE || BC ($\therefore$ దత్తాంశం)

అందువలన $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ($\therefore$ సిద్ధాంతం 2.1)

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ ($\therefore$ విపర్యం చేసినప్పుడు)

$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

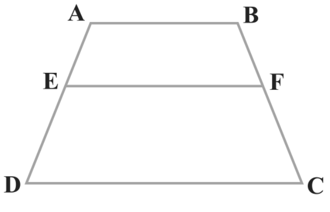
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$



చిత్రం 6.13

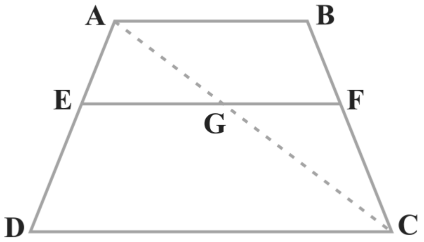
అయితే $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ($\therefore$ విపర్యం చేసినప్పుడు)

ఉదాహరణ 2: ట్రెపీజియం ABCD లో, AB || DC E మరియు F బిందువులు వరుసగా EF || AB అగునట్లు, సమాంతరం కాని భుజాలు AD, BC లపైనున్నవి. అయిన $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ అనిచూపండి. (చిత్రం 6.14 ను గమనించండి)



చిత్రం 6.14

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 6.15

సాధన: AC బిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన రేఖాఖండము EFను G వద్ద ఖండించినది. (చిత్రం 6.15 చూడండి) AB || DC మరియు EF || AB (దత్తాంశం) $\Rightarrow$ EF || DC (ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా నున్న రేఖలు సమాంతరాలు)

ఇపుడు Δ ADC లో EG || DC ($\therefore$ EF || AB)

అయితే $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (సిద్ధాంతము 6.1) (1)

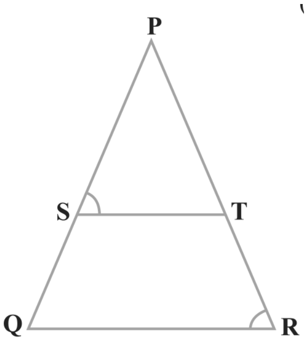
అదే విధంగా Δ CAB నుండి

$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

అనగా $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

కావున (1) మరియు (2) ల నుండి $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

ఉదాహరణ 3: చిత్రం 6.16 లో $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ మరియు $\angle PST = \angle PRQ$ అయితే $\angle PQR$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.16

సాధన: $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ($\therefore$ దత్తాంశము నుండి)

అందువలన ST || QR ($\therefore$ మూల అనుపాతం యొక్క సిద్ధాంతపు విలోమం)

కావున $\angle PST = \angle PQR$ (అనురూప కోణాలు) (1)

ఇది ఇలా కూడా ఇవ్వబడినది

$\angle PST = \angle PRQ$ ($\therefore$ దత్తాంశం) (2)

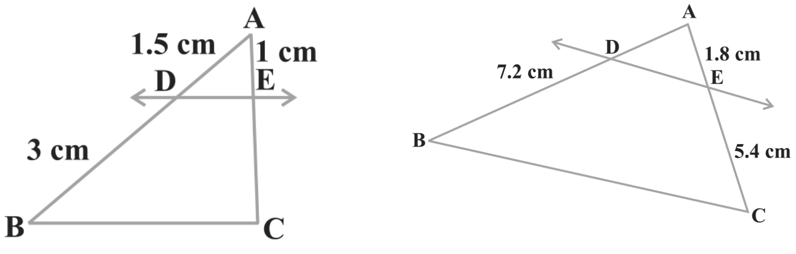
అయితే $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) మరియు (2) మరియు స్వయం సిద్ధం (1) నుండి]

అందువలన PQ = PR (సమానమైన కోణాలకు అభిముఖ భుజాలు అనగా $\angle PQR$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము 6.2

1. చిత్రం. 6.17 (i) మరియు (ii) లలో, DE || BC, అయిన (i) లో EC ని (ii) లో AD కనుగొనండి.



(i) (ii)

చిత్రం 6.17

2. Δ PQR లో భుజాలు PQ మరియు PRలపై బిందువులు వరుసగా E మరియు F ఈ క్రింది వాటిలో ప్రతి సందర్భంలో EF || QR అవునో, కాదో తెల్పండి.

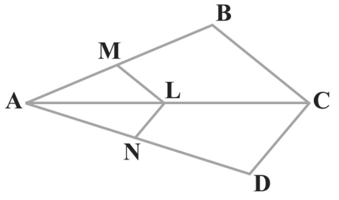
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm, మరియు FR = 2.4 cm,

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm, మరియు RF = 9 cm,

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, మరియు PF = 0.36 cm.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

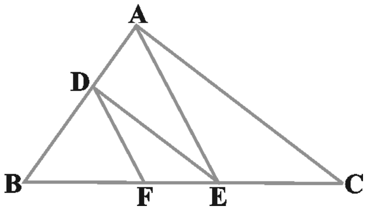
3. చిత్రం 6.18 లో LM || CB మరియు LN || CD అయితే $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$ అని చూపండి.



చిత్రం 6.18

4. చిత్రం 6.19 లో DE || AC మరియు DF || AF అయితే $\frac{BF}{FE}=\frac{BE}{EC}$ అని చూపండి.

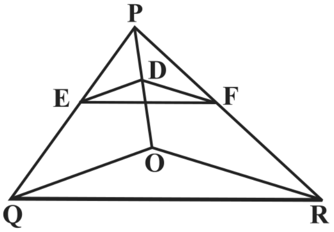
5. చిత్రం 6.20 DE || OQ మరియు DF || OR అయిన EF || OR అని చూపండి.



చిత్రం 6.19

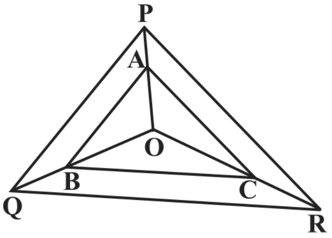
6. చిత్రం 6.21 లో A, B, C లు వరుసగా OP, OQ మరియు OR లపై బిందువులు. AB || PQ మరియు AC || PR అయిన BC || QR అని చూపండి.

7. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మధ్య బిందువు గుండా పోయేరేఖ, రెండవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటే అది మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి. 6.1 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతమునుపయోగించి. (దీనిని మీరు 9వ తరగతిలో చేశారని గుర్తుతెచ్చుకోండి).



చిత్రం 6.20

8. ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటుందని చూపండి. 6.2 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము నుపయోగించి. (దీనిని మీరు 9వ తరగతిలో చేశారని గుర్తు తెచ్చుకోండి).



చిత్రం 6.21

9. ట్రెపీజియం ABCDలో AB || DC. దాని కర్ణములు పరస్పరం బిందువు '0' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. అయిన $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అని చూపండి.

10. ABCD చతురస్రంలో $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అగునట్లు కర్ణములు పరస్పరం బిందువు '0' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. అయితే ABCD ఒక ట్రెపీజియం అని చూపండి.

6.4. త్రిభుజాల సరూపత నియమాలు (నిర్ధారక లక్షణాలు)

వెనుకటి విభాగంలో రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి. (ii) వాటి అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉండాలి. అని మనం నిరూపించాము.

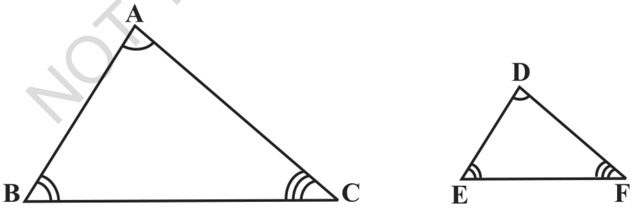
అంటే Δ ABC మరియు Δ DEF లలో,

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ మరియు

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ అయితే

అప్పుడు ఆ రెండు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి. (చిత్రం 6.22ను చూడండి)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 6.22

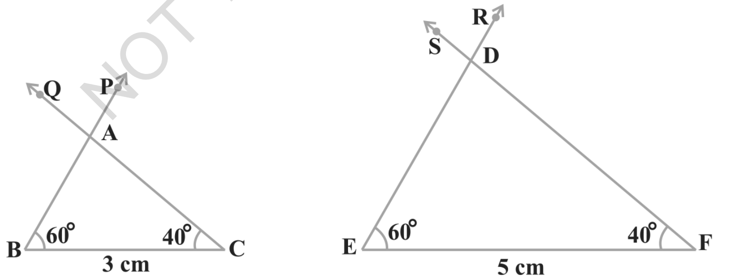
ఇక్కడ ∠A కు అనురూపము ∠D, ∠B కు అనురూపము ∠E మరియు ∠C కు అనురూపము ∠F అని మీరు గమనించవచ్చు. సాంకేతికంగా రెండు త్రిభుజాల సరూపతను Δ ABC ~ Δ DEF అని మనం రాస్తాం. మరియు దీనిని Δ ABC సరూపము Δ DEF అని చదువుతాము.

సంకేతం ~ **సరూపం** అనుటను సూచిస్తుంది. **సర్వసమానం** ≅ అను సంకేతాన్ని మీరు 9వ తరగతిలో ఉపయోగించారు. గుర్తు తెచ్చుకోండి.

ముఖ్యంగా గమనించవలసిన అంశ ఏమంటే సర్వసమాన త్రిభుజాల సందర్భంలో పేర్కొనట్లు సరూప త్రిభుజాలను సాంకేతికంగా సూచించునప్పుడు వాటి అనురూప శీర్షాలను ఉపయోగించి సూచించాలి. ఉదాహరణకు చిత్రం 6.22లో గల Δ ABC మరియు Δ DEF లను Δ ABC ~ Δ DEF లేదా Δ ABC ~ Δ FED అని మనం రాయకూడదు. అలాగే Δ BAC ~ Δ EDF అని రాయాలి.

Δ ABC మరియు Δ DEF ల సరూపతను పరీక్షించడానికి మనం ఎల్లప్పుడూ అన్ని జతల అనురూప కోణాల సమానతను చూడాలా? ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) మరియు అన్ని జతల అనురూప భుజాల నిష్పత్తుల సమానతను $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ చూడాలా అనుట మనకు ఉద్భవించిన సాధారణ ప్రశ్న. దీనిని పరీక్షిద్దాం. 9వ తరగతిలో రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానతను నిర్ణయించునప్పుడు కేవలం మూడు జతల అనురూప భాగాలను (లేదా అంశాలను) చేర్చి సరూపత నియమాలను ఉపయోగించాము అనుటను గుర్తుతెచ్చుకోండి. ఇక్కడ కూడా రెండు సరూప త్రిభుజాలను నిర్ణయించునప్పుడు. ఆరు జతల అనురూప భాగాల సంబంధ తెలుసుకొనడానికి బదులు కనిష్ఠ సంఖ్య అనురూప భాగాల గురించి తెలుసుకొని త్రిభుజాల సరూపత నియమాలను పొందడానికి ప్రయత్నం చేద్దాం. దీని కొరకు క్రింది కార్యాచరణాన్ని చేద్దాం.

కార్యాచరణం 4: BC మరియు EF అను వేర్వేరు కొలతలు గల రెండు రేఖాఖండాలను గీయండి. అవి వరుసగా 3cm మరియు 5cm లు ఉండాలి. B మరియు C బిందువులలో వరుసగా నిర్దిష్టకొలత గల కోణాలు 60^0 మరియు 40^0 ఉండునట్లు $\angle PBC$ మరియు $\angle QCB$ లను నిర్మించండి. అలాగే E మరియు F బిందువులలో 60^0 మరియు 40^0 ఉండునట్లు క్రమంగా $\angle REF$ మరియు $\angle SFE$లను నిర్మించండి. (చిత్రం 6.23 ను చూడండి).



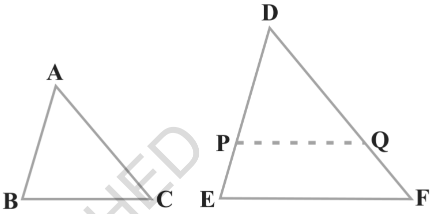
చిత్రం 6.23

BP మరియు CQ కిరణాలు పరస్పరం A బిందువులో మరియు ER మరియు FS కిరణాలు పరస్పరం D బిందువులో ఖండించుకోవాలి. Δ ABC మరియు Δ DEFలలో $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ మరియు $\angle A = \angle D$ అవుతుందని మీరు గమనించవచ్చు. అంటే ఈ రెండు త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానం. వాటి అనురూప భుజాల గురించి మీరేమి చెబుతారు? $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ అనుటను గమనించాలి. అయితే

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\frac{AD}{DE}$ మరియు $\frac{CA}{FD} = ?$ AB, DE, CA మరియు FD లను కొలవడం ద్వారా $\frac{AB}{DE}$ మరియు $\frac{CA}{FD}$ లు కూడా 0.6కు సమానమని తెలుసుకొనవచ్చు. (లేదా కొలతలో కొంచెం దోషం ఉంటే 0.6కు సమీపం గా ఉంటుంది. ఇలా $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ అనురూప కోణాలు సమానంగా గల కొన్ని జతల త్రిభుజాలను నిర్మించి ఈ కార్యాచరణాన్ని పునరావర్తించవచ్చు. ప్రతి సారీ వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానం. (లేదా అనుపాతం) అని మీరు తెలుసుకొనవచ్చు. ఈ కార్యాచరణము రెండు సరూప త్రిభుజాల గురించి ఈ క్రింది నియమాలను ఇస్తుంది.

సిద్ధాంతము 6.3: (త్రిభుజాల సరూపతకు కో.కో.కో నియమం) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూపకోణాలు సమానంగా వుంటే, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగావుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి) ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపత్రిభుజాలు అవుతాయి.



చిత్రం 6.24

ఈ నియమాన్ని సరూప త్రిభుజాల **కోణం – కోణం – కోణం (కో. కో. కో) నియమంగా** చెప్పబడింది. (లేదా **AAA నియమం**)

దత్తాంశము: Δ ABC మరియు Δ DEFలలో $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

అయ్యేటట్లు తీసుకొని ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించవచ్చు (చిత్రం 6.24 చూడండి)

ఉపపత్తి: $\Delta ABC \cong \Delta OPQ$ (ఎందుకు?)

$\Rightarrow \angle B = \angle P, = \angle E$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎలా?)

$\therefore \quad \frac{OP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ఎందుకు?)

అనగా $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ఎందుకు?)

అదే విధంగా $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ అనగా $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ అవుతుంది.

గమనించండి: ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన, త్రిణభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం, ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని మూడవ కోణాలు కూడా సమానము అవుతాయి. దీని నుండి కో. కో. కో సరూపనియమాన్ని ఈ విధంగా చెబుతాము.

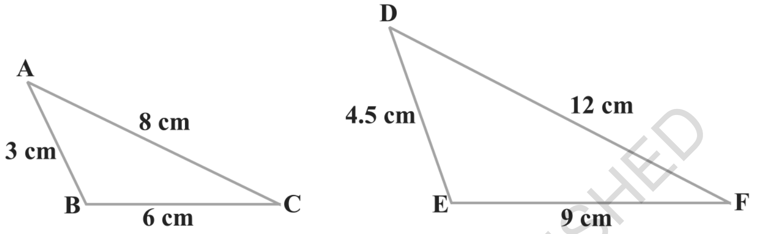
ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

దీనిని రెండు త్రిభుజాల సరూపకతకు కో. కో. కో నియమం అంటారు. (AAA నియమం).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక త్రిభుజము మూడు కోణాలు క్రమంగా మరొక త్రిభుజపు మూడు కోణాలకు సమానంగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఈ ప్రవచనము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి? దీని విపర్యయము నిజమా? లేదా ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని అనురూప భుజాలతో అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానమనుట సరియేనా?

కార్యాచరణం 5: AB = 3 సెం.మీ. BC = 6 సెం.మీ, CA = 8 సెం.మీ కొలతలతో Δ ABC ని, DE = 4.5 సెం.మీ. EF = 9 సెం.మీ. FD = 12 సెం.మీ కొలతలతో Δ DEFను నిర్మించుము.



చిత్రం 6.25

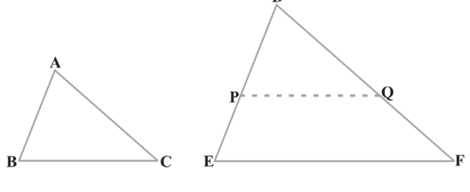
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అందువలన మీకు $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$ (ప్రతి యొక్కటి $\frac{2}{3}$ కు సమానం)

ఇప్పుడు $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ A మరియు $\angle F$ లను కొలిచినప్పుడు $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ అని మీరు గమనించవచ్చు. అంటే రెండు త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానము.

మీరు ఇలాంటి కొన్ని త్రిభుజాలను (వాటి భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండునట్లు) నిర్మించి, ఈ కార్యాచరణాన్ని పునరావర్తించవచ్చు. అన్ని సందర్భాల లోనూ అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండుటను మీరు చూస్తారు. దీనికి రెండు త్రిభుజాల సరూపకత ఈ క్రింది నియమం కారణం.

సిద్ధాంతము6.4:(త్రిభుజాలసరూపతకుభు.భు.భునియమం) రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములోవున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. ఈ నియమాన్ని త్రిభుజాల సరూపకతకు భు. భు. భు. నియమం అంటారు.



చిత్రం 6.26

దత్తాంశము: Δ ABC మరియు Δ DEFలలో $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1) అని తీసుకొని

సారాంశం: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించవచ్చు. (చిత్రం 6.26 చూడండి)

నిర్మాణం: DP = AB, DQ = AC అగునట్లు DE, DF లపై వరుసగా P మరియు Q బిందువులను గుర్తించుము. P, Q లను కలుపుము.

ఉపపత్తి: Δ DEF లో $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ మరియు PQ $\parallel$ EF (ఎలా?)

కావున $\angle P = \angle E$ మరియు $\angle Q = \angle F$

$\therefore \quad \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

కావున $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ఎందుకు?)

కావున BC = PQ (ఎందుకు?)

అందువలన Δ ABC $\cong$ Δ DPQ (ఎందుకు?)

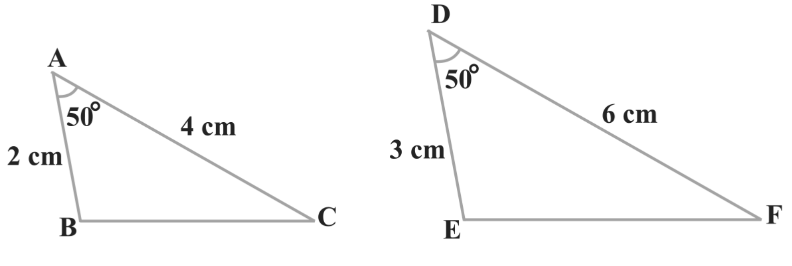
కావున $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ (ఎలా?)

గమనించండి: రెండు బహుభుజాకృతులలో (i) అనురూప కోణాలు సమానం మరియు (ii) వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానం. ఈ రెండు నియమాలలో ఏదైనా ఒక దానిచే వాటి సరూపతను నిర్ధారించడం సాధ్యమని గుర్తుంచుకోండి. ఏమైనా కాని రెండు త్రిభుజాల సరూపకత చెప్పాలంటే ఈ రెండు నియమాలను పరీక్షించనవసరం లేదు. ఆ రెండు నియమాలలో ఒకటి సరిపోతే మరొకటి కూడా సరిపోతుందని సిద్ధాంతము 6.3 మరియు 6.4ల ఆధారంతో చెప్పవచ్చు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల గురించి 9వ తరగతిలో నేర్చుకొన్న వివిధ నియమాలను మనం ఇప్పుడు గుర్తుతెచ్చుకొందాం. త్రిభుజాల సరూపతకు భు. భు. భు నియమమును త్రిభుజాల భు. భు. భు నియమానికి పోల్చవచ్చని మీరు గమనించవచ్చు. ఇది భుకోభు సరూప నియమాన్ని పోలిన సరూప నియమాన్ని వెదకడానికి మనకు సూచిస్తుంది. దీని కోసం మనం ఒక కార్యాచరణాన్ని చేద్దాం.

కార్యాచరణం 6: AB = 2 cm $\angle A = 50^0$ AC = 4 cm వుండునట్లు Δ ABC ని DE = 3 cm, $\angle D = 50^0$, DF = 6 cm వుండునట్లు Δ DEF గేయుము. (చిత్రం 6.27 ను చూడండి).



చిత్రం 6.27

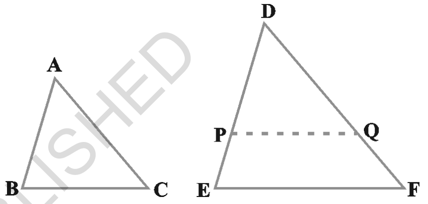
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ప్రతి యొక్కటి $\frac{2}{3}$ కు సమానం) ఇక్కడ మీరు గమనించవచ్చు. మరియు $\angle A$ (AB మరియు AC భుజాలను కలిగిన) = $\angle D$ (DE మరియు DF భుజాలను కలిగిన). అంటే ఒక త్రిభుజం

యొక్క ఒక కోణము మరొక త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణానికి సమానము మరియు ఆ కోణాలను కల్గి ఉన్న భుజాల నిష్పత్తి సమానం (అనుపాతం) ఇప్పుడు $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ మరియు $\angle F$ లను కొలుద్దాం.

$\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ అని మీరు తెలుసుకొనవచ్చు. అంటే $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ కావున కోకోకో సరూప నియమం నుండి Δ ABC ~ Δ DEF. ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణము మరొక త్రిభుజం యొక్క కోణానికి సమానంగా ఉండునట్లు మరియు ఆ కోణాలతో కూడిన భుజాలు అనుపాతము కల్గిఉండునట్లు కొన్ని త్రిభుజాలను నిర్మించి, ఈ కార్యాచరణాన్ని పునరావృతం చేయవచ్చు. ప్రతి సారి ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలని మీరు తెలుసుకొంటారు. త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి కింది నియమం వస్తుంది.

సిద్ధాంతం 6.5: (త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.కో.భు నియమము)

ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై. ఈ కోణాలను కలిగివున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. ఈ నియమాన్ని త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.కో.భు (SAS) నియమం అంటాం.



చిత్రం 6.28

దత్తాంశము: Δ ABC మరియు Δ DEFలలో

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \ (< 1) \text{ మరియు } \angle A = \angle D$$

సారాంశం: Δ ABC ~ Δ DEF

నిర్మాణం: DP = AB, DQ = AC అగునట్లు DE, DF లపై వరుసగా P మరియు Q బిందువులను గుర్తించుము. P, Q లను కలుపుము.

ఉపపత్తి: $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎలా?)

PQ || EF

$\therefore \angle P = \angle E, \angle Q = \angle F$ (ఎలా?)

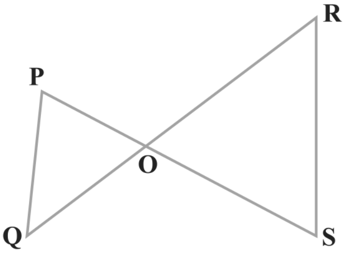
$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$

ఈ నియమాల ఉపయోగాన్ని వివరించడానికి మనం ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 4: చిత్రం 6.29 లో PQ || RS అయితే Δ POQ ~ Δ SOR అని చూపండి.



చిత్రం 6.29

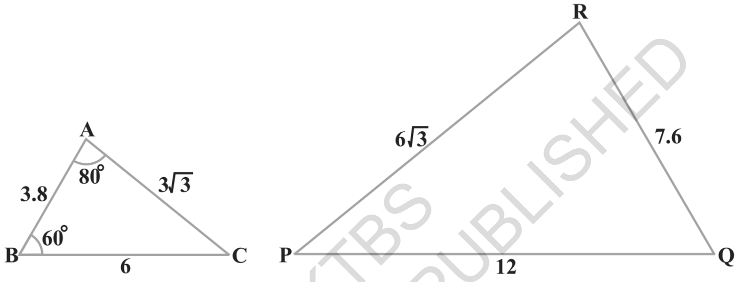
సాధన: PQ || RS (∴ ఇవ్వబడిన)

అయితే ∠P = ∠S మరియు ∠Q = ∠R (∴ పర్యాయ కోణాలు)

మరియు ∠POQ = ∠SOR (∴ శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

అందువలన ΔPOQ ~ ΔSOR (∴ కోకోకో సరూపకత నియమం)

ఉదాహరణ 5: చిత్రం 6.30ను గమనించి ∠Pని కనుగొనండి.



చిత్రం 6.30

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన: Δ ABC మరియు Δ PQRలలో

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

మరియు $\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

అంటే $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

అందువలన Δ ABC ~ Δ RQP [భు భు భు (S S S) సరూపకత నియమం]

∴ ∠C = ∠P (∴ సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు)

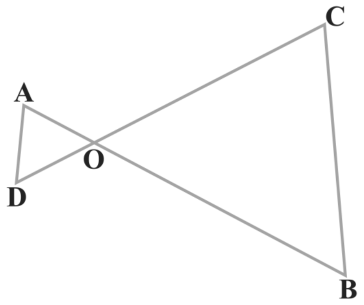
అయితే ∠C = 180^0 – ∠A – ∠B (కోణాల మొత్తం)

= $18^0 - 80^0 - 60^0$

= 40^0

ఇలా ∠P = 40^0

ఉదాహరణ 6: చిత్రం 6.31 లో OA.OB = OC.OD అయితే $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle B = \angle D$ అని చూపండి.



చిత్రం 6.31

సాధన: OA. OB = OC. OD (దత్తాంశం)

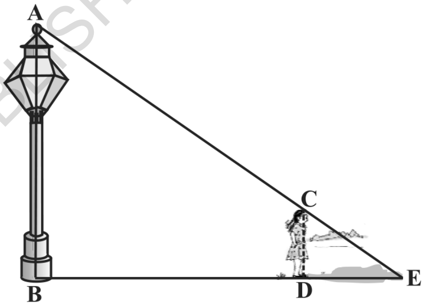
అలాగే $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

అలాగే $\angle AOD = \angle COB$ ($\therefore$ శీర్షాభిముఖ కోణాలు) (2)

$\therefore$ (1) మరియు (2) నుండి Δ AOD ~ Δ COB [సరూపకత SAS (భు.కో.భు) నియమం]

అలాగే $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle D = \angle B$ ($\therefore$ సరూప త్రిభుజాళ అనురూప కోణాలు)

ఉదాహరణ 7: 90 cm. ఎత్తుగల ఒక అమ్మాయి 1.2 m/s వేగంతో ఒక దీపస్తంభం నుండి దూరముగా నడుచుచున్నది. దీపస్తంభం ఎత్తు 3.6 మీ అయిన 4 సెకెండ్ల తర్వాత ఏర్పడే ఆ అమ్మాయి నీడపొడవును కనుగొనండి.



చిత్రం 6.32

సాధన: AB దీపస్తంభం పొడవు, అమ్మాయి ఎత్తు CD అనుకొనిన (చిత్రం 6.32 ను చూడండి) చిత్రం ద్వారా అమ్మాయి నీడ పొడవు DE అని తెలుస్తుంది.

DE = x m. అనుకుందాం.

ఇపుడు BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి: Δ ABE మరియు Δ CDE లో

$\angle B = \angle D$ అని గమనించండి (ప్రతి కోణం 90^0 ఎందు కంటే అమ్మాయి, దీపస్థంభం రెండూ భూమికి లంబంగా నిల్చున్నారు)

మరియు $\angle E = \angle E$ (ఒకే కోణాలు)

అలాగే $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA కో.కో. సరూపక నియమం)

$\therefore$ $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

అంటే, $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ ($\therefore$ 90 cm = $\frac{90}{100}$ m = 0.9 m.)

అంటే, $4.8 + x = 4x$

అంటే, $3x = 4.8$

అంటే, $x = 1.6$

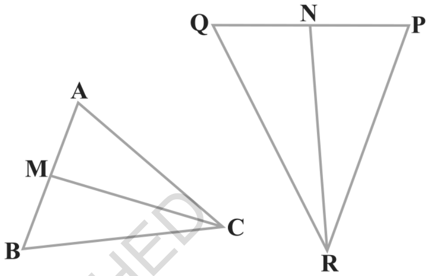
ఇలా 4 సెకెండ్ల తర్వాత అమ్మాయి నీడ పొడవు 1.6 m.

ఉదాహరణ 8: చిత్రం 6.33 లో CM మరియు RNలు వరుసగా Δ ABC మరియు Δ PQR అనే సరూప త్రిభుజాలలో గీయబడిన మధ్యగత రేఖలు. అయిన

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ అని చూపండి



చిత్రం 6.33

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సాధన: (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

కాబట్టి $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

మరియు $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ మరియు $\angle C = \angle R$ (2)

అయితే AB = 2 AM మరియు PQ = 2 PN

($\therefore$ cm మరియు RN లు మధ్యగత రేఖలైన కారణంగా)

ఈ విధంగా $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

అంటే $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

మరియు $\angle MAC = \angle NPR$ (4)

అలాగే (3) మరియు (4)ల నుండి $\Delta AMC \sim \Delta PNR$ $\therefore$ భు.కో.భు సరూప నియమం) (5)

(ii) (5) నుండి $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

అయితే $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ ($\therefore$(2) రింద) (7)

కావున $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ ($\therefore$(6) మరియు (7) నుండి) (8)

(iii) పునః $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$ (1) నుండి)

కావున $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BC}{QR}$ ($\therefore$(8) మరియు (9) నుండి)

అలాగే $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{2BM}{2QN}$

అంటే $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BM}{QN}$ (10)

అంటే $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{BM}{QN}$ ($\therefore$ (9) మరియు (10) నుండి)

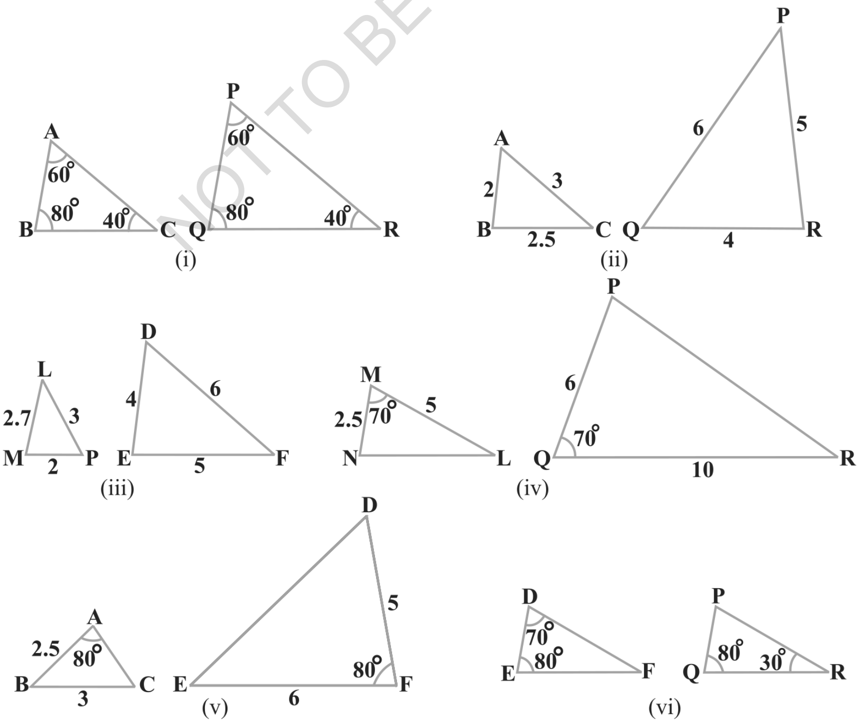
కావున $\Delta\, CMB \sim \Delta\, RNQ$ ($\therefore$ భు.భు.భు సరూప నియమం)

గమనించండి: (i) వ భాగాని సాధించు విధానాన్ని అనుసరిస్తూ మీరు (iii) వ భాగాన్ని కుడా సాధించవచ్చు.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

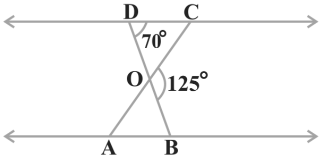
అభ్యాసం 6.3

1. చిత్రం 6.34 లోని సమరూప త్రిభుజ జతలు ఏవి? తెల్పండి. ఈ ప్రశ్నలకు జవాబివ్వడానికి సమరూపత యొక్క ఏ నియమ (నిర్ధారక) లక్షణాలు ఉపయోగిస్తారో రాయండి మరియు త్రిభుజాల సరూపకతను సంకేతాలనుపయోగించి రాయండి.



చిత్రం 6.34

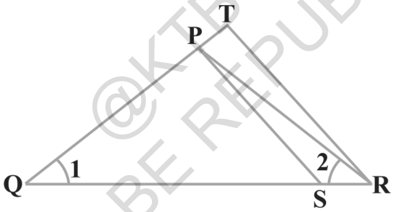
2. చిత్రం 6.35లోΔ OBA ~ Δ ODC, $\angle$BOC = 125^0 మరియు $\angle$CDO = 70^0 అయితే $\angle$DOC, $\angle$DCO మరియు $\angle$OAB లను కనుగొనండి.



చిత్రం 6.35

3. ట్రెపీజియం ABCDలో AB || DC, కర్ణములు AC మరియు BDలు పరస్పరం బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటాయి. రెండు త్రిభుజాల సరూపకత నియమాన్ని ఉపయోగించి $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ అని చూపండి.

4. చిత్రం 6.36లో $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ మరియు $\angle 1 = \angle 2$ అయితే Δ PQS ~ Δ TQR అని చూపండి.



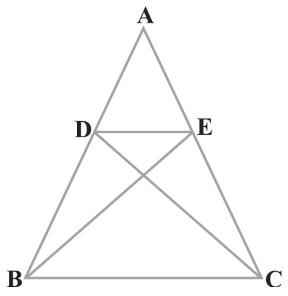
చిత్రం 6.36

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. $\angle$P = $\angle$RTS అగునట్లు S మరియు T లు Δ PQR యొక్క PR మరియు QR భుజాల పైగల బిందువులు. అయితే Δ RPQ ~ Δ RTS అని చూపండి.

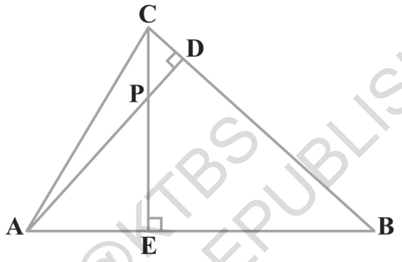
6. చిత్రం 6.37లో Δ ABE $\cong$ Δ ACD అయితే Δ ADE ~ Δ ABC అని చూపండి.

7. చిత్రం 6.38లో Δ ABC యొక్క ఎత్తులు AD మరియు CEలు పరస్పరం P బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. అయితే.
   (i) Δ AEP ~ Δ CDP
   (ii) Δ ABD ~ Δ CBE
   (iii) Δ AEP ~ Δ ADP
   (iv) Δ PDC ~ Δ BEC అని సాధించండి.



చిత్రం 6.37

8. సమాంతర చతుర్భుజం ABCDలో AD భుజాన్ని పొడుగించిన భాగంలో E బిందువు కలదు మరియు BE మరియు CDలు పరస్పరం F బిందువులో ఖండించుకుంటే Δ ABE ~ Δ CFB అని చూపండి.



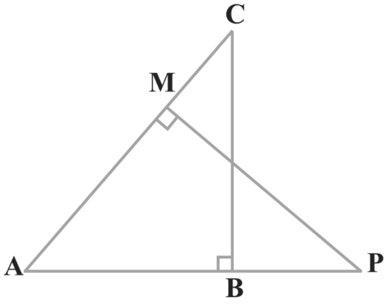
చిత్రం 6.38

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. చిత్రం 6.39లో Δ ABC మరియు Δ AMP క్రమంగా B మరియు M లలో లంబ కోణాలను కలిగి ఉన్న లంబకోణ త్రిభుజాలు అయితే

(i) Δ ABC ~ Δ AMP

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ అని చూపండి



చిత్రం 6.39

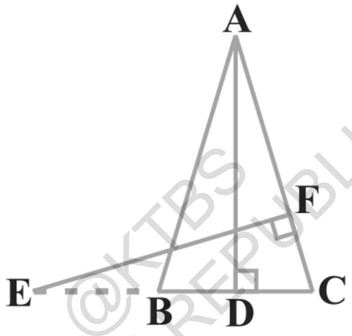
10. CD మరియు GHలు వరుసగా $\angle ACB$ మరియు $\angle EGF$ ఖండనరేఖలు, D మరియు H బిందువులు క్రమంగా ΔABC మరియు ΔEFG యొక్క భుజాలు AB మరియు FE పై ఉన్నాయి. $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ అయితే

(i) $\frac{CA}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$ అని సాధించండి

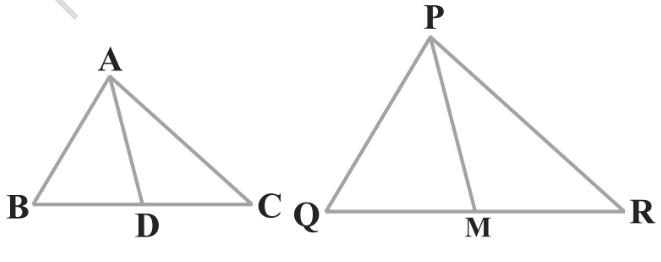
11. చిత్రం 6.40లో సమద్విబాహు త్రిభుజం ΔABCలో AB = AC. CB ని పొడుగించిన రేఖపై 'E' ఒక బిందువు. $AD \perp BC$, $EF \perp AC$ అయితే $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ అని చూపండి.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం 6.40

12. చిత్రం 6.41లో ΔABC యొక్క భుజాలు AB మరియు DC, మధ్యగతరేఖ AD లు క్రమంగా ΔPQR యొక్క భుజాలు PQ మరియు QR, మధ్యగతరేఖ PMకు అనుపాతంలో ఉంటే. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అని చూపండి.



చిత్రం 6.41

13. ΔABC లో $\angle ADC = \angle BAC$ అగునట్లు BC భుజంపై 'D' ఒక బిందువు. అయితే $CA^2 = CB.CD$ అని చూపండి.

14. Δ ABC యొక్క భుజాలు AB మరియు AC లు, మధ్యగతరేఖ AD లు క్రమంగా Δ PQR యొక్క భుజాలు PQ మరియు PR, మధ్యగతరేఖ PM తో అనుపాతం కలిగిఉంటే Δ ABC ~ Δ PQR అని చూపండి.

15. 6 m పొడవుగల స్తంభం నేలపై 4 మీ. పొడవుగల నీడను ఏర్పరిస్తే, అదే సమయంలో ఒక కట్టడం 28 మీ, పొడవు గల నీడను ఏర్పరుస్తుంది. అయితే ఆ కట్టడం పొడవు ఎంత?

16. AD మరియు PM లు క్రమంగా Δ ABC మరియు Δ PQR ల మధ్యగత రేఖలు. Δ ABC ~ Δ PQ అయితే, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ అని సాధించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.5 సారాంశము

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది అంశాలు నేర్చుకొనియున్నారు.

1. ఒకే ఆకారమును కలిగివుండి ఒకే పరిమాణము కలిగివుండనవసరము లేని పటాలను సరూప పటాలు అంటారు.
2. అన్ని సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు కాని విపర్యయము సత్యముకాదు.
3. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి. (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి. (అనుపాతంలో వుండాలి)
4. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేర్వేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.
5. ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
6. రెండు త్రిభుజాలలో కోణాలు సమానంగా వుంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి) ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు (కో. కో. కో. సరూపకత)
7. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. (కో. కో. కో (A A A) సరూపకత)

8. రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము. ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు. భు. భు సరూపకత)

9. ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగివున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు సరూపకత)

10. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.

11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గేసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు అంతేగాక అవి ఒకదాని కొకటి కూడా సరూపాలు.

12. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

13. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజమవుతుంది.

చదువరులకు ఒక సూచన

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక దాని కర్ణము మరియు ఒక భుజము మరియు మరొక దాని కర్ణము మరియు దాని అనురూపాలు పరస్పరం అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. దీనిని త్రిభుజాల సరూపకత RHS నియమం (లం.క.భు) అంటారు.

ఈ నియమాన్ని అధ్యాయం 8లో రెండవ ఉదాహరణలో ఉపయోగిస్తే సాధన సులభమవుతుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

నిరూపక రేఖాగణితం

I6H7U1

7

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.1 పరిచయం:

ఒక తలము నందు బిందువు యొక్క స్థానమును గుర్తించే విధానం గురించి 9 వ తరగతిలో చదువుకొన్నాము. మనకు ఒక జత నిరూపక అక్షాలు అవసరం. y – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరంను x – **నిరూపకం అని** (లేదా) **(abscissa)** x అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరంను y – **నిరూపకం అని** (లేదా) **(ordinate)**. x అక్షంపై బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (x, o) మరియు y – అక్షంపై బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (o, y).

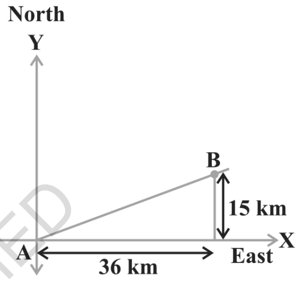
ఇక్కడ మనకు ఒక ఆటవుంది. ఒక గ్రాఫ్ పేపరునందు ఒక జతలంబ అక్షాలను గీయగా. ఇక నేరుగా ఇచ్చిన బిందువులను కలుపగా A(4, 8) నుండి B(3, 9) నుండి C(3, 8) నుండి D(1, 6) నుండి D(1, 6) నుండి E(1, 5) నుండి F(3, 3) నుండి G(6, 3) నుండి H(8, 5) నుండి I (8, 6) నుండి J (6, 8), నుండి K (6, 9), నుండి L (5, 8) నుండి A కు కలపవలయును. ఇపుడు బిందువులను కలుపగా P (3, 5, 7), Q (3, 6) R(4, 6) నుండి త్రిభుజం. X(5.5, 7), Y(5, 6) Z(6, 6). త్రిభుజం S(4, 5) T(4, 5 , 4) మరియు U(5, 5) బిందువులను చేర్చి తరువాత U(9, 5) మరియు(9, 6) బిందువులను చేర్చగా మీకు ఏచిత్రం దొరుకుతుంది?

రెండు చలరాసులు కలగిన ఏకఘాత బీజీయ సమీకరణం $ax + by + c = 0$, మనము చూడగా (a, b లు రెండూ ఏకకాలం 0 కావు) ఇది గ్రాఫ్ పరంగా ఒక సరళరేఖను ఇచ్చును. అధ్యాయం – 2 మనం గమనించగా $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ అనేది గ్రాఫ్‌లో ఒక పరావలయం. నిరూపక రేఖాగణితం అనేది. బీజగణితం యొక్క విషయాలను రేఖాగణిత చిత్రాలను ఆధారం చేసుకొని అభివృద్ధి పొందినది. బీజగణితం ను ఉపయోగించి రేఖాగణిత చిత్రాలను ఆధారం చేసుకొని అభివృద్ధి పొందినది. బీజగణితంను ఉపయోగించి రేఖాగణితంను చదవడం. మరియు రేఖాగణితంను ఉపయోగించి బీజగణితం అర్థం చేసుకోవడం జరిగినది. అందువలన ఈ నిరూపక రేఖాగణితం అనేది చాలా విస్తారంగా అనేక క్షేత్రాలలో అన్వయించడం జరిగినది. అవి ఏవనగా భౌతిక శాస్త్రం, ఇంజనీరింగ్, కళా, భూగోళంలాంటి రంగాలలో నిరూపక రేఖాగణితం విపులం గా అన్వయించబడుతుంది.

ఈ అధ్యాయం నందు రెండు నిరూపకాలను ఉపయోగించి వాటి మధ్య దూరంను కనుగొనడం అనేది చదువుకొందాం. మరియు ఇచ్చిన మూడు బిందువుల ఆధారంగా త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుట. ఇచ్చిన నిష్పత్తి ఆధారంగా ఇచ్చిన రెండు బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే సరళరేఖను విభజించే నిరూపక బిందువులను కనుగొనే విధంను గురించి చదవచ్చును.

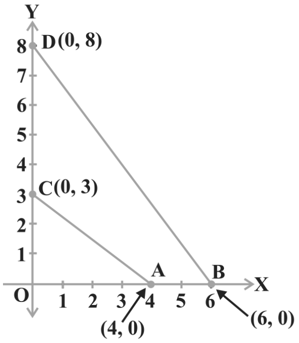
7.2 మధ్యదూరంనకు సూత్రం:

కింద ఇచ్చిన సందర్భం చూడగా A గ్రామం B అనే గ్రామం తూర్పుకు 36 k.m. వున్నది. అదే విధంగా ఉత్తరంనకు 156 k.m. దూరంలో A గ్రామంవున్నది. A నుండి Bకి గల మధ్యదూరంను ఏవిధంగా కనుగొనగలము కొలవ కుండానే ఈ సందర్భం 7.1 చూపిన విధంగా గ్రాఫ్‌లో ప్రతిపాదించిన విధంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి దూరంను కనుగొనవచ్చును.



చిత్రం 7.1

ఇపుడు ఉదాహరణగా x–అక్షంపై రెండు బిందువులు వున్నాయి. అనుకొందాం మనం వాటి యొక్క మధ్యదూరం కనుగొనగలమా? త్వరితంగా రెండు బిందువులు A (4, 0) మరియు B(6, 0) చిత్రం 7.2లో ఈ బిందువులు A మరియు B లు, x–అక్షంపైవున్నాయి.



చిత్రం 7.2

చిత్రంలో OA = 4 యూనిట్స్ మరియు OB = 6 యూనిట్స్ మనం చూడగలము.

అయితే ఇపుడు ఈ బిందువులు x–అక్షంపైవున్నాయి.

మనము సులువుగా వాటి మధ్యదూరంను కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణగా మనము ఆ రెండు బిందువులు y – అక్షంపైవున్నాయి. అనుకొన్నాము. మనము వాటి యొక్క మధ్యదూరంను కనుగొనగలమా. ఆబిందువులు C (0, 3) మరియు D (0, 8)లు y – అక్షంపైవున్నాయి. అదే రీతిగా CD = 8 – 3 = 5 యూనిట్స్ మనము కనుగొనగలము. (చిత్రం 7.2)

తరువాత A నుండి C కి మధ్యదూరం కనుగొనవచ్చునా (చిత్రం 7.2)? అయితే OA = 4 యూనిట్స్ మరియు OC = 3 యూనిట్స్ Aనుండి Cకి మధ్యదూరం i.e. $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ యూనిట్స్ అదే రీతిగా Bనుండి Dకి మధ్యదూరంను కనుగొన గలము BD = 10 యూనిట్స్.

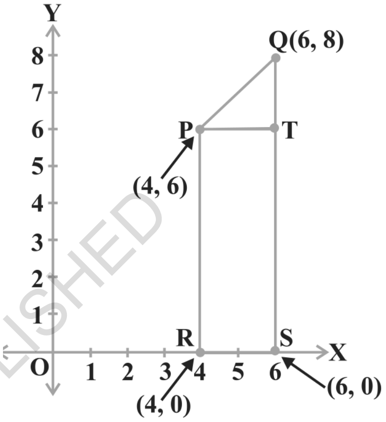
ఇపుడు ఏవైన రెండు బిందువులు అక్షనిరూపకాల మీద లేవనుకొంటె. వాటియొక్క మధ్య దూరంను కనుగొనవచ్చునా? అవును వాటి మధ్యదూరంను కనుగొనుటకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించవలెను. దీనికి ఒక ఉదాహరణంను గమనించగా.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

చిత్రం 7.3 బిందువులు P(4, 6) మరియు Q(6, 8) మొదటి పాదంలోవున్నాయి. మనం ఏవిధంగా ఆ బిందువుల మధ్యదూరంను పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి కనుగొనగలము? అయితే x – అక్షం నకులంబంగా P మరియు Qలకు అనుగుణంగా PR మరియు QSలను గీస్తాము. అదే రీతిగానే Pకి లంబంగా QS కు T వద్ద ఖండించునట్లు ఒక రేఖను గీయుదము. అయితే R మరియు S యొక్క నిరూపకాలు (4, 0) (6, 0) కావున RS = 2 యూనిట్స్ QS = 8 యూనిట్స్ మరియు TS = PR = 6 యూనిట్స్.

కావున QT = 2 యూనిట్స్ PT = RS = 2 యూనిట్స్. ఇపుడు పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించగా

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$
$$PQ = 2\sqrt{2}$$ యూనిట్స్

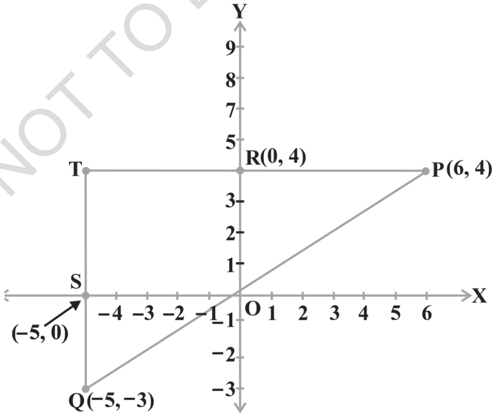


చిత్రం 7.3

మనము రెండు వేరువేరు తలాలో రెండు బిందువుల యొక్క మధ్య దూరం కనుగొనగలము?

(చిత్రం 7.4) చూపిన విధంగా బిందువులు P(7, 4) మరియు Q(–5, 3) తీసుకొంటే x – అక్షంనకు లంబంగా QS ను గీయగా అదేవిధంగా PTకి లంబంగా P ను మరియు QSలను పొడిగించగా y – అక్షం వద్ద R మరియు S వద్ద కలుసుకొనును.

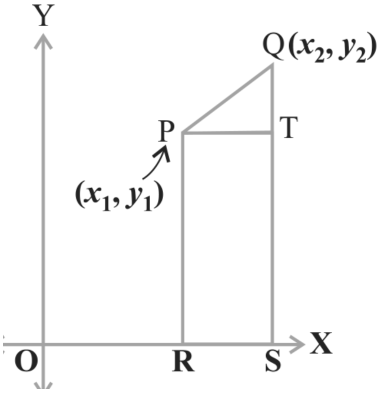
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



చిత్రం 7.4

ఇపుడు PT = 11 యూనిట్స్ QT = 7 యూనిట్స్ (ఎందుకు?)

PTQ అనే లంబకోణ త్రిభుజంనందు పైథాగరస్ సిద్ధాంతను ఉపయోగించగా $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ యూనిట్స్ పొందగలము.



చిత్రం 7.5

ఏవైన బిందువులు P(x, y) Q(x_2, y_2) ల మధ్య దూరంను కనుగొందాము. PR మరియు QS లను x – అక్షం నకులంబంగా గీస్తాము. Pకి లంబంను QSను Tవద్ద కలుయునట్లు గీద్దాము. (చిత్రం 7.5)

అయితే, $OR = x_1$, $OS = x_2$.

$RS = x_2 - x_1 = PT$.

అదేవిధంగా, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$

$QT = y_2 - y_1$

Δ PTQ, నందు పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ప్రతిక్షేపించగా.

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించగా బిందువుల మధ్య దూరం ఋణాత్మకం కానంతవరకు. మనము కేవలము ధనాత్మక వర్గమూలంను తీసుకోవలయును. రెండు బిందువుల మధ్యదూరం P(x, y) మరియు Q(x_2, y_2).

$$\mathbf{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ఇదియే **రెండుబిందువుల మధ్య దూరంనకు సూత్రం**

1. ప్రత్యేకంగా మూలబిందువు (0, 0) నుండి P బిందువునకు (x, y) బిందువు గలమధ్య దూరం

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. మనం ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. (ఎందుకు?)

ఉదాహరణ 1: త్రిభుజం యొక్క బిందువులు (3, 2), (–2, –3) మరియు (2, 3)? అయితే ఏవిధమైన త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

సాధన: మధ్యదూరం సూత్రంను ఉపయోగించి PQ, QR మరియు PR మధ్యదూరం కనుగొందాము. ఇచ్చిన బిందువులు P(3, 2), Q(–2, –3) మరియు R(2, 3), అయితే

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{52 + 52} = \sqrt{50} = 7.07 \quad \text{(దాదాపు)}$$

$$QR = \sqrt{(-2\ -2)^2 + (-3\ -3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (దాదాపు)}$$

$$PR = \sqrt{(3\ -2)^2 + (2\ -3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (దాదాపు)}$$

అయితే ఏవైన రెండు బిందువుల మధ్యదూరంల మొత్తం మూడవగా బిందువు దానికంటె ఎక్కువ వుండవలయును. అపుడే P మరియు Q, R లు త్రిభుజ బిందువులు అవుతాయి.

అదే రీతిగా $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము ఆధారంగా, $\angle P = 90^0$ అనేది PQR అనేది లంబకోణ త్రిభుజం.

ఉదాహరణ 2: (1, 7), (4, 2) (–1, –1) మరియు (–4, 4) అనేవి చతురస్రం యొక్క శీర్షలు అనిచూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) V (–4, 4) మరియు D (–4, 4) ABCD అనే చతురస్రం. దాని ధర్మం ప్రకారం అన్నిభుజాలు మరియు కర్ణంలు కూడ సమానం అని చూపండి.

$$AB = \sqrt{(1\ -\ 4)^2 + (7\ -\ 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (-1\ -\ 4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1 + 4)^2 + (7\ -\ 4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

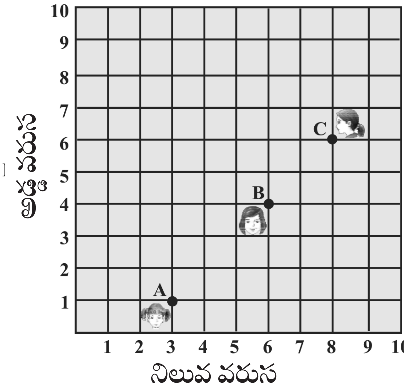
$$AC = \sqrt{(1 + 1)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4 + 4)^2 + (2\ -\ 4)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఈ విధంగా AB = BC = CD = DA మరియు AC = BD, ABCD చతుర్భుజం యొక్క అన్నిభుజాలు సమానము కర్ణంలు కూడ సమానం (AC మరియు BD కర్ణాలు). అందువలన ABCD అనేది చతురస్రం.

పర్యాయ పద్ధతి: నాలు భుజాలు, ఒక కర్ణం మనం కనుగొనగలము AC అయితే $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ అదే విధంగా పైథాగరస్ విపర్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $\angle D = 90^0$ ఒక చతుర్భుజం నందు అన్ని నాలుగు భుజాలు సమానం ఒక కోణం 90^0 అయితే అది ఒక చతురస్రం కావున ABCD ఒక చతురస్రం.



చిత్రం 7.6

ఉదాహరణ 3: చిత్రం 7.6 ఒక తరగతిలో బెంచీలను అమర్చే విధానంను చూపబడినది. ఆస్మి, భారతి, కామెల్ల, ముగ్గురు క్రమం

గాకూర్చున్నారు A(3, 1), B(6, 4) C(8, 6) ఈ రీతిగా ఆ ముగ్గురు ఒకే వరుసలోకూర్చున్నారా? మీ జవాబుకు కారణంలు రాయండి?

సాధన: మధ్య దూరం సూత్రంను ఉపయోగించి.

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ఇంకను, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, కావున బిందువులు A, B, Cలు ఏక రేఖా బిందువులు. కావున వారు ఒకే వరుసలో కూర్చున్నారు.

ఉదాహరణ 4: (x, y) బిందువు (7, 1) మరియు (3, 5) బిందువులనుండి సమాన దూరంలోవుంటే (x, y)ల మధ్యవుండే సంబంధం కనుగొనండి.

సాధన: P (x, y) బిందువు A (7, 1) B (3, 5) బిందువులకు సమాన దూరంలోవుంది. అనుకొంటే మనం AP = BP అయితే $AP^2 = BP^2$.

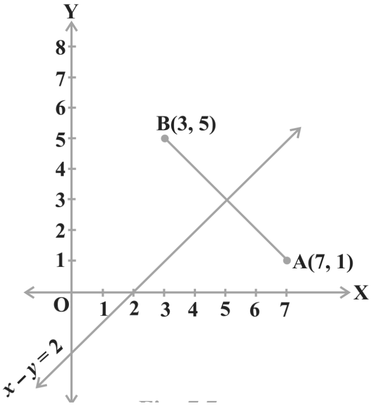
అనగా $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

అనగా $x^2 - 14x + 498 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

అనగా $x - y = 2$

ఇదే కావలసిన సంబంధం.

మనం గమనించగా గ్రాఫ్ సమకరణం $x - y = 2$ ఒక రేఖ మనం ముందు చదివిన విధంగా మనకు తెలుసు ఒక బిందువు సమాన దూరం లో A మరియు B వుంటే ABని లంబంగా సమద్వి ఖండనచేయను (చిత్రం 7.7)



చిత్రం 7.7

ఉదాహరణ 5: A (6, 5) మరియు B (− 4, 3) బిందువు ల నుండి సమాన దూరంలో వుండే y–అక్షం మీదవుండే ఒక బిందువు కనుగొనుము?

సాధన: మనకుతెలుసు y – అక్షం నుండి వుండే బిందువులు $(0, y)$ అయితే $P(0, y)$ అనే బిందువు A మరియు B కి సమాన దూరంలో వుంటాయి. అయితే

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అనగా $(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

అనగా $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

అనగా $4y = 36$

$y = 9$

కావున మనకు కావలసిన బిందువులు (0, 9)

మనసాధనను పరీక్షించగా: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

గమనిక: పైన చెప్పిన విధానం అనుసరించి (0, 9) అనేది y – అక్షంను విభజించును మరియు AB నిలంబం గా సమద్విఖండన చేయును.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 7.1

1. ఈ కింది ఇచ్చిన జత బిందువుల యొక్క మధ్య దూరంను కనుగొనుము.

   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (–5, 7), (–1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

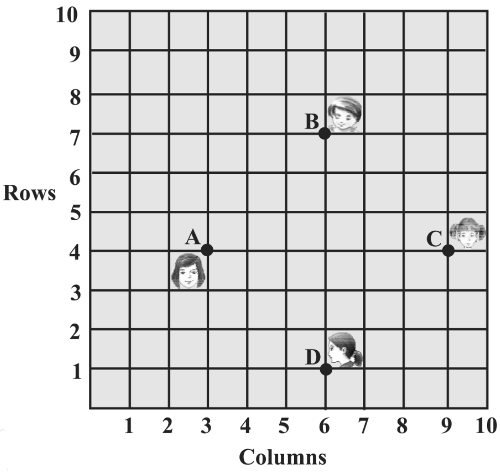
2. (0, 0) మరియు (36, 15) ఈ బిందువుల మధ్య దూరంను కనుగొనండి. సెక్షన్ 7.2 చర్చించిన రీతిలో A మరియు B గ్రామంల యొక్క మధ్య దూరంను కనుగొనగలవా?

3. (1, 5) (2, 3) మరియు (–2, –11) అనే బిందువులు ఏక రేఖాబిందువులు అని చూపండి?

4. (5, –2) (6, 4) మరియు (7, –2) అనే బిందువులు సమబాహు త్రిభుజం శీర్షంలు అని చూపండి?

5. చిత్రంలో 7.8 లో చూపిన విధంగా ఒక తరగతిలో గురు స్నేహితులు కలరు (A, B, C, D) చంప, చమేలి తరగతిలోకి ప్రవేశీలించి. చంప, చమేలిని అడిగింది. ABCD అనేది చతురస్రం అని నీవు ఒప్పుకోకపోతే? చమేలి బప్పకోలేదు. మధ్య దూర సూత్రంను ఉపయోగించి ఏది సరియైనది అని కనుగొందాం.

6. ఈ కింది బిందువులను ఉపయోగించి ఏరకమైన చతుర్భుజం ఏర్పడుతుందో? మన జవాబుకు కారణం ఇవ్వండి?



చిత్రం 7.8

(i) (–1, 2), (1,), (–1, 2), (–3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, –4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. (2, –5) మరియు (–2, 9) బిందువులను ఉపయోగించి సమాన దూరంలో వుండే x – అక్షంపైవుండే బిందువులను కనుగొనండి?

8. P (2, –3) మరియు (10, y) బిందువుల మధ్య దూరం 10 యూనిట్స్ అయితే y యొక్క విలువను కనుగొనండి?

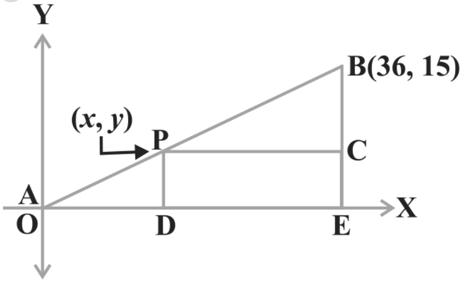
9. Q (0, 1) బిందువు P (5, –3) మరియు R (x, 6) బిందువు సమాన దూరంలో వుంటే x విలువను కనుగొనండి. అదే విధంగా QR మరియు PR దూరంలను కనుగొనండి?

10. (x, y) బిందువు (3, 6) మరియు (–3, 4) బిందువులనుండి సమానదూరంలో వుంటే (x, y) మధ్యవుండే ఒక సంబంధను కనుగొనండి?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.3 ఛేదన సూత్రము:

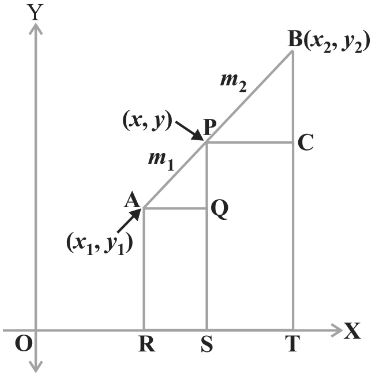
సెక్షన్ 7.2 అని సందర్భమును జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనగా ఒక టెలిఫోన్ కంపెనీ A మరియు B అనే వాడ మధ్య P ఒకటవర్‌ను నిర్మించారు అనుకొందాము A దూరంనుండి B రెండింతల దూరములో వుంటుంది. P అనేది ABల మధ్య వుంటుంది. అది ABలను 1:2 గావి భజించును (చిత్రం 7.9). Aను O మూల బిందువుగా తీసుకొంటే 1 కి.మీ ఇరువైపుల రెండు అక్షాల మీద తీసుకొంటే. దాని యొక్క నిరూపకాలు B (36, 15) అదేక్రమములో టవర్ యొక్క స్థానం గుర్తించవచ్చును. మనకు P యొక్క నిరూపకాలు తెలుసుకొవాలి ఏవిధంగా వీటియొక్క నిరూపకాలు కనుగొనవచ్చును?



చిత్రం 7.9

P (x, y) నిరూపకాలు అనుకొంటే. లంబంగా రేఖలు P కి మరియు Bకి x – అక్షం మీద గీయగా అవి D మరియు E వద్ద కలుస్తాయి. PCని BEకి లంబంగా గీయగా అదే ప్రమాణంలో AA కూడ చదివాము అధ్యాయం 6లో ΔPOD మరియు ΔBPCలు అదే రీతిలో

కావున, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ మరియు $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$



చిత్రం 7.10

అయితే, $\frac{x}{36-x}=\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{y}{15-y}=\frac{1}{2}$.

ఈ సమకరణంలు $x = 12$ మరియు $y = 5$ ఇచ్చును.

P(12, 5) లు ఈ నియమాలు కలిసి మీరు పరిశీలించగా OP : PB = 1:2

కావున మనము ఇపుడు దీనిని అర్థం చేసుకొని ఈ ఉదాహరణనుండి సాధారణ సూత్రంను అభివృద్ధి పరచవచ్చు.

ఏవైన రెండు బిందువు A (x_1, y_1) మరియు B (x_2, y_2) అనుకొంటే P(x, y) అనేది AB ని అంతరం గా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో భాగించగా.

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (చిత్రం 7: 10)

x – అక్షం నకులంబంగా AR, PS మరియు BTకి గీయగా x – అక్షం నకు సమాంతరంగా AQ మరియు PC. రీతిలో అదే ప్రమాణంలో

Δ PAQ ~ Δ BPC

కావున, $\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ (1)

ఇపుడు, AQ = RS = OS – OR = $x - x_1$

PC = ST = OT – OS = $x_2 - x$

PQ = PS – QS = PS – AR = $y - y_1$

BC = BT – CT = BT – PS = $y_2 - y$

ఈ విలువలను (1) లో మనము తీసుకొనగా,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

తీసుకొనగా $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ మనం $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

తీసుకొనగా $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ అదేరీతిగా $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దాని నుండి A(x_1, y_1) మరియు B(x_2, y_2) బిందువులను చేర్చేరేఖాఖండం. అంతరంగా $m_1 : m_2$ అనుపాతంలో విభాగించును. P(x, y) బిందువు నిరూపకాలు.

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

ఈ ఇదియే ఛేదన సూత్రం

ఈ నిరూపణను Aకు లంబంగా గీయబడిన రేఖకు ఉపయోగించవచ్చును. P మరియు B అనేది y – అక్షం మీద ఈ రీతిలో

P అనేది ABని k:1 నిష్పత్తిలో విభజించగా. అయితే P యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$$

ప్రత్యేక సందర్భం: రేఖ యొక్క మధ్య బిందువులు రేఖను 1:1 నిష్పత్తి విభజించగా. కావున A(x_1, y_1) మరియు B(x_2, y_2) కలిపే బిందువుల యొక్క మధ్య బిందువు నిరూపకాలు P.

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1 + 1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1 + 1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ఈ భేదన సూత్రం ఆధారంగా కొన్ని సమస్యలు సాధించగా

ఉదాహరణ 6: (4, –3) మరియు (8, 5) కలిపే రేఖను 3:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు.

సాధన: P (x, y) కావలసిన బిందువులు. భేదన సూత్రం ఉపయోగించగా

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3 + 1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 + 1} = 3$$

కావలసిన బిందువులు (7, 3)

ఉదాహరణ 7: A(– 6, 10) మరియు (3, –8) బిందువులను కలిపే రేఖను (– 4, 6) బిందువులు ఏనిష్పత్తిలో విభజించును కనుగొనండి?

సాధన: AB ని అంతరంగా (– 4, 6) విభజించే నిష్పత్తి $m_1 : m_2$ బేధన సూత్రం ఉపయోగించగా

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$(x, y) = (a, b)$ అయితే $x = a, y = b$ అనుకొందాం

$$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ మరియు } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 3m_1 = -6m_2 + 4m_2$$

$$7m_1 = 2m_2$$

$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

మీరు y – నిరూపకాలు నిష్పత్తులను తృప్తి పరచగా.

$$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (అన్ని పదాలను m_2 తో భాగించగా)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

A (– 6, 10) మరియు B (3, – 8) బిందువులను కలిపే రేఖను (– 4, 6) బిందువులను విభజించే నిష్పత్తి 2 : 7.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ప్రత్యామ్నాయంగా: నిష్పత్తి $m_1 : m_2$ ను ఈ విధంగా రాయవచ్చు $\frac{m_1}{m_2} : 1$ లేదా $k : 1$ అయితే ABని (– 4, 6) బిందువులను నిష్పత్తి $k : 1$ భేదన సూత్రం ఉపయోగించగా

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \qquad (2)$$

$$-4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

$$-4k - 4 = 3k - 6$$

$$7k = 2$$

$$k : 1 = 2 : 7$$

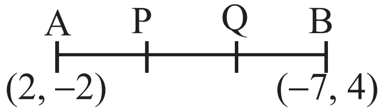
అదే విధంగా y – నిరూపకాలను పరిశీలించవచ్చు.

అయితే A(– 6, 10) మరియు B(3, – 8) బిందువులను కలిపే రేఖను (– 4, 6) బిందువు 2 : 7 నిష్పత్తిలో విభజించును.

గమనిక: PA మరియు PB యొక్క దూరంల కనుగీచే విధంగా నిష్పత్తిని తీసుకొని A మరియు Pలు ఏక రేఖాస్థితంలుగా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 8: A(2, –2) మరియు B(–7, 4) బిందువులను కలిపే రేఖ మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.

సాధన: AB ని సమానంగాని భావించే బిందువులు P మరియు Q AP= PQ = QB (చిత్రం 7.11) ABని అంతరంగా విభజించే P నిష్పత్తి 1:2 P బిందువు నిరూపకాలు ఛేదన సూత్రంను ప్రతిక్షేపించగా



చిత్రం 7.11

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2},\frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right),\text{ i.e., } (-1,0)$$

Q కూడ AB ని అంతరంగా విభజించే నిష్పత్తి 2:1 Q నిరూపకాలు.

$$\left(\frac{2(-7)+2(2)}{2+1},\frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right),\text{ i.e., } (-4,2)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

AB లను కలిపే రేఖను మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించే బిందువులు నిరూపకాల (–1, 0) మరియు (–4, 2)

గమనిక: Q బిందువులు ఈ విధంగానైన PB యొక్క మధ్య బిందువులు మధ్య బిందువు సూత్రంను ఉపయోగించి కూడ నిరూపకాలు కనుగొవచ్చును.

ఉదాహరణ 9: బిందువులు (5, –6) మరియు (–1, –4) లను కలిపే రేఖ y – అక్షంను ఏనిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది మరియు ఛేదన బిందువులను కనుగొనంది?

సాధన: k : 1 నిష్పత్తి అనుకుంటే ఛేదన సూత్రం ఆధారంగా బిందువు నిరూపకాలు ABని విభజించే నిష్పత్తి $k : 1 \left(\frac{-k+5}{k+1},\ \frac{-4k-6}{k+1}\right)$

ఈ బిందువులు y – అక్షం మీదవుంటాయి. y – అక్షం యొక్క ప్రథమ నిరూపకాలు 0 అని మనకు తెలుసు.

కావున $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

$$k = 5$$

కావున నిష్పత్తి 5 = 1, $k = 5$ విలువను తీసుకొనగా $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ అనే ఛేధన బిందువులు మనకు లభిస్తాయి.

ఉదాహరణ 10: బహుభుజి యొక్క శీర్షాలు A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) మరియు D (p, 3) అయితే p విలువ కనుగొనండి.

సాధన: మనకు తెలుసు బహుభుజి యొక్క కర్ణాలు సమానంగా విభజించునని.

కావున AC యొక్క మధ్య బిందువు నిరూపకాలు BD యొక్క మధ్యబిందువు నిరూపకాలు.

i.e., $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

i.e., $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

i.e., $\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$

i.e., $p = 7$

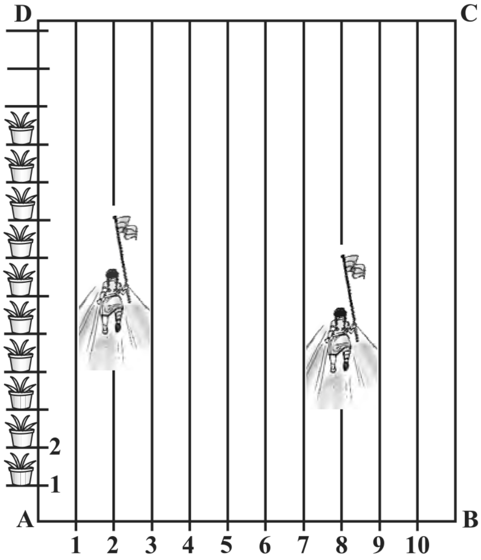
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 7.2

1. (−1, 7) మరియు (4, −3) బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే రేఖను 2 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి?

2. (4, −1) మరియు (−2, −3) బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే రేఖను మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించే బిందు నిరూపకాలు కనుగొనండి?

3. ABCD దీర్ఘ చతురస్రాకారంగల ఆటస్థలంవుండే ఒక పాఠశాల వుంది. ఆ పాఠశాల నందు క్రీడాదినోత్సవం సందర్భంగా ఆ ఆటస్థలంలో రేఖలను సుద్ద పొడరు ఉపయోగించి ఒకొక్కరేఖ మధ్యదూరం 1m వుండునట్లు గీయబడ్డాయి. AD అనేరేఖ పై 100 పూలకుండీలు ఉంచ బడ్డాయి. (చిత్రం 7: 12) నిహారిక AD లోని 2వ రేఖలో $\frac{1}{4}$ రన్ చేసి పచ్చ జెండా నాటింది. ప్రతి AD లోని 8వ రేఖలో $\frac{1}{5}$ రన్ చేసి ఎరుపు జెండా నాటింది. రశ్మి రెండు రేఖల మధ్య పరుగులు తీసి ఎక్కడ ఖచ్చితంగా నీలి రంగు జెండా వుంచవలయును?



చిత్రం 7.12

4. $(-3, 10)$ మరియు $(6, -8)$ బిందువులనుండి ఏర్పడే రేఖాఖండంను $(-1, 6)$ బిందువు ఏ అనుపాతం లో విభజించునోకనుగొనండి?

5. $A(1, -5)$ మరియు $B(-4, 5)$ వలన ఏర్పడే రేఖ x – అక్షంను ఏ నిష్పత్తిలో విభజించునో కనుగొనండి. విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి?

6. బహుభుజి యొక్క శీర్షాలు క్రమంగా $(1, 2)$ $(4, y)$ $(x, 6)$ మరియు $(3, 5)$ అయితే x మరియు y లను కనుగొనండి.

7. AB వ్యాసంవుండే వృత్తకేంద్రం $(2, -3)$ మరియు B బిందువులు $(1, 4)$ అయితే A బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి?

8. AB అనేరేఖ మీద Pబిందువువున్నది అనుకుంటే A మరియు Bలు క్రమంగా $(-2, -2)$ $(2, -4)$ కావున P యొక్క నిరూపకాళు ను కనుగొనండి?

9. A $(-2, 2)$ మరియు B $(2, 8)$ కలిపే రేఖను నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించే. బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి?

10. $(3, 0)$, $(4, 5)$ $(-1, 4)$ మరియు $(-2, -1)$ క్రమంగా రాంబస్ యొక్క శీర్షాలు అయితే రాంబస్ వైశాల్యంను కనుగొనండి? (రాంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (కర్ణాల లబ్ధం)

7.4 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో ఈ కింది విషయాలను మీరు చదివారు:

1. P (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) ల మధ్య దూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. మూల బిందువునుంది P (x_1, y_1) బిందువు మద్య దూరం $\sqrt{x^2 + x^2}$.

3. A (x_1, y_1) మరియు B (x_2, y_2) కలుపగా అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో P (x, y) అనే బిందువు విభజించగా ఏర్పడే నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4. P (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల ద్వారా ఏర్పడే మద్య బిందువు నిరూపకాలు. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) మరియు (x_3, y_3) బిందువుల ద్వారా ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం సంఖ్యారూపంగా వివరించగా.

$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చదువరులకు సూచన

$A(x_1\ y_1)$ మరియు $B(x_2\ y_2)$ ద్వారా ఏర్పడే రేఖను (x, y) అనే బిందువులు $m_1 : m_2$ అనేనిష్పత్తిలో విభజించే సూత్రంను ఛేదనం సూత్రం ఆధారంగా

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2},\ y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ఇక్కడ $PA : PB = m_1 : m_2$

ఏదిఏమైన P అనేది A మరియు B మధ్య లేకుంటే AB రేఖ యొక్క బయట $PA : PB = m_1 : m_2$ కావున మనము చెప్పవచ్చు. P అనేది బాహ్యంగా A మరియు B బిందువుల ద్వారా రేఖను విభజించును. అలాంటి సూత్రంను పై తరగతులలో చేధన సూత్రం యొక్క వివరణ నేర్చుకొంటారు.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

గణితంలోని నిరూపణలు A1

A1.1 పీఠిక

నిత్య జీవితంలో, కారణీకరించు మరియు స్పష్టంగా ఆలోచించు సామర్థ్యాలకు అధిక ప్రయోజనం కలదు. ఉదాహరణకు, ఒక రాజకీయ వ్యక్తి కూడా మీకు స్వచ్ఛమైన ప్రభుత్వం కావాలంటే నాకు ఓటు వేయండి అని చెబుతారని భావిస్తాం. అతడు నిజంగా మీ నమ్మకం ఏమైయుండాలి అని భావిస్తాడనుకుంటే, మీరు ఆతనికి ఓటు వేయకుండావుంటే, మీకు స్వచ్ఛయైన ప్రభుత్వం దొరకక పోవచ్చు. అలాగే ఒక ప్రకటనలో ఇలా చెప్పబడిందని భావించండి, బుద్ధివంతులైవారు XYZ పాదరక్షలను ధరిస్తారు. ఇచ్చట సంస్థ మీ తీర్మానం ఇలా వుండాలని ఆసిస్తుంది. మీరు XYZ పాదరక్షలను ధరించకుండావుంటే, మీరు బుద్ధివంతులు కాదు. ఈ పై రెండు వ్యాఖ్యానాలు సాధారణ ప్రజలను తప్పుగా గ్రహించడానికి దారి చూపుతుందనే విషయాన్ని గమనించవచ్చును.

కావున, కారణాలు తెలిపే ప్రక్రియను సరిగ్గా అర్థం చేసుకుంటే తెలియకుండా ఇలాంటి వాటిలో చిక్కుకొనలేము. కారణాలు తెలిపే సరైన వాడుక గణితపుమూలం. విశేషంగా సాధనాలను రచించేటప్పుడు దాని వాడకంవుంది. తొమ్మిదవ తరగతిలో, సాధనల కల్పనను, పరిచయం చేయబడింది. మరియు మీరు అనేక వ్యాఖ్యానాలను విశేషంగా గణితంలో సాధించారు. ఒక సాధన అనేక గణితవు వ్యాఖ్యాలనుండి చేయబడిందని జ్ఞాపకం చేసుకోండి మరియు ఇది ఈ వెనుకటి తార్కికంగా సాధించిన వ్యాఖ్యానం నుండి. ప్రయేయంలో లేదా స్వయం సిద్ధం లేదా ఊహలతో పొందినవి. సాధనను రచించేటప్పుడు మనం ఉపయోగించు ముఖ్య సాధన, నిగమన తార్కిక విధానం.

ఈ అధ్యాయపు అభ్యసనాన్ని గణిత వ్యాఖ్యానం అనగానేమి అనేదానిని విమర్శిస్తూ ప్రారంభిస్తాం. అనేక ఉదాహరణలతో నిగమన తార్కిక నైపుణ్యాన్ని పెంపొందించుకునే వైపు సాగుదాం. నకార పరికల్పన మరియు దత్తవ్యాఖ్యాన నకారోక్తి గురించి కూడ అభ్యాసం చేద్దాం. తరువాత ఒక వ్యాఖ్యానపు విలోమాన్ని కనిపెట్టడం అంటే ఏమిటో అర్థం చేసుకోవడానికి చర్చిద్దాం. చివరిగా, వివిధ / అనేక ప్రమేయాల సాధనలను విశ్లేషిస్తూ 9వ తరగతిలో అభ్యసించిన సాధనల గురించి విమర్శిద్దాం. ఇచ్చట 9వ తరగతిలో మరియు ఈ పుస్తకపు వివిధ అధ్యాయాలలో ఎదురుబడిన వెరుద్యంతో సాధన, ఈ కల్పన గురించి కూడా చర్చిద్దాం.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

A1.2 గణిత శాస్త్ర వ్యాఖ్యానాల పునశ్చరణ

ఆదేశంకాని, ఆశ్చర్య సూచకం లేదా ప్రశ్నార్థకం కాని అర్థపూర్ణ వాక్యమే వాఖ్యానం అనేదానిని జ్ఞాపకం చేసుకోండి. ఉదాహరణకు, ఏ రెండు జట్లు క్రికెట్ ప్రపంచ కప్ యొక్క చివరి ప్రపంచ పంద్యాలను ఆడుతారు? ఇది ప్రశ్నయే కాని వ్యాఖ్యానం కాదు. ''వెళ్ళు, నీ గృహపాణాన్ని పూరించు'' ఇది ఆదేశమేకాని వ్యాఖ్యానం కాదు'', ఎలాంటి అద్భుత గురి! ఇది ఆశ్చర్య సూచక వాఖ్యంకాని వ్యాఖ్యానం కాదు.

జ్ఞాపకముంచుకోండి, సాధారణంగా వ్యాఖ్యానాలు ఈ కిందివాటిలో ఏదైనా ఒకటి కావచ్చు.

- ఎప్పుడూ సత్యం
- ఎప్పుడూ అబద్ధం
- సందిగ్ధంగా

ఇదివరకే 9వ తరగతిలో మీరు ఒక వ్యాఖ్యానం సత్యం లేదా అబద్ధమైనప్పుడు మాత్రం గణిత శాస్త్రం ఒప్పుకోగలము అని తెలుసుకొన్నారు. కావున సందిగ్ధమైన వ్యాఖ్యానాలను పరిగణించబడదు.

కొన్ని ఉదాహరణలతో మనం అర్థంచేసుకోవడాన్ని విమర్శిద్దాం

ఉదాహరణ 1: ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు ఎప్పుడూ సత్యం. ఎప్పుడు అబ్ధం లేదా సందిగ్ధమైనవో తెలపండి. మీ జవాబును సమర్థించండి

(i) సూర్యుడు భూమి చుట్టూ పరిభ్రమిస్తాడు.

(ii) వాహనాలకు నాలుగు చక్రాలు గలవు.

(iii) కాంతి వేగం సుమారు 3 × 105 km/s

(iv) కోల్కత్తాకు గల ఒక దారిని నవంబర్ నుండి మార్చ్‌వరకు మూయబడును.

(v) మానవులందరూ చనిపోతారు.

సాధన:–

(i) ఈ వ్యాఖ్యానం ఎప్పుడూ అబద్ధం, ఎందు కనగా, ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు ఇదివరకే భూమి సూర్యుని చుట్టూ ప్రరిభ్రమిస్తుంది అనేదానిని చెప్పారు.

(ii) ఈ వ్యాఖ్యానం సందిగ్ధం ఎందుకనగా ఈ వ్యాఖ్యానం ఎప్పుడూ సత్యం లేదా ఎప్పుడూ అబద్ధం అని నిర్ధారించుటకు సాధ్యంకాదు. వాహనాలు 2, 3, 4, 6,10. మొదలగు చక్రాలను పొందివుండవచ్చు. ఇది వాహనపు రకాన్ని ఆధారపడివుంటుంది.

(iii) ఈ వ్యాఖ్యానం ఎప్పుడూ సత్యం భౌతిక శాస్త్రజులు దీనిని పరీక్షించియున్నారు.

(iv) ఈ వ్యాఖ్యానం సందిగ్ధం ఎందుకనగా ఏ దారి గురించి చెప్పబడిందని స్పష్టత లేదు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(v) ఇది ఎప్పుడూ సత్యం. ఎందుకనగా ప్రతియొక్క మానవుడు ఏదో ఒకరోజు చనిపోతాడు.

ఉదాహరణ 2: ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు సరి లేదా తప్పుగా వున్నయో తెలపండి. మరియు మీ జవాబును సమర్థించండి.

(i) అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు.

(ii) కొన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు సమబాహు త్రిభుజాలు.

(iii) అన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు సమబాహు త్రిభుజాలు.

(iv) కొన్ని భాగలబ్ధ సంఖ్యలు (Rational Numbers) పూర్ణాంకాలు.

(v) కొన్ని భాగలబ్ధ సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు కావు.

(vi) అన్ని పూర్ణాంకాలు భాగలబ్ధ సంఖ్యలు.

(vii) ఏదో రెండు భాగలబ్ధ సంఖ్యల మధ్య వేరె ఏ ఒక్క భాగలబ్ధ సంఖ్య వుండదు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సాధన:–

(i) ఈ వ్యాఖ్యానం సరి ఎందుకనగా సమబాహు త్రిభుజాలు భుజాలన్నీ సమానం. కావున సమద్విబాహు త్రిభుజాలు.

(ii) ఈ వ్యాఖ్యానం సరి ఎందుకనగా సమద్విబాహు త్రిభుజాలలో పాదకోణాలు 60^0 అయితే అది సమబాహు త్రిభుజం.

(iii) ఈ వ్యాఖ్యానం తప్పు. దీనికొక ప్రతిరోధ ఉదాహరణం ఇవ్వండి.

(iv) ఈ వ్యాఖ్యానం సరి ఎందుకనగా $\frac{p}{q}$ రూపంలో గల భాగలబ్ధ సంఖ్యలో 'p' పూర్ణాంకం మరియు $q = 1$ అయినపుడు అవి పుర్ణాంకాలు (ఉదాహరణ $3 = \frac{3}{1}$).

(v) ఈ వ్యాఖ్యానం సరి ఎందుకనగా, $\frac{p}{q}$ రూపం యొక్క భాగలబ్ధ సంఖ్యల p, q పూర్ణాంకాలు, 'q' ని భాగించకపోతే ఆసంఖ్య పూర్ణాంకల కాదు (ఉదాహరణకు $\frac{3}{2}$)

(vi) ఈ వ్యాఖ్యానం భాగలబ్ధ సంఖ్యకాని ఒక పూర్ణాంకంవుంది అనే వాఖ్యానంలాగానేవుంది. అయితే ఇది తప్పు. ఎందుకనగా అన్ని పూర్ణాంకాలు భాగలబ్ధ సంఖ్యలే.

(vi) ఈ వ్యాఖ్యానం తప్పు. మీకు తెలిసినట్లే ఏదైనా రెండు భాగలబ్ధ సంఖ్యలు r మరియు s ల మధ్య $\frac{r + s}{2}$ అను భాగలబ్ధ సంఖ్యకలదు.

ఉదాహరణ 3: $x < 4$ అయితే ఈ కింది ఏ వ్యాఖ్యానాలు సరిగ్గావున్నాయి. మీ జవాబులను సమర్థించండి.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

సాధన:–

(i) ఈ వ్యాఖ్యానం తప్పు ఎందుకనగా ఉదాహరణకు $x = 3 < 4$ అయితే ఇది $x = 3 < 4$ అనునది సరిపొందదు.

(ii) ఈ వ్యాఖ్యానం తప్పు ఎందుకనగా, ఉదాహరణకు $x = 35 < 4$ అయితే ఇది $2x < 6$ అనునది సరిపొందుదు.

(iii) ఈ వ్యాఖ్యానం సరి ఎందుకనగా, ఇది $x < 4$ అనులాగానేవుంది.

ఉదాహరణ 4: ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు సరిపోవుటకు సరైన నిబంధనలతో వాటిని పునర్ నిరూపించండి.

(i) చతుర్భుజపు వికర్ణాలు / కర్ణాలు సమానంగావుంటే అది చతురస్రం.

(ii) త్రిభుజాల రెండు భుజాలు పై రెండు బిందువులను చేర్పు రేఖ మూడవ భుజానికి సమానం.

(iii) అన్ని ధనపూర్ణాంకాలు 'p' కు $\sqrt{p}$ అభాగలబ్ధ సంఖ్య.

(iv) అన్ని వర్గ సమీకరణాలకు రెండు వాస్తవ మూలాలు కలవు.

సాధన:–

(i) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమానంగావుంటే అప్పుడు అది దీర్ఘచతురస్రం.

(ii) త్రిభుజపు రెండు భుజాలు మధ్య బిందువులను చేర్పు రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరం.

(iii) అన్ని అవిభాజ్య సంఖ్య (కరణీయ సంఖ్య) 'p' కు $\sqrt{p}$ అభాగలబ్ధ సంఖ్య.

(iv) అన్ని వర్గ సమీకరణాలు గరిష్టం రెండు వాస్తవ మూలాలను పొందియున్నది.

గమనించండి:–

పై వ్యాఖ్యానాలను మరొక విధానంలో కూడా నిరూపించవచ్చు.

పూర్ణ చతురస్రం / ఖచ్చితమైన చదరపు సంఖ్య కాని అన్ని ధనపూర్ణాంక 'p' కు $\sqrt{p}$ కరణీయ సంఖ్య.

అభ్యాసం A1.1

1. ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు ఎప్పుడూ సత్యం, ఎప్పుడూ అబద్ధం, లేదా సందిగ్ధము నిరూపించండి. మీ జవాబులను సమర్థించండి.

   (i) అన్ని గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు ఆసక్తికరంగా వుంటాయి.

   (ii) భూమి మరియు సూర్యుని కున్న దూరం 1.5×10^8km.

   (iii) మానవులకందరికే వయస్సు పెరుగును.

(iv) ఉత్తర కాశీనుండి హర్శిల్‌కు ప్రయాణం ఆయాసమగును.

(v) ఒక మహిళ ద్వినేత్రితో ఒక ఏనుగును చూసింది.

2. ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు సరి లేదా తప్పుగావున్నాయో తెలపండి. మీ జవాబును సమర్థించండి.

(i) అన్ని షడ్భుజాకృతులు బుహుభుజాకృతులు.

(ii) కొన్ని బహుభుజాకృతులు పంచభుజాకృతులు.

(iii) అన్ని సరి సంఖ్యలు 2 తో భాగింపబడవు.

(iv) కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అభాగలబ్ధ సంఖ్యలు (కరణీయ సంఖ్యలు).

(v) అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.

3. 'a' మరియు 'b' వాస్తవ సంఖ్యపై ab # 0 అయినది. అయితే ఈ కింది ఏ వ్యాఖ్యానాలు సరి? మీ జవాబులను సమర్థించండి.

(i) a మరియు b రెండునూ సున్న అయివుండాలి.

(ii) a మరియు b రెండునూ సున్న అయివుండరాదు.

(iii) a లేదా b ని శూన్యం కాని సంఖ్యయైవుండాలి.

4. సరైన నిబంధనలతో ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలు సరిపోవునట్లు పునర్ నిరూపించండి.

(i) $a^2 > b^2$ అయితే $a > b$

(ii) $x^2 = y^2$ అయితే $x = y$

(iii) $(x + y)^2 =$ అయితే $x = y$

(iv) చతుర్భుజపు కర్ణాలు పరస్పరం ద్విభాగిస్తాయి.

(v) అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.

A1.3 నిగమన తర్కం:

తొమ్మదవ తరగతిలో మీకు నిగమన తర్కం విధానాన్ని పరిచయం చేయబడింది. ఇక్కడ ఇంకొన్ని ఉదాహరణలు పరిగణించండి. మనం ఊహించిన వ్యాఖ్యానాలు సత్యం అని తార్కికంగా తీర్మానించుటకు నిగమన తర్కం ఎలా సహాయకారిగా నున్నదో చూద్దాం ఈ వ్యాఖ్యానాలను ఊహలని అని పిలుస్తారు. కొన్ని ఉదాహరణలతో ఆరంభిస్తాం.

ఉదాహరణ 5: బీజాపూర్ (విజయపురం) కర్నాటక రాష్ట్రంలో వున్నదని ఇవ్వబడింది మరియు శబానా బీజాపూర్‌లో నివసిస్తుందని అని భావించండి. శబానా ఏ రాష్ట్రంలో నివసిస్తున్నది?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:–

ఇక్కడ మనకు రెండు ఊహలుఉన్నాయి.

(i) బీజాపూర్ కర్నాటక రాష్ట్రంలోవుంది.

(ii) శబానా బీజాపూర్‌లో నివసిస్తున్నది.

ఈ రెండు ఊహలనుండి మనం తార్కికంగా ఇలా తీర్మానించవచ్చు

శబానా కర్నాటక రాష్ట్రంలో నివసిస్తూవుంది.

ఉదాహరణ 6: అన్ని గణితపాఠ్యపుస్తకాలు ఆసక్తికరంగావున్నాయి అన్ని ఇవ్వబడ్డాయి మరియు మీరు గణిత పాఠ్య పుస్తకం ఒకదానిని చదువుతున్నారని భావించుకోండి. మీరు చదువుతున్న పాఠ్యపుస్తకం గురించి మీరేమి తీర్మానించగలరు.

సాధన:–

రెండు ఊహలను ఉపయోగించి, మీరు చదువుచున్నది ఒక ఆసక్తికరయైన పుస్తకం అని తార్మీకరించి తీర్మానించవచ్చును.

ఉదాహరణ 7: $y = -6x + 5$ అని ఇవ్వబడింది మరియు $x = 3$ అని భావించండి y విలువ ఎంత?

సాధన:–

రెండు ఊహా కల్పనలనుండి. $y = -6(3) + 5 = -13$ లభిస్తుంది.

ఉదాహరణ 8: ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AB = 5cm, AB = 7cm అని అనుకోండి (చిత్రం A1.1 చూడండి).

భుజం DC మరియు BCలు కొలతల గురించి మీరు ఏ తీర్మానానికిరాగలరు?

సాధన:–

ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని ఇవ్వబడింది. కావున సమాంతర చతుర్భుజానికి అన్వయమగు అన్ని గుణాలు ABCD కి కూడా అన్వయమగును అని తీర్మానించవచ్చును. కావున, నిర్ధిష్టంగా సమాంతర చతుర్భుజపు అభిముఖ భుజానికి పరస్పరం సమానం అనేటి గుణం ఇక్కడికి సరిపోతుంది. ఇక్కడ AD = 5cm అయితే BC = 5cm అని, తార్కికంగా తీర్మానించవచ్చును అలాగే DC = 7cm అని తార్కికంగా తీర్మానించవచ్చును.

చిత్రం **A1.1**

గమనించండి:–

ఇచ్చిన సందర్భంలో మనకు కావలసిన గుణాన్ని కనిపెట్టి ఇలా ఉపయోగించాలని పై ఉదాహరణంలో చూసివున్నాం.

ఉదాహరణ 9: అన్ని కరణీ సంఖ్యలకు 'p' లకు $\sqrt{p}$ అభాగలబ్ద సంఖ్య మరియు 19423 ఒక అవిభాజ్య అని భావిస్తే, $\sqrt{19423}$ ల గురించి మీ తీర్మానమేమి?

సాధన:– $\sqrt{19423}$ అభాగలబ్దం అని తీర్మానించవచ్చు. పై ఉదాహరణాలలో, ఊహలు సరి లేదా తప్పు అని తెలియకుండుటను గమనించివుండవచ్చు మనం ఊహలను సరి అని భావించి, తరువాత నిగమన తర్క విధానం అనుసరిస్తాము. ఉదాహరణ 9లో మనం 19423 అవిభాజ్యము లేదా కాదా అని పరీక్షించకుండా మన వాదం కోసం ఆ సంఖ్య అవిభాజ్యం అని భాలించాం. దత్త వ్యాఖ్యానం గురించిన తీర్మానానికి రావడానికి నిగమన తర్క విధానం ఇలా ఉపయోగపడుతుందిని ఈ విభాగంలో ప్రముఖంగా వివరించుటకు ప్రయత్నించాను. ఇక్కడ నిజంగా ముఖ్యమైనది ఏమనగా కారణంతెలియజేయు సరైన క్రియ మరియు కారణంతెలియజేయు ఈ క్రియ ఒక ఊహ యొక్క సత్యం లేదా అబద్ధంను ఆధారపడివుండదు. అయిననూ, మనం తప్పు కల్పన / ఊహతో ప్రారంభిస్తే తప్పు తీర్మానానికి రావచ్చును అనేదానిని గమనించవలెను.

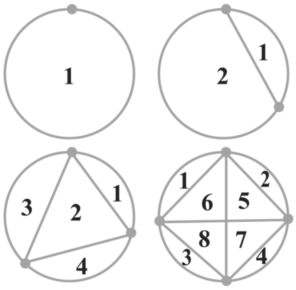
అభ్యాసం A1.2

1. స్త్రీలందరూ చనిపోతారు అంటే మరియు A ఒక స్త్రీ అని భావించబడింది. A గురించి మనం ఏమని తీర్మానించవచ్చును.
2. రెండు భాగలబ్ద సంఖ్యల గుణలబ్ధం భాగలబ్ధ సంఖ్య మరియు a మరియు b లు భాగలబ్ద సంఖ్యలైయుంటే ab గురించి మీ తీర్మానమేమి?
3. అభాగలబ్ధ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణలు అంత్యమొందకుండా, ఆవర్థంకాని సంఖ్యలు మరియు $\sqrt{17}$ అభాగలబ్ధయైతే $\sqrt{17}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ గురించి మీ తీర్మానమేమి?
4. $y = x^2 + 6$ మరియు $x = -1$ అయితే y విలువ గురించి మీ ఏ తీర్మానానికి రాగలరు?
5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అని ఇవ్వబడింది మరియు $\angle B = 80^0$ అయితే సమాంతర చతుర్భుజపు మిగిలిన కోణాల గురించి మీ తీర్మానమేమిట?
6. PQRS ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం మరియు దాని కర్ణాలు పరస్పరం ద్విభాగిస్తుంది. చతుర్భుజం గురించి మీరు ఏ తీర్మానం తీసుకోగలరు?
7. అన్ని అవిభాజ్య 'p' లకు $\sqrt{p}$ అభాగలబ్దం మరియు 3721 అవిభాజ్యం అని భావించబడింది. మీరు $\sqrt{3721}$ అభాగలబ్ధ సంఖ్య అనే తీర్మానానికి రావచ్చునా? మీ తీర్మానం సరిగ్గా నున్నదా? ఎందుకు? లేదా ఎందుకు కాదు?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.4 ఊహలు, ప్రమేయాలు, సాధనలు మరియు గణితశాస్త్ర కారణాలు:

చిత్రం A1.2 ను పరిగణించండి. మొదటి వృత్తం పై ఒక బిందువు కలదు, రెండవ వృత్తం పై రెండు బిందువులు, మూడవదానిపై మూడు, ఇలా కొనసాగింది. ఈ ప్రతి యొక్క ప్రకరణలో అన్ని బిందువులను చేర్చునట్లు రేఖలు గీయబడ్డాయి. ఈ రేఖలు వృత్తాన్ని పరస్పరం వ్యర్థ వలయాలుగా (ఏ ఒక సామాన్య భాగం లేకుండా) విభజిస్తుంది. వీటిని లెక్కించండి. కింద చూపిన విధంగా పట్టికలో నమోదు చేయవచ్చును.



చిత్రం **A1.2**

బిందువుల సంఖ్య	భాగాల సంఖ్య
1	1
2	2
3	5
4	8
5	
6	
7	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు బిందువుల సంఖ్య ఇచ్చినప్పుడు, వలయాల సంఖ్యను ఊహించుటకు మీలో కొందరు సూత్రాన్ని ఆలోచించియుండవచ్చు. 9వ తరగతిలో ఇలాంటి బుద్ధివంత ఊహలను ఊహా ప్రతిజ్ఞ ఊహలు అని పిలువ బడినదానిని జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

ఊహ ప్రతిజ్ఞ ఒక వృత్తం పై 'n' బిందువులను ఇచ్చినప్పుడు రేఖలులాగా సాధ్యమైనన్ని అన్ని బిందువులను చేర్చి పొందదగు పరస్పరం వ్యర్థ వలయాల సంఖ్య 2^{n-1} అయినది అని ఊహించినారని భావిస్తాం.

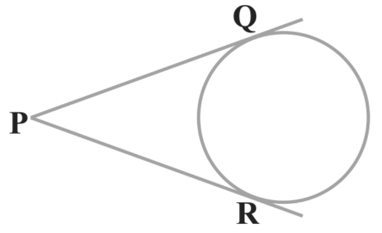
ఇది అత్యంత సూక్ష్మమైన ఊహ అని చూపుతుంది మరియు $n = 5$ అయినపుడు 16 భాగాలు లభిస్తుంది. అనేదానిని పరీక్షించవచ్చును. 5 బిందువులకు సూత్రాన్ని సరిచూసి చేసి బిందువులను 2^{n-1} వలయాలు గలవని నిర్ధారించడం మీకు ఎంత సమజసం. అప్పుడు వలయాల సంఖ్య ఎంత అని అడిగినపుడు, ధీనికి ఎలా ప్రతిక్రియిస్తారు? ఇలాంటి ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వడానికి, అన్ని అనుమానాలకు ఈ ఫలితాంశం సత్యం అని చూపడానికి సాధన అవసరం లేదా 'n' యొక్క ఒక విలువకు ఫలితాలు సరిపోవు, తప్పైన ఒక ప్రతిరోధ ఉదాహరణం ఇవ్వవలసివుంటుంది. నిజంగా మీరు ఓర్పుతో $n = 6$ కు ప్రయత్నిస్తే 31 వలయాలు మరియు $n = 7$ అయితే 57 భాగాలుండడం కనబడుతుంది. కావున $n = 6$ అనునది పై ఊహ ప్రతిరోధ ఉదాహరణం. ఇది ప్రతిరోధ ఉదాహరణకు గల సామర్థ్యాన్ని ప్రదర్శిస్తుంది. ఒక వ్యాఖ్యానాన్ని నిరాకరించుటకు ఒక ప్రతిరోధ ఉదాహరణం వచ్చినా చాలనే విషయాన్ని 9 వ తరగతిలో నిరూపించుటకు చర్చించినదాన్ని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి.

n = 1, 2, 3, 4 మరియు 5 లకు ఫలితాన్ని నిరూపించడానికి బదులుగా, లభించు వలయాల సంఖ్యకు సంబంధించినట్లు సాధన అవసరమని చెప్పినదాన్ని మీరు గమనించివుండవచ్చు. ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను పరిగణిద్దాం. మీరిదివరకే ఈ ఫలితాల గురించి పరిచితులుగానున్నారు. (అధ్యాయం 1లో ఇవ్వబడింది). $1+2+3+\ldots\ldots+n\dfrac{(n+1)}{2}$ న దీని సింధుత్వాన్ని స్థాపించుటకు n = 1, 2, 3 .... ఇలా వివిధ విలువలకు ఫలితాలను పరిశీలిస్తే చాలదు, ఎందుకనగా 'n' యొక్క ఏదైనా ఒక విలువకు ఫలితం తప్పుగా నుండవచ్చు (పై ఉదాహరణంలో $n = 6$ విలువకు ఫలితం తప్పుగానున్నది). మనకు అనుమానాలకు మించిన సత్యాన్ని స్థాపించు సాధన కావలెయును. మీ తరువాత తరగతులలో దీని సాధ్యతను నేర్చుకోగలరు.

ఇప్పుడు చిత్రం A1.3ను పరిగణిద్దాం. ఇక్కడ PQ మరియు PRలు 'P' బిందువునుండి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శాలు (tangents) PQ = PR Aని మీరు సాధించియున్నారు. (ప్రమేయం 10.2) ఇలాంటి అనేక చిత్రాలను నిర్మించి స్పర్శలు కొలిచి, మీలో మీరే ఆ ఫలితాలు ప్రతి ప్రకరణలో సరిగ్గానున్నది అని పరిశీలించినను మీకు తృప్తికరంగా వుండలేదు.

సాధన దేనిని పొందివున్నదో మీకు జ్ఞాపకంవున్నదా? ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలు మరియు ప్రమేయాలను (theorem) మరియు వాటి సాధనలు ఇలా రచించబడ్డాయి అని విశ్లేషిస్తూ మనం అర్థం చేసుకొనే విధానాన్ని ఉత్తమ పరుచుదాం.

ఇప్పుడు మనం నేరుగా లేదా తార్కిక విధానంతో సాధన రచించడానికి ప్రారంభిద్దాం ఈ విధానంలో అనేక వ్యాఖ్యానాలు గలవు. ప్రతియొక్కటి వెనుకటి వ్యాఖ్యానాలను ఆధారిపడివున్నాయి. ప్రతి వ్యాఖ్యానం తార్కికంగా సరిగ్గావుంటే ఆది తార్కికంగా సరైన తీర్మానం.



చిత్రం **A1.3**

ఉదాహరణ 10: రెండు (అకరణీయ) మొత్తం. అకరణీయ సంఖ్య.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:–

క్రమ సంఖ్య	వ్యాఖ్యానాలు	విశ్లేషణ
1.	x మరియు y అకరణీయ సంఖ్యలుగావుండనీ యండి.	ఫలితాలు అకరణీయ సంఖ్యల గురించి యుండుటవల్ల అకరణీయ సంఖ్యలైన x మరియు y నుండి ప్రారంబిద్దాం.
2.	$x=\dfrac{m}{n}, n \neq o$ మరియు $y=\dfrac{p}{q}, q \neq o$ అయివుండని ఇచ్చట m, n, p మరియు q పూర్ణాంకాలు.	అకరణీయ సంఖ్యల వ్యాఖ్యానాన్ని అన్వయించండి.

3.	కావున, $x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	ఫలితం అకరణీయ సంఖ్య మొత్తం గురించి తెలుపుతుంది కావున మనం $x+y$ గమనిద్దాం.
4.	పూర్ణాంకాల గుణంవల్ల $mq+np$ మరియు nqలు పూర్ణాంకాలు అయివున్న దానిని గమనిస్తాం.	ఇదివరకే తెలిసియున్న పూర్ణాంకాల గుణాన్ని ఉపయోగించడంవల్ల.
5.	$n \neq 0, q \neq 0$, అయినందువల్ల $n \neq 0$	ఇది వరకే తెలిసియున్న పూర్ణాంకాల గుణాన్ని ఉపయోగించడంవల్ల.
6.	కావున, $x+y=\frac{mq+np}{nq}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.	భాగలబ్ధ సంఖ్యల (అకరణీయ సంఖ్యల) వ్యాఖ్యానాన్ని ఉపయోగించడంవల్ల.

గమనించండి:– ఈ సాధనలో ప్రతి వ్యాఖ్యానం ఈ వెనుక స్థాపించబడ్డ సత్య సంగతి లేదా వ్యాఖ్యానాలను ఆధారపడ్డాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 11: 3 కంటె పెద్దదైన ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య $6k+1$ లేదా $6k+5$ రూపంలోవుంటుంది. ఇచ్చట k ఒక పూర్ణాంకం.

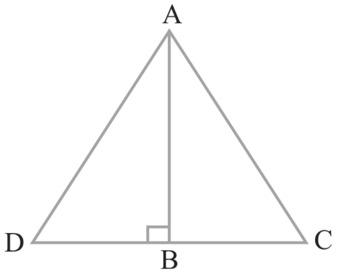
సాధన:–

క్రమ సంఖ్య	వ్యాఖ్యానాలు	విశ్లేషణ
1.	p 3 కంటే పెద్దదైన ప్రధాన సంఖ్య అయివుండనీ యండి.	ఫలితాలు 3 కంటే పెద్దదైన సంఖ్యపై ఆధారపడియుండుటవల్ల అలాంటి సంఖ్యనుండి ప్రారంబిద్దాం.
2.	p ను 6నుండి భాగిస్తే 'p' $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ లేదా $6k+5$ రూపంలో వుంటుందని కనిపెట్టవచ్చును మరియు k ఒక పూర్ణాంకం.	యూక్లిడ్ భాగాహారం అనుప్రయేయంనుండి.
3.	ఆయితే $6k = 2\ (3\ k)$ $6k+2 = 2\ (3k+1)$ $6k+4 = 2\ (3k+2)$ మరియు $6k+3 = 3\ (2k+1)$ కావున ఇవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు.	దత్త p ప్రధాన సంఖ్య అగుటకు శేషాలను విశ్లేషిద్దాం.
4.	కావున p $6k+1$ లేదా $6k+5$ రూపంలో వుండునట్లు చేయబడింది. ఇచ్చట k ఒక పూర్ణాంకం	వేరె ఎంపికలను తొలగించి ఈ తీర్మానానికి వచ్చాము.

గమనించండి:– పై ఉదాహరణలో వివిధ ఎంపికలను తొలగించి తీర్మానానికి వచ్చాయి. కొన్నిసార్లు ఈ విధ్యాన్ని శూన్యీకరణ విధానంతో సాధన అని సూచించబడింది.

సిద్ధాంతం (Theorem) A1.1 [పైథాగరస్ సిద్దాంత విలోమం]

ఒక త్రిభుజంలో భుజంపైన గల వర్గం మిగిలిన రెండు భుజాల పైన గల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైతే మొదటి భుజం యొక్క అభిముఖ కోణం లంబకోణం అయివుంటుంది.



చిత్రం **A1.4**

సాధన:–

క్రమ సంఖ్య	వ్యాఖ్యానాలు	విశ్లేషణ
1.	ΔABC లో $AC^2 = AB^2 BC^2$ ఊహను తృప్తి పరుస్తుంది అని భావిద్దాం.	మనం ఒక త్రిభుజం వ్యాఖ్యానాన్ని సాధించ వలయును కావున దీనిని తీసుకొని ప్రారంబిద్దాం.
2.	$BD = BC$ అవునట్లు AB కి లంబ రేఖ BD గీయండి మరియు A ని D కు కలపండి.	సాధారణంగా సిద్దాంతాన్ని సాధించటంకోసం తార్కికం చేయకుండా తీసుకోవలసిన దశ.
3.	నిర్మాణంవల్ల $\Delta ABCD$ లంబకోణం త్రిభుజం మరియు పైథాగరస్ సిద్దాంతం నుండి $AD^2 = AB^2 + BD^2$ అయినది.	ఇదివరకే సాధించిన పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిస్తాం.
4.	నిర్మాణంతో $BD = BC$ కావున $AD^2 = AB^2 + BC^2$	తార్కిక తీర్మానం.
5.	కావున $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ఊహను ఉపయోగించండి మరియు వెనుకటి ప్రకటనవల్ల.
6.	AC మరియు AD ధనాత్మకం అయినందువల్ల $AC = AD$ అయినది.	సంఖ్యల గుణంవల్ల.
7.	ఇప్పుడే $AC = AD$ అని చూపబడింది. మరియు $BC = BD$ నిర్మాణంలో మరియు AB సాధారణంగావున్నది. కావున భుభుభు సిద్ధాంతంలో $\Delta ABC \cong ABD$	తెలిసిన సిద్ధాంతంనుండి.
8.	$\Delta ABC \cong ABD$ అయినందువల్ల $\angle ABC = \angle ABD$ ఇది లంబకోణం	తార్మిక తీర్మానం ఈ వెనుక స్తాపించిన సత్య సంగతి ఆధారం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి:–ఈ పై అన్ని వ్యాఖ్యానాలు, ఒకదానికొకటి అమర్చినట్లువున్న క్రమమైన దశలనుండి సాధించబడింది. ఈ దశలలో గల క్రమం చాలా ముఖ్యం. సాధనలోని ప్రతి దశ దాని వెనుకటి దశలు మరియు వెనుక తెలుపబడిన గుణలక్షణాలను ఆధారపడివున్నది. (సిద్ధాంతం 6.9ను చూడండి).

అభ్యాసం A1.3

ఈ కింది ప్రతి ప్రశ్నలో ఒక ప్రకటన సాధించుటకు చెప్పబడింది. సాధనలోని అన్ని దశలను పట్టీ చేయండి. ప్రతి దశకూ కారణం ఇవ్వండి.

1. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం 4 నుండి భాగించ బడుతుంది అని సాధించండి.
2. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటి వర్గాల మొత్తంను కనిపెట్టి ఫలితానికి 6ను కలపండి. ఇప్పుడు లభించిన సంఖ్య 8 నుండి భాగింపబడుతుందని సాధించండి.
3. $p \geq 5$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య $p^2 + 2$ ఇది 3 నుండి భాగింపబడుతుందని చూపండి. (సూచన: ఉదాహరణం 11ను ఉపయోగించండి).
4. x మరియు y అకరణీయ సంఖ్యలైయుండని. xy అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.
5. a మరియు b ధనపూర్ణాంకలైనప్పుడు, $a = bq + r,\ 0 \leq r < b,\ q$ ఒక పూర్ణసంఖ్య గసాభా (a, b) = గసాబా (b, r) అని సాధించండి.

   (సూచన: HCF $(b, r) = h$ అయివుండని అప్పుడు $b = k,\ h$ గ.సా.భా మరియు $r = k_2h$ ఇచ్చుట k_1 మరియు k_2 సంప అవిభాజ్యాలు (coprime).
6. Δ ABC మరియు BC భుజానికి సమాంతరంగానున్న రేఖ AB మరియు AC ను / వరుసగా D మరియు E బిందువులతో ఖండించబడింది. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అని సాధించండి.

A1.5 ఒక వ్యాఖ్యానం యొక్క నిరాకరణ

ఈ విభాగంలో ఒక ప్రకటన యొక్క నిరాకరణంగా చేయడం అనగా నేమి అని చర్చిస్తాం. ఈ పరికల్పనలకు సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి కొన్ని సంకేతాలను ఈ విభాగం ప్రారంభించడానికి మొదలు పరిచయం చేసుకోవడానికి ఇష్టపడతాను. ప్రారంభంలో ప్రతి ఒక్క వ్యాఖ్యానాన్ని ఒక అంశంగా చూద్దాం మరియు దానిని పేర్కొంటాం. ఉదాహరణకు ''2005 సెప్టెంబర్ 1వ ఢిల్లీలో వర్షం పడింది''. వ్యాఖ్యానాన్ని p సంకేతంతో సూచిస్తాం. దీనిని ఇలా కూడా రాయవచ్చును.

p: 2005 సెప్టెంబర్ 1వ రోజు ఢిల్లీలో వర్షం పడింది. దీని ప్రకారం, వీటిని రాద్దాం.

q: ఉపాధ్యాయులందరూ మహిళలు

r: మైక్స్ కుక్కకు నలుపు తోకవుంది

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

s: $2 + 2 = 4$

t: ABC సమబాహు త్రిభుజం.

ఈ సంకేలపు విధానం వ్యాఖ్యానాలు లక్షణాలను చర్చించుటకు మరియు వాటిని ఒకటిగా చేర్చడానికి ఎలా సహాయకారిగా ఉన్నదో చూద్దాం.

ప్రారంభంలో మనం సరళ వ్యాఖ్యానాలతో కార్యం నిర్వహిస్తాం తరువాత మనం సంయుక్త వ్యాఖ్యానాలు వైపు వెళ్దాం.

దత్త వ్యాఖ్యానాల నుండి క్రొత్త వ్యాఖ్యానాలు చేయడానికి ఈ పట్టికను పరిగణించండి.

మూల ప్రకటన		క్రొత్త ప్రకటన	
p:	2005 సెప్టెంబర్ 1వ తేది ఢిల్లీలో వర్షంపడింది.	$\sim p$:	2005 సెప్టెంబర్ 1వ తేది ఢిల్లీలో వర్షం పడిందనేది అబద్ధం.
q:	ఉపాధ్యాయులందరు మహిళలు	$\sim q$:	ఉపాధ్యాయులందరూ మహిళలు అనునది అబద్ధం.
r:	మైక్స్ కుక్కకు నలుపు తోకవుంది	$\sim r$:	మైక్స్ కుక్కకునల్ల తోకవుంది అనడం అబద్ధం.
s:	$2 + 2 = 4$	$\sim s$:	$2 + 2 = 4$ ఇది అబద్ధం.
t:	ABC సమబాహు త్రిభుజం	$\sim t$:	ABC సమబాహు త్రిభుజం అనునది అబద్ధం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పట్టికలో గల ప్రతియొక్క వ్యాఖ్యానం అనురూపమైన మూల ప్రకటనలు నిరాకరణం. అంటే $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ మరియు $\sim t$ ఇవి వరుసగా p, q, r, s మరియు t ల నిరాకరణాలు. ఇక్కడ $\sim p$ దీనిని p కాదు అని చదువుదాం $\sim p$ ప్రకటన, ప్రకటన p యొక్క సమర్థతను నిరాకరించును. సాధారణంగా మనం మాట్లాడేటప్పుడు $\sim p$ ను ఇలా చెప్పెదము. ‘‘2005 సెప్టెంబర్ 1 వ తేది ఢిల్లీలో వర్షంపడలేదు. అయిననూ ఇలా చేసేటప్పుడు మనం జాగ్రత్తగా వుండాలి. ఒక ప్రకటన నిరాకరణను పొందటానికి ఒక వాక్యంలో సరైన స్థానంలో ‘లేదు’ అను పదం ఉపయోగించడంవలన పొందవచ్చునని మీరు ఆలోచించవచ్చును. ఇది p వ్యాఖ్యానానికి సరితూగుతుంది. అయితే ఇది కష్టమనిపించును. ‘అన్ని’ అనే పదంనుండి ప్రారంభమగు వ్యాఖ్యానాలలో ఉదాహరణకు, ప్రకటన q = ఉపాధ్యాయులందరు మహిళలు అనునది అబద్ధం. ఈ వ్యాఖ్యానం ‘‘ఉపాధ్యాయులలో కొందరు పురుషులువున్నారు’’ అను వ్యాఖ్యానలాగానే వుంది. ఇప్పుడు మనం లేదు అనే పదాన్ని qలో చేర్చించి క్రొత్త వ్యాఖ్యానాన్ని పొందుదాం. ‘‘ఉపాధ్యాయులందు మహిళలు కాదు’’ లేదా ఇలా కూడా పొందవచ్చు. ‘ఉపాధ్యాయులందరూ మహిళలు కాదు’’ మొదటి వ్యాఖ్యానం ప్రజలలో

కంగారును ఏర్పరుస్తుంది. ఇది ఉపాధ్యాయులందరు పురుషులు' అని సూచిస్తుంది. (అన్నీ అనే పదానికి నొక్కి చెప్పినపుడు) ఇది *'q'* యొక్క నిరాకరణకాదు. అయిననూ రెండవ వ్యాఖ్యానం $\sim q$ యొక్క అర్థాన్ని ఇస్తుంది. అంటే అచ్చట కనీసం ఒక్కరైననూ మహిళలుకాని ఉపాధ్యాయులున్నారు. కావున వ్యాఖ్యానం నిరాకరణ రాయునప్పుడు జాగ్రత్తగా వున్నండి.

అయితే, సరైన నిరాకరణను పొందాము, అని మనం ఎలా నిర్ధారించవచ్చును? ఈ కింది నిబంధనను ఉపయోగించెదము.

p ఒక వ్యాఖ్యానంగాఉండనీయండి. మరియు $\sim p$ దాని నిరాకరణ. అప్పుడు p సత్యమైనప్పుడల్లా $\sim p$ అబద్ధం మరియు p అబద్ధమైనప్పుడల్లా $\sim p$ సత్యం.

ఉదాహరణకు మైక్స్ కుక్కతోక నలుపు అనునది సత్యమైతే అప్పుడు మైక్స్ కుక్కకు నలుపు తోక లేదు అనునది అబద్ధం. మైక్స్ కుక్కకు నలుపు తోక వుంది అనునది అబద్ధమైతే మైక్స్‌కుక్కకు నలుపు తోక కాలేదు అనునది నిజం.

దీనిలాగే, S మరియు t ప్రకటనలు నిరాకరరాలు.

$s : 2 + 2 = 4$ నిరాకర $\sim s : 2 + 2 \neq 4$

t : ΔABC సమబాహు త్రిభుజం. నిరాకరం $\sim t$: ABC సమబాహు త్రిభుజం కాదు.

ఇప్పుడు $\sim(\sim s)$ అనగానేమి? అది $2 + 2 = 4$ అయివుండవచ్చు. అంటే s మరియు $\sim(\sim t)$ అనగానేమి? ఇది ABC సమబాహు త్రిభుజం అని చెప్పబడింది. అంటే నిజంగా ఏ వ్యాఖ్యానం p కు $\sim(\sim p)p$ అయినది.

ఉదాహరణ 12: ఈ కింది వ్యాఖ్యానాల నిరాకరణలను నిరూపించండి.

(i) మైక్స్ కుక్కకు నలుపు తోక లేదు.

(ii) అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు.

(iii) $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు.

(v) ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులు కాదు.

(vi) కొన్ని గుర్రాలు గోధుమరంగు కాదు.

(vii) $x^2 = 1$ అగునట్లు x అను ఏ వాస్తవసంఖ్య లేదు.

సాధన:–

(i) మైక్స్‌కుక్కకు నలుపు రంగుతోక లేదు అనునది తప్పు అంటే మైక్స్ కుక్కకు నలుపు రంగు తోక కలదు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు అనునది తప్పు అంటే కొన్ని (ఏదైనా ఒకటి) కరణీయ సంఖ్య వాస్తవ సంఖ్య కాదు. దీనిని ఇలా కూడా రాయవచ్చును. అన్ని కరణీయసంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

(iii) $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అనునది తప్పుగావుంది అంటే $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య కాదు.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు అనునది తప్పు అంటే ఏ అకరణీయ సంఖ్య పూర్ణాంకం కాదు.

(v) ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులుకారు అనునది తప్పు అంటే ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులు.

(vi) కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగు కాదు అనునది తప్పు అంటే కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగులో కలవు.

(vii) x^2 =-1 అగునట్లు x అను ఏ వాస్తవ సంఖ్య లేదు అనునది తప్పు అంటే x^2 =-1 అగునట్లు కనీసం ఒక్కటైన వాస్తవ సంఖ్యగలదు.

సాధన:–

(i) మైక్స్‌కుక్కకు నలుపు రంగు తోక లేదు అనునది తప్పు అంటే మైక్స్ కుక్కకు నలుపు రంగు తోకకలదు.

(ii) అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు అనునది తప్పు అంటే కొన్ని (ఏదైనా ఒకటి) కరణీయ సంఖ్య వాస్తవ సంఖ్య కాదు. దీనిని ఇలా కూడా రాయవచ్చును.

(iii) $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అనునది తప్పుగా వుంది అంటే $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య కాదు.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు అనునది తప్పు అంటే ఏ అకరణీయ సంఖ్య పూర్ణాంకం కాదు.

(v) ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులుకారు అనునది తప్పు అంటే ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులు.

(vi) కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగు కాదు అనునది తప్పు అంటే కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగులో కలవు.

(vii) x^2 =-1 అగునట్లు x అను ఏ వాస్తవ సంఖ్య లేదు అనునది తప్పు ఆంటే x^2 =-1 అగునట్లు కనీసం బక్కటైన వాస్తవ సంఖ్యగలదు.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

గమనించండి:–

పై చర్చనుండి మనం ఈ కింది విధంగా ఒక నిరాకరనను పొందటానికి కార్యనిబంధాన్ని రూపించవచ్చు.

(i) మొదట ప్రకటనను 'లేదు' అనుదానితో రాయండి.

(ii) విశేషంగా 'అన్నీ' మరియు కొన్న పదాలను కల్గియున్న వ్యాఖ్యానాలను మార్పు చేయు సందర్భంలో (అనుమానంవుంటే సరైన మార్పులు చేయండి).

అభ్యాసం A1.4

I. ఈ కింది వ్యాఖ్యానాల నిరాకరణలను నిరూపించండి.

(i) మానవులందరూ చనిపోతారు.

(ii) l రేఖ ఇది 'm' రేఖకు సమాంతరంగావుంది.

(iii) ఈ అధ్యాయం అనేక అభ్యాసాలను కల్గియున్నది.

(iv) అన్ని పూర్ణాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలు.

(v) కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు.

(vi) ఏ విద్యార్థి సోమరి కాదు.

(vii) కొన్ని పిల్లులు నల్లగా లేవు.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ అయివుండినట్లు, 'x' అను ఎలాంటి వాస్తవ సంఖ్య లేదు.

(ix) 2, ధన పూరాంకణం 'a' ని భాగింపబడుతుంది.

(x) a మరియు b పూర్ణాంకాలు కూడ ప్రధాన సంఖ్యలు.

II. ఈ కింది ప్రతి ప్రశ్నలో రెండు వ్యాఖ్యాలు ఉన్నాయి. రెండవ ప్రకటన మొదటి ప్రకటన నిరాకరణ అయినదా తెలపండి.

(i) ముమ్తాజ్‌కు ఆకలిగావుంది ముమ్తాజ్‌కు ఆకలిగా లేదు.

(ii) కొన్ని పిల్లులు నల్లగావున్నాయి కొన్ని పిల్లులు గోధుమ రంగులోవున్నాయి.

(iii) ఏనుగులన్నీ పెద్దప్రమాణంలో వున్నాయి. ఒక ఏనుగు పెద్ద ప్రమాణంలోవున్నది.

(iv) అన్ని అగ్నిశామక వాహనాలు ఎరుపు రంగులో గలవు. అన్ని అగ్నిమాపక వాహనాలు ఎరుపు రంగులో లేవు.

(v) ఏ మానవుడు పశుపుకాదు. కొంతమంది మానవులు పశువులు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.6 ఒక వ్యాఖ్యానం యొక్క విలోమం

మనం ఇప్పుడు ఒక ప్రకటన విలోమ కల్పనాన్ని పరీక్షించనున్నాం. దీనికోపం మనకు ఒక సంయుక్త వ్యాఖ్యాన కల్పన ఉండాలి. అంటే వ్యాఖ్యాన ఒకటి లేదా ఒకటికంటే ఎక్కువ 'సరళ' ప్రకటనల సంయోజనం ఎలావుండాలి. సంయుక్త వ్యాఖ్యానాలను నిర్మించుటకు అనేక విధానాలు గలవు. అయితే మనం ఇప్పుడు 'ఇలావుంటే' మరియు 'అప్పుడు' అను పదాల ఉపయోగంవల్ల సరళ ప్రకటనలను కూర్చి సంయుక్త ప్రకటన పొందటానికి గమనిద్దాం. ఉదాహరణకు 'వర్షం పడుతుంటే అప్పుడు సైకిల్‌లో ప్రయాణించడం కష్టంగావుంటుంది'. ఈ ప్రకటన రెండు ప్రకటనల నుండి చేయబడింది.

p: వర్షం పడుతున్నది.

q: సైకిల్‌లో ప్రయాణించడం కష్టమవుతుంది.

దీనికి ముందు ఉపయోగించిన సంకేతాలను ఉపయోగించి ఇలా చెప్పవచ్చును. p వుంటే అప్పుడు q మనం 'p' 'q'ను సూచిస్తుంది అని కూడ చెప్పవచ్చును. దీనిని సాంకేతికంగా $p \Rightarrow q$ అని సూచించబడుతుంది. ఇప్పుడు ఒక ప్రకటన ''నీటి తొట్టి నల్లగావుంటే అది త్రాగునీరును పొందియున్నది. అని భావించుకోండి. ఇది $p \Rightarrow q$ రూపంలో కలదు. ఇచ్చట ఊహ p (నీటితొట్టి నల్లగా వున్నది) మరియు తీర్మానం q (ఈ తొట్టిలో త్రాగునీరువుంది). ఇప్పుడు ఊహ మరియు తీర్మానాలను తారుమారు చేసినపుడు ఏమి లభిస్తుంది? $q \rightarrow p$ లభిస్తుంది. అంటే తొట్టిలో త్రాగు నీరు ఉంటే, అప్పుడు తొట్టి నల్లగా వుండవలెను. ఈ ప్రకటనను $p \Rightarrow q$ ప్రకటన యొక్క విలోమం అంటాం. సాధారణంగా $p \Rightarrow q$ ప్రకటనపు విలోమం ఇక్కడ $q \Rightarrow p$ మరియు q ప్రకటనలు. $p \Rightarrow q$ మరియు $q \Rightarrow p$ రెండూ పరస్పరం విలోమమైన దానిని గమనించండి.

ఉదాహరణం 13: ఈ కింది వ్యాఖ్యానాల విలోమాలను రాయండి.

(i) జమీళా సైకిల్‌లో ప్రయాణించిన రోజు ఆగస్ట్ 17 ఆదివారమైయుంటుంది.

(ii) ఆగస్ట్ 17 ఆదివారమైతే, అప్పుడు జమీళా సైకిల్‌లో ప్రయాణిస్తుంది.

(iii) పౌలిన్‌కు కోపం వస్తే, అప్పుడు ఆమె ముఖం ఎరుపుఅవుతుంది.

(iv) ఒక వ్యక్తి విద్యలో పదవి పొందివుంటే అప్పుడు ఆమెకు బోధించడానికి అనుమతి ఇవ్వబడును.

(v) ఒక వ్యక్తికి వైరల్ సంక్రమణం అయివుంటే, అప్పుడు అతని శరీర ఉష్ణోగ్రత ఎక్కువగానుండును.

(vi) అహ్మద్ ముంబయిలో వుంటే అప్పుడు అతను భారతదేశంలో వున్నాడు.

(vii) ΔABC సమబాహు త్రిభుజమైతే అప్పుడు దాని అంతరకోణాలు సమానంఈ

(viii) x కరణీయ సంఖ్య అయితే అప్పుడు x అంత్యంకాని పునరావర్తనకాని దశాంశ విస్తరణ పొందియుటుంది.

(ix) $[x - a]$, $p(x)$ యొక్క బహుపది యొక్క కారకం అయితే అప్పుడు $p(a) = 0$

సాధన:–

పైనతెలిపిన ప్రతియొక్క ప్రకటన $p \Rightarrow q$ రూపంలోవున్నది.

కావున దాని విలోమాన్ని కనిపెట్టడానికి మొదట p మరియు q ను కనిపెట్టి తరువాత $q \Rightarrow p$ రాయండి

(i) p: జమీళా సైకిల్‌లో ప్రయాణిస్తుంది మరియు q ఆగస్ట్ 17 అదివారం. కావున దీని విలోమం: ఆగస్ట్ 17 ఆదివారం. కావున దీని విలోమం: ఆగస్ట్ 17 ఆదివారమైతే అప్పుడు జమీళా సైకిల్‌లో వుంటుంది.

(ii) ఈ ప్రకటన (i) యొక్క విలోమం: కావున ఈ ప్రకటన విలోమం: (i) లో ఇచ్చిన ప్రకటన.

(iii) పౌలిన్ యొక్క ముఖం ఎర్రగావుంటే అప్పుడు ఆమె కోపానికి గురేతుంది.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) ఒక వ్యక్తిని బోధన చేయడానికి అనుమతి నిస్తే అప్పుడు ఆ వ్యక్తి విద్యలో పదవిని పొందియుంటారు.

(v) ఒక వ్యక్తి ఉష్ణోగ్రత ఎక్కువైంది, అంటే అప్పుడు అతనికి వైరస్ సంక్రమణం అయిందని అర్థం.

(vi) అహ్మద్ భారతదేశంలో వుంటే, అప్పుడు అతడు ముంబాయిలో వున్నాడు.

(v) ΔABC త్రిభుజపు అన్ని అంతర్కోణాలు సమానంవుంటే అప్పుడది సమబాహు త్రిభుజం.

(vii) x అంత్యమొందని ఆవర్తం కాని దశాంశ విస్తరణ పొందియున్నచో అప్పుడు x ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(viii) $p(a) = 0$ అయితే, $x - a$ $p(x)$ యొక్క బహుపది కారకం.

పై ప్రకటనల సరి లేదా తప్పు అనేదానిని పరిగణించకుండా, అలాగే ప్రకటన యొక్క విలోమాన్ని రాసియున్నామనే దానిని గమనించండి. ఉదాహరణకు ఈ ప్రకటనను పరిగణిచండి. అహ్మద్ ముంబాయిలో వుంటే అప్పుడు అతను భారతదేశంలో ఉన్నాడు. ఈ ప్రకటన నిజం. ఇప్పుడు విలోమాన్ని పరిగణించండి. అహ్మద్ భారతదేశంలోవుంటే అప్పుడు అతను ముంబయిలోవున్నాడు. ఇది ఎల్లప్పుడూ నిజంగావుండాలని లేదు. అతడు భారతదేసపు ఏ భాగంలో నైనా వుండవచ్చు.

గణితశాస్త్రంలో ప్రత్యేకంగా రేఖాగణితంలో, $p \Rightarrow q$ సత్యమైనట్లు కావలసిన అనేక నిర్బంధనాలను చూసెదము. మరియు దాని విలోమం అనగా $q \Rightarrow p$ సత్యము లేదా అనేదానిని మీరు నిర్ధారించవలెను.

ఉదాహరణ 14: ఈ కింది ప్రకటనల విలోమాలను నిరూపించండి. ప్రతి సందర్భంలోను అది సత్యం లేదా అబద్ధం అనేదానిని నిర్ధారించండి.

(i) 'n' స పూర్ణాంకమైతే, $2n + 1$ బేసి పూర్ణాంకం.

(ii) ఒక వాస్తవ సంఖ్య దశామాంశ విస్తరణ అంత్యమొందుచున్నచో అప్పుడు సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య.

(iii) ఒక ఖండరేఖ సమాంతర సరళ రేఖలను ఖండిస్తే ప్రతియొక్క జత అనురూపకోణాలు సమానం.

(iv) చతుర్భుజపు అభిముఖ భుజాలు సమానంగావుంటే ఆ చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం.

(v) రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగావుంటే అనురూప కోణాలు (సమాన కోణాలు) సమానంగావుంటాయి.

సాధన:–

(i) విలోమం $2n + 1$ చేసి పూర్ణాంకమైతే అప్పడు n సరిపూర్ణాంకం. ఇది తప్పైన ప్రకటన. (ఉదాహరణకు: $15 = 2(1) + 1$, మరియు 7 బేసి సంఖ్య)

(ii) వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అయితే, దాని దశాంశ విస్తరణ అంత్యమొందుతుంది. ఇది విలోమం. ఈ ప్రకటన తప్పుగానున్నది ఎందుకనగా అకరణీయ సంఖ్యలు అంత్యమొందని మరియు పునరావర్తన దశమాంశ విస్తరణలను పొందియుండవచ్చును.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) విలోమం, ఒక ఖండరేఖ ఒక జత అనురూపకోణాలు సమానంగావుండునట్లు రెండు సరళరేఖలను ఖండిస్తే, ఆ సరళ రేఖలు సమాంతరంగావుంటాయి. 9 వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలో గల స్వయంసిద్ధ (Axim) 3.4నుండి ఈ ప్రకటన సత్యం అని భావించబడింది.

(iv) చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజమైతే, ప్రతిజత అభిముఖ భుజాలు సమానంగా వుంటాయి. అనునది విలోమం. ఇది సత్యం. (సిద్ధాంతం 7.1 తరగతి 9).

(v) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగావుంటే అప్పుడవి సర్వసమానంగా వుంటాయి. ఇది విలోమం. ఈ ప్రకటన తప్పు. సరైన ప్రతిరోధ ఉదాహరణాలను కనిపెట్టడానికి మీ ప్రయత్నానికి వదిలిపెట్టబడింది.

అభ్యాసం A1.5

1. ఈ కింది వ్యాఖ్యానాలకు విలోమాలు రాయండి.

   (i) టోక్యోలో ఉష్ణోగ్రత ఎక్కువగావుంటే. శరణ్ ఎక్కువగా చెమటలు పట్టుతాయి.

   (ii) శాలినికి ఆకలైతే, అప్పుడు వారి కడుపు గుర్రుపెట్టుతుంది.

   (iii) జస్వంత్‌కు విద్యార్థివేతనం లభించియుంటే, అప్పుడు డిగ్రీ పొందవచ్చు.

   (iv) ఒక మొక్క పూలను పొందియుంటే. అది సజీవంగా ఉంది.

   (v) క జంతువు పిల్లి అయితే, దానికి తోకవుంటుంది.

2. ఈ కింది వ్యాఖ్యానాల విలోమాలు రాయండి. ప్రతి సందర్భంలో గల విలోమం సరి లేదా తప్పా నిర్ధారించండి.

   (i) ABC సమద్విబాహు త్రిభుజమైతే పాద కోణాలు సమానం.

   (ii) ఒక పూర్ణాంకం బేసి సంఖ్య అయితే, దాని వర్గం కూడా బేసి పూర్ణాంకం.

   (iii) $x^2 = 1$ అయితే $x = 1$ అయింది.

   (iv) ABCD సమాంతర చతుర్భుజమైతే AC మరియు BD పరస్పరం ద్విఖండనం అవుతుంది.

   (v) a, b మరియు c లు పూర్ణసంఖ్యలయినచో, అప్పుడు $a + (b + c) = (a + b) + c$ అవుతుంది.

   (vi) x మరియు y బేసి సంఖ్యలయినచో, $x + y$ ఒక సరి సంఖ్య.

   (vii) సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలు వృత్తానికి పైన ఉన్నచో, అది దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.7 వైరుధ్యంతో నిరూపణ

ఇప్పటివరకు గల ఉదాహరణలన్నింటిలో మనం పరోక్ష వాదనలతోపాటు ఫలితాల సత్యాంశాన్ని సాధించాం ఇప్పుడు మనం ''పరోక్షవాదాల''తో నిర్దిష్టంగా గణితంలోని ఒక సమర్థ సాధనమైన వైరుధ్యంతో నిరూపణ గురించి అన్వేషించబోతున్నాం. మనం ఇదివరకే ఈ విధానాన్ని అధ్యాయం–8లో చాలా సంఖ్యలు అహేతుకతను మరియు ఇతర కొన్ని సిద్ధాంతాలు సాధించడానికి ఉపయోగించాం. ఇప్పుడు ఇక్కడ చాలా ఉదాహరణలను ఉపయోగించి ఈ కల్పనను దృష్టీకరిద్దాం.

కొనసాగు మరియు వైర్యుధ్యత అనాగానేమో వివరిద్దాం. గణితంలో వ్యాఖ్యానం p నిజమైయుండి రుణాత్మకత $\sim p$ కూడా నిజంగా ఉన్నచో అలాంటి సందర్భాలలో వైరుధ్యం ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు,

$p : x = \dfrac{a}{b}$ ఇందులో a మరియు b కరణీయ సంఖ్యలు q: a మరియు b లు రెండు 2తో భాగించబడుతాయి.

p అనునది నిజం అని భావించి, q అనునది నిజంగా సాధించడానికి మనం ప్రయత్నించినచో, మనం వైరుధ్యానికి వచ్చినట్లు అవుతుంది. ఎందుకనగా q అనునది $\sim p$ అనునది సత్యమని సూచిస్తుంది. మీకు గుర్తున్నచో, ఖచ్చితమైన అది మనం $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని సాధించడానికి ప్రయత్నించినప్పుడు సంబంధించిన ఘటన లాగనే ఉంటుంది. (అధ్యాయం 8 చూడండి).

వైరుధ్యంతో నిరూపణ ఈ విధానం ఎలా పనిచేస్తుంది? ఒక నిర్దిష్ట ఉదాహరణతో దీనిని చూద్దాం. ఈ విధంగా వ్యాఖ్యానాలను ఇచ్చినవి అని భావించుకోండి.

మహిళలందరూ మరణిస్తారు. A ఒక మహిళ A మరణిస్తుందని సాధించండి.

ఇది చాలా సులభమైన ఉదాహరణలా కనిపించినప్పటికీ, మనం దీనిని వైరుధ్యంతో సాధించడం ఎలాగో చూద్దాం.

- వ్యాఖ్యానం p యొక్క సత్యాంశాన్ని సాధించాలని భావిద్దాం (ఇందులో p: A అనునది మరణిస్తుందనేది నిజమని చూపించాలి).
- అందువలన, ఈ వ్యాఖ్యానం సత్యం / నిజం కాదని భావించి, ప్రారంభిద్దాం. ఈ వ్యాఖ్యానం యొక్క రుణాత్మకత సత్యమనిభావిద్దాం. (అనగా A అనునది మరణించదు)
- తరువాత p యొక్క రుణాత్మకత యొక్క సత్యాంశాన్ని ఆధారపడిన, సరళీకృత నిగమన తర్కాలతో మనం కొనసాగుతాం. A అనునది మరణించనందున, దీనికి ప్రతిరోధక ఉదాహరణ అగు వ్యాఖ్యానం ''మహిళందరూ మరణిస్తారు'' అని ఉంది. అందువలన మహిళలందరు మరణిస్తారనేది అబద్ధం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- ఇది వైరుధ్యతకు దారికల్పిస్తుంది. ఈ వైరుధ్యానికి కారణం మన తప్పుడు ఊహ p అనునది సత్యం కాదని భావించడం (మహిళలందరు మరణిస్తారు మరియు దీని రుణాత్మకత మహిళందరు మరణించరు. ఈ రెండు వ్యాఖ్యానాలు ఒకే సమయంలో సత్యం అయినందువలన వైరుధ్యత ఏర్పడింది. A అనునది మరణించదని మన ఊహవలన ఈ వైరుధ్యత ఏర్పడింది).
- అందువలన మన ఊహ తప్పు అనగా p అనునది సత్యంగా ఉండాలి. (అందువలన A అనునది మరణించదు). ఇప్పుడు గణితంలోని కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 15: శూన్యంకాని అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు సహప్రధాన సంఖ్యల గుణలబ్ధం అకరణీయ సంఖ్యలు.

సాధన:

వ్యాఖ్యానం	విశ్లేషణ / విమర్శ
మనం వైరుధ్యం నుండి నిరూపణలతో తెలుసుకుందాం. r ఒక శూన్యం కాని అకరణీయ సంఖ్య మరియు x ఒక కరణీయ సంఖ్య అయివుండనీయండి. $r=\frac{m}{n}$ అగావుండ నీయండి. m, n పూర్ణాంకాలు మరియు $m \neq o, n \neq o$ rx కరణీయగా సాధించాలి.	
rx అకరణీయంగా ఊహిద్దాం.	ఇందులో, మనం సాధించాల్సిన వ్యాఖ్యానం యొక్క ఋణాత్మకను ఊహించాం.
అప్పుడు $rx=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ఇందులో p మరియు q పూర్ణాంకాలు.	ఇది వెనుకటి వ్యాఖ్యానం నుండి మరియు అకరణీయ సంఖ్యల వ్యాఖ్యానం నుండి పొందబడినవి.
సమీకరణం $rx=\frac{p}{q}$ $q \neq 0$ ను తిరిగి అమర్చండి. మరియు $r=\frac{m}{n}$ సత్తాంశాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{nq}$ లభిస్తుంది.	
ఇది వైరుధ్యతనిస్తుంది. ఎందుకనగా, మనం x ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా చూపాం. అయితే, మన ఊహనుండి x కరణీయ సంఖ్య.	మనం వెతుతున్నది ఇదే వైరుధ్యం
rx అకరణీయ అను తప్ప ఊహవలన ఈ వైరుధ్యత ఏర్పడింది అందువలన rx కరణీయ సంఖ్య.	నిగమన తర్కంతో

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు ఉదాహరణ 11 ను, ఈ సారి వైరుధ్యతో నిరూపణ విధానం ఉపయోగించి సాదిద్దాం. నిరూపణ కింది విధంగా ఉంటుంది.

వ్యాఖ్యానాలు	విశ్లేషణ
వ్యాఖ్యానం నిజం కాదని భావిద్దాం	ఇదివరకే చూసినట్లుగా, వైరుధ్యతో నిరూపణలోని వాదనలకు ఇది ప్రారంభ దశ.
అందువలన $p > 3$ అయిన కరణీయ సంఖ్య ఉంది అని భావిద్దాం. అది $6n + 4$ లేదా $6n + s$ రూపం లో లేదు ఇందులో n ఒక పూర్ణసంఖ్య.	ఇది ఫలితంలోని వ్యాఖ్యానం యొక్క రుణాత్మకత.
యూక్లిడ్ భాగహార ఉపసిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి, 6తో భాగించిన తరువాత మరియు p అనునది $6n + 1$ లేదా $6n + s$ రూపంలో లేదు అను సత్యాం శాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు, $p = 6n$ లేదా $6n + 2$ లేదా $6n + 3$ లేదా $6n + 4$ లభిస్తుంది.	ఇదివరకే సాధించిన ఫలితాలను ఉపయోగించ బడినవి.
అందువలన, p అనునది 2 లేదా 3తో భాగించబడుతుంది.	నిగమన తర్కంతో.
అందువలన p అనునది కరణీయం (అవిభాజ్యం) కాదు	నిగమన తర్కంతో.
ఇది వైరుధ్యతను ఏర్పరచింది. మన ఊహనుండి p అనునది కరణీయం. ఇక్కడ వైరుధ్యత ఏర్పడింది. ఎందుకనగా $p > 3$ ఉండునట్లు మరియు $6n + 1$ లేని $6n + 5$ రూపంలోలేని అకరణీయ సంఖ్యగా ఊహించాం. ప్రతి అకరణీయ అందువలన 3 కంటే పెద్దదైన సంఖ్యలే $6n + 1$ లేదా $6n + 5$ రూపంలో ఉంటాయి.	తీర్మానానికి వచ్చాం.

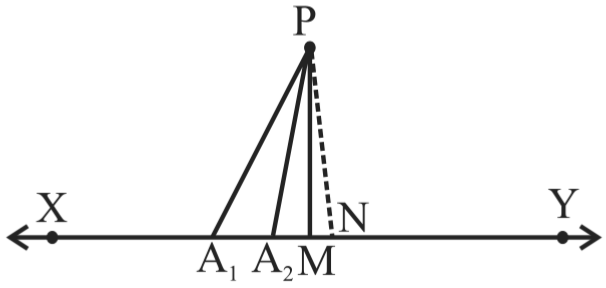
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి:– పై ఉదాహరణం ఒక వ్యాఖ్యానాన్ని సాధించడానికి చాలా విధానాలుండుటను చూపుతుంది.

సిద్ధాంతం A1.2

ఒక బిందువునుండి సరళరేఖ మీదగల బిందువులకు గీచిన రేఖాఖండాలలో చాలా చిన్నదిగావుండి, రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.

సాధన:–



చిత్రం **A1.5**

వ్యాఖ్యానాలు	విశ్లేషణ
xy రేఖ అనుకోండి. *p* అనునది *xy* మీద లేని బిందువు. మరియు PM, PA_1, PA_2,......... మొదలగునవి. అవి P బిందువునుండి XY రేఖమీదగల బిందువులకు గీచిన రేఖా ఖండాలుగా ఉండనీయండి వాటిలో PM చాలా చిన్నది. (చిత్రం A1.5 చూడండి).	మనం PM, PA_1, PA_2,......... మొదలగునవి. వాటిలో చాలా చిన్నదైన XY రేఖకు లంబంగా ఉన్నదని సాధించాల్సి ఉన్నందున, ఈ రేఖా ఖం డాలను పరిగణించి, ప్రారంభిద్దాం.
PM రేఖా ఖండం XY కు లంబంగా లేకుండా ఉం డాలి.	ఇది మనం సాధించాల్సిన వ్యాఖ్యానం యొక్క రుణాత్మకత.
XY కు లంబంగా వుండునట్లు PN నిర్మించండి. చిత్రం AI.5 లో చూపినట్లుగా.	మన ఫలితాలను సాధించడానికి కొన్ని నిర్మాణాలుకావాలి.
PN ఇది PM, PA_1, PA_2...... మొదలగు అన్ని రేఖా ఖండాల కంటే చాలా చిన్నది. అనగా $PN < PM$	లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాలు వికర్ణం కం టే చిన్నవి మరియు సంఖ్యల లక్షణాలు కలిగియుం టాయి.
ఇది మన ఊహ PM చాలా చిన్నదైన, రేఖాఖండం అనడానికి వైరుధ్యంగా ఉంది.	ఖచ్చితంగా మనం కోరుకున్నది.
అందువలన రేఖా ఖండం PM ఇది XYకు లంబం గా ఉంటుంది.	నిర్ధారణకు వచ్చాం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం A1.6

1. $a + b = c + d$ మరియు $a < c$ గా భావించుకోండి. వైరుధ్యతతో నిరూపణ ఉపయోగించి $b > d$ అని చూపండి.
2. r అకరణీయ సంఖ్య మరియు x కరణీయ సంఖ్య అనుకోండి. వైరుధ్యతతో నిరూపణ ఉపయోగించి $r + x$ కరణీయ సంఖ్యంగా చూపండి.
3. ఏదైనా పూర్ణాంకం a కు, a^2 సరి సంఖ్య అయినచో, a అనునది సరి సంఖ్యగా వైరుధ్యతతో సాధించండి.

   (**సూచన:** a అనునది సరిసంఖ్య కాదని భావించుకోండి. అనగా, అది $2n + 1$ రూపంలో ఉంది. ఇందులో n ఒక పూర్ణాంకంగా కొనసాగించండి).
4. ఏదైనా పూర్ణాంకం a కు, a^2 ఇది 3తో భాగించబడుతుంది. అప్పుడు a అనునది 3తో భాగించబడుతుందని వైరుధ్యతతో సాధించండి.
5. 6^n యొక్క విస్తరణలో 'n' ఏదైనా విలువకు సున్నాకు అంత్యంకాదని వైరుధ్యతో సాధించండి.
6. ఒక సమతలంలోగల ఏదైనా రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదాని కంటే ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించదని వైరుధ్యతతో సాధించండి.

A1.8 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో, ఈ కిందివాటిని నేర్చుకున్నారు.

1. నిరూపణలోని వివిధ అంశాలు మరియు ఇతర 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్న కొన్ని పూరక పరికల్పనలు.
2. వ్యాఖ్యానం యొక్క రుణాత్మకత.
3. వ్యాఖ్యానం యొక్క విలోమం.
4. వైరుధ్యతతో నిరూపణ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

జవాబులు / సూచనలు

వాస్తవ సంఖ్యలు

అభ్యాసము 1.1

1. i) $2^2 \times 5 \times 7$ ii) $2^2 \times 3 \times 13$ iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ v) $17 \times 19 \times 23$

2. i) క. సా. గు = 182; గ. సా. భా = 13

ii) క. సా. గు = 23460; గ. సా. భా = 2

iii) క. సా. గు = 3024; గ. సా. భా = 6

3. i) క. సా. గు = 420; గ. సా. భా = 3

ii) క. సా. గు = 11339; గ. సా. భా = 1

iii) క. సా. గు = 1800; గ. సా. భా = 1

4. 22338 **7.** 36 నిమిషాలు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

బహుపదులు

అభ్యాసము 2.1

1. i) శూన్యతలు లేవు ii) 1 iii) 3 iv) 2 v) 4 vi) 3

అభ్యాసము 2.2

1. i) $-2, 4$ ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

iv) $-2, 0$ v) $-\sqrt{5}, \sqrt{15}$ vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. i) $4x^2 - x - 4$ ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ iii) $x^2 + \sqrt{5}$

iv) $x^2 - x + 1$ v) $4x^2 + x + 1$ vi) $x^2 - 4x + 1$

రెండు చలరాశులుగల సరళ సమీకరణాల.

అభ్యాసము 3.1

1. i) అపేక్షిత సరళ సమీకరణాల జత,

$x + y = 10$, $x - y = 4$ ఇక్కడ x అంటే బాలికల సంఖ్య, y అంటే బాలుర సంఖ్య. గ్రాఫ్ క్రమంలో సాధించడానికి, ఈ సమీకరణాల గ్రాఫ్‌లను గ్రాఫ్ కాగితపు ఒకే అక్షాల మీద రచించాలి.

బాలికలు = 7, బాలురు = 3

ii) అపేక్షిత సరళ సమీకరణాల జత,

$5x + 7y = 50$, $7x + 5y = 46$, ఇక్కడ x మరియు y లు క్రమంగా ఒక పెన్సిల్ మరియు ఒక పెన్ను వెలలు (₹ లలో) గ్రాఫ్ మూలంగా సాధించడానికి, గ్రాఫ్ కాగితపు ఒకే అక్షాలలో ఈ సమీకరణాల గ్రాఫ్‌లను రచించాలి.

ఒక పెన్సిల్ వెల = ₹ 3, ఒక పెన్ను వెల = ₹ 5.

2. i) ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి ii) ఏకీ భవిస్తాయి iii) సమాంతరంగా ఉంటాయి.

3. i) సంగత (స్థిర) ii) అసంగత (అస్థిర) iii) సంగత iv) సంగత v) సంగత

4. i) సంగత (స్థిర) ii) అసంగత (అస్థిర) iii) సంగత iv) అసంగత

పైన (i) యొక్క సాధన $y = 5 - x$, ఇక్కడ x కు ఏ విలువ నైనా ఇవ్వవచ్చు. అంటే అపరిమిత సాధనలు ఉన్నాయి.

పైన (iii) యొక్క సాధన $x = 2$, $y = 2$ అంటే అనన్య సాధన.

5. పొడవు = 20m మరియు వెడల్పు = 16m

6. మూడు భాగాలకు సాధ్యమగు ఒక సాధన.

i) $3x + 2y - 7 = 0$ ii) $2x + 3y - 12 = 0$ iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. త్రిభుజ శీర్షాలు $(-1,0)$, $(4, 0)$ మరియు $(2, 3)$ అవుతాయి.

అభ్యాసము 3.2

1. i) $x = 9, y = 5$ ii) $S = 9, t = 6$ iii) $y = 3, x - 3$

ఇక్కడ x కు ఏ విలువనైనా ఇవ్వవచ్చు. అంటే అపరిమిత సాధనలు ఉన్నాయి.

iv) $x = 2, y = 3$ v) $x = 0, y = 0,$ vi) $x = 2, y = 3$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. $x = -2, y = 5; m = -1,$

3. i) $x - y = 26, x = 3y$, ఇక్కడ x మరియు y లు రెండు సంఖ్యలు $(x > y)$; $x = 39, y = 13$

ii) $x - y = 18, x + y = 180$, ఇక్కడ x మరియు y లు డిగ్రీలలో రెండు కోణాల కొలతలు $x = 99$, $y = 81$,

iii) $7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750$, ఇక్కడ x మరియు y లు క్రమంగా ఒక బ్యాట్ మరియు ఒక బంతి వెలలు (₹ లలో); $x = 500, y = 50$.

iv) $x + 10y = 105, x + 15y = 155$, ఇక్కడ, x అనునది స్థిరమైన వెల (₹ లలో) మరియు y ఇవ్వవలసిన మొత్తం (ప్రతి కి.మీ.కు ₹ లలో), $x = 5, y = 10$, ₹ 255.

v) $11x - 9y + 4 = 0, 6x - 5y + 3 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y లు భిన్నంలో లవము మరియు హారాలు; $\frac{7}{9}(x = 7, y = 9)$

vi) $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y లు జేకబ్ మరియు అతని కుమారుని వయస్సులు (సంవత్సరాలలో), $x = 40, y = 10$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము 3.3

1. i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$ ii) $x = 2, y = 1$

iii) $x = \frac{9}{13}, y = \frac{-5}{13}$ iv) $x = 2, y = -3$

2. i) $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0$, ఇక్కడ x మరియు yలు భిన్నంలోని లవము మరియు హారాలు; $\frac{3}{5}$

ii) $x - 3y + 10 = 0, x - 2y - 10 = 0$, ఇక్కడ x మరియు yలు క్రమంగా నూరీ మరియు సోను వయస్సులు (సం.లలో) నూరీ వయస్సు $(x) = 50$ సోను వయస్సు $(y) = 20$.

iii) $x + y = 9, 8x - y = 0$, ఇక్కడ x మరియు y లు క్రమంగా పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు; 18.

iv) $x + 2y = 40, x + y = 25$, ఇక్కడ x మరియు y లు క్రమంగా ₹ 50 మరియు ₹ 100 నోట్ల సంఖ్యలు $x = 10, y = 15$.

v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, ఇక్కడ x రోజుకి స్థిర విలువ (₹ లలో) మరియు y అదనపు విలువ (₹ లలో) $x = 15$, $y = 3$

వర్గ సమీకరణాలు

అభ్యాసము 4.1

1. i) అవును ii) అవును iii) కాదు iv) అవును

v) అవును vi) కాదు vii) కాదు viii) అవును

2. i) $2x^2 + 3x - 528 = 0$, ఇక్కడ x అనునది స్థలం యొక్క వెడల్పు (mలలో).

ii) $x^2 + x - 306 = 0$, ఇక్కడ x చిన్నపూర్ణాంకం

iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, ఇక్కడ x రోహన్ ప్రస్తుత వయస్సు (సం.లలో)

iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, ఇక్కడ x రైలు వేగం [km/h లలో]

అభ్యాసము 4.2

1. i) $-2, 5$ ii) $2, -$ iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. i) 9, 36 ii) 25, 30

3. ఆ సంఖ్యలు 13 మరియు 14 **4.** ధన పూర్ణాంకాలు 13 మరియు 14

5. 5 cm మరియు 12 cm **6.** వస్తువుల సంఖ్య = 6; వస్తువు ఖరీదు = ₹ 15

అభ్యాసము 4.3

1. i) వాస్తవ మూలాలు లేవు.

ii) వాస్తవములు మరియు సమాన మూలాలు; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

iii) విభిన్న మూలాలు ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ ii) $k = 6$

3. అవును. 40 m, 20 m **4.** కాదు **5.** అవును 20 m, 20 m

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సమాంతర శ్రేఢులు

అభ్యాసము 5.1

1. i) ఔను, 15, 23, 31, ... ఇది ఒక అంక శ్రేఢి. ప్రతి వెనుకటి పదానికి 8 ని కలిపిన తరువాతి పదం లభిస్తుంది.

ii) కాదు, ఘనపరిమాణాలు $v, \frac{3v}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 v$ ....

iii) ఔను, 150, 200, 250 .... ఒక అంకశ్రేఢి.

iv) కాదు, మొత్తాలు $10000\left[1+\frac{8}{100}\right], 10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^2, 10000\left[1+\frac{8}{100}\right]^3$ ....

2. i) 10, 20, 30, 40 ii) −2, −2, −2, −2 iii) 4, 1, −2, −5

iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ v) −1.25, −1.50, −1.75, −2.0

3. i) $a = 3$, d = −2 ii) $a = -5$, d = 4 iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ iv) $a = 0.6$, d = 1.1

4. i) కాదు ii) అవును, $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$ iii) అవును, $d = -2$; −9.2, −11.2, −13.2

iv) అవును, $d = 4$; 6, 10, 14 v) అవును, $d = \sqrt{2}; 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

vi) కాదు vii) అవును, $d = -4$; −16, −20, −24

viii) అవును, $d = 0;\ -\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ -\frac{1}{2}$ ix) కాదు

x) అవును, $d = a$; $5a$, $6a$, $7a$ xi) కాదు

xii) అవును, $d = \sqrt{2};\ \sqrt{50},\ \sqrt{72},\ \sqrt{98}$ xiii) కాదు

xiv) కాదు xv) అవును, $d = 24$; 97, 121, 145

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము 5.2

1. i) $a_n = 28$ ii) $d = 2$ iii) $a = 46$ iv) $n = 10$ v) $a_n = 3.5$

2. i) C ii) B

3. i) $\boxed{14}$ ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 వ పదము **5.** i) 34 ii) 27

6. కాదు **7.** 178 **8.** 64

9. 5 వ పదము **10.** 1 **11.** 65 వ పదము

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22,...

17. చివరి పదం నుండి 20 వ పదం 158

18. −13, −8, −3 **19.** 11 వ సంవత్సరం **20.** 10

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము 5.3

1. i) 245 ii) −180 iii) 5505 iv) $\frac{33}{20}$

2. i) $1046\frac{1}{2}$ ii) 286 iii) −8930

3. i) $n = 16, S_n = 440$ ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ iii) $a = 4, S_{12} = 246$

iv) $d = -1, a_{10} = 8$ v) $a = \frac{-35}{3},\ a_9 = \frac{85}{3}$ vi) $n = 5, a_n = 34$

vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ viii) $n = 7, a = -8$ ix) $d = 6$ x) $a = 4$

4. 12, $S=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$, ఈ సూత్రంలో a = 9, d = 8, S = 636 ను ప్రతిక్షేపించినపుడు మనకు $4n^2 + 5n - 636 = 0$. వర్గ సమీకరణము లభిస్తుంది. దీనిని సూక్ష్మీకరించినపుడు $n=-\frac{53}{4}, 12$, మనకు లభిస్తుంది. ఈ రెండింటిలో 12 సరైనది.

5. $n=16,\ d=\frac{8}{3}$ **6.** n = 38, S = 6973 **7.** మొత్తం = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1.$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. బహుమతుల విలువలు (₹ లలో) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 అడ్డు వరుసలు; పైన అడ్డు వరుసలో 5 చెక్క దిమ్మెలను ఉంచడమైనది. $S=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$ ఈ సూత్రంలోను S = 200, a = 20, d = – 1 ప్రతిక్షేపించినపుడు $41n - n^2 = 400$ లభిస్తుంది. దీనిని సాధించినపుడు n = 16, 25 కావున అడ్డువరుసల సంఖ్య 16 లేదా 25 $a_{25} = a + 24d = -4$ అంటే 25వ అడ్డవరుసలో చెక్క దిమ్మెల సంఖ్య – 4 ఇది అంటే 25వ అడ్డువరుసలో చెక్క దిమ్మెల సంఖ్య – 4 ఇది సాధ్యంకాదు. కావున n = 25 సాధ్యం కాదు. n = 16 అయినపుడు a_{16} = 5, కావున అక్కడ 16 అడ్డువరుసలు ఉండి, చివరి అడ్డువరుసలోని చెక్క దిమ్మెల సంఖ్య 5 అవుతుంది.

20. 370 m.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అభ్యాసము 5.4 (ఐచ్ఛికం)*

1. 32 వ పదము **2.** $S_{16} = 2076$ **3.** 385 cm
4. 35 **5.** 750 m^3

త్రిభుజాలు

అభ్యాసము 6.1

1. i) సరూప ii) సరూప iii) సమబాహు iv) సమానం, అనుపాతంలో

3. కాదు

అభ్యాసము 6.2

1. i) 2 cm ii) 2.4 cm

2. i) కాదు ii) అవును iii) అవును

9. 'O' ద్వారా AD మరియు BC లను E మరియు F లలో ఖండించునట్లు DC కి సమాంతరంగా ఒక సరళరేఖను గీయండి.

అభ్యాసము 6.3

1. i) అవును, AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ii) అవును SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

iii) కాదు

iv) అవును, SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

v) కాదు

vi) అవును, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. $55^0, 55^0, 55^0$

14. AD = DE అగునట్లు 'AD' ని E బిందువు వరకు మరియు PM = MN అగునట్లు PMను N బిందువు వరకు పొడిగించండి.

15. 42 m

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

గణితంలోని నిరూపణలు

అభ్యాసము A1.1

1. i) సందిగ్ధం ii) సరి iii) సరి iv) సందిగ్ధం v) సందిగ్ధం

2. i) సరి ii) సరి iii) తప్పు iv) సరి v) సరి

3. (ii) మాత్రం సరి.

4. i) $a > 0$ మరియు $a^2 > b^2$ అయితే, $a > b$

ii) $xy \geq 0$ మరియు $x^2 = y^2$, అయితే, $x = y$

iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ మరియు $y \neq 0$ అయితే $x = 0$

iv) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము A1.2

1. A చనిపోతాడు **2.** ab అకరణీయ సంఖ్య.

3. $\sqrt{17}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంత్యం కాకుండా పునరావృతమవుతుంది.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100^0, \angle C = 100^0, \angle D = 180^0$

6. PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

7. ఇది మన కల్పనకు సరి. కాదు, ఎందుకంటే $\sqrt{3761} = 61$ ఇది అకరణీయ సంఖ్యకాదు మన కల్పన తప్పు కాబట్టి నిర్ణయం తప్పవుతుంది.

అభ్యాసము A1.3

1. $2n + 1$ మరియు $2n + 3$ అగునట్లు రెండు క్రమానుగత బేసి సంఖ్యలు తీసుకొనండి. ఇక్కడ 'n' ఒక పూర్ణాంకం.

అభ్యాసము A1.4

1. i) మనుషులు చావరు.

ii) l రేఖ p రేఖకు సమాంతరంగా లేదు.

iii) ఈ అధ్యాయంలో చాలా అభ్యాసాలు లేవు.

iv) పూర్ణాంకాలన్నీ అకరణీయసంఖ్యలు కాదు.

v) ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ బేసిసంఖ్యలు కాదు.

vi) కొంతమంది విద్యార్థులు సోమరులు.

vii) పిల్లులు అన్ని నల్లగావున్నాయి.

viii) $\sqrt{x} = -1$ అగునట్లు కనిసం ఒకటి అయిన వాస్తవ సంఖ్య x వున్నది.

ix) 2 ధనపూర్ణాంకము 'a' ను భాగించదు.

x) 'a' మరియు 'b' పూర్ణాంకాలు కూడా ప్రధాన సంఖ్యలు కాదు.

2. i) అవును ii) కాదు iii) కాదు iv) కాదు v) అవును.

అభ్యాసము A1.5

1. i) శరణ్‌కు ఎక్కువ చమట పడితే, అప్పుడు టోక్యోలో ఉష్ణోగ్రత ఎక్కువ అయినది.

ii) శాలిని కడుపులోమండితే, ఆమెకు ఆకలి అయినది.

iii) జస్వంత్ డిగ్రీ పొందాలంటే, ఆమెకు స్కాలర్ షిప్ దొరుకుతుంది.

iv) మొక్కలకు ప్రాణముంటే వాటిలో పూలువుంటాయి.

v) ఒక జంతువుకు తోక వుంటే అది పిల్లి.

2. i) Δ ABC యొక్క పాదము, కోణాలు సమానంగావుంటే అది సమద్విబాహు త్రిభుజం. సరి.

ii) ఒక పూర్ణాంకం యొక్క వర్గము బేసి సంఖ్య అయితే, పూర్ణాంకం కూడా బేసి సంఖ్య. సరి.

iii) $x = 1$ అయితే $x^2 = 1$ సరి

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

iv) AC మరియు BD పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటే, ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది. సరి.

v) $a + (b + c) = (a + b) + c$, అయితే a, b, మరియు c పూర్ణసంఖ్యలు. తప్పు.

vi) $x + y$ సరి సంఖ్య అయితే, x మరియు y లు బేసిసంఖ్యలు. తప్పు.

vii) సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురసం అయితే వాటి శీర్షాలు వృత్తం పైవుంటాయి. సరి.

అభ్యాసము A1.6

1. $b \leq d$ అనునది విరుద్ధం అని భావించండి.

2. అధ్యాయం 8లో ఉదాహరణ 10 చూడండి.

3. 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలోని సిద్ధాంతము 2.1ను చూడండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED